

На правах рукописи



Якшибаева Дина Ахатовна

**МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ В
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЯХ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА**

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Башкирский государственный университет», на кафедре дифференциальных уравнений

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Юмагулов Марат Гаязович**

Официальные оппоненты: **Максимов Владимир Петрович**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Пермский
государственный национальный
исследовательский университет»,
профессор кафедры информационных
систем и математических методов
в экономике

Бобков Владимир Евгеньевич
кандидат физико-математических наук,
ФГБУН Институт математики
с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН,
младший научный сотрудник
отдела вычислительной математики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Защита состоится «30» сентября 2016 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук по адресу: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМВЦ УНЦ РАН: <http://matem.anrb.ru/ru/diss>.

Автореферат разослан «__»_____ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук

С.В. Попенов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В общей теории динамических систем важное место занимают системы, описываемые функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа (ФДУЗТ). Такие уравнения возникают при изучении колебательных процессов в механике, физике, биологии, химии, экономике и других науках. Благодаря работам Р. Беллмана, К.Л. Кука, А.Д. Мышкиса, Л.Э. Эльсгольца, С.Б. Норкина, Дж. Хейла, Я.Куанга, Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной, П.М. Симонова, Б.Балачандрана и многих других математиков, теория ФДУЗТ является хорошо развитой составной частью общей теории функционально-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Одной из наиболее актуальных задач в теории динамических систем является задача исследования поведения системы в окрестностях стационарных и периодических решений. Здесь особо актуальными представляются исследования поведения системы в предположении, что стационарное или периодическое решение является негиперболическим. В этом случае при изменении параметров в системе могут происходить различные бифуркационные явления, возникать новые стационарные, периодические или квазипериодические решения, становится возможным хаотическое поведение системы. Теория локальных бифуркаций детально изучена для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: предложен ряд эффективных методов их исследования, получены достаточные признаки бифуркаций, приближенные формулы, разработаны алгоритмы исследования устойчивости и др.

Задача о локальных бифуркациях для ФДУЗТ изучена существенно меньше, хотя и здесь известно много результатов. Исследованию различных вопросов о локальных бифуркациях для ФДУЗТ посвящены работы Дж. Хейла, Б.Хэссарда, Н.Казаринова, И.Вэна, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесова, В.Б. Колмановского, М.Т. Терехина, Я. Куанга и других авторов. Здесь получен ряд важных результатов, связанных с признаками бифуркаций, построением периодических решений, анализом их устойчивости и др. При этом большая часть полученных результатов обычно направлена на исследование конкретных типов ФДУЗТ, а из бифуркаций обычно ограничиваются рассмотрением бифуркации Андронова-Хопфа. Существенно меньше изучены другие сценарии локальных бифуркаций для ФДУЗТ. Дальнейшее изучение различных сценариев локальных бифуркаций для ФДУЗТ, разработка общих качественных и приближенных методов их исследования представляется важным и актуальным направлением в общей теории динамических систем.

Цель работы. Разработка методов исследования основных сценариев локальных бифуркаций динамических систем, описываемых ФДУЗТ.

Методы исследования. В работе использованы методы качественной теории ФДУЗТ, нелинейного анализа, методы приближенного решения операторных уравнений, методы теории Флоке, метод функционализации параметра исследования бифуркационных задач, метод Ньютона–Канторовича.

Научная новизна определяется проведенными исследованиями, в результате которых разработан новый математический аппарат для анализа бифуркационных явлений в динамических системах, описываемых ФДУЗТ. При этом получены следующие новые научные результаты:

1. разработан и обоснован общий операторный подход исследования локальных бифуркаций в окрестностях стационарных решений систем ФДУЗТ, основанный на методе функционализации параметра;
2. получены новые достаточные признаки бифуркации Андронова-Хопфа, положения равновесия, вынужденных и субгармонических колебаний в системах ФДУЗТ;
3. получены новые приближенные формулы для бифурцирующих решений в задаче о локальных бифуркациях в системах ФДУЗТ;
4. проведен анализ устойчивости бифурцирующих решений для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия систем ФДУЗТ.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Предлагаемые в работе методы могут быть использованы для анализа бифуркационных явлений в динамических системах, описываемых ФДУЗТ. Полученные результаты доведены до расчетных формул.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 75-летию со дня рождения д-ра физ.-мат.наук, профессора Г.И.Быковцева (Самара, 18-21 апреля 2013 г.); международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Стерлитамак, 26-30 июня 2013 г.); международной научной конференции «Нелинейный анализ и спектральные задачи» (г. Уфа, 18-22 июня 2013 г.); международной научной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (г. Уфа, 24-26 сентября 2014 г.); научном семинаре по интегрируемым системам Института математики с ВЦ УНЦ РАН

(руководители: д.ф.-м.н., профессор Жибер А.В., д.ф.-м.н., профессор Хабибуллин И.Т.); научном семинаре кафедр математического анализа и дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета (руководители: д.ф.-м.н., профессор Фазуллин З.Ю., д.ф.-м.н., профессор Юмагулов М.Г.); научном семинаре кафедры прикладной математики и информационных технологий Сибайского института (филиала) Башкирского государственного университета (руководитель - д.ф.-м.н., профессор Байзаев С.Б.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10], при этом статьи [1-3] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК.

Личный вклад соискателя. Постановки основных задач принадлежат научному руководителю. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ [1-6] и [9], опубликованных в соавторстве, соискатель принимал участие в разработке и обосновании предлагаемых методов исследования. Из результатов этих работ в диссертацию автором включены только результаты, полученные им лично.

Объем и структура диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 119 страниц. Список литературы содержит 120 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и основные задачи исследования, приводится обзор литературных источников, кратко излагается содержание работы.

В **первой главе** приводятся известные понятия и сведения из теории ФДУЗТ, рассматривается динамика ФДУЗТ в окрестностях точек равновесия и задача нахождения периодических решений ФДУЗТ. Приводится постановка задачи о бифуркациях в окрестностях стационарных решений ФДУЗТ, зависящих от параметров; описываются необходимые условия локальных бифуркаций и их основные сценарии. Излагаются и обосновываются топологические методы исследования задачи о локальных бифуркациях для операторных уравнений в случае гильбертовых пространств. Глава носит вспомогательный характер. Приведем некоторые необходимые сведения из первой главы.

Широкий класс ФДУЗТ представляют системы уравнений вида

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] f(t, x(t - \tau), \theta), x \in R^n, \theta \in R^k. \quad (1)$$

Здесь θ — параметр, $r \in (0, T)$, $T > 0$. $R(t, \tau, \theta)$ — это $n \times n$ матрица, элементы которой определены при $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \tau \leq r$, являются функциями ограниченной вариации по τ , непрерывно дифференцируемы по θ , являются T -периодическими по t , непрерывны в среднем по t в следующем смысле: для любого t выполняется равенство $\lim_{t' \rightarrow t} \int_0^r \|R(t', \tau, \theta) - R(t, \tau, \theta)\| d\tau = 0$. Вектор-функция $f(t, x, \theta)$ определена при всех $x \in R^n$, $t \in R$ и $\theta \in \Omega(\theta_0, \delta_0)$ — шар радиуса $\delta_0 > 0$ с центром в точке $\theta_0 \in R^k$; непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x и θ ; является T -периодической по t . Предполагается, что $f(t, 0, \theta) \equiv 0$, то есть уравнение (1) при всех θ имеет решение $x = 0$. Предполагается также, что каждое начальное условие $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - r \leq t \leq t_0$, однозначно задает решение $x(t)$ уравнения (1), определенное при всех $t \geq t_0$. Интегралы в (1) понимаются в смысле Лебега–Стилтьеса.

К уравнениям вида (1) могут быть сведены многие представляющие интерес ФДУЗТ. В частности, если правая часть уравнения (1) не зависит от t , получим автономное уравнение

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] f(x(t - \tau), \theta), x \in R^n, \theta \in R^k. \quad (2)$$

Основными объектами исследования в первой главе являются неавтономная и автономная системы вида (1) и (2). Для этих систем в § 1.2 вводится понятие гиперболической и негиперболической точки равновесия, рассматривается периодическая задача; в § 1.3 рассматриваются основные сценарии локальных бифуркаций, вводится понятие точки бифуркации для каждого изучаемого сценария бифуркации. В § 1.4 приводится и обосновывается операторная схема приближенного исследования задачи о точках бифуркации систем ФДУЗТ.

Задача о точках бифуркации систем ФДУЗТ в случае автономных и неавтономных систем вида (1) и (2) различными способами может быть сведена к эквивалентной задаче о бифуркациях в окрестности нулевого решения операторного уравнения

$$u = B(\theta)u + b(u, \theta), \quad u \in H, \quad \theta \in R^m. \quad (3)$$

Здесь H — гильбертово пространство, $B(\theta) : H \rightarrow H$ линейный вполне непрерывный оператор, гладко зависящий от векторного параметра θ , а $b(u, \theta) : H \rightarrow H$ — нелинейный компактный оператор, также гладко зависящий от θ и представимый в виде $b(u, \theta) = b_2(u, \theta) + b_3(u, \theta) + \tilde{b}_4(u, \theta)$. Операторы $b_2(u, \theta)$, $b_3(u, \theta)$ содержат квадратичные и кубические по u слагаемые соответственно, а $\tilde{b}_4(u, \theta)$ является гладкой по u , при этом $\tilde{b}_4(u, \theta) = O(\|u\|^4)$, $u \rightarrow 0$, равномерно по θ . Уравнение (3) при всех значениях θ имеет решение $u = 0$.

Значение θ_0 параметра θ называют *точкой бифуркации* уравнения (3), если существуют число $\delta_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)$ непрерывно дифференцируемые функции $\theta = \theta(\varepsilon)$ и $u = u(\varepsilon)$ такие, что $\theta(0) = \theta_0$, $u(0) = 0$; $u(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon \neq 0$, при этом для каждого $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)$ вектор $u(\varepsilon)$ является решением уравнения (3) при $\theta = \theta(\varepsilon)$. Функции $u(\varepsilon)$ и $\theta(\varepsilon)$ называют *бифурцирующими решениями* уравнения (3).

Необходимое условие бифуркации содержится в следующем утверждении.

Лемма 1. Пусть θ_0 — точка бифуркации уравнения (3). Тогда оператор $B(\theta_0) : H \rightarrow H$ имеет собственное значение 1.

В работе рассматривается задача о точках бифуркации в двух основных случаях, когда оператор $B(\theta_0)$ имеет либо простое собственное значение 1, либо полупростое собственное значение 1 кратности 2.

В первом случае, параметр θ будет считаться скалярным. Сопряженный оператор $B^*(\theta) : H \rightarrow H$ при $\theta = \theta_0$ также имеет простое собственное значение 1. Обозначим через e и e^* собственные векторы, соответствующие указанному собственному значению операторов $B(\theta_0)$ и $B^*(\theta_0)$ соответственно.

Во втором случае, параметр θ естественно считать двумерным. Пусть $\theta = (\alpha, \beta)$, где α и β — скалярные параметры. Сопряженный оператор $B^*(\alpha, \beta) : H \rightarrow H$ при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Обозначим через e, g и e^*, g^* собственные векторы, соответствующие указанному собственному значению операторов $B(\alpha_0, \beta_0)$ и $B^*(\alpha_0, \beta_0)$ соответственно.

Достаточные условия бифуркации в указанных двух основных случаях содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. Пусть оператор $B(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1 и пусть $(B'(\theta_0)e, e^*) \neq 0$. Тогда θ_0 является точкой бифуркации уравнения (3).

Здесь B' — оператор, полученный дифференцированием оператора $B(\theta)$ по параметру θ .

Теорема 2. Пусть оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Пусть

$$\det \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда пара чисел (α_0, β_0) является точкой бифуркации уравнения (3).

Здесь B'_α и B'_β — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\alpha, \beta)$ по α и β соответственно.

Во **второй главе** изучаются основные сценарии бифуркаций для автономных ФДУЗТ, предложены новые достаточные признаки бифуркаций и асимптотические формулы для возникающих бифурцирующих решений, проведен анализ устойчивости бифурцирующих решений.

Основным объектом исследования во второй главе является нелинейная система автономных ФДУЗТ вида (2):

$$\begin{aligned} x'(t) = & \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] x(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta)] \Phi(x(t - \tau), \theta) + \\ & + \Psi(x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), \theta), \end{aligned} \quad (4)$$

где θ — скалярный параметр, $\tau_j \in [0, r], j = \overline{1, m}$. Вектор-функции $\Phi(x, \theta)$, $\Psi(x, \theta)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и равномерно по θ удовлетворяют условиям $\|\Phi(x, \theta)\| = O(\|x\|^2), \|x\| \rightarrow 0$, $\|\Psi(x, \theta)\| = O(\|x\|^2), \|x\| \rightarrow 0$. Система (4) имеет решение $x = 0$.

Рассмотрим характеристический квазиполином:

$$L(p, \theta) = \det \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] e^{-p\tau} - pI \right). \quad (5)$$

Точка равновесия $x = 0$ системы (4) является негиперболической при $\theta = \theta_0$, если квазимногочлен (5) при $\theta = \theta_0$ имеет хотя бы один чисто мнимый корень. Сценарии локальных бифуркаций в окрестности негиперболической точки равновесия системы (4) определяются положениями и кратностью чисто мнимых корней квазиполинома $L(p, \theta_0)$ на мнимой оси комплексной плоскости.

В работе рассматриваются два основных случая негиперболичности:

U1 характеристический квазиполином $L(p, \theta_0)$ имеет простой корень $p = 0$ и не имеет других чисто мнимых корней,

U2 характеристический квазиполином $L(p, \theta_0)$ имеет пару простых чисто мнимых корней $p = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых корней.

В случае **U1** основным сценарием бифуркации является возникновение у системы (4) в окрестности решения $x = 0$, при θ близких к θ_0 , новых состояний равновесия. Данная бифуркация соответствует следующему понятию.

Число θ_0 называют *точкой бифуркации положения равновесия* системы (4), если существует непрерывная функция $\theta = \theta(\varepsilon)$, определенная при малых $|\varepsilon|$, такая что $\theta(0) = \theta_0$, при этом система (4) для каждого $\theta = \theta(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon) \neq \theta_0$ имеет ненулевую точку равновесия $x^*(\varepsilon)$, причем $x^*(\varepsilon)$ — непрерывная функция и $x^*(0) = 0$.

В случае **U2** основным сценарием бифуркации является возникновение у системы (4) в окрестности решения $x = 0$, при θ близких к θ_0 , нестационарных периодических колебаний малой амплитуды. Данная бифуркация соответствует следующему понятию.

Пару чисел (θ_0, ω_0) называют *точкой бифуркации Андронова–Хопфа* системы (4), если существуют непрерывные функции $\theta(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$, определенные при малых $|\varepsilon|$ такие, что $\theta(0) = \theta_0$, $T(0) = \frac{2\pi}{\omega_0}$, при этом система (4) для каждого $\theta = \theta(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon) \neq \theta_0$ имеет нестационарное $T(\varepsilon)$ -периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$, причем $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , $\max_t \|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В § 2.2 приведены достаточные признаки бифуркации положения равновесия и бифуркации Андронова–Хопфа.

Для исследования бифуркации положения равновесия предложено следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнено условие **U1** и $L'_\theta(p, \theta)|_{p=0, \theta=\theta_0} \neq 0$. Тогда θ_0 является точкой бифуркации положения равновесия системы (4).

Также в этом параграфе бифуркация положения равновесия изучается на основе операторного подхода. С этой целью рассматривается операторное уравнение вида (3):

$$x = B(\theta)x + b(\theta, x), \quad x \in R^n, \quad (6)$$

решения которого определяют точки равновесия системы (4). Здесь

$$B(\theta) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] + I. \quad (7)$$

В силу условия **U1** оператор (7) при $\theta = \theta_0$ имеет простое собственное значение 1. Положим e и e^* — собственные векторы, соответствующие простому

собственному значению 1 оператора $B(\theta_0)$ и сопряженного оператора $B^*(\theta_0)$ соответственно.

Для уравнения (6) и оператора (7) получен аналог теоремы 3, определяющий точки бифуркации положения равновесия.

Теорема 4. Пусть выполнено условие $U1$ и $(B'(\theta_0)e, e^*) \neq 0$. Тогда θ_0 является точкой бифуркации положения равновесия уравнения (4).

Для исследования бифуркации Андронова–Хопфа предложено следующее утверждение

Теорема 5. Пусть выполнено условие $U2$ и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) & -\operatorname{Im}(L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) \\ \operatorname{Im}(L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) & \operatorname{Re}(L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда пара чисел (θ_0, ω_0) является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (4).

Также в этом параграфе бифуркация Андронова–Хопфа изучается на основе операторного подхода. С этой целью в работе рассматривается операторное уравнение вида (3):

$$u(t) = B(T, \theta)u(t) + b(T, \theta, u(t)), \quad u(t) \in L_2[0, 1], \quad (8)$$

решения которого определяют периодические решения уравнения (4). Здесь

$$\begin{aligned} B(T, \theta)u(t) = & \int_0^1 u(s)ds + T \int_0^1 s \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s)ds + \\ & + T \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s)ds, \end{aligned} \quad (9)$$

где $E(m)u(s) = \begin{cases} u(s - m + 1), & 0 \leq s < m, \\ u(s - m), & m \leq s \leq 1 \end{cases}$. Оператор $B(T, \theta) : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ является вполне непрерывным. В силу условия $U2$ оператор $B(T, \theta)$, при $T = T_0$ и $\theta = \theta_0$, имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Сопряженный оператор $B^*(T, \theta) : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, при $T = T_0$, $\theta = \theta_0$, также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Положим, $e(t)$, $g(t)$ и $e^*(t)$, $g^*(t)$ — собственные функции соответствующие указанному собственному значению операторов $B(T_0, \theta_0)$ и $B^*(T_0, \theta_0)$ соответственно.

Для уравнения (8) и оператора (9) получен аналог теоремы 5, определяющий точки бифуркации Андронова–Хопфа.

Теорема 6. Пусть выполнено условие U2 и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t))dt & \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t))dt \\ \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t))dt & \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t))dt \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда пара чисел (θ_0, T_0) является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (4).

В §2.3 рассматривается задача о приближенном построении бифурцирующих решений в условиях теорем 3, 4, 5 и 6.

Теорема 7. Существующие в условиях теоремы 3 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ системы (4) и соответствующие значения параметра $\theta(\varepsilon)$ представимы в виде:

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad \theta(\varepsilon) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + o(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Для значений e_1, e_2 и θ_1, θ_2 в диссертации получены расчетные формулы.

Теорема 8. Существующие в условиях теоремы 5 бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ системы (4) и соответствующие значения параметров $T(\varepsilon), \theta(\varepsilon)$ представимы в виде

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon e \left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \right) + \varepsilon^2 e_1 \left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \right) + \varepsilon^3 e_2 \left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \right) + o(\varepsilon^3), \quad (11)$$

$$T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon^2 T_2 + O(\varepsilon^4), \quad \theta(\varepsilon) = \theta_0 + \varepsilon^2 \theta_2 + O(\varepsilon^4).$$

Для функций $e_1 \left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \right), e_2 \left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \right)$, чисел T_2, θ_2 в диссертации также получены расчетные формулы.

В § 2.4 изучается задача об устойчивости бифурцирующих решений (10) и (11) системы (4). Ограничимся приведением следующих утверждений.

Пусть характеристический квазиполином (5) имеет простой корень $p = 0$ при $\theta = \theta_0$, а остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. Тогда при малых $|\varepsilon|$ квазиполином (5) при $\theta = \theta(\varepsilon)$ имеет в точности один простой корень $p_0(\varepsilon)$, близкий к нулю так, что $p_0(0) = 0$, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Поэтому характер устойчивости решений (10) определяется корнем $p_0(\varepsilon)$.

Теорема 9. Пусть $p'_0(0) \neq 0$. Тогда бифурцирующие решения (10) системы (4) асимптотически устойчивы при тех малых $|\varepsilon|$, при которых $p_0(\varepsilon) > 0$; неустойчивы при тех малых $|\varepsilon|$, при которых $p_0(\varepsilon) < 0$.

Пусть характеристический квазиполином (5) имеет пару простых корней $p = \pm i\omega_0$, при $\theta = \theta_0$, а остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. Тогда при малых $|\varepsilon|$ квазиполином (5) при $\theta = \theta(\varepsilon)$ имеет в точности один простой корень $p_0(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, близкий к $\pm i\omega_0$ так, что $p_0(0) = \pm i\omega_0$, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. При этом $\gamma(\varepsilon) = \gamma_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$, $\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \omega_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$. Поэтому характер устойчивости решений (11) определяется корнем $p_0(\varepsilon)$ квазиполинома (5).

Теорема 10. Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Тогда, если $\gamma_1 > 0$, то бифурцирующие решения (11) системы (4) асимптотически орбитально устойчивы при всех малых $|\varepsilon|$. Если же $\gamma_1 < 0$, тогда решения (11) будут неустойчивы при всех малых $|\varepsilon|$.

В третьей главе основным объектом исследования является система нелинейных ФДУЗТ вида (1):

$$\begin{aligned} x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] x(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(t, \tau, \theta)] \Phi(t, x(t - \tau), \theta) + \\ + \Psi(t, x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), \theta), \end{aligned} \quad (12)$$

где θ — векторный параметр, $\tau_j \in [0, r]$, $j = \overline{1, m}$. Вектор-функции $\Phi(t, x, \theta)$, $\Psi(t, x, \theta)$ являются T -периодическими по t , непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и равномерно по θ и t удовлетворяют условиям $\|\Phi(t, x, \theta)\| = O(\|x\|^2)$, $\|x\| \rightarrow 0$, $\|\Psi(t, x, \theta)\| = O(\|x\|^2)$, $\|x\| \rightarrow 0$. Система (12) имеет тривиальное решение $x = 0$.

Наряду с (12) рассмотрим линейную систему

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] x(t - \tau). \quad (13)$$

Точка равновесия $x = 0$ системы (12) является негиперболической, при $\theta = \theta_0$, если система (13) при $\theta = \theta_0$ имеет хотя бы один чисто мнимый характеристический показатель. Сценарии локальных бифуркаций в окрестности негиперболической точки равновесия системы (12) определяются положениями и кратностью чисто мнимых характеристических показателей системы (13), при $\theta = \theta_0$, на комплексной плоскости.

В работе рассматриваются два основных случая негиперболичности:

U3 система (13) при $\theta = \theta_0$ имеет простой характеристический показатель $p = 0$ и не имеет других чисто мнимых характеристических показателей,

U4 система (13), при $\theta = \theta_0$, имеет пару простых чисто мнимых показателей $p = \pm i \frac{2\pi}{T} \frac{d}{q}$, где $\frac{d}{q} \in (0, \frac{1}{2}]$, $\frac{d}{q}$ — рациональная несократимая дробь и не имеет других чисто мнимых характеристических показателей.

В случае **U3** основным сценарием бифуркации является возникновение у системы (12) в окрестности точки равновесия $x = 0$ при θ близких к θ_0 ненулевых T -периодических колебаний малой амплитуды. Данная бифуркация соответствует следующему понятию.

Число θ_0 называется *точкой бифуркации вынужденных колебаний* системы (12), если существует непрерывная функция $\theta = \theta(\varepsilon)$, определенная в некотором интервале $-\delta_0 < \varepsilon < \delta_0$, и такая, что $\theta(0) = \theta_0$, при этом система (12) для каждого $\theta = \theta(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon) \neq \theta_0$ имеет ненулевое T -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , $\max_t \|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В случае **U4** естественным будет предположение, что параметр θ является двумерным, то есть $\theta = (\alpha, \beta)$, где α и β — скалярные параметры. В этом случае, основным сценарием бифуркации является возникновение в окрестности точки равновесия $x = 0$, при переходе параметров α и β через значения α_0 и β_0 соответственно, периодических решений периодов qT . Данная бифуркация соответствует следующему понятию.

Пару чисел (α_0, β_0) называют *точкой бифуркацией субгармонических колебаний* периода qT системы (12), если существуют непрерывные функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$, определенные в некотором интервале $-\delta_0 < \varepsilon < \delta_0$, и такие, что $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$, при этом система (12) для каждого $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon) \neq \alpha_0$, $\beta(\varepsilon) \neq \beta_0$ имеет ненулевое qT -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , $\max_t \|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $q = 2$ указанная бифуркация называется *бифуркацией удвоения периода*.

В § 3.2 приведены достаточные признаки бифуркации вынужденных колебаний и бифуркации субгармонических колебаний.

Ограничимся приведением исследования локальных бифуркаций основанного на операторном подходе.

С целью исследования бифуркации вынужденных колебаний рассмотрим операторное уравнение вида (3):

$$x(t) = B(\theta)x(t) + b(x(t), \theta), \quad x(t) \in L_2[0, T], \quad (14)$$

решения которого определяют T -периодические решения системы (12). Здесь

$$B(\theta)x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta)] E(\tau)x(s) \right) ds + \\ + \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta)] E(\tau)x(s) ds, \quad (15)$$

где $E(\tau)x(t) = \begin{cases} x(t - \tau + T), & \text{если } 0 \leq t < \tau, \\ x(t - \tau), & \text{если } \tau \leq t \leq T. \end{cases}$. Оператор $B(\theta) : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$ является вполне непрерывным. В силу условия **U3**, оператор $B(\theta)$ при $\theta = \theta_0$, имеет простое собственное значение 1. Сопряженный оператор $B^*(\theta) : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$, при $\theta = \theta_0$, также имеет простое собственное значение 1. Положим, $e(t)$ и $e^*(t)$ — собственные функции соответствующие указанному собственному значению операторов $B(\theta_0)$ и $B^*(\theta_0)$ соответственно.

Теорема 11. Пусть выполнено условие $U3$ и $\int_0^T (B'_\theta(\theta_0)e(t), e^*(t)) dt \neq 0$. Тогда значение θ_0 параметра θ является точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (12).

С целью исследования бифуркации субгармонических колебаний рассмотрим уравнение вида (3):

$$x(t) = B(\alpha, \beta)x(t) + b(x(t), \alpha, \beta), \quad x(t) \in L_2[0, qT], \quad (16)$$

решения которого определяют qT -периодические решения системы (12). Здесь

$$B(\alpha, \beta)x(t) = \frac{1}{qT} \int_0^{qT} \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha, \beta)] E(\tau)x(s) \right) ds + \\ + \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha, \beta)] E(\tau)x(s) ds, \quad (17)$$

где $E(\tau)x(t) = \begin{cases} x(t - \tau + qT), & \text{если } 0 \leq t < \tau, \\ x(t - \tau), & \text{если } \tau \leq t \leq qT. \end{cases}$. Оператор $B(\alpha, \beta) : L_2[0, qT] \rightarrow L_2[0, qT]$ является вполне непрерывным. В силу условия **U4**, оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Сопряженный оператор $B^*(\alpha, \beta) : L_2[0, qT] \rightarrow L_2[0, qT]$, при $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Положим, $e(t)$, $g(t)$ и $e^*(t)$, $g^*(t)$ — собственные функции соответствующие указанному собственному значению операторов $B(\alpha_0, \beta_0)$ и $B^*(\alpha_0, \beta_0)$ соответственно.

Теорема 12. Пусть выполнено условие $U4$ и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \int_0^{qT} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e(t), e^*(t)) dt & \int_0^{qT} (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e(t), e^*(t)) dt \\ \int_0^{qT} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e(t), g^*(t)) dt & \int_0^{qT} (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e(t), g^*(t)) dt \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда пара (α_0, β_0) является точкой бифуркации субгармонических колебаний системы (12).

В § 3.3 рассматривается задача о приближенном построении бифурцирующих решений в условиях теорем 11 и 12.

Теорема 13. Существующие в условиях теоремы 11 бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ системы (12) и соответствующие значения параметра $\theta(\varepsilon)$ представимы в виде:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon e(t) + \varepsilon^2 e_1(t) + \varepsilon^3 e_2(t) + o(\varepsilon^3), \quad \theta(\varepsilon) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + o(\varepsilon^2). \quad (18)$$

Для функций $e_1(t)$, $e_2(t)$ и чисел θ_1 , θ_2 в диссертации получены расчетные формулы.

Теорема 14. Существующие в условиях теоремы 12 бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ системы (12) и соответствующие значения параметров $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ представимы в виде

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon e(t) + \varepsilon^2 e_1(t) + \varepsilon^3 e_2(t) + o(\varepsilon^3), \quad (19)$$

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + o(\varepsilon^2), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + o(\varepsilon^2).$$

Для функций $e_1(t)$, $e_2(t)$, чисел α_1 , α_2 , β_1 , β_2 в диссертации получены расчетные формулы.

В § 3.4 изучается задача об устойчивости бифурцирующих решений (18) и (19) системы (12).

Теорема 15. Пусть система (13) при значении параметра $\theta = \theta_0$ имеет хотя бы один характеристический показатель p удовлетворяющий неравенству $|e^{pT}| > 1$. Тогда при всех малых $|\varepsilon|$ бифурцирующие решения (18) $x(t, \varepsilon)$ системы (12) неустойчивы.

Пусть все характеристические показатели системы (13), при $\theta = \theta_0$, удовлетворяют условию $|e^{pT}| < 1$, за исключением показателя $p = 0$. Тогда при малых $|\varepsilon|$ система (13), при $\theta = \theta(\varepsilon)$, имеет в точности один простой характеристический показатель $p_0(\varepsilon)$ близкий к нулю так, что $p_0(0) = 0$, а остальные ее характеристические показатели p_{k0} удовлетворяют условию $|e^{p_{k0}T}| < 1$. Поэтому характер устойчивости решений $x(t, \varepsilon)$ определяется характеристическим показателем $p_0(\varepsilon)$ линейной системы (13) определенной при $\theta = \theta(\varepsilon)$.

Теорема 16. Пусть $p'_0(0) \neq 0$. Тогда бифурцирующие решения (18) $x(t, \varepsilon)$ системы (12) устойчивы при тех малых $|\varepsilon|$, при которых $|e^{p_0(\varepsilon)T}| > 1$; неустойчивы при тех малых $|\varepsilon|$, при которых $|e^{p_0(\varepsilon)T}| < 1$.

Аналогичные утверждения получены и для бифурцирующих решений (19).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М.Г.Юмагулову за неоценимую помощь в работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях из списка ВАК

1. Юмагулов М.Г., Якшибаева Д.А. Признаки субгармонической бифуркации для функционально - дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2013. — Т.18. №5-2. — С.2754-2756.
2. Юмагулов М.Г., Якшибаева Д.А. Операторный метод исследования малых автоколебаний в системах с последействием // Вестник Самарского государственного университета. — 2013. — №9-2(110). — С.37-44.
3. Юмагулов М.Г., Якшибаева Д.А. Исследование основных сценариев локальных бифуркаций в системах функционально - дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т.6, №2. — С.104-112.

В других изданиях

4. Юмагулов М.Г., Якшибаева Д.А. Операторный метод исследования малых колебаний в системах с последействием // Вестник МаГУ. Математика. — Магнитогорск: МаГУ. — 2012. — Вып. 14. — С.172-176.

5. Юмагулов М.Г., Якшибаева Д.А. Операторный метод исследования малых автоколебаний системы функционально - дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции: В 2 т. (26-30 июня 2013 г., г. Стерлитамак) / Отв. ред. К.Б.Сабитов - Уфа: РИЦ БашГУ. — 2013. — Т.2. — С.304-306.
6. Юмагулов М.Г., Якшибаева Д.А. Операторный метод исследования малых автоколебаний в системах с последействием // Актуальные проблемы математики и механики: материалы и доклады Всерос. науч. конф., посвященной 75-летию со дня рождения д-ра физ.-мат.наук, профессора Г.И.Быковцева (Самара, 18-21 апреля 2013 г.) / под общ. ред. В.И. Астафьева. - Самара: Издательство <Самарский университет>. — 2013. — С.105-108.
7. Якшибаева Д.А. Признаки субгармонической бифуркации для систем с последействием // Международная научная конференция <Нелинейный анализ и спектральные задачи>: Тезисы докладов. — Уфа: Изд-во БашГУ. — 2013. — С.136-139.
8. Якшибаева Д.А. Признаки бифуркаций Андронова-Хопфа для уравнения с последействием // <Прикладная математика и информационные технологии в науке и образовании>: Материалы Всероссийской заочной научно-практической конференции с международным участием (г.Сибай, 16 - 17 мая 2013г) — Уфа: РИЦ БашГУ. — 2013. — С. 129-132.
9. Юмагулов М.Г., Якшибаева Д.А. Спектральные свойства интегральных операторов периодической задачи для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: материалы международной научной конференции. — Уфа: РИЦ БашГУ. — 2014. — С. 102-104.
10. Якшибаева Д.А. Запаздывание в аргументе дифференциального уравнения с последействием как бифуркационный параметр // Закономерности и тенденции развития науки в современном обществе: материалы и доклады международной научно-практической конференции.— Уфа: Аэтерна. — 2015. — С. 11-14.