

На правах рукописи



Сулейменов Кенесары Машимович

**О ВЛОЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ
ПЕРЕМЕННОГО ПРИРАЩЕНИЯ И СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ**

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Астана - 2017

Работа выполнена в Евразийском национальном университете
им. Л.Н. Гумилева

Официальные оппоненты: Рамазанов Марат Давидович
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
отдела вычислительной математики ФГБУН
«Институт математики с вычислительным
центром» УНЦ РАН (Уфа)

Волосивец Сергей Сергеевич, кандидат
физико-математических наук, доцент кафедры
теории функций и стохастического анализа
Саратовского государственного университета
им. Н.Г. Чернышевского

Ведущая организация Воронежский государственный университет –
394006, Россия, г. Воронеж, Университетская
площадь, д. 1, корпус 1, тел.: +7(473) 220-82-66
<http://www.vsu.ru>, <http://www.amm.vsu.ru>

Защита состоится на заседании диссертационного совета

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке г. Уфа, ул. Чернышевского,
112, ИМ УНЦ РАН, а также www.matem.anrb.ru

Автореферат разослан _____
(дата)

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук

С. В. Попёнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Один из основных объектов математики - функции, обычно задаются выделением тех или иных условий на их характеристики. Тем самым, по этим требованиям, функций объединяются в классы, исследования взаимоотношений между которыми и составляет предмет обширного раздела метрической теории функций - теории вложений. Этой теме в новых случаях классов посвящена данная диссертация.

Цель работы. Рассмотрен следующий круг вопросов (все необходимые определения приведены ниже):

1. Нахождение необходимых и достаточных условий вложения классов функций одного переменного, определяемых модулем непрерывности переменного приращения.

2. Нахождение необходимых и достаточных условий вложения анизотропных пространств функций типа Никольского-Бесова, определяемых модулем гладкости в смешанной норме.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми:

- получена оценка сверху невозрастающей неотрицательной функции $f \in L^p(0,1)$ через модуль непрерывности переменного приращения.

- получены необходимые и достаточные условия для вложения $\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega \subset L(\mu, \nu)$ (случай $\mu \neq \nu$).

- получены необходимые и достаточные условия для вложения $\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega \subset L^q$.

- получены необходимые и достаточные условия для вложения $\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega \subset L(\mu, \nu)$ (случай $\mu = \nu$), причем, необходимость условий доказана при определенных условиях.

- получены необходимые и достаточные условия для вложения $B_{p_1, \dots, p_n, \theta}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(R^n) \subset L^{q_1, \dots, q_n}(R^n)$, причем, необходимость условий доказана при определенных условиях.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер, с возможными практическими применениями.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались и обсуждались:

- в г. Астане на научном семинаре «Математика и ее приложения» (под руководством д. ф.-м. н., проф. Н. Темиргалиева, к.ф.-м.н. Ш. Ажгалиев и к.ф.-м.н. Е. Нурмолдина) – 2006 г;
- в г. Астане на научном семинаре «Функциональный анализ и его приложения» (под руководством академика АН РК, проф. М.

Отелбаева, д.ф.-м.н., проф. Е.Д. Нурсултанова, д.ф.-м.н., проф. Р.Ойнарова) – 2006 г;

- в г. Уфа ИМ с вычислительным центром РАН, на научном семинаре по теории функций и комплексному анализу (под руководством чл. корр. РАН Напалкова В.В.) – 2012 г;
- в г. Новосибирск, ИМ им. С.Л. Соболева СОРАН, на научном семинаре «Избранные вопросы математического анализа» (под руководством д.ф.-м.н., проф. Г.В. Демиденко) – 2013 г;
- в г. Москва, МИАН им. В.А. Стеклова, на научном семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (под руководством член-корр. РАН О.В. Бесова) – 2013 г.
- на научном семинаре в Казахском филиале МГУ имени М.В.Ломоносова (руководители д.ф.-м.н., профессор Нурсултанов Е.Д., д.ф.-м.н., профессор Бекмаганбетов К.А.) – 2015 г;
- в г. Уфа ИМ с вычислительным центром РАН, на научном семинаре по теории функций и комплексному анализу (под руководством чл. корр. РАН Напалкова В.В.) – 2016 г;
- в г. Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского, на научном семинаре «Спектральная теория операторов» кафедры математической физики и вычислительной математики (под руководством д.ф.-м.н., проф. Юрко В.А.) – 2017 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырех статьях [1, 2, 5, 9] и в пяти тезисах докладов [3, 4, 6, 7, 8]. Из них [3,4,5,8] - работы К. Сулейменова, а [1], [2], [6] и [7] - совместные работы К. Сулейменова и Н. Темиргалиева. Н. Темиргалиеву принадлежат в них постановка задачи и совместное обсуждение работы, а также теорема 1.1 доказана совместно. Статья [9] - совместная работа К.Сулейменова и Н.Н. Ташатова. Все результаты работы принадлежат автору диссертации за исключением леммы 6, доказанной автором совместно с Н.Н. Ташатовым.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из Введения и двух разделов. Объем диссертации 70 страница. Список использованных источников содержит 65 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведены необходимые определения, сформулированы постановки задач, изложен краткий обзор результатов, относящихся к

рассматриваемым вопросам, а также формулировки основных результатов работы.

Изложение содержания начнем с точных определений и формулировок задач вложения классов функций.

Пусть $L^p(0,1)$ ($1 \leq p < \infty$) - пространство всех измеримых (здесь и всюду ниже в смысле Лебега) на $[0,1]$ функций f , для каждой из которых конечна норма

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть R^n , как обычно, n - мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ с действительными координатами. Всюду ниже пространство $L^\infty(R^n)$ мы будем понимать как пространство измеримых и ограниченных в существенном на R^n функций.

Всюду в тексте принято соглашение: при $\rho = \infty$

$$\left\{ \sum_{t=0}^{\infty} |a_t|^\rho \right\}^{\frac{1}{\rho}} \equiv \sup_t |a_t|; \quad \left\{ \int_0^t |f(u)|^\rho \frac{du}{u} \right\}^{\frac{1}{\rho}} \equiv \sup_{0 < u \leq t} |f(u)|.$$

Пусть дан мультииндекс $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $1 \leq p_j < \infty$ ($j = 1, \dots, n$).

Через $L^{\mathbf{p}}(R^n) \equiv L^{p_1, \dots, p_n}(R^n)$ обозначают множество всех измеримых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, для каждой из которых конечна смешанная норма

$$\|f\|_{\mathbf{p}} = \left\{ \int_{R^1} \left[\dots \left(\int_{R^1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

При $p_1 = \dots = p_n = p$ получаем

$$\|f\|_{\mathbf{p}} \equiv \|f\|_p = \left\{ \int_{R^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

В дальнейшем через $C(\alpha, \beta, \dots) = C_{\alpha, \beta, \dots}$ обозначаются положительные величины, зависящие лишь от входящих параметров $\alpha, \beta, \dots$ и, вообще говоря, разные в различных формулах. Пусть A и B - некоторые числовые функции, причем A неотрицательна. Тогда записи $B = O_{\alpha, \beta, \dots}(A)$, $B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$ будут означать

$|B| \leq C(\alpha, \beta, \dots) A$. При неотрицательных A и B запись $A \asymp_{\alpha, \beta, \dots} B$ означает $A \ll_{\alpha, \beta, \dots} B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$.

Пусть $\omega(\delta)$ - непрерывная на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$0 = \omega(0) \leq \omega(\delta) \leq \omega(\eta) \leq \omega(\delta + \eta) \leq \omega(\delta) + \omega(\eta) \quad (0 \leq \delta \leq \eta \leq \delta + \eta \leq 1).$$

Такие функции называются *модулями непрерывности*.

Пусть $\omega_p(f, \delta)$ модуль непрерывности функции f в пространстве $L^p(0,1)$, т.е.

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (0 < \delta \leq 1). \quad (1)$$

Положим

$$H_p^\omega = \{f \in L^p(0,1) : \omega_p(f, \delta) \leq \omega(\delta), 0 \leq \delta \leq 1\},$$

где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$. Пусть $f \in L^p(0,1)$, тогда функцию

$$\omega_{\alpha,p}(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_{E_{h,\alpha}} |f(x+h x^\alpha) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad 0 < \delta \leq 1, \quad (2)$$

где $E_{h,\alpha} = \{x \in (0,1) : x + h x^\alpha \in (0,1)\}$, называют модулем непрерывности переменного приращения функции f в $L^p(0,1)$.

Заметим, что Z. Ditzian и V. Totik¹ ввели и изучали общий случай $\omega_{\varphi(x),p}(f)$, где $\varphi(x)$ функция непрерывная на $[0,1]$.

Ясно, что, при $\alpha = 0$ имеем $\omega_{0,p}(f, \delta) = \omega_p(f, \delta)$.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности. Через $\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega$, обозначим класс всех невозрастающих неотрицательных функций $f \in L^p(0,1)$ таких, что

$$\omega_{\alpha,p}(f, \delta) \leq \omega(\delta) \quad (0 \leq \delta \leq 1).$$

Отметим, что при $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ для всякой невозрастающей неотрицательной функции $f \in L^p(0,1)$ имеет место неравенство (доказательство в замечании 1 к теореме 1.2)

$$\omega_{\alpha_1,p}(f, \delta) \geq \omega_{\alpha_2,p}(f, \delta) \quad (0 < \delta < 1),$$

стало быть, и вложение

$$\tilde{H}_{\alpha_1,p}^\omega \subset \tilde{H}_{\alpha_2,p}^\omega.$$

Разумеется, весь спектр исследований в области теории вложений переносится и на случай модулей непрерывности переменного приращения, что составляет предмет исследований первого раздела данной работе.

Пусть $0 < \nu, \mu < \infty$. Пространство Лоренца $L(\mu, \nu)$ определяется как множество всех измеримых в смысле Лебега на $[0,1]$ функций f , для каждой из которых конечна величина

$$\|f\|_{\nu,\mu}^\nu = \left\{ \int_0^1 x^{\frac{\nu}{\mu}-1} [f^*(x)]^\nu dx \right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что пространство Лоренца $L(\mu, \nu)$ будет собственным подмножеством $L^p(1 \leq p < \infty)$ только в следующих случаях

а) $\mu > p$, $0 < \nu < \infty$;

¹ Ditzian Z. and Totik. V. Moduli of smoothness. New York: Springer. 1987.

b) $\mu = p, 0 < v < p$.

При данном целом $k \geq 1$ всякую непрерывную неубывающую на $[0,1]$ функцию $\omega_k(\delta)$ такую, что ($C > 0$ - число)

$$\omega_k(0) = 0, \quad \eta^{-k} \omega_k(\eta) \leq C \delta^{-k} \omega_k(\delta) \quad (0 < \delta < \eta \leq 1)$$

называют *функцией типа модуля гладкости k -го порядка*.

Говорят, что функция $\psi(t)$ *почти убывает* на $[0,1]$, если существует число $C \geq 1$ такое, что при всех $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ выполнено неравенство

$$\psi(t_2) \leq C \psi(t_1).$$

Через $\Omega_\beta, \beta > 0$, обозначим класс всех непрерывных строго возрастающих на $[0,1]$ функций $\omega(t)$ таких, что

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(1) = 1, \quad \omega(t) t^{-\beta} \text{ почти убывает.}$$

Вектор - функция $\omega(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_n(t))$ принадлежит (по определению) классу Ω_β , где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, если $\omega_j(t) \in \Omega_{\beta_j}$ при каждом $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), 1 \leq p_j < \infty, \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n), k_j \geq 1$ - целые числа и $f \in L^{\mathbf{p}}(R^n)$. Положим ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$)

$$\omega_{x_j, \mathbf{p}}^{k_j}(t, f) = \sup_{\substack{h \in R^1 \\ |h| \leq t}} \left\| \Delta_{he_j}^{k_j} f \right\|_{\mathbf{p}} \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (3)$$

где e_j - единичный вектор, направленный вдоль оси x_j и

$$\Delta_{he_j}^{k_j} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{k_j} (-1)^{k_j-m} C_{k_j}^m f(x_1, \dots, x_j + mh_j, \dots, x_n).$$

Функция (3) называется *модулем гладкости порядка k_j функции f в направлении оси x_j* .

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), 1 \leq p_j < \infty, 0 < \theta \leq \infty, \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n), k_j \geq 1$ - целые числа, задана вектор - функция $\omega(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_n(t))$ такая, что для каждого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\omega_j(0) = 0, \omega_j(1) = 1, \omega_j(t)$ строго возрастает на $[0,1]$ и пусть $f \in L^{\mathbf{p}}(R^n)$.

Следуя М.Л. Гольдману², определим *анизотропное пространство типа Никольского - Бесова* $B_{\mathbf{p}\theta}^{\omega}(R^n)$ в смешанной норме как пространство всех функций $f \in L^{\mathbf{p}}(R^n)$, для каждой из которых конечна величина

$$\|f\|_{\mathbf{B}} = \|f\|_{\mathbf{p}} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\omega_{x_j, \mathbf{p}}^{k_j}(t, f)}{\omega_j(t)} \right]^\theta \frac{d\omega_j(t)}{\omega_j(t)} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{при } 0 < \theta < \infty, \quad (4)$$

$$\|f\|_{\mathbf{B}} = \|f\|_{\mathbf{p}} + \sum_{j=1}^n \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_{x_j, \mathbf{p}}^{k_j}(t, f)}{\omega_j(t)} \quad \text{при } \theta = \infty.$$

² Гольдман М.Л. Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского - Бесова с модулями непрерывности общего вида // Труды МИАН СССР, 1984, 170, С.86-104.

Отметим, что пространство зависит также от $\mathbf{k}$, хотя это не отражено в обозначении.

Пусть $\omega(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_n(t))$, $\omega_j(0) = 0$, $\omega_j(1) = 1$, $\omega_j(t)$ строго возрастает на $(0,1)$. При каждом $j = 1, 2, \dots, n$ для функции $u = \omega_j(t)$ рассмотрим, обратные функции $\omega_j^{-1}(u)$ и положим

$$t = \Omega^{-1}(u) = \prod_{j=1}^n \omega_j^{-1}(u). \quad (5)$$

Функция $u = \Omega(t)$ - обратная к функции (5) называется *средней функцией* системы $\{\omega_j(t)\}_{j=1}^n$.

Пусть дан вектор $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n): \nu_j \geq 0, j = 1, \dots, n$. Функцию

$$g \equiv g_{\nu}(\mathbf{z}) = g_{\nu_1, \dots, \nu_n}(z_1, \dots, z_n)$$

называют *целой функцией экспоненциального типа ν* , если для нее выполняются следующие свойства:

1) она есть целая функция по всем переменным, т.е. разлагается в абсолютно сходящийся для всех $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ степенной ряд

$$g(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} a_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{\substack{k_j \geq 0 \\ j=1, \dots, n}} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}.$$

2) для всякого $\varepsilon > 0$ существует положительное число A_{ε} такое, что для всех $z_1, \dots, z_n$ выполняется неравенство

$$|g(z_1, \dots, z_n)| \leq A_{\varepsilon} e^{\sum_{j=1}^n (\nu_j + \varepsilon) |z_j|}.$$

Величину

$$E_{\nu_1, \dots, \nu_n}(f)_{\mathbf{p}} = \inf_{g_{\nu_1, \dots, \nu_n}} \|f - g_{\nu_1, \dots, \nu_n}\|_{\mathbf{p}},$$

где нижняя грань распространена на все $g_{\nu_1, \dots, \nu_n} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, называют *полным наилучшим приближением функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями $g_{\nu_1, \dots, \nu_n}$ экспоненциального типа $\nu_1, \dots, \nu_n$ по переменным $x_1, \dots, x_n$* . Функцию $g_{\nu_j, \infty}$ называют *целой функцией экспоненциального типа ν_j по переменной x_j* .

Аналогично, величину

$$E_{\nu_j, \infty}(f)_{\mathbf{p}} = \inf_{g_{\nu_j, \infty}} \|f - g_{\nu_j, \infty}\|_{\mathbf{p}},$$

где нижняя грань распространена на все $g_{\nu_j, \infty} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, называют *частным наилучшим приближением функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями $g_{\nu_j, \infty}$ экспоненциального типа ν_j по переменной x_j* .

Данная работа относится к теории вложения классов функций одного и функциональных пространств многих переменных.

В постановках различных задач привлекаются разные классы функций.

Прежде, чем переходить к формулировкам соответствующих результатов о вложении классов функций, условимся пользоваться следующей терминологией.

Пусть M_1 и M_2 некоторые классы функций. Запись $M_1 \subset M_2$ означает, что множество M_1 есть подмножество в теоретико-множественном смысле множества M_2 , при этом будем говорить « M_1 вложено в M_2 ».

Если M_1 и M_2 некоторые функциональные пространства с нормами $\|\cdot\|_{M_1}$ и $\|\cdot\|_{M_2}$, то запись $M_1 \subset M_2$ означает, что M_1 есть подмножество множества M_2 и для всякой функции $f \in M_1$ выполнено неравенство $\|f\|_{M_2} \leq C\|f\|_{M_1}$, где C – положительная величина, не зависящая от функции f .

В первом разделе речь будет идти о вложении классов, а во втором разделе о вложении функциональных пространств.

Теория вложения функциональных пространств дифференцируемых функций возникла в 30 – х годах XX века в работах С.Л. Соболева³. В начале 50 – х годов С.М. Никольский⁴ методами теории приближения функций построил теорию вложения анизотропных пространств дифференцируемых функций $H_p^r(E^n)$. Далее, О.В. Бесов⁵ построил теорию пространств $B_p^r(E^n)$.

Впоследствии эта теория активно развивалась и развивается сейчас.

В развитой теории вложений классов функций одного и многих переменных, где преимущественно исследовались классы, определяемые значениями числовых параметров, являющихся показателями степенных функций, в том или ином смысле входящих в определения этих классов, в середине 60-х годов XX века П.Л. Ульянов⁶ сформулировал, и в ряде важнейших случаев, на основе разработанных им же тонких методов метрической теории функций, получил решение новых задач, заключающихся в нахождении необходимых и достаточных условий вложения для классов функций, определяемых произвольными модулями непрерывности.

Впоследствии задачи в теории вложений классов функций в стиле постановки П.Л.Ульянова были предметом исследований многих математиков из разных стран:

В.А. Андриенко, Э.А. Стороженко, В.И. Коляда, М.К. Потапов, М.Ф. Тиман,

³ 1. Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа// Мат. сборник, 1938, 4(46), 3, С. 471-497.

2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

⁴ 1. Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН СССР, 1951, 38, С.244-278.

2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

⁵ 1. Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения// Труды МИАН СССР, 1961, 60, С.42-81.

2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.:Наука, 1975.

⁶ 1. Ульянов П.Л. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сборник, 1967, 72(114), №2, С.193-224.

2. Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // ИАН СССР. сер. мат., 1968. 32, № 3. С.649-686.

Л. Лейндлер, О.В. Бесов, В.П. Ильин, П. Освальд, Н. Яхонсон, Ю.В. Нетрусов, М.Л. Гольдман, М. Мильман, К.Ж. Наурызбаев, Н. Темиргалиев, Е.С. Смаилов, Е.Д. Нурсултанов, Г. Акишев, М. Есмаганбетов, М. Жайнибекова, М.Б. Сихов, С. Кудайберген, Е. Айдосов, Л.К. Панджикидзе, Л.А. Шестернова, Л.В. Матвиюк и другие (обзор полученных результатов см., напр., в статьях В.А. Андриенко⁷, Н. Темиргалиева⁸, В.И. Коляды⁹).

В первом разделе изучаются вложения классов функций $\tilde{H}_{\alpha,p}^{\omega}$, определяемых модулями непрерывности переменного приращения (см. (2)).

Остановимся на некоторых результатах в постановке задач первого раздела.

Первая теорема вложения была получена Е. Титчмаршем¹⁰ в 1927 году, этот результат был сразу же усилен Г. Харди и Д. Литтлвудом¹¹, доказавшим вложение $(1 \leq p < q < \infty)$

$$Lip(\alpha, p) \subset Lip(\alpha - (1/p - 1/q), q). \quad (6)$$

В свою очередь, неусилимость в определенном смысле вложения (6) была установлена П.Л. Ульяновым в 1967 г.

Утверждение (6) фактически означает, что функция, имеющая степенную гладкость в метрике L^p , при переходе к более сильной метрике L^q в степенной же шкале теряет гладкость на величину $1/p - 1/q$.

Заметим, что эта величина неизменно присутствует в теоремах вложения разных метрик для классов дифференцируемых функций многих переменных-Соболева $W_p^r(0,1)^n$, Никольского $H_p^r(0,1)^n$, Бесова $B_{p,\theta}^r(0,1)^n$, равно как и в теоремах вложения Т.И. Аманова для классов функций с доминирующей смешанной производной $SB_{p,\theta}^r(0,1)^n$, где гладкость r теряется соответственно на величины $n(1/p - 1/q)$ и $(1/p - 1/q)$, а также в теоремах вложения разных метрик для классов функций, определяемых модулями непрерывности общего вида.

В определенном смысле это свойство переносится и на случай, изученный в работе Н. Темиргалиева¹², с которой связаны постановки задач и результаты первого раздела данной работы.

Теорема А (Н. Темиргалиев). Пусть даны $\omega(\delta)$ -модуль непрерывности и числа $1 \leq p < \infty$, $0 < v < \infty$, $0 < \mu < \infty$. Тогда

1) если $\mu > p, 0 < v < \infty$, то

⁷ Андриенко В.А. О необходимых условиях вложения классов функций H_p^{ω} // Мат. сборник, 1969. -Т.78, № 2, С.280-300.

⁸ Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евразийского Университета, 1997, №4, С.90-144.

⁹ В.И. Коляда. Перестановки функций и теоремы вложения//УМН,1989, 44,№5(269).С.61-95.

¹⁰ Titchmarsh E.C. A note on Fourier transforms // J. London Math Soc.-1927.-Vol.2,№7.-P.148-150.

¹¹ Hardy J.H., Littlewood J.E., A convergence criterion for Fourier series// Math. Z.- 28, №4 (1928).- P.612-634.

¹² Темиргалиев Н. О вложении классов H_p^{ω} в пространства Лоренца// Сибирск. мат. ж., 1983, 24, №2, С.160-172.

$$H_p^\omega \subset L(\mu, \nu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^\nu\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty;$$

2) если $\mu = p$ и $0 < \nu < p$, то

$$H_p^\omega \subset L(p, \nu) \Leftrightarrow \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\nu}{p}}} \omega^\nu\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty.$$

(в случае необходимости предполагается $\omega(\delta) = O\{\omega(\delta^2)\}$ ($0 \leq \delta \leq 1$)).

Подобные результаты (оценка сверху) получены в случае многопараметрических пространств $B_p^{\vec{\alpha}}[0, 2\pi]$ К.А. Бекмаганбетовым и Е.Д. Нурсултановым¹³.

Еще одно направление исследований вызвано предложенным Z. Ditzian и V. Totik (см. сноску 1) модулем непрерывности переменного приращения $\omega_{\varphi(x), p}(f)$, который нами рассмотрен в частном случае в определении (2), т.е. заменой непрерывной на $[0, 1]$ функции $\varphi(x)$ на функцию x^α .

Известна следующая

Теорема В (N.X. Ку¹⁴). Пусть даны числа $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$. Тогда для любой функции $f \in L^p(0,1)$ имеет место неравенство

$$f^*(x) \leq C(p, \alpha) \left\{ \int_x^1 \frac{\omega_{\alpha, p}(f^*, t)}{t^{\alpha+1+\frac{1}{p}}} dt + \|f\|_p \right\} \quad (0 < x \leq 1). \quad (7)$$

Для сравнения этого и других результатов с нашими, сформулируем аналогичные результаты из работы N.X. Ку (см. сноску 14, нумерация соотношений здесь сохранена в скобках вида //) в виде следующей теоремы.

Теорема С (N.X. Ку). Пусть $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности и даны числа $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$. Тогда условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha q + \frac{q}{p} - 2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty \quad (8)$$

достаточно для вложения

$$H_{\alpha, p}^\omega \subset L^q(0,1), \quad (9)$$

и необходимо при выполнении условий (лемма 2 в сноске 14)

$$/22/ \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t)}{t} > 0,$$

$$/23/ \quad \int_0^{h^{1+\alpha}} \frac{\omega^p(t)}{t^{p\alpha+1}} dt = O\{\omega^p(h)\} \quad (h \rightarrow 0),$$

$$/24/ \quad \int_{h^{1+\alpha}}^1 \frac{\omega^p(t)}{t^{p+1}} dt = O\left\{\frac{\omega^p(h)}{h^p}\right\} \quad (h \rightarrow 0).$$

Достаточность условия (8) для вложения (9) сформулировано в пункте b) следствия 1 в виде (аргумент при φ не указан)

¹³ Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д. Метод многопараметрической интерполяции и теоремы вложения // Analysis math., 1998, V.24, №4, P.241-263.

¹⁴ Nguyen Xuan Ky. Some embedding theorems concerning the moduli of Ditzian and Totik // Analysis Math., 1993, V.19, P.255-265.

$$/19/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}} \varphi^{\alpha q-2} \omega_{\alpha}^q \left(f^*, \frac{1}{n} \right)_p < \infty,$$

где φ - непрерывная на $[0, 1]$ функция.

Здесь, по-видимому, произошла опечатка при конкретизации $\Phi(t) = t^q$ более общего условия вложения

$$/17/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Phi \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} \omega_{\alpha} \left(f^*, \frac{1}{n} \right)_p \right) < \infty$$

(см. также следствие 2 в сноске 14).

В данном разделе нами получены следующие результаты.

Теорема 1.1. Пусть даны числа $1 \leq p < \infty, 0 \leq \alpha < 1$. Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции $f \in L^p(0,1)$ справедливо неравенство

$$f(x) \leq c(\alpha, p) \left\{ \int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p} \left(f, 2^{-1} \left(2^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1 \right) t^{1-\alpha} \right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt + \|f\|_p \right\} \quad (0 < x \leq 1). \quad (10)$$

Замечание. При $\alpha = 0$ неравенство (10) совпадает с оценкой Стороженко Э.А.¹⁵.

Влияние параметра α в определении (2) показано в следующем предложении.

Утверждение 1. Пусть даны числа $1 \leq p < \infty, 0 \leq \alpha < 1$ и γ такие, что $0 < \alpha + \frac{1}{p} - 1 < \gamma < \frac{1}{p}$. Тогда имеет место соотношение

$$\omega_{\alpha,p} \left(\frac{1}{x^{\gamma}}, \delta \right) \asymp \delta^{\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} - \gamma \right)} \quad (0 < \delta \leq 1). \quad (11)$$

Сравним неравенства (7) и (10). Отметим, что оценка (10) не хуже оценки (7) (доказательство дано в замечаниях после доказательства утверждения 1)

$$\int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p} \left(f, 2^{-1} \left(2^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1 \right) t^{1-\alpha} \right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt \ll \int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p} (f^*, t)}{t^{\alpha + \frac{1}{p} + 1}} dt \quad (0 < x < 1).$$

Далее, в силу (11) имеем ($1 \leq p < \infty, 0 \leq \alpha < 1$ и γ такие, что $0 < \alpha + \frac{1}{p} - 1 < \gamma < \frac{1}{p}$)

$$\int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p} \left(\frac{1}{x^{\gamma}}, 2^{-1} \left(2^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1 \right) t^{1-\alpha} \right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt \asymp \frac{1}{x^{\gamma}} \quad (12)$$

и

$$\int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p} \left(\frac{1}{x^{\gamma}}, t \right)}{t^{\alpha + \frac{1}{p} + 1}} dt \asymp \frac{1}{x^{\gamma}} \cdot \frac{1}{x^{\left[\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} - \gamma \right) \right]}}, \quad 0 < x < 1. \quad (13)$$

¹⁵ Стороженко Э.А. Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций // ИАН СССР, сер. мат., 1973, 37, №2, С.386-398.

Как это следует из (12) оценка (10) неулучшаема по порядку в том смысле, что можно указать функцию, а именно функцию $f(x) = \frac{1}{x^\gamma}$, для которой обе части (10) имеют один и тот же порядок $\frac{1}{x^\gamma}$. Одновременно, при $0 < \alpha + \frac{1}{p} - 1 < \gamma < \frac{1}{p}$ из (13) следует, что неравенство (7) дает завышенную на неограниченно растущую степенную функцию оценку по сравнению с (10).

Теперь сравним качество известной (N.X.Ку) и новой оценок по отношению к каждому из параметров $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $\omega_{\alpha,p}(x^{-\gamma}, \delta) \asymp \delta^\tau$, $0 < \tau < 1$.

Утверждение 2. Пусть даны числа $1 \leq p < \infty$ и $0 \leq \alpha < 1$. Так как для функции $f(x) = \frac{1}{x^\gamma}$ при $\gamma = \frac{1}{p} - \tau(1 - \alpha)$ и $0 < \tau < 1$ модуль непрерывности имеет порядок $\omega_{\alpha,p}(x^{-\gamma}, \delta) \asymp \delta^\tau$, то справедливы следующие утверждения:

- 1) если $0 < \tau < 1$, $0 \leq \alpha < 1$, то оценка (10) точна для всех $1 \leq p < \frac{1}{\tau(1-\alpha)}$,
- 2) если $1 \leq p < \infty$ и $0 < \tau < 1$, то оценка (10) точна для всех $1 - \frac{1}{p\tau} < \alpha < 1$,
- 3) если $0 \leq \alpha < 1$ и $1 \leq p < \infty$, то оценка (10) точна для всех $0 < \tau < \frac{1}{p(1-\alpha)}$.

Таким образом, во всех случаях новая оценка (10) точна, известная - (7) в указанном выше смысле завышена.

Теперь перейдем к теоремам вложения классов $\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega$ в пространства Лоренца $L(\mu, \nu)$.

Справедлива

Теорема 1.2. Пусть даны числа $1 \leq p < \mu$, $0 \leq \alpha < 1 - (1/p - 1/\mu)$, $0 < \nu < \infty$. Пусть также дан некоторый модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда для того чтобы имело место вложение

$$\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega \subset L(\mu, \nu),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) - 1} \omega^\nu \left(\frac{1}{n} \right) < \infty.$$

Теорема 1.2 в полном объеме означает следующее. Достаточность: существует величина $c(p, \alpha, \omega, \mu, \nu) > 0$ такая, что для всякого $f \in L^p(0, 1)$ или, что тоже самое, для любой неотрицательной невозрастающей функции $f \in L^p(0, 1)$ выполнено неравенство $(1 \leq p < \mu, 0 \leq \alpha < 1 - (1/p - 1/\mu), 0 < \nu < \infty)$

$$\left\{ \int_0^1 [f(x)]^\nu x^{\frac{\nu}{\mu} - 1} dx \right\}^{\frac{1}{\nu}} \leq c(p, \alpha, \omega, \mu, \nu) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) - 1} \omega_{\alpha,p}^\nu \left(f, \frac{1}{n} \right) + \|f\|_p \right].$$

Необходимость: требуется при условии $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) - 1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) = \infty$ построить функцию $f \in \tilde{H}_{\alpha,p}^{\omega}$ такую, что

$$\int_0^1 t^{\frac{\nu}{\mu}-1} [f(t)]^{\nu} dt = +\infty.$$

Следствие 1. Пусть даны числа $0 \leq \alpha < 1 \leq p < q < \infty$, $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности. Тогда

$$\tilde{H}_{\alpha,p}^{\omega} \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k^{\frac{q}{p} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) - \frac{1}{1-\alpha} - 1} \omega^q\left(\frac{1}{k}\right) < +\infty. \quad (14)$$

Отметим, что при $\alpha=0$ следствие 1 совпадает с критерием Петре¹⁶ – Гривара¹⁷ - Головкина¹⁸ - Ульянова (см. сноску 5)

$$H_p^{\omega} \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2} \omega^q\left(\frac{1}{k}\right) < \infty.$$

Замечание 1. При $\alpha = 0$ условие (8) также совпадает с условием вложения $H_p^{\omega} \subset L^q(0,1)$ (см. сноски 16, 17, 18 и 5), при $0 < \alpha < 1$ достаточные части условий (8) и (14) различны.

Замечание 2. При $\alpha=0$ теорема 1.2 совпадает с первым из приведенных выше критериев Н. Темиргалиева из теоремы А, а при $\alpha \neq 0$ является новым случаем в теории вложений. Содержательность случая $\alpha \neq 0$ показывает следующее

Следствие 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \nu, \mu < \infty$, $\omega(\delta) = \delta^k$ ($0 < k < 1$) и $\rho = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right] - k$. Тогда верно следующее утверждение:

Если $\rho \neq 0$, то вложение

$$\tilde{H}_{\alpha,p}^{\delta^k} \subset L(\mu, \nu)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\rho < 0$.

Теорема 1.3. Пусть даны числа $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \nu < \infty$ такие, что $0 < \nu < p$. Пусть также дан модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда, для того чтобы имело место вложение

$$\tilde{H}_{\alpha,p}^{\omega} \subset L(p, \nu),$$

достаточно, а в случае, когда $\omega(\delta) = \underline{0} \{ \omega(\delta^2) \} (0 \leq \delta \leq 1)$, и необходимо, чтобы

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\nu}{p}}} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty.$$

Замечание. Условие вложения в теореме 1.3 от α зависит лишь в форме зависимости величины $s(p, \nu, \alpha)$ в неравенстве

¹⁶ Peetre J. Espaces d'interpolation et theoreme de Soboleff // Ann. Inst. Fourier., 1966, V.16, №1, P.279-317.

¹⁷ Grisvard P. Commutative de deux foncteurs d'interpolation // J. Math., 1966, V.45, №2, P.143-290.

¹⁸ Головкин К.К. Об одном обобщении интерполяционной теоремы Марцинкевича // Труды МИАН СССР, 1967, 102, С.5-28.

$$\|f\|_{L(p,v)} \leq c(p, v, \alpha) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n+2))^{\frac{v}{p}}} \omega^v\left(f, \frac{1}{n}\right) + \|f\|_{L^p} \right].$$

Раздел 2 посвящен изучению вложения анизотропного пространства типа Никольского-Бесова $B_{p,\theta}^{\omega}(R^n)$ с модулями гладкости в смешанной норме.

В случае степенных функций ω здесь первые теоремы вложения были получены С.М. Никольским (случай $\theta = \infty$) и О.В. Бесовым (случай $1 \leq \theta < \infty$), которые в разных вариациях были продолжены в работах многих математиков (более подробно см., напр., Трибель¹⁹).

Данная задача в обычной (несмешанной) норме рассматривалась М.Л. Гольдманом (см. сноску 2). Именно, им доказана следующая

Теорема Д (М.Л. Гольдман). Пусть $1 \leq p < q \leq \infty$ ($L^{\infty}(R^n) \equiv C(R^n)$), $j \in \{1, \dots, n\}$, $0 < \theta \leq \infty$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $0 < \beta_j < k_j$, $\omega(t) \in (\Omega_{\beta})$, $k_j \geq 1$ - порядки модулей непрерывности в определении пространства $B_{p,\theta}^{\omega}(R^n)$ и

$$q^* = \begin{cases} q & \text{при } q < \infty, \\ 1 & \text{при } q = \infty. \end{cases}$$

Тогда для того чтобы имело место вложение

$$B_{p,\theta}^{\omega}(R^n) \subset L^q(R^n), \quad (15)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{\theta q} \equiv \left\{ \int_0^1 \left[\Omega(t) t^{-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right]^{\rho} t^{-1} dt \right\}^{\frac{1}{\rho}} < \infty,$$

где

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{при } \theta \leq q^*, \\ \frac{\theta q^*}{\theta - q^*} & \text{при } \theta > q^*. \end{cases}$$

Здесь, напомним, $\Omega(u)$ - средний модуль непрерывности, т.е. средняя функция системы $\{\omega_j(u)\}$, т.е.

$$\Omega(u) = \left(\prod_{j=1}^n \omega^{-1}(u) \right)^{-1},$$

здесь φ^{-1} означает обратную функцию к φ .

Заметим, что определение среднего модуля непрерывности для случая $\omega_j(t) \in \Omega_1$ введено В.И. Колядой²⁰. В случае $\beta_j \geq 1$, средняя функция $u = \Omega(t)$ изучалась М.Л. Гольдманом (см. сноску 2). Там же показано, что если

¹⁹ Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. - М.: Мир, 1980.

²⁰ Коляда В.И. О вложении некоторых классов функций многих переменных // Сибирск. мат. ж. 1973, 14, №4, С.766-790.

$$\omega(t) \in \Omega_{\beta_1, \dots, \beta_n}, \text{ то } \Omega_\omega(t) \in \Omega_{\frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j}}}.$$

В.И. Коляда (см. сноску 20) дал эквивалентное определение среднего модуля непрерывности, а именно, средний модуль непрерывности определяется

$$\Omega_\omega(t) = \Omega(t; \omega_1, \dots, \omega_n) = \inf_{\substack{t_1, \dots, t_n = t \\ 0 < t_j \leq 1}} \max_{1 \leq j \leq n} \omega_j(t_j) \quad (0 < t \leq 1).$$

Мы рассмотрим вложение (15) в предположении, что лебеговские нормы в определении классов смешанные.

Задача: при каких неувлучшаемых соотношениях между числами

$$0 < \theta \leq \infty, 1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty, \dots, 1 \leq p_n < q_n \leq \infty \text{ и функциями } \omega_1, \dots, \omega_n$$

имеет место вложение ($n=1, 2, \dots$)

$$B_{p_1, \dots, p_n, \theta}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(R^n) \subset L^{q_1, \dots, q_n}(R^n)?$$

Доказательство основной теоремы второго раздела следует схеме рассуждений из статьи М.Л. Гольдмана (см. сноску 2), с изменениями, соответствующими случаю смешанных норм в леммах 6 и 8.

Нами доказана

Теорема 2.4. Пусть для каждого j ($j=1, \dots, n$) даны числа $1 \leq p_j < q_j \leq \infty$ ($L^\infty(R^n) \equiv C(R^n)$), $0 < \theta \leq \infty$, $0 < \beta_j < k_j$, строго возрастающие модули гладкости $\omega_j(\delta)$ порядка k_j такие, что $\omega_j(0)=0$, $\omega_j(1)=1$, $\omega_j(t) \cdot t^{-\beta_j}$ почти убывает на $(0, 1]$.

Пусть $\Omega(\delta)$ есть средний модуль гладкости системы $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Также последовательно положим

$$q^* = \begin{cases} \min q_j, & \text{если } q_j < \infty \text{ при некотором } j, \\ 1, & \text{если } q_j = \infty \text{ при всех } j=1, \dots, n \end{cases}$$

и

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{при } 0 < \theta \leq q^*, \\ \frac{\theta q^*}{\theta - q^*} & \text{при } \theta > q^*. \end{cases}$$

Тогда условие

$$A \equiv A_{p, q, \theta, \omega_1, \dots, \omega_n} \equiv \left\{ \int_0^1 \left[\Omega(t) \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))} \right]^{\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \right]^\rho \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{\rho}} < \infty,$$

достаточно, а в случае, когда $\min_{1 \leq j \leq n} q_j = q^* = q_n$, и необходимо для вложения

$$B_{p_1, \dots, p_n, \theta}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(R^n) \subset L^{q_1, \dots, q_n}(R^n).$$

Замечание. При $p = p_1 = \dots = p_n$, $q = q_1 = \dots = q_n$ утверждение теоремы 2.4 совпадает с теоремой 1 из [19]. При несовпадающих p_j или несовпадающих q_j утверждение теоремы 2.4 является новым.

Перейдем к следствиям доказанной теоремы.

Задача: при каких неулучшаемых соотношениях между числами

$$n \ (n=1,2,...), \ 0 < \theta \leq \infty, \ r_1 > 0, ..., r_n > 0, \ 1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty, ..., 1 \leq p_n < q_n \leq \infty$$

имеет место вложение

$$B_{p_1, ..., p_n, \theta}^{r_1, ..., r_n}(R^n) \subset L^{q_1, ..., q_n}(R^n)?$$

Ответ на поставленный вопрос дает

Следствие 1. Пусть $n \ (n=1,2,...), \ 0 < \theta \leq \infty, \ r_1 > 0, ..., r_n > 0, \ 1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty, ..., 1 \leq p_n < q_n \leq \infty.$

Тогда

1) если $\min_{j=1, ..., n} q_j = q^* = q_n < +\infty$, то

$$B_{p_1, ..., p_n, \theta}^{r_1, ..., r_n}(R^n) \subset L^{q_1, ..., q_n}(R^n) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < +\infty, \ 1 > \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right), \\ 0 < \theta \leq q^*, \ 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right). \end{cases}$$

2) если $q_1 = ... = q_n = \infty$, то

$$B_{p_1, ..., p_n, \theta}^{r_1, ..., r_n}(R^n) \subset C(R^n) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < +\infty, \ 1 > \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j p_j}, \\ 0 < \theta \leq 1, \ 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j p_j}. \end{cases}$$

В частности²¹²²

$$B_{p, \theta}^{\frac{n}{p}, ..., \frac{n}{p}}(R^n) \subset C(R^n) \Leftrightarrow 0 < \theta \leq 1.$$

3) Если $q_1 = ... = q_v = \infty, \ 1 < q_{v+1}, ..., q_n < \infty$ и $\min_{j=1, ..., n} q_j = q^* = q_n < +\infty$, то

$$B_{p_1, ..., p_n, \theta}^{r_1, ..., r_n}(R^n) \subset L^{\infty, ..., \infty, q_{v+1}, ..., q_n}(R^n) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < +\infty, \ 1 > \sum_{j=1}^v \frac{1}{r_j p_j} + \sum_{j=v+1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right), \\ 0 < \theta \leq q^*, \ 1 = \sum_{j=1}^v \frac{1}{r_j p_j} + \sum_{j=v+1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right). \end{cases}$$

Следствие 2. Пусть даны числа $1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty, ..., 1 \leq p_n < q_n \leq \infty, \ r_j > 0,$

λ_j - любое ($j=1, ..., n$). Пусть также даны $\omega_j(t) = t^{r_j} \ln^{\lambda_j}(1/t)$, отсюда

$$\Omega(t) \asymp t^{\frac{1}{r_1^{-1} + ... + r_n^{-1}}} \ln^{\frac{\lambda_1 r_1^{-1} + ... + \lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1} + ... + r_n^{-1}}}(1/t)$$

и

²¹ H. Triebel. *The structure of functions*, Birkhäuser, Basel, 2001.

²² D.D. Haroske. *Envelopes and Sharp Embeddings of function Spaces*. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, Vol. 437. Chapman & Hall/CRC, Boca Ration, Fl, 2007.

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))} \right)^{\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \asymp t^{-\frac{1}{r_1^{-1} + \dots + r_n^{-1}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \ln^{-\frac{\lambda_1 r_1^{-1} + \dots + \lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1} + \dots + r_n^{-1}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} (1/t).$$

Отсюда

$$\Omega(t) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))} \right)^{\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \asymp t^{\frac{1}{r_1^{-1} + \dots + r_n^{-1}} \left[1 - \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) \right]} \ln^{\frac{\lambda_1 r_1^{-1} + \dots + \lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1} + \dots + r_n^{-1}} \left[1 - \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) \right]} (1/t).$$

$$\text{Положим } \tau \equiv \frac{\lambda_1 r_1^{-1} + \dots + \lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1} + \dots + r_n^{-1}} \left[1 - \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) \right] \cdot [\theta q^* / (\theta - q^*)].$$

Тогда

$$1) \ B_{p_1, \dots, p_n, \theta}^{r_1, \dots, r_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n} (R^n) \subset L_{q_1, \dots, q_n}^{r_1, \dots, r_n} (R^n) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right), & -\infty < \tau < +\infty, \ 0 < \theta \leq +\infty, \\ 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right), & -\infty < \tau < 1, \ 0 < \theta \leq +\infty, \text{ и } \tau \leq 0, \ 0 < \theta \leq q^*. \end{cases}$$

Если $1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)$ и $\tau > 0$, то вложение 1) невозможно при любых $0 < \theta \leq +\infty$.

$$2) \ B_{p_1, \dots, p_n, \theta}^{r_1, \dots, r_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n} (R^n) \subset C(R^n) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j p_j}, & -\infty < \tau < +\infty, \ 0 < \theta \leq +\infty, \\ 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j p_j}, & -\infty < \tau < 1, \ 0 < \theta \leq +\infty, \\ 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j p_j}, & \tau \leq 0, \ 0 < \theta \leq 1, \end{cases}$$

$$B_{p, \theta}^{\frac{n}{p}, \lambda_1, \dots, \lambda_n} (R^n) \subset C(R^n) \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < \tau < 1, \ 0 < \theta \leq +\infty, \\ \tau \leq 0, \ 0 < \theta \leq 1. \end{cases}$$

Если $1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j p_j}$ и $\tau > 0$, то вложение 2) невозможно при любых $0 < \theta \leq +\infty$.

$$3) \ B_{p_1, \dots, p_n, \theta}^{r_1, \dots, r_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n} (R^n) \subset L_{1 < q^* = \min_{j=1, \dots, n} q_j = q_n < +\infty}^{+\infty, \dots, +\infty, q_{v+1}, \dots, q_n} (R^n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > \sum_{j=1}^v \frac{1}{r_j p_j} + \sum_{j=v+1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right), & -\infty < \tau < +\infty, \ 0 < \theta \leq +\infty, \\ 1 = \sum_{j=1}^v \frac{1}{r_j p_j} + \sum_{j=v+1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right), & -\infty < \tau < 1, \ 0 < \theta \leq +\infty \text{ и } \tau \leq 0, \ 0 < \theta \leq q^*. \end{cases}$$

Если $1 = \sum_{j=1}^v \frac{1}{r_j p_j} + \sum_{j=v+1}^n \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)$ и $\tau > 0$, то вложение 3) невозможно при любых $0 < \theta \leq +\infty$.

Замечание. Основные результаты следствия 1 теоремы 2.4 совпадают с соответствующими результатами из §17 книги [6] и статьи М.Л. Гольдмана [19]. Результаты следствия 2 как нам кажется, являются новыми.

Заключение

Работа посвящена теории вложений классов функций переменного приращения (первый раздел) и функциональных пространств в смешанной норме (второй раздел).

Рассмотрены следующие задачи:

1. Нахождение необходимых и достаточных условий вложения классов функций одного переменного, определяемых модулем непрерывности переменного приращения.

2. Нахождение необходимых и достаточных условий вложения анизотропных пространств функций типа Никольского-Бесова, определяемых модулем гладкости в смешанной норме.

Все результаты диссертации являются новыми:

- получена оценка сверху невозрастающей неотрицательной функции $f \in L^p(0,1)$ через модуль непрерывности переменного приращения.

- получены необходимые и достаточные условия для вложения $\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega \subset L(\mu, \nu)$ (случай $\mu \neq p$).

- получены необходимые и достаточные условия для вложения $\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega \subset L^q$.

- получены необходимые и достаточные условия для вложения $\tilde{H}_{\alpha,p}^\omega \subset L(\mu, \nu)$ (случай $\mu = p$), причем, необходимость условий доказана при определенных условиях.

- получены необходимые и достаточные условия для вложения $B_{p_1, \dots, p_n, \theta}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(R^n) \subset L^{q_1, \dots, q_n}(R^n)$, причем, необходимость условий доказана при определенных условиях.

Работа носит теоретический характер, с возможными практическими применениями.

Список публикаций автора

1. Критерий вложения $H_{\alpha,p}^\omega$ в пространства Лоренца// Analysis Math., 2006, №32, С.283-317 (совместно с Н. Темиргалиевым).
2. О вложении классов функций, определяемых модулями непрерывности переменного приращения// Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, 2005, 44, №4, С. 48-63 (совместно с Н. Темиргалиевым).
3. Замечание к одной теореме вложения в пространство Лоренца классов функций с модулями непрерывности переменного приращения// Международная конференция «Теория функций и вычислительные методы», посвященная 60-летию со дня рождения проф. Н.Темиргалиева, Астана-Боровое, 5-9 июня 2007 года, стр.195-196.

4. About new form of equations in the problem of a solid body rotational motion $B_{p_1, \dots, p_s, \theta}^{r_1, \dots, r_s} \subset L^{q_1, \dots, q_s}$ // The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011.
5. О вложении анизотропного пространства типа Никольского–Бесова $B_{p, \theta}^{\omega}(R^n)$ в смешанной норме // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2011, №6, стр. 15-33.
6. Критерий вложения классов Никольского–Бесова в пространство Лебега со смешанной нормой // «Дифференциалдық тендеулер, алгебра және анализ проблемалары» атты VI халықаралық ғылыми конференция материалдары, 14-17 октябрь 2012, Ақтөбе, С.287 (совместно с Н. Темиргалиевым).
7. Criterion descendant class Nicholsky-Besov's in the lebesgue space with mixed norm // International Journal of "Contemporary Mathematics", V3 №1-2 January-December 2012, INDIA, P.75-76 (совместно с Н. Темиргалиевым).
8. О вложениях $B_{p_1, \dots, p_n, \theta}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(R^n) \subset L^{q_1, \dots, q_n}(R^n)$ // Материалы международной конференции, посвященной 105 –летию со дня рождения академика С.Л. Соболева 19 – 25 августа 2013 года, Новосибирск.
9. О вложении анизотропных пространств типа Никольского–Бесова в смешанной норме // Сибирский математический журнал, 2014, т.55, вып.№2, стр. 436-453 (совместно с Н. Н. Ташатовым).

Лицензия ЛР № 020832 от «15» октября 1993 г.

Подписано в печать «__» _____ г. Формат 60х84/16

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1.

Тираж 100 экз. Заказ №__ Типография издательства НИУ ВШЭ,
125319, г. Москва, Кочновский пр-д., д. 3.