На правах рукописи

Борель Лидия Викторовна

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа — 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», на кафедре математического анализа.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор *Фёдоров Владимир Евгеньевич*

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор *Кожанов Александр Иванович*,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
главный научный сотрудник;
доктор физико-математических наук,
профессор *Фалалеев Михаил Валентинович*,
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный
университет», директор Института
математики, экономики и информатики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный университет»

Защита диссертации состоится «10» февраля 2017 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 при ФГБУН Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН по адресу: 454008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБУН Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН.

Автореферат разослан «   » декабря 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук С. В. Попёнов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Начально-краевые задачи для уравнений в частных производных, моделирующих различные процессы в естественных, технических и других науках, удобно исследовать в рамках начальных задач для эволюционных уравнений в банаховых пространствах. Некоторые начально-краевые задачи редуцируются к уравнениям первого порядка с вырожденным оператором при производной, в дальнейшем называемым вырожденными эволюционными уравнениями. При этом нередко возникают модели, описываемые эволюционными интегро-дифференциальными уравнениями с интегралами различных типов или, другими словами, эволюционными уравнениями с интегральными возмущениями. При этом интегралы Вольтерра, например, описывают процессы с памятью, такие, как термомеханическое поведение полимеров, вязкоупругих жидкостей, и др. Интегралы Фредгольма встречаются в так называемых нагруженных уравнениях, содержащих помимо дифференциальной части некоторый функционал от искомой функции в виде, например, интеграла от решения по некоторому подмножеству меньшей меры. Такие уравнения возникают при поиске приближенных решений дифференциальных уравнений, при математическом моделировании нелокальных, в том числе фрактальных процессов и явлений, например, в математической биологии, в теории тепломассопереноса в составных средах с фрактальной организацией, в экономике.

Степень разработанности темы исследования. В диссертации использовались полученные в работах В.Е. Федорова результаты теории вырожденных полугрупп операторов, в частности вид решения линейного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве, оператор при производной в котором вырожден, т. е. имеет нетривиальное ядро (далее — вырожденное эволюционное уравнение). Вопросы существования вырожденных полугрупп различных классов гладкости, разрешающих однородное линейное вырожденное эволюционное уравнение, при различных условиях на операторы в уравнении рассматривались ранее в работах А. Г. Руткаса, A. Favini и A. Yagi, Г. А. Свиридюка, И. В. Мельниковой.

В работах В. Е. Федорова и О. А. Стахеевой исследованы вопросы однозначной разрешимости невырожденных и вырожденных эволюционных уравнений с интегральным оператором памяти в случае, когда соответствующее однородное уравнение обладает аналитической в секторе разрешающей полугруппой.

Отметим также близкие по предмету исследования работы В. Е. Федорова и Е. А. Омельченко, в которых вырожденные эволюционные уравнения с запаздыванием на конечном промежутке исследуются методами теории полугрупп операторов и с помощью теоремы о неподвижной точке.

Среди многочисленных методов исследования вырожденных эволюционных уравнений отметим также используемый Н. А. Сидоровым и представителями его школы метод, предполагающий фредгольмовость оператора при производной в вырожденном эволюционном уравнении и существование его полного жорданова набора. В работах М. В. Фалалеева и С. С. Орлова этот метод получил свое развитие при исследовании интегро-дифференциальных уравнений с памятью. М. В. Фалалеевым исследована разрешимость в смысле обобщенных и классических решений вырожденных эволюционных уравнений с памятью первого порядка в банаховых пространствах методами теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов. М. В. Фалалеев и С. С. Орлов исследовали интегро-дифференциальные уравнения высокого порядка с эффектами памяти и вырожденным оператором при старшей производной в случаях интегральных ядер специального вида. При этом предполагается выполненным условие фредгольмовости оператора при старшей производной, либо спектральной ограниченности пучка операторов из уравнения.

Цели и задачи. Целью данной работы является установление условий однозначной разрешимости начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений в банаховых пространствах с интегральными возмущениями двух видов — для уравнений с памятью и для нагруженных уравнений. Полученные общие результаты используются для доказательства существования единственного решения различных начально-краевых задач для не разрешимых относительно производной по времени уравнений и систем уравнений в частных производных с интегральным оператором памяти и с оператором Фредгольма по временнóй переменной — нагруженных уравнений.

Научная новизна. Нагруженные уравнения для вырожденных эволюционных уравнений, по-видимому, ранее не исследовались. Уравнения с памятью для вырожденных эволюционных уравнений в отличие от работ М. В. Фалалеева с С. С. Орловым и В. Е. Федорова с О. А. Стахеевой исследуются при более общих условиях на операторы в уравнении — в диссертационной работе не предполагается фредгольмовость оператора при производной. При этом, вообще говоря, накладывается лишь условие существования сильно непрерывной разрешающей полугруппы соответствующего вырожденного однородного уравнения, а не аналитической группы или полугруппы, как в работах других авторов. Кроме того, для уравнений с памятью исследовался, по-видимому, не использовавшийся ранее в общей постановке метод исследования невырожденного уравнения путем его сведения к системе двух невозмущенных уравнений в более широком пространстве с последующим применением результатов классической теории полугрупп.

Теоретическая и практическая значимость работы. Первичным теоретически значимым результатом при исследовании новых задач является установление условий их однозначной разрешимости, именно этому посвящена данная работа. Кроме того, исследуемые в диссертационной работе начальные задачи для вырожденных эволюционных уравнений в банаховых пространствах с интегральными возмущениями имеют интерпретации, важные с практической точки зрения. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть практически использованы при исследовании прикладных задач, описывающих конкретные физические процессы и явления.

Методология и методы исследования. Методами теории вырожденных полугрупп операторов вырожденное линейное эволюционное уравнение с памятью в банаховом пространстве сведено к системе двух уравнений, одно из которых разрешено относительно производной, а другое имеет при производной нильпотентный оператор. Задача с заданной историей для разрешенного относительно производной уравнения с памятью редуцирована к задаче Коши для стационарной системы уравнений в более широком пространстве. Это позволило получить методами класической теории полугрупп операторов условия существования единственного решения задачи, в том числе решения повышенной гладкости. В итоге была исследована однозначная разрешимость задачи с заданной историей для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью при некоторых ограничениях на ядро интегрального оператора памяти. Кроме того, была исследована аналогичная задача с условием типа обобщенного условия Шоуолтера–Сидорова на историю системы при условии независимости интегрального ядра от элементов подпространства вырождения для рассматриваемого уравнения.

При исследовании нагруженных вырожденных эволюционных уравнений использовалась теорема о сжимающем отображении. Для построения сжимающего оператора использовался вид решения неоднородного линейного вырожденного эволюционного уравнения. Это позволило получить теоремы об однозначной разрешимости задач Коши и Шоуолтера–Сидорова без привлечения дополнительных ограничений на ядро интегрального оператора.

Абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для линеаризованных интегро-дифференциальных систем уравнений Осколкова, описывающих динамику жидкости Кельвина–Фойгта нулевого, а также высокого (второго и выше) порядка в смысле реологического соотношения, для интегро-дифференциальных систем уравнений внутренних и гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска, для алгебро-интегро-дифференциальной системы уравнений с частными производными, для вырожденной системы интегро-дифференциальных уравнений функций одной переменной, для нагруженных псевдопараболических уравнений, возникающих в теории фильтрации.

Положения выносимые на защиту

1. Получены теоремы о существовании и единственности решения задач с заданной историей для вырожденных эволюционных уравнений с памятью, в случае, когда однородная часть уравнения обладает сильно непрерывной разрешающей полугруппой или аналитической разрешающей группой операторов.

2. Найдены условия однозначной разрешимости начально-краевых задач для интегро-дифференциальных систем уравнений Осколкова, моделирующих динамику вякоупругой жидкости Кельвина–Фойгта нулевого и высокого порядка, для систем внутренних и гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска, для алгебро-интегро-дифференциальной системы уравнений.

3. Сформулированы и доказаны теоремы о существовании единственного решения начальных задач Коши и Шоуолтера–Сидорова для вырожденного эволюционного уравнения, нагруженного интегральным (в смысле Римана–Стилтьеса) оператором типа Фредгольма.

4. Исследованы вопросы однозначной разрешимости начально-краевых за-

дач для класса нагруженных псевдопараболических уравнений, включающего некоторые уравнения теории фильтрации, для нагруженных алгебро-дифференциальных систем уравнений для функций одной переменной и для функций нескольких переменных.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (рук. д.ф.-м.н., проф. В. Е. Федоров), на конференциях: Международная конференция «Физико-математические науки и образование», Магнитогорский государственный университет, г. Магнитогорск, 2012 г.; Международная конференция «Нелинейные уравнения и комплексный анализ», Институт математики с вычислительным центром Уфимского центра РАН, оз. Банное, Башкортостан, 2013 г., 2014 г.; Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна», Воронежский государственный университет, г. Воронеж, 2014 г.; Международная конференция «Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology», Izmir University, Измир, Турция, 2015 г.; Международная конференция «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященная памяти А. В. Бицадзе, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, 2016 г.

Все результаты диссертации получены лично автором. В совместных работах с В. Е. Фёдоровым научному руководителю принадлежат постановка задачи и общее руководство.

Работа поддержана грантом Фонда поддержки молодых ученых Челябинского государственного университета (2015 г.), грантом № 14.Z50.31.0020 Правительства Российской Федерации.

Основное содержание диссертационной работы

Диссертационная работа содержит введение, три главы, заключение, список обозначений и соглашений и список литературы.

Введение содержит актуальность темы исследования, историографию вопроса, постановку задачи, описание новизны полученных результатов, их теоретической и практической значимости, методов исследования, выносимые на защиту положения, степень достоверности и апробации, краткое содержание работы.

В **первой главе** собраны понятия и полученные ранее результаты, которые используются в основной части диссертации. В первом параграфе первой главы собраны сведения об относительных резольвентах. Второй и третий параграфы содержат определения и основные факты об (L,p)-радиальных и (L,p)-ограниченных операторах и соответствующих им сильно непрерывных полугруппах и аналитических группах операторов с ядрами.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (т. е. линейный и непрерывный оператор, действующий из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (т. е. линейный, замкнутый, плотно в $\mathfrak{U}$ определенный оператор, действующий в $\mathfrak{V}$). Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}$, $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$, $\ker(R^L_\mu(M))^{p+1} = \mathfrak{U}^0$, $\overline{\operatorname{im}}(R^L_\mu(M))^{p+1} =$

$\mathfrak{U}^1$ (замыкание образа), $\ker(L^L_\mu(M))^{p+1} = \mathfrak{V}^0$, $\overline{\mathrm{im}}(R^L_\mu(M))^{p+1} = \mathfrak{V}^1$, $L_k = L|_{\mathfrak{U}^k}$, $M_k = M|_{D_M \cap \mathfrak{U}^k}$, $k = 0, 1$.

Пусть $p \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}$ $(a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+$ $\forall \mu \in (a, +\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$ такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1} v\|_{\mathfrak{V}} \leq \frac{\mathrm{const}(v)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall v \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}};$$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}$$

при любом $\mu \in (a, +\infty)$.

Теорема 1. (В. Е. Федоров). *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1} L_0$ *нильпотентен степени не больше* p.

Замечание 1. Проектор вдоль подпространства $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ (вдоль $\mathfrak{V}^0$ на подпространство $\mathfrak{V}^1$) может быть вычислен по формуле

$$P = s\text{-}\lim_{\mu \to +\infty} (\mu R^L_\mu(M))^{p+1}, \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu \to +\infty} (\mu L^L_\mu(M))^{p+1}).$$

Теорема 2. (В. Е. Федоров). *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $g \in C^1([0,T]; \mathfrak{V})$ такова, что $(I - Q)g \in C^{p+1}([0,T]; \mathfrak{V}^0)$. Тогда*

(i) *если $u_0 \in D_M$ и выполняется условие*

$$(I - P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I - Q)g)^{(k)}(0),$$

то существует единственное решение $u \in C^1([0,T]; \mathfrak{U}) \cap C([0,T]; D_M)$ задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

при этом

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(s) L_1^{-1} Q g(t-s) ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I - Q)g)^{(k)}(t); \tag{2}$$

(ii) *если начальное значение $u_0 \in D_{M_1}$, то существует единственное решение $u \in C^1([0,T]; \mathfrak{U}) \cap C([0,T]; D_M)$ обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова $Pu(0) = u_0$ для уравнения (1), при этом решение имеет вид (2).*

Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M является ограниченным множеством в $\mathbb{C}$. В этом случае выполняются первые три утверждения теоремы 1, более того, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$.

(L,σ)-ограниченный оператор M назовем (L,p)-*ограниченным* при $p \in \mathbb{N}_0$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$, где $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$.

Во **второй главе** диссертации рассмотрены условия разрешимости начальных задач для эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной (часто называемых уравнениями соболевского типа) вида

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $T > 0$, $\mathcal{K} : [0,T]\times[0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации.

При исследовании разрешимости нагруженных уравнений, не разрешимых относительно производной, использовался вид решения линейного неоднородного вырожденного эволюционного уравнения из теоремы 2 и теорема о сжимающем отображении. Такой подход позволил обойтись без дополнительных ограничений на ядро или образ интегрального оператора.

В первом параграфе сформулированы задача Коши и обобщенная задача Шоуолтера–Сидорова для нагруженного уравнения соболевского типа и доказаны теоремы об однозначной разрешимости этих задач в случае пары операторов в основной части уравнения, порождающей вырожденную сильно непрерывную полугруппу.

Обозначим при $T > 0$, $n = 0,1,\dots,p+1$,

$$\tfrac{\partial^n \mathcal{K}}{\partial t^n} \equiv \mathcal{K}_t^{(n)}, \quad V_0^T(\mu) \max_{t,s\in[0,T]} \left\|\mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} \equiv K_n(T),$$
$$V_0^T(\mu) \max_{t,s\in[0,T]} s \left\|\mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} \equiv K_{n,1}(T),$$
$$\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \equiv C_1, \quad \|H^k M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \equiv h_k,\ k = 0,1,\dots,p,$$
$$F(T) = \max\Biggl\{C_1 K(T)\sum_{n=0}^{p+1} K_{n,1}(T) + h_0 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T),$$
$$h_1 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T),\dots, h_p \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T)\Biggr\}.$$

Здесь $V_0^T(\mu)$ — вариация функции μ на отрезке $[0,T]$,

$$K(T) = \max\{K, Ke^{aT}\} = \begin{cases} K, & a \leq 0; \\ Ke^{aT}, & a > 0, \end{cases}$$

K, a — константы из определения сильно (L,p)-радиального оператора.

Обозначим $C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$ класс непрерывных функций, имеющих непрерывные по совокупности переменных частные производные по первому аргументу до порядка $p+1$.

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K}_t^{(n)}(0,s) \equiv 0$, $n = 0,1,\ldots,p$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ задачи $u(0) = u_0$ для уравнения (3).*

Теорема 4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ задачи $Pu(0) = u_0$ для уравнения (3).*

Во втором параграфе рассмотрено нагруженное псевдопараболическое уравнение, возникающее в теории фильтрации, с краевыми и различными начальными условиями, с различными интегральными операторами. Для всех рассмотренных задач установлены условия однозначной разрешимости с помощью абстрактных результатов предыдущего параграфа.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$z(x,t) = \Delta z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{5}$$

для модифицированного уравнения Дзекцера, возникающего в теории фильтрации[1],

$$(\lambda - \Delta) z_t(x,t) = \triangle z(x,t) - \beta \Delta^2 z(x,t) +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega k(x,y,t,s) z(y,s)\, dy\, d\mu(s),\ (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{6}$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ имеет гладкую границу, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$. Эта задача редуцирована к задаче Коши для уравнения (3) с сильно (L,p)-радиальным оператором M и с помощью теоремы 3 получены условия ее разрешимости.

Обозначим

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\},$$
$$H_\partial^4(\Omega) = \{u \in H^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\},$$

λ_m, $m \in \mathbb{N}$, — собственные значения оператора Лапласа, определенного на $H_0^2(\Omega)$ и действующего в $L_2(\Omega)$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная система соответствующих

[1] Дзекцер Е. С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.

собственных функций этого оператора. Пусть

$$\widetilde{F}_1(T) = V_0^T(\mu)\left(\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\tfrac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\max\left\{1, \sup_{\lambda\neq\lambda_m}\tfrac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\right\}\times\right.$$
$$\times\max\left\{1, \exp\left(T\sup_{\lambda_m\neq\lambda}\tfrac{\lambda_m-\beta\lambda_m^2}{\lambda-\lambda_m}\right)\right\}\times$$
$$\times\left(\max_{t,s\in[0,T]} s\|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s\in[0,T]} s\|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}\right)+$$
$$\left.+\tfrac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda-\beta\lambda^2|}\left(\max_{t,s\in[0,T]}\|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s\in[0,T]}\|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}\right)\right).$$

Теорема 5. *Пусть* $\beta > 0$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $z_0 \in H_\partial^4(\Omega)$, $\langle z_0, \varphi_m\rangle = 0$ *при* $m \in \mathbb{N}$, *для которых* $\lambda_m = \lambda$, $k(x,y,t,s) \in C([0,T]\times[0,T]; L_2(\Omega\times\Omega))$, $k_t(x,y,t,s) \in C([0,T]\times[0,T]; L_2(\Omega\times\Omega))$, $k(x,y,0,s) \equiv 0$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации, выполняется условие* $\widetilde{F}_1(T) < 1$. *Тогда существует единственное решение* $z \in C^1([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H_\partial^4(\Omega))$ *задачи* (4)–(6).

Для такого же уравнения с более простым интегральным оператором

$$(\lambda-\Delta)z_t(x,t) = \triangle z(x,t) - \beta\Delta^2 z(x,t) + \int_0^T k(t,s)z(x,s)d\mu(s),\ (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{7}$$

в той же области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим краевые условия (5) и начальное условие

$$(\lambda-\Delta)(z(x,0) - z_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Рассматриваемая задача (5), (7), (8) представляет собой частный случай обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова для уравнения (3).

Теорема 6. *Пусть* $\beta > 0$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $z_0 \in H_\partial^4(\Omega)$, $k \in C([0,T]\times[0,T];\mathbb{R})$, $k_t \in C([0,T]\times[0,T];\mathbb{R})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации,* $\widetilde{F}_2(T) < 1$. *Тогда существует единственное решение* $z \in C^1([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H_\partial^4(\Omega))$ *задачи* (5), (7), (8).

Здесь

$$\widetilde{F}_2(T) = V_0^T(\mu)\left(\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\max\left\{1, \sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\right\}\times\right.$$
$$\times\max\left\{1, \exp\left(T\sup_{\lambda_m\neq\lambda}\frac{\lambda_m-\beta\lambda_m^2}{\lambda-\lambda_m}\right)\right\}\left(\max_{t,s\in[0,T]} s|k(t,s)| + \max_{t,s\in[0,T]} s|k_t(t,s)|\right)+$$
$$\left.+\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda-\beta\lambda^2|}\left(\max_{t,s\in[0,T]}|k(t,s)| + \max_{t,s\in[0,T]}|k_t(t,s)|\right)\right).$$

В третьем параграфе продемонстрированы некоторые возможные улучшения общих результатов в частных случаях, а также предложены обобщения результатов предыдущего параграфа, доказываемые аналогичным образом.

Четвертый параграф посвящен исследованию алгебро-интегро-дифференциальной системы уравнений с частными производными. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$z_1(x,0) = z_{10}(x), \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

$$z_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \quad i = 1,2,3, \tag{10}$$

для модельной интегро-дифференциальной системы уравнений

$$\begin{gathered} z_{1t}(x,t) = \triangle z_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{1i}(t,s) z_i(x,s) d\mu(s), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ z_{3t}(x,t) = \triangle z_2(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{2i}(t,s) z_i(x,s) d\mu(s), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ 0 = \triangle z_3(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{3i}(t,s) z_i(x,s) d\mu(s), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, заданы функции $z_{10} : \Omega \to \mathbb{R}$, $k_{ji} : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,3$, обозначим также

$$K_n(T) = V_0^T(\mu) \max_{t,s \in [0,T]} \max_{i,j=1,2,3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t,s) \right|, \quad n = 0,1,2,$$

$$K_{n,1}(T) = V_0^T(\mu) \max_{t,s \in [0,T]} \left\{ s \max_{i,j=1,2,3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t,s) \right| \right\}, \quad n = 0,1,2.$$

Такая задача редуцируется к обобщенной задаче Шоуолтера–Сидорова для уравнения (3) с сильно $(L,1)$-радиальным оператором M.

Теорема 7. *Пусть* $z_{10} \in H_0^2(\Omega)$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации,* $k_{ij} \in C^{2,0}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega))$, $i,j = 1,2,3$,

$$V_0^T(\mu) \max \left\{ \sum_{n=0}^{2} K_{n,1}(T) + \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{n=0}^{2} K_n(T), \frac{1}{|\lambda_1|^2} \sum_{n=0}^{2} K_n(T) \right\} < 1.$$

Тогда задача (9)–(11) *имеет единственное решение*

$$z_1, z_2, z_3 \in C^1([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C([0,T]; H_0^2(\Omega)).$$

Аналогичным образом получен результат о разрешимости задачи (10), (11) с начальными условиями Коши

$$z_i(x,0) = z_{i0}(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1,2,3. \tag{12}$$

Теорема 8. *Пусть* $z_{i0} \in H_0^2(\Omega)$, $i = 1,2,3$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации,* $k_{ij} \in C^{2,0}([0,T] \times [0,T];\mathbb{R})$, $i,j = 1,2,3$, $k(0,s) \equiv 0$, $\frac{\partial k}{\partial t}(0,s) \equiv 0$ *для* $s \in [0,T]$,

$$V_0^T(\mu)\max\left\{\sum_{n=0}^{2} K_{n,1}(T) + \frac{1}{|\lambda_1|}\sum_{n=0}^{2} K_n(T), \frac{1}{|\lambda_1|^2}\sum_{n=0}^{2} K_n(T)\right\} < 1.$$

Тогда задача (10)–(12) *имеет единственное решение*

$$z_1, z_2, z_3 \in C^1([0,T];L_2(\Omega)) \cap C([0,T];H_0^2(\Omega)).$$

В пятом параграфе абстрактные результаты применены к исследованию вырожденной системы интегро-дифференциальных уравнений функций одной переменной.

Третья глава посвящена вырожденным эволюционным уравнениям с памятью. Рассмотрим задачу с заданной историей для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью

$$u(t) = u_-(t), \quad t \le 0, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{14}$$

с линейными операторами L, M, $\mathcal{K}(s)$, $s \ge 0$, действующими из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$. Предполагается, что $\ker L \ne \{0\}$ и выполняется условие сильной (L,p)-радиальности оператора M. К таким задачам могут быть редуцированы начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику процессов с эффектами памяти, например, термомеханическое поведение полимеров, вязкоупругих жидкостей и других процессов.

В первом параграфе исследуется задача с заданной историей для невырожденного уравнения с памятью. Обозначим $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_- = \{0\} \cup \mathbb{R}_-$, $\mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ — множество функций $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, для которых несобственный интеграл Римана $\int_0^{+\infty} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}}dt$ сходится. Через $C_0^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ обозначим банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных на $\overline{\mathbb{R}}_+$ вместе с k первыми производными функций, удовлетворяющих равенствам $u^{(l)}(0) = 0$, $l = 0,1,\ldots,k$, с нормой $\|u\|_{C_0^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})} = \sum\limits_{l=0}^{k} \sup\limits_{t\ge 0} \|u^{(l)}(t)\|_{\mathfrak{U}}$. При этом для краткости $C_0^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \equiv C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.

Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство, задан оператор $A : D_A \to \mathfrak{U}$, где $D_A \subset \mathfrak{U}$. Рассмотрим задачу

$$u(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{16}$$

с заданными функциями $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $f : [0,T) \to \mathfrak{U}$, $T \in (0,+\infty]$. Обозначим

$$v(t,s) = \int\limits_0^s u(t-\tau)d\tau = \int\limits_{t-s}^t u(\tau)d\tau.$$

Исходная задача эквивалентна задаче Коши для неоднородного уравнения

$$w'(t) = Bw(t) + g(t)$$

в пространстве $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, где

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A_1 \\ J & A_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

При этом $A_1 : C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \to \mathfrak{U}$, $A_2 : C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \to C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, $J : \mathfrak{U} \to C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ действуют по правилам

$$A_1 z = -\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s)z(s)ds, \quad (A_2 z)(s) = -z'(s), \quad (Jz)(s) \equiv z,\ s \geq 0.$$

Лемма 1. $J \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$, $\|J\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))} = 1$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. *Тогда оператор* $A_1 \in \mathcal{L}(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U});\mathfrak{U})$.

Лемма 3. *Оператор* $A_2 \in \mathcal{C}l(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$, *определенный на* $D_{A_2} = C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, *порождает сжимающую* (C_0)*-непрерывную полугруппу операторов.*

Теорема 9. *Пусть оператор* A *порождает* (C_0)*-непрерывную полугруппу операторов в* $\mathfrak{U}$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. *Тогда определенный в* (17) *оператор* B *с областью определения* $D_B = D_A \times C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ *порождает* (C_0)*-непрерывную полугруппу операторов в* $\mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.

Теорема 10. *Пусть оператор* A *порождает* (C_0)*-непрерывную полугруппу операторов в* $\mathfrak{U}$, $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, *при этом* $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ *и выполняется одно из двух условий*:

(i) $f \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$;

(ii) $f \in C([0,T);D_A)$.

Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$ *задачи* (15), (16).

Теорема 11. *Пусть оператор* A *порождает* (C_0)*-непрерывную полугруппу операторов в пространстве* $\mathfrak{U}$, $u_- \in C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, *выполняются условия* $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\int\limits_0^{+\infty} A\mathcal{K}(s)u_-(-s)ds < \infty$, *выполняется одно из условий*:

(i) $f \in C^2([0,T);\mathfrak{U})$, $f(0) \in D_A$;
(ii) $f \in C^1([0,T);D_A)$;
(iii) $f \in C([0,T);D_{A^2}) \cap C([0,T);D_A) \cap C^1([0,T);\mathfrak{U})$.
Тогда задача (15), (16) *имеет единственное решение на* $[0,T)$, *при этом оно лежит в* $C^2([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$.

Во втором параграфе данной главы получены условия однозначной разрешимости задачи (13), (14) при ограничении $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ или при условии $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$ для $s \geq 0$.

Решением задачи (13), (14) на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C([0,T);D_M) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой $Lu \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$, выполняется условие (14) и при каждом $t \in [0,T)$ — равенство (13).

Теорема 12. *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M *сильно* (L,p)*-радиален,* $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $(I-P)u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ *ограничена,* $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ *при* $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C^p([0,T);\mathfrak{V})$, $(I-P)u_-(0) = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(0)$ *и выполняется одно из двух условий*:
(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V}), \mathcal{K} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$;
(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$, $L_1^{-1}\mathcal{K} \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};D_M)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};D_M))$.
Тогда существует единственное решение задачи (13), (14) *на* $[0,T)$.

В случае $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$, рассмотрена не только задача с заданной историей, но и задача с условием типа обобщенного условия Шоуолтера–Сидорова

$$Pu(t) = u_-(t), \quad t \leq 0. \tag{18}$$

Теорема 13. *Пусть* M *сильно* $(L,0)$*-радиален,* $(I-P)u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{V})$,

$$(I-P)u_-(0) = -\int\limits_{-\infty}^{0} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(-s)Pu_-(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(0)$$

и выполняется одно из двух условий
(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;
(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.
Тогда существует единственное решение задачи (13), (14) *на* $[0,T)$.

Теорема 14. *Пусть оператор* M *сильно* $(L,0)$*-радиален,* $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U}^1)$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{V})$ *и выполняется одно из двух условий*
(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;
(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.
Тогда существует единственное решение задачи (14), (18) *на* $[0,T)$.

Теорема 15. *Пусть оператор* M *сильно* $(L,1)$*-радиален,* $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U}^1)$*,* $\mathcal{K} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$*,* $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$*,* $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$*,* $s \geq 0$*,* $(I-Q)f \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$ *и выполняется одно из двух условий*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$*;*

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$*.*

Тогда существует единственное решение задачи (14), (18) *на* $[0,T)$*.*

В третьем параграфе та же задача рассмотрена при более сильном условии (L,p)-ограниченности оператора M, получены условия ее однозначной разрешимости. При этом получены более сильные результаты — при произвольном $p \in \mathbb{N}_0$, а не только при $p=0$.

Лемма 4. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$*,* $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$*,* $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Тогда для определенного в* (17) *оператора* B *имеет место равенство* $D_{B^n} = \mathfrak{U} \times D_{A_2^n}$*.*

Теорема 16. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$*,* $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$*,* $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_- \in C_0^{n-1}(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$*,* $f \in C^{n-1}([0,T);\mathfrak{U})$*. Тогда существует единственное решение задачи* (15), (16) *на промежутке* $[0,T)$*, при этом оно принадлежит классу* $C^n([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$*.*

Теорема 17. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ *ограниченная функция,* $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$*,* $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$*,* $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$*,* $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ *при* $s \geq 0$*,* $f \in C([0,T);\mathfrak{V})$*,* $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$*,* $k=0,1,\ldots,p$*,*

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t)\bigg|_{t=0}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (13), (14) *на* $[0,T)$*.*

Теорема 18. *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$*, оператор* M (L,p)*-ограничен,* $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1)$*,* $Pu_- \in C_0^{p-2}(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$*,* $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$*,* $Q\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$*,* $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$*,* $s \geq 0$*,* $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K} \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$*,* $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(n)} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$*,* $n=0,1,\ldots,k$*,* $k=0,1,\ldots,p$*,* $Qf \in C^{p-2}([0,T);\mathfrak{V})$*,* $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$*,* $k=0,1,\ldots,p$*. Тогда существует единственное решение задачи* (14), (18) *на промежутке* $[0,T)$*.*

В четвертом параграфе абстрактные результаты применены к системе гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска.

Рассмотрим начально краевую задачу

$$v_n(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T), \tag{19}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

для системы уравнений

$$v_t(x,t) = [v(x,t), \overline{\omega}] - r(x,t) + N^2 \int\limits_0^t v_3(x,s) e_3 ds, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{21}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{22}$$

описывающей в приближении Буссинеска малые колебания равномерно вращающейся относительно вертикальной оси Ox_3 в поле силы тяжести идеальной несжимаемой жидкости. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, вектор $v = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость частиц жидкости, r — градиент динамического давления P, т. е. $r = (r_1, r_2.r_3) = (P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3})$, $e_3 = (0,0,1)$, ω — удвоенная угловая скорость, $[\cdot, \overline{\omega}]$ — векторное произведение на вектор $\overline{\omega} = \omega e_3 = (0,0,\omega) \in \mathbb{R}^3$, $v_3 e_3 = (0,0,v_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $v_n = \langle v, n \rangle_{\mathbb{R}^3}$, N^2 — частота Вяйселя — Брента, $\nabla \cdot v$ — дивергенция вектор-функции v. Неизвестными являются вектор-функции v и r. Обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$ замыкание $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$, $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ — ортопроектор вдоль $\mathbb{H}_\sigma$. Заменим уравнение несжимаемости (22) и граничное условие (19) на эквивалентное их совокупности уравнение

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in [0,T). \tag{23}$$

Задача (20), (21), (23) редуцируется к задаче Шоуолтера–Сидорова для уравнения (14) с $(L,0)$-ограниченным оператором M, и из теоремы 18 следует

Теорема 19. *Пусть $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $T > 0$ конечно. Тогда существует единственное решение задачи* (20), (21), (23).

Замечание 2. В случае $\omega = 0$ получается система внутренних волн в приближении Буссинеска, для которой теорема 19 также верна.

В пятом и шестом параграфах абстрактные результаты пременены к интегро-дифференциальной системе уравнений Осколкова и линеаризованной системе уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта высокого порядка соответственно.

Рассмотрим задачу

$$v(x,t) = v_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{24}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{25}$$

для интегро-дифференциальной системы уравнений, моделирующей динамику жидкости Кельвина–Фойгта нулевого порядка, линеаризованной в окрестности стационарного решения $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \ldots, \widetilde{v}_d)$,

$$(1 - \chi\Delta) v_t(x,t) = \nu \Delta v(x,t) - (\widetilde{v} \cdot \nabla) v(x,t) - (v \cdot \nabla)\widetilde{v}(x,t) - r(x,t) +$$

$$+\int_{-\infty}^{t} K(t-s)\Delta v(x,s)ds, \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{26}$$

$$\nabla\cdot v = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+. \tag{27}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi,\nu\in\mathbb{R}$, помимо $\widetilde{v}$ задана функция $K:\overline{\mathbb{R}}_+\to\mathbb{R}$. Искомыми являются вектор-функции скорости $v=(v_1,v_2,\ldots,v_d)$ жидкости и градиента давления $r=(r_1,r_2,\ldots,r_d)$.

Обозначим $\mathbb{L}_2=(L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1=(H^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2=(H^2(\Omega))^d$. Замыкание линеала $\mathcal{L}=\{w\in(C_0^\infty(\Omega))^d:\nabla\cdot w=0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Кроме того, будем использовать обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2=\mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$, $\Pi:\mathbb{L}_2\to\mathbb{H}_\pi$ — ортопроектор вдоль $\mathbb{H}_\sigma$. Уравнение (27) заменим более общим уравнением (23). Обозначим через $A=\Sigma\,\mathrm{diag}\{\Delta,\ldots,\Delta\}$ оператор $A\in\mathcal{C}l(\mathbb{H}_\sigma)$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$.

Теорема 20. *Пусть* $\chi\neq0$, $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, $v_-\in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathbb{H}_\sigma^2)\cap\mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathbb{H}_\sigma^2)$, $K\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$, $K,K'\in\mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. *Тогда задача* (23), (24)–(26) *имеет единственное решение* $v\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}_\sigma^2)\cap C(\mathbb{R};\mathbb{H}_\sigma^2)$, $r\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}_\pi)$.

Теперь рассмотрим начально-краевую задачу

$$y(x,t)=y_-(x,t), \quad z(x,t)=z_-(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_-, \tag{28}$$

$$y(x,t)=0, \quad z(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{29}$$

для линеаризованной системы уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта порядка 2, 3, ...

$$(1-\chi\Delta)y_t(x,t)=\nu\Delta y(x,t)-(\widetilde{y}\cdot\nabla)y(x,t)-(y\cdot\nabla)\widetilde{y}(x,t)+$$
$$+\Delta z(x,t)-r(x,t)+g(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{30}$$

$$z_t(x,t)=\alpha y(x,t)+\beta z(x,t)+\int_{-\infty}^{t}K(t-s)z(x,s)ds, \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{31}$$

$$\nabla\cdot y=0, \quad \nabla\cdot z=0, \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+. \tag{32}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, постоянные $\chi,\nu,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, заданы функции y_-, z_-, $\widetilde{y}$, K. Функция $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\ldots,\widetilde{y}_d)$ соответствует стационарному решению системы, χ характеризует упругие свойства жидкости, ν — ее вязкие свойства. Вектор-функции $y=(y_1,y_2,\ldots,y_d)$ (вектор скорости жидкости), $z=(z_1,z_2,\ldots,z_d)$ (свертка по временно́й переменной скорости и некоторой весовой функции), а также $r=(r_1,r_2,\ldots,r_d)$ (градиент давления) неизвестны. При $A\in\mathcal{C}l(\mathbb{H}_\sigma)$, $Aw=\Sigma\Delta w$, и $D\in\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^2;\mathbb{L}_2)$, $Dw=\nu\Delta w-(\widetilde{y}\cdot\nabla)w-(w\cdot\nabla)\widetilde{y}$ для заданного $\widetilde{y}\in\mathbb{H}^1$ положим

$$\mathfrak{U}=\mathbb{H}_\sigma^2\times\mathbb{H}_\pi\times\mathbb{H}_\sigma^2, \quad \mathfrak{V}=\mathbb{L}_2\times\mathbb{H}_\sigma^2=\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{H}_\pi\times\mathbb{H}_\sigma^2, \tag{33}$$

$$L=\begin{pmatrix} I-\chi A & 0 & 0\\ -\chi\Pi\Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix} \Sigma D & 0 & A\\ \Pi D & -I & \Pi\Delta\\ \alpha I & 0 & \beta I\end{pmatrix}, \mathcal{K}(s)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & K(s)\end{pmatrix}. \tag{34}$$

Теорема 21. *Пусть* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *определены в* (33), *а* L *и* M *заданы формулами* (34), $\nu, \chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$. *Тогда оператор* M $(L,0)$*-ограничен, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \chi\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D & 0 & \Pi\Delta(I-\chi A)^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Теорема 22. *Пусть* $\nu, \chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $y_-, z_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; \mathbb{H}^2_\sigma) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $K \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $K, K' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $g \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$. *Тогда существует единственное решение* $y, z \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}^2_\sigma) \cap C(\mathbb{R}; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $r \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}_\pi)$ *задачи* (28)–(32).

В седьмом параграфе рассмотрена задача

$$z_i(x,t) = z_{i-}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \quad i = 1,2,3, \tag{35}$$

$$(1-\theta)z_i(x,t) + \theta\frac{\partial z_i}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad i = 1,2,3. \tag{36}$$

для интегро-дифференциальной системы уравнений

$$\begin{aligned} z_{1t}(x,t) &= \triangle z_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3}\int_{-\infty}^{t} k_{1i}(t-s)z_i(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ z_{3t}(x,t) &= \triangle z_2(x,t) + \sum_{i=1}^{3}\int_{-\infty}^{t} k_{2i}(t-s)z_i(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ 0 &= \triangle z_3(x,t) + \sum_{i=1}^{3}\int_{-\infty}^{t} k_{3i}(t-s)z_i(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\theta \in \mathbb{R}$, заданы функции $z_{i-} : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_- \to \mathbb{R}$, $k_{ji} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$, $i, j = 1,2,3$. Обозначим $H^2_\theta(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : (1-\theta)u(x) + \theta\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$.

Теорема 23. *Пусть функция* $z_{1-} \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, *функции* $z_{2-}, z_{3-} \in C(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega))$ *ограничены,* $z_{2-}(\cdot,0) \equiv z_{3-}(\cdot,0) \equiv 0$, $k_{2i} \equiv k_{3i} \equiv 0$, $k_{1i} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $k_{1i}, k'_{1i} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $i = 1,2,3$. *Тогда задача* (35)–(37) *имеет единственное решение* $z_1, z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$, $z_2 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$.

В случае обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова

$$z_1(x,t) = z_{1-}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{38}$$

имеет место следующая теорема.

Теорема 24. *Пусть* $z_{1-} \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, $k_{j2} \equiv k_{j3} \equiv 0$, $k_{j1} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $k_{j1}, k'_{j1} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $j = 1,2,3$. *Тогда задача* (36)–(38) *имеет единственное решение* $z_1 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$, $z_2 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega))$, $z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega))$.

Заключение

В диссертационной работе получены условия однозначной разрешимости начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений в банаховых пространствах с интегральными возмущениями двух видов — для нагруженных уравнений и для уравнений с памятью. Абстрактные результаты использованы для установления существования единственного решения различных начально-краевых задач для не разрешимых относительно производной по времени уравнений и систем уравнений в частных производных с интегральным оператором памяти и с оператором Фредгольма по временно́й переменной. В частности это линеаризованные интегро-дифференциальные системы уравнений Осколкова, описывающие динамику жидкости Кельвина–Фойгта, системы внутренних и гравитационно-гироскопических волн, алгебро-интегро-дифференциальные системы уравнений с частными производными, вырожденная система интегро-дифференциальных уравнений функций одной переменной, нагруженные псевдопараболические уравнения, возникающие в теории фильтрации.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании новых начально-краевых задач для интегро-дифференциальных вырожденных уравнений и систем уравнений, при рассмотрении соответствующих прикладных задач — для корректного выбора условий и данных задачи, при разработке численных методов и изучении обратных коэффициентных задач — для исследования возникающих при этом нагруженных эволюционных уравнений.

Список работ автора по теме диссертации, в журналах, входящих в Перечень ведущих периодических изданий

1. Федоров, В. Е. Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 190–205.

2. Федоров, В. Е. О разрешимости линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Изв. Иркут. гос. ун-та. — 2014. — Т. 10. — С. 106–124.

3. Борель, Л. В. О разрешимости вырожденных нагруженных систем уравнений / Л. В. Борель // Мат. заметки Сев.-Восточн. федеральн. ун-та. — 2015. — Т. 22, № 4 (88). — С. 3–11.

4. Федоров, В. Е. Исследование вырожденных эволюционных уравнений с памятью методами теории полугрупп операторов / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Сиб. мат. журн. — 2016. — Т. 57, № 4. — С. 899–912.

Другие публикации автора

5. Борель, Л. В. Задача Шоуолтера для нагруженных уравнений соболевского типа / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Фундаментальная математика и её приложения в естествознании: тез. докл. Междунар. шк.-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — С. 205.

6. Борель, Л. В. О разрешимости линейных нагруженных уравнений соболевского типа / Л. В. Борель // Физ.-мат. науки и образование: материалы Всеросс. научно-практическ. конф. — Магнитогорск: МаГУ, 2012. — С. 73–75.

7. Borel, L. V. The Showalter problem for a class of weighted Sobolev-type equations / L. V. Borel, V. E. Fedorov // Нелинейные уравнения и комплексный анализ: тез. докл. междунар. конф. — Уфа: Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, 2013. — С. 14–15.

8. Борель, Л. В. Задача Коши для класса линейных нагруженных уравнений соболевского типа / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тез. докл. IV междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения чл.-корр. РАН, акад. Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. — Москва: РУДН, 2013. — С. 168–169.

9. Борель, Л. В. Нагруженные уравнения соболевского типа / Л. В. Борель // Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: тез. докл. междунар. конф. — Белгород: БелГУ, 2013. — С. 31–32.

10. Борель, Л. В. Один класс интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. — Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2013. — С. 101.

11. Борель, Л. В. Разрешимость вырожденных эволюционных уравнений с памятью / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Материалы Воронеж. зимн. мат. шк. С. Г. Крейна. Воронеж: Издат.-полиграфич. Центр «Научная книга», 2014. С. 65–67.

12. Borel, L. V. Solvability of degenerate evolution equations with memory / L. V. Borel, V. E. Fedorov // Нелинейные уравнения и комплексный анализ: тез. докл. междунар. конф. памяти академика А. М. Ильина. — Уфа: Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, 2014. — С. 13–14.

13. Borel, L. Investigation of degenerate evolution equations with memory using the methods of the theory of semigroups of operators / L. Borel // Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology: abstracts of International Conference. — Izmir: Izmir University, 2015 — P. 27–28.

14. Борель, Л. В. Об однозначной разрешимости системы гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 2. — С. 16–23.