Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ
38
ВЫПУСК
6(234)

1983

Лемма 1. *При* $k_j \geqslant |l_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *корни* $\nu_p = \nu_p(z, h)$ $(p = 1, 2, 3, 4)$ *характеристического многочлена* $\det(P_h(z) - \nu E)$ *расположены симметрично относительно координатных осей, и хотя бы два из них чисто мнимые. Корни двукратные тогда и только тогда, когда*

$$R(z, h) = \sum_{j=1}^{m} 4h^{-2} \sin^2 \pi h(z, c_j) \cdot (k_j - l_j)(c_{1j} + ic_{2j})^2 = 0.$$

Лемма 2. *Пусть корни* $\{\nu_j(z, h)\}_{j=1}^4$ — *простые и* $Q_h(z, \nu)$ — *матрица, элементы которой с точностью до знака совпадают с главными минорами матрицы* $P_h(z) - \nu E$; *тогда*

$$\exp\{tP_h(z)\} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{4} \frac{\exp\{t\nu_j(z, h)\}}{\nu_j(z, h)\,|R(z, h)|} Q_h(z, \nu_j(z, h)).$$

Лемма 3. *Матрица предельной задачи* $-P_0(z)$ *совпадает с матрицей-символом, соответствующим системе уравнений Ламе, тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$\sum_{j=1}^{m} (c_{ij} + zc_{2j})^2 [k_j (c_{1j} + \zeta c_{2j})^2 + l_j (c_{2j} - \zeta c_{1j})^2] = \mu (z - \zeta)^2 + (2\mu + \lambda)(1 + z\zeta)^2;$$

здесь λ, μ — *константы Ламе.*

3°. Обозначим через S_h оператор ограничения функций на решетку G, через $\mathscr{E}_2(\mathbb{R}^2) \subseteq L_2(\mathbb{R}^2)$ — класс сужений на $\mathbb{R}^2$ целых функций экспоненциального типа, через F_h и F_0 — преобразования Фурье функций из $l_2(G)$ и $L_2(\mathbb{R}^2)$ соответственно.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{P}_h = F_h^{-1} \exp\{tP_h(\cdot)\} F_h$, *и корни предельной задачи простые, т. е.* $\nu_j(z, 0)\,|R(z, 0)| \neq 0$, $|z| = 1$ $(j = 1, 2, 3, 4)$; *тогда для любых* $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathscr{E}_2(\mathbb{R}^2)$ *имеем* $(\mathbf{P}_h S_h - S_h \mathbf{P}_0) w_0 \to 0$ *в* $l_2(G)$ *при* $h \to 0$.

Примеры. Квадратная решетка: $c_1 = (1, 0)$, $c_2 = (0, 1)$; $H = E$; $k_j \geqslant |l_j|$ $(j = 1, 2)$. В этом случае при $|z_1| \sqrt{k_1 - l_1} = |z_2| \sqrt{k_2 - l_2}$ имеются кратные корни, компоненты матрицы $\exp\{tP_0(z)\}$ не суммируемы с квадратом, сходимости в $l_2(G)$ нет. Треугольная решетка [4]: $c_1 = (1, 0)$, $c_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $c_3 = (1/2, -\sqrt{3}/2)$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Кратных корней нет. Константы Ламе предельной системы имеют вид $\lambda = 3/8(k - 5l)$, $\mu = 3/8(k + 3l)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Косевич. Физическая механика реальных кристаллов.— Киев: Наукова думка, 1981.

[2] В. П. Маслов. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.

[3] А. М. Франк, Н. Н. Яненко. О свойствах осредненного движения упругой одномерной решетки и движения мезообъектов.— Новосибирск: ИТПМ, препринт № 14, 1980.

[4] Л. И. Слепян. Динамика трещины в решетке.— ДАН, 1981, **258** : 3, с. 261—264.

Заседание 30 марта 1983 г.

1. Р. И. Ямилов (Уфа) «О классификации дискретных эволюционных уравнений».

Наличие «лишних» законов сохранения — один из отличительных признаков уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Мы перечислим уравнения вида

$$u_t = f(u_{-1}, u, u_1), \quad f_{-1} \cdot f_1 \neq 0, \tag{1}$$

$(f_i = \partial f / \partial u_i)$ с двумя локальными законами сохранения. Здесь (1) — сокращенная запись бесконечной системы уравнений $du_i/dt = f(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$.

Пусть u_i $(i \in \mathbb{Z})$ — бесконечный набор независимых переменных, все функции зависят от конечного числа переменных u_i, $D(p(u_k, u_{k+1}, \ldots)) = p(u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots)$

Функция h называется плотностью закона сохранения уравнения (1), если $\partial_f h \in \operatorname{Im}(D-1)$, $\partial_f = \sum D^i(f)\partial/\partial u_i$. Функция вида $p = \sum (\partial/\partial u)\, D^i(h_{-i})$ такова, что $p = p(u_{-n}, \ldots, u_n)$, где $p_{-n}\cdot p_n \neq 0$ при $n > 0$. Число n называется порядком закона сохранения. Замену вида $u = \sigma(v)$, $t = c\tau$ ($c \in \mathbb{C}$) назовем локальной. В рамках нашей задачи уравнения, связанные локальной заменой, естественно отождествлять.

Для уравнения вида (1) с двумя законами сохранения порядков $N > n > 2$ выполнены условия $-f_1/f_{-1} = D(g)/g$, $\partial_f \ln g + 2f_0 \in \operatorname{Im}(D-1)$, $\partial_f \ln f_1 \in \operatorname{Im}(D-1)$. Например, они выполнены для уравнений $u_t = (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)\,(u_1 - u_{-1})$, $u_t = (\alpha u^4 + \beta u^2 + \gamma)[(u_1 + u)^{-1} - (u + u_{-1})^{-1}]$, $u_t = P(u)[(u_1 - u)^{-1} + (u - u_{-1})^{-1}]$, $u_t = [F(u_{-1}, u, u_1) + \mu\sqrt{F(u_{-1}, u, u_{-1})}\sqrt{F(u_1, u, u_1)}](u_1 - u_{-1})^{-1}$, где $\mu = -1,\ 0,\ 1$, $F = (u_1 - u) \times (u_{-1} - u)\,[\lambda + P''(u)/12] + (u_1 - 2u + u_{-1})P'(u)/4 + P(u)$, P — полином четвертой степени. Назовем эти уравнения уравнениями главного списка. Первое из этих уравнений интегрируется методом обратной задачи [1]. Остальные, насколько известно автору, в литературе встречаются впервые. Уравнением дополнительного списка назовем уравнение вида $v_\tau = F(\psi, D^{-1}\psi)$, где ψ — функция вида $\varphi(v_1 + v)$ или $\varphi(v_1 - v)$, если оно заменой $u = \sigma \circ \psi$, $t = c\tau$ сводится к уравнению главного списка. Дополнительный список содержит семь уравнений, восстановить которые нетрудно. При помощи выписанных здесь трех условий доказывается следующая теорема.

Теорема. *С точностью до локальных замен множество нелинейных уравнений вида* (1) *с двумя законами сохранения порядков* $N > n > 2$ *состоит из уравнений главного и дополнительного списков.*

Известно [1], что первое уравнение главного списка — разностный аналог уравнения $v_t = v_{xxx} + (av^2 + bv + c)v_x$ (при $a = b - 1 = c = 0$ — это уравнение Кортевега—де Фриза). Укажем дифференциальные уравнения, в которые в континуальном пределе переходят второе и четвертое с $\mu = 0$ уравнения главного списка. Если взять решение $u(y, t)$ второго уравнения ($u_{\pm 1} = u(y \pm h, t)$) с $\alpha = -a/2h$, $\beta = -3h^{-3}$, $\gamma = -c/2h$ и положить $v = u[x + (b + 6h^{-2})t, t]$, то получим $v_t = v_{xxx} - 3v^{-1}v_x v_{xx} + (3/2)v^{-2}v_x^3 + v^{-2}v_x(av^4 + bv^2 + c) + O(h^2)$ (одна из записей экспоненциального уравнения Калоджеро). В случае четвертого уравнения с $\mu = 0$, $\lambda = -12h^{-3}$, $P(u) = 2hR(u)$ (R — полином четвертой степени) для $v = u(x - 6h^{-2}t, t)$ имеем $v_t = v_{xxx} - (3/2)v_x^{-1}v_{xx}^2 + v_x^{-1}R(u) + O(h^2)$ (уравнение Кричевера — Новикова).

Замечание. В настоящее время для уравнений главного и дополнительного списков автором построены законы сохранения сколь угодно большого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.

Заседание 6 апреля 1983 г.

1. М. А. Красносельский, А. В. Покровский «О гистерезисных нелинейностях».

Гистерезисные нелинейности обычны в физике, механике, биологии и т. д. (магнитный, диэлектрический, пластический, капиллярный и т. д. гистерезисы). Доклад посвящен общим методам описания и исследования систем с гистерезисом. Развивается новый математический аппарат, основанный на выделении элементарных носителей гистерезиса — гистеронов, трактуемых как преобразователи с пространствами состояний, соответствиями вход — выход и вход — состояние. Развиваемые точки зрения примыкают к известной методологии Нола, Колемана, Трусделла (связанной с шестой проблемой Гильберта) в механике сплошных сред. Используются модели, восходящие к Максвеллу, Больцману, Маделунгу, Прандтлю, Мазингу, Вольтерра, Прейсаху, Гилтаю, Мизесу, Сен-Венану, Треска, Ишлинскому и др. Существенную роль играет идеология теории систем, развитая с большой полнотой для линейного случая Заде, Дезоером, Арбибом, Фалбом, Калманом и др.