ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 98, № 2
февраль, 1994

 С.И. Свинолупов, Р.И. Ямилов

ЯВНЫЕ АВТОПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ МНОГОПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА И ЙОРДАНОВЫ ОБОБЩЕНИЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Для многополевых аналогов нелинейного уравнения Шредингера, соответствующих унитальным йордановым алгебрам, найдены преобразования Беклунда. Эти преобразования Беклунда являются явными обратимыми автопреобразованиями, благодаря чему они весьма удобны для построения точных решений. Установлено, что этим автопреобразованиям соответствуют интегрируемые многополевые дискретно-дифференциальные уравнения, обобщающие бесконечную цепочку Тоды. Указана простая конструкция, при помощи которой по всякой унитальной йордановой алгебре построены многополевые аналоги бесконечной цепочки Тоды. Приведены новые примеры таких цепочек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее известных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, является нелинейное уравнение Шредингера, которое удобно записывать в виде системы двух скалярных уравнений

$$u_t = u_{xx} - 2u^2 v, \qquad v_t = -v_{xx} + 2v^2 u, \tag{1.1}$$

где $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$. Казалось бы, на все вопросы о симметриях, законах сохранения, L–A-парах, преобразованиях Беклунда и других алгебраических свойствах этой системы давно получены исчерпывающие ответы. Однако в последнее время были получены новые интересные результаты. В [1] было показано, что система (1.1), кроме всего прочего, замечательна и тем, что допускает автопреобразование

$$\tilde{u} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 - u^2 v, \qquad \tilde{v} = -u^{-1}, \tag{1.2}$$

связывающее два решения (u,v) и $(\tilde{u},\tilde{v})$ системы (1.1). Ниже мы кратко напоминаем читателю необходимую информацию об автопреобразовании (1.2) (более подробно см. [1–3]).

Существенное отличие преобразования (1.2) от известных ранее преобразований Беклунда заключается в том, что оно является *явным* и *обратимым*. Поясним, что мы имеем в виду. Для сравнения с (1.2) рассмотрим хорошо известное классическое преобразование Беклунда для (1.1)

$$(1.3)\qquad (\tilde{u}+u)_x = (\tilde{u}-u)\Big[\alpha + (\tilde{u}+u)(\tilde{v}+v)\Big]^{1/2},$$
$$(\tilde{v}+v)_x = (\tilde{v}-v)\Big[\alpha + (\tilde{v}+v)(\tilde{u}+u)\Big]^{1/2}.$$

Для того чтобы с помощью (1.3) по известному решению (u, v) системы (1.1) построить новое решение $(\tilde{u}, \tilde{v})$, необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае преобразования (1.2) мы имеем *явную* формулу для нового решения $(\tilde{u}, \tilde{v})$. Более того, преобразование (1.2) позволяет явно (не решая дифференциальных уравнений) построить и некоторое решение (u, v) по известному решению $(\tilde{u}, \tilde{v})$. Этот факт объясняется тем, что преобразование *обратимо*, т.е. из соотношения (1.2) переменные u, v можно выразить через $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и их производные по x. Нетрудно проверить, что обратное преобразование имеет вид

$$(1.4)\qquad v = \tilde{v}_{xx} - \tilde{v}^{-1}\tilde{v}_x^2 - \tilde{v}^2\tilde{u}, \qquad u = -\tilde{v}^{-1}.$$

Преобразования типа (1.2) в дальнейшем будем называть *явными автопреобразованиями*.

Очевидно, что явные автопреобразования весьма удобны для построения точных решений. Так, в случае уравнения Шредингера (1.1), стартуя, например, с решения $(u_0 = \varphi(t, x), v_0 = 0)$, где φ – произвольное решение уравнения теплопроводности $\varphi_t = \varphi_{xx}$, с помощью автопреобразования (1.2) можно построить бесконечное семейство решений (u_k, v_k), $k \in \mathbb{N}$, простейшее из которых имеет вид $(u_1 = \varphi_{xx} - \varphi^{-1}\varphi_x^2, v_1 = -\varphi^{-1})$. Среди этих решений, в частности, содержатся и N-солитонные решения.

С явными автопреобразованиями тесно связаны интегрируемые дискретно-дифференцируемые уравнения (цепочки). Так, (1.2) соответствует классическая бесконечная цепочка Тоды

$$(1.5)\qquad (q_n)_{xx} = \exp(q_{n+1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n-1}).$$

Цепочку (1.5) можно получить из (1.2) следующим образом. Преобразование (1.2) можно интерпретировать как систему дискретно-дифференциальных уравнений

$$(1.6)\qquad u_{k+1} = u_{kxx} - u_k^{-1}u_{kx}^2 - v_k u_k^2, \qquad v_{k+1} = -u_k^{-1},$$

где $k \in \mathbb{Z}$ – дискретный параметр. Исключив из системы (1.6) переменные v_k, получаем

$$(1.7)\qquad (u_n)_{xx} - u_n^{-1}(u_n)_x^2 = u_{n+1} - u_n^2 u_{n-1}^{-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что заменой $u_n = \exp q_n$ система (1.7) приводится к виду (1.5).

Наличие у нелинейного уравнения Шредингера (1.1) преобразования (1.2) не является уникальным явлением. Многочисленные примеры других интегрируемых систем, обладающих явными автопреобразованиями, содержатся в [1]. С каждым из приведенных там явных автопреобразований связано некоторое интегрируемое дискретно-дифференциальное уравнение.

Цель настоящей работы – изучить вопрос о явных автопреобразованиях для многополевых аналогов нелинейного уравнения Шредингера (см. [4,5]) и связанных с ними многополевых аналогах бесконечной цепочки Тоды.

В работе [5] был построен класс интегрируемых многополевых обобщений уравнения Шредингера, связанных с йордановыми парами. Нам удалось найти явные автопреобразования для чуть более узкого класса, а именно для систем вида

$$
\begin{aligned}
&u_t^i = u_{xx}^i - 2a_{jkm}^i u^j v^k u^m, \qquad i = 1, \dots, N, \\
&v_t^i = -v_{xx}^i + 2a_{jkm}^i v^j u^k v^m, \qquad i = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование), где $a_{jkm}^i \in \mathbb{C}$ – структурные константы тройной йордановой системы, которая порождена произвольной йордановой алгеброй с единицей. Для всякой такой системы (1.8) мы приведем формулы для явного автопреобразования и построим соответствующее интегрируемое многополевое обобщение бесконечной цепочки Тоды.

При изложении доказательств и результатов нам в ряде случаев пришлось воспользоваться чисто алгебраическими понятиями и методами. Поэтому содержание иллюстрируется примерами, в которых удалось избежать использования специфичных алгебраических терминов. Один из таких примеров приводится ниже.

Пример 1.1. Как нам сообщил В.В.Соколов, кроме хорошо известного векторного уравнения Шредингера (см. [6]), в векторной форме может быть записано еще одно из обобщений нелинейного уравнения Шредингера:

$$
\begin{aligned}
U_t &= U_{xx} - 4\langle U, V\rangle U + 2\langle U, U\rangle V, \\
V_t &= -V_{xx} + 4\langle U, V\rangle V - 2\langle V, V\rangle U,
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

где $U = (u^1, \dots, u^N)^T$, $V = (v^1, \dots, v^N)^T$, $\langle , \rangle$ – обычное скалярное произведение. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U} &= U_{xx} - 2\langle U, U\rangle^{-1}\langle U, U_x\rangle U_x + \langle U, U\rangle^{-1}\langle U_x, U_x\rangle U \\
&\quad - 2\langle U, V\rangle U + \langle U, U\rangle V, \\
\widetilde{V} &= -\langle U, U\rangle^{-1} U
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

является явным автопреобразованием для системы (1.9). Обратное преобразование имеет вид

$$
\begin{aligned}
V &= \widetilde{V}_{xx} - 2\langle \widetilde{V}, \widetilde{V}\rangle^{-1}\langle \widetilde{V}, \widetilde{V}_x\rangle \widetilde{V}_x + \langle \widetilde{V}, \widetilde{V}\rangle^{-1}\langle \widetilde{V}_x, \widetilde{V}_x\rangle \widetilde{V} \\
&\quad - 2\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle \widetilde{V} + \langle \widetilde{V}, \widetilde{V}\rangle \widetilde{U}, \\
U &= -\langle \widetilde{V}, \widetilde{V}\rangle^{-1}\widetilde{V}.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Соответствующее (1.11) векторное обобщение бесконечной цепочки Тоды выглядит следующим образом:

$$U_{nxx} = 2\langle U_n, U_n\rangle^{-1}\langle U_n, U_{nx}\rangle U_{nx} - \langle U_n, U_n\rangle^{-1}\langle U_{nx}, U_{nx}\rangle U_n + U_{n+1} + \langle U_n, U_n\rangle\langle U_{n-1}, U_{n-1}\rangle^{-1}U_{n-1} - 2\langle U_{n-1}, U_{n-1}\rangle^{-1}\langle U_n, U_{n-1}\rangle U_n. \tag{1.12}$$

Система дискретно-дифференциальных уравнений (1.12) имеет бесконечную серию высших симметрий и законов сохранения (см. ниже). ■

2. МНОГОПОЛЕВЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА, СВЯЗАННЫЕ С УНИТАЛЬНЫМИ ЙОРДАНОВЫМИ АЛГЕБРАМИ (J–S-СИСТЕМЫ)

В этом разделе мы более строго и подробно, чем во введении, опишем рассматриваемый нами класс систем, а именно, приведем конструкцию, при помощи которой всякой йордановой алгебре с единицей ставится в соответствие система (1 8). Затем мы обсудим вопрос о том, что рассматриваемые нами системы являются подклассом более широкого класса интегрируемых многополевых аналогов нелинейного уравнения Шредингера, изучаемых в [5].

Напомним определение йордановой алгебры (подробно о йордановых алгебрах см. [7–9]).

Определение 2.1. *Конечномерная коммутативная алгебра J называется йордановой алгеброй, если умножение, которое мы будем обозначать $(,)$, удовлетворяет тождеству*

$$\Big(((x\circ x)\circ z)\circ x\Big) = ((x\circ x)\circ(z\circ x)). \quad ■ \tag{2.1}$$

Пусть в алгебре J выбран базис $e_1, e_2, \dots, e_N$. Умножение в J можно определить, задав набор структурных констант c^i_{jk}:

$$(e_j\circ e_k) = c^i_{jk}e_i. \tag{2.2}$$

Пусть c^i_{jk} – структурные константы некоторой йордановой алгебры J. Определим константы a^i_{jkm} системы (1.8) при помощи формулы

$$a^i_{jkm} = c^i_{jr}c^r_{km} + c^i_{mr}c^r_{kj} - c^i_{kr}c^r_{jm}. \tag{2.3}$$

Таким образом, всякой йордановой алгебре J мы поставили в соответствие некоторую систему (1.8). Системы, связанные линейными преобразованиями

$$u^i = M^i_k\tilde u^k, \quad v^i = M^i_k\tilde v^k, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \det M \neq 0, \tag{2.4}$$

будем считать эквивалентными. Очевидно, что установленное соответствие не зависит от выбора базиса, т.к. переход к новому базису в йордановой алгебре J соответствует линейному преобразованию (2.4).

В дальнейшем мы будем предполагать, что йорданова алгебра J имеет единицу, которую мы будем обозначать e. Обобщения нелинейного уравнения Шредингера (1.8), построенные при помощи изложенной выше конструкции исходя из йордановой алгебры с единицей, будем называть J–S-системами.

Удобно воспользоваться более компактными и инвариантными относительно преобразований (2.4) векторными формами записи систем (1.8). Пусть $U = u^i e_i$, $V = v^i e_i$. Тогда в терминах умножения в йордановой алгебре J система (1.8) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} - 4\left(\left(U \circ V\right) \circ U\right) + 2\left(\left(U \circ U\right) \circ V\right), \\ V_t &= -V_{xx} + 4\left(\left(V \circ U\right) \circ V\right) - 2\left(\left(V \circ V\right) \circ U\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Еще более красивая и короткая запись получается, если для любых трех элементов $x, y, z \in J$ определить тернарную операцию, которая называется тройным йордановым произведением (см. [8,9]):

$$\{x \circ y \circ z\} = ((x \circ y) \circ z) + ((z \circ y) \circ x) - (y \circ (x \circ z)) \tag{2.6}$$

(сравни с (2.3), представляющей собой запись (2.6) в структурных константах). В терминах тройного йорданова произведения система (1.8) приобретает вид

$$U_t = U_{xx} - 2\{U \circ V \circ U\}, \qquad V_t = -V_{xx} + 2\{V \circ U \circ V\}. \tag{2.7}$$

Теперь приведем примеры, которые должны убедить читателя в том, что большинство примеров многополевых обобщений нелинейного уравнения Шредингера, известных ему из других источников, являются J–S-системами.

Пример 2.1. Простейшим примером йордановой алгебры является $J_{\mathrm{Mat}(N,N)}$ – алгебра матриц размерности $N \times N$ с йордановым умножением

$$(x \circ y) = \frac{1}{2}(x\,y + y\,x), \tag{2.8}$$

где $x\,y$ – обычное произведение матриц. Очевидно, что единицей в этой йордановой алгебре является единичная матрица. Тернарная операция умножения (2.6) определяется формулой

$$\{x \circ y \circ z\} = \frac{1}{2}(x\,y\,z + z\,y\,x).$$

Соответствующая $J_{\mathrm{Mat}(N,N)}$ J–S-система представляет собой хорошо известное матричное нелинейное уравнение Шредингера

$$U_t = U_{xx} - 2\,U\,V\,U, \qquad V_t = -V_{xx} + 2\,V\,U\,V, \tag{2.9}$$

где $U(t,x)$, $V(t,x)$ – матрицы размерности $N\times N$. ■

Обобщение рассмотренного примера на случай произвольной ассоциативной алгебры позволяет построить широкий класс J–S-систем. Пусть A – произвольная ассоциативная алгебра с единицей, умножение в которой обозначено $(x*y)$. Определив новое умножение

$$(x\circ y)=\frac{1}{2}\left((x*y)+(y*x)\right), \tag{2.10}$$

мы получим новую алгебру $A^{(+)}$, которая будет йордановой алгеброй с единицей.

Пример 2.2. Система (1.9) из примера 1.1 является J–S-системой. Рассмотрим йорданову алгебру V_N, которая получается, если наделить N-мерное векторное пространство V умножением

$$(x\circ y)=\langle e,x\rangle y+\langle e,y\rangle x-\langle x,y\rangle e, \tag{2.11}$$

где $e=(1,0,\dots,0)^T$, $\langle,\rangle$ – обычное скалярное произведение. Очевидно, что вектор e является единицей алгебры V_N. Нетрудно проверить, что тернарная операция умножения (2.6) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\{x\circ y\circ z\}=\langle Ay,x\rangle z+\langle Ay,z\rangle x-\langle x,z\rangle Ay,$$

где A – линейный оператор, матрица которого определяется формулой $A=2e\otimes e-\langle e,e\rangle E$, E – единичная матрица. Соответствующая J–S-система имеет вид

$$\begin{aligned} U_t&=U_{xx}-4\langle U,AV\rangle U+2\langle U,U\rangle AV,\\ V_t&=-V_{xx}+4\langle V,AU\rangle V-2\langle V,V\rangle AU. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Система (1.9) получается из (2.12) в результате линейного преобразования (2.4), где $M=\mathrm{diag}(1,i,\dots,i)$. ■

Построенный нами класс J–S-систем не исчерпывает собой многополевых обобщений нелинейного уравнения Шредингера (2.1) вида

$$\begin{aligned} u^i_t&=u^i_{xx}-2a^i_{jkm}u^ju^kv^m, \qquad i=1,2,\dots,N,\\ v^i_t&=-v^i_{xx}+2\tilde a^i_{jkm}v^jv^ku^m, \qquad i=1,2,\dots,M, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где a^i_{jkm}, $\tilde a^i_{jkm}$ – константы. Системы такого вида рассматривались в работах [4] (подход, связанный с L–A-парами) и [5] (подход, связанный с высшими симметриями, законами сохранения, оператором рекурсии). В [5] было показано, что система (2.13) имеет высшую симметрию или невырожденный высший закон сохранения тогда и только тогда, когда a^i_{jkm}, $\tilde a^i_{jkm}$ – структурные константы йордановой пары (относительно йордановых пар см. [10]). J–S-системы, рассмотренные в настоящей работе – частный, но достаточно богатый примерами, случай таких систем. В терминах работы [5] им соответствуют йордановы пары (J,J), порожденные йордановой алгеброй с единицей.

Таким образом, J–S-системы являются интегрируемыми, они имеют бесконечную алгебру высших симметрий и бесконечную серию локальных законов сохранения. Так, например, простейшая высшая симметрия J–S-системы (2.7) имеет вид

$$U_\tau = U_{xxx} - 6\{U \circ V \circ U_x\}, \qquad V_\tau = V_{xxx} - 6\{V \circ U \circ V_x\}, \tag{2.14}$$

а три простейшие плотности законов сохранения из канонической серии можно записать следующим образом (см. [5]):

$$\rho_1 = \omega(U, V), \tag{2.15}$$

$$\rho_2 = \omega(U, V_x) - \omega(U_x, V), \tag{2.16}$$

$$\rho_3 = \omega(U_x, V_x) + \omega\left(\{U \circ V \circ U\}, V\right), \tag{2.17}$$

где ω – билинейная форма, компоненты которой определяются формулой $\omega_{kj} = a^m_{kjm}$.

3. ЯВНЫЕ АВТОПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ J–S-СИСТЕМ

В этом разделе мы для всякой J–S-системы укажем явное автопреобразование, которое является естественным обобщением скалярного автопреобразования (1.2). Затем мы обсудим вопрос о том, что это преобразование является автопреобразованием для высших симметрий и плотностей законов сохранения J–S-систем.

Грубо говоря, для того чтобы написать явное автопреобразование для J–S-системы (2.7), достаточно в формуле (1.2) заменить произведения функций u, v на тройные йордановы произведения векторов U, V, а u^{-1} – на элемент йордановой алгебры, обратный к вектору U. Но чтобы это сделать реально, нужно по крайней мере напомнить определение обратного элемента и привести для него явную формулу. Более подробную информацию об обратимых элементах йордановой алгебры можно найти в [8,9].

Определение 3.1. *Пусть J – йорданова алгебра с единицей e. Элемент $x \in J$ называется обратимым, если существует такой элемент y, что*

$$(x \circ y) = e, \qquad ((x \circ x) \circ y) = x.$$

Элемент y называется обратным к x и обозначается x^{-1}.■

Определение 3.1 можно переформулировать в более конструктивной форме, что позволит нам написать явную формулу для обратного элемента. Стандартным образом введем в рассмотрение операторы умножения на элемент x в йордановой алгебре J

$$L(x) : J \to J, \qquad L(x)y = (x \circ y). \tag{3.1}$$

Определим линейные операторы $P(x, y), P(x) : J \to J$

$$P(x, y) = L(x)L(y) + L(y)L(x) - L\left((x \circ y)\right), \tag{3.2}$$

$$P(x) = P(x, x) = 2L(x)^2 - L\left((x \circ x)\right). \tag{3.3}$$

Согласно [9] элемент йордановой алгебры x обратим в смысле определения 3.1 тогда и только тогда, когда обратим линейный оператор $P(x)$. При этом обратный элемент единственный и определяется формулой

$$x^{-1} = P(x)^{-1}x. \tag{3.4}$$

Заметим, что читателя не должна пугать кажущаяся громоздкость формул для обратного элемента. Нетрудно проверить, что при выбранном базисе компоненты матриц линейных операторов $P(e_k, e_j)$ определяются формулой

$$(P(e_k, e_m))^i_j = a^i_{kjm}, \tag{3.5}$$

где a^i_{kjm} – константы из правой части системы (1.8). В ряде случаев обратный элемент в йордановой алгебре выглядит достаточно просто и именно так, как и следовало ожидать из интуитивных соображений.

Пример 3.1. В случае йордановой алгебры $J_{\mathrm{Mat}(N,N)}$ из примера 2.1, элементами которой являются матрицы размерности $N \times N$, обратный элемент в смысле определения 2.2 в точности совпадает с обратной матрицей. Для йордановых алгебр V_N из примера 2.2 обратимыми являются все элементы x, для которых $\langle x, x\rangle \neq 0$. Обратный к x элемент имеет вид

$$x^{-1} = \langle x, x\rangle^{-1}Ax. \ \blacksquare \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Всякая J-S-система* (2.7) *допускает явное автопреобразование*

$$\begin{aligned} \widetilde{U} &= U_{xx} - \left\{U_x \circ P(U)^{-1}U \circ U_x\right\} - \{U \circ V \circ U\}, \\ \widetilde{V} &= -P(U)^{-1}U. \ \blacksquare \end{aligned} \tag{3.7}$$

Схема доказательства. Прежде всего убедимся в том, что преобразование (3.7) обратимо, т.е. векторы U, V можно выразить через векторы $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ и их производные по x. Воспользовавшись тем фактом, что если z – обратимый элемент йордановой алгебры, то обратимым является и z^{-1}, причем $(z^{-1})^{-1} = z$ (см. [9]); из второго соотношения (3.7) находим, что

$$U = -P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V}. \tag{3.8}$$

Подставив в первое из соотношений (3.7) найденное выражение для U, получаем, что

$$\begin{aligned} \widetilde{U} = {} & \left(P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V}\right)_{xx} - \left\{P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V} \circ \widetilde{V} \circ P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V}\right\} \\ & - \left\{\left(P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V}\right)_x \circ P\left(P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V}\right)^{-1} P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V} \circ \left(P(\widetilde{V})\right)\right. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Так как (сравни формулы (2.6) и (3.2))

$$\{x \circ y \circ z\} = P(x, z)y \tag{3.10}$$

и в случае йордановой алгебры с единицей $\det P\left(P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V}\right) \not\equiv 0$, то из соотношения (3.9) вектор V можно выразить через векторы $\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{V}_x, \widetilde{V}_{xx}$. Проделав некоторые преобразования соотношения (3.9) в силу йорданова тождества (2.1), можно указать компактную явную формулу для вектора V:

$$V = \widetilde{V}_{xx} - \left\{\widetilde{V}_x \circ P(\widetilde{V})^{-1}\widetilde{V} \circ \widetilde{V}_x\right\} - \{\widetilde{V} \circ \widetilde{U} \circ \widetilde{V}\}. \tag{3.11}$$

Остается убедиться, что (3.7) действительно является автопреобразованием системы (2.7). Подставив в систему

$$\widetilde{U}_t = \widetilde{U}_{xx} - 2\{\widetilde{U} \circ \widetilde{V} \circ \widetilde{U}\}, \qquad \widetilde{V}_t = -\widetilde{V}_{xx} + 2\{\widetilde{V} \circ \widetilde{U} \circ \widetilde{V}\}$$

значения $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ из формул (3.7) и заменив производные по t в силу системы (2.7), получаем набор соотношений. Можно проверить, что эти соотношения тождественно выполнены в силу йорданова тождества (2.1).

Отметим, что эта проверка не столь тривиальна, как в случае скалярного нелинейного уравнения Шредингера (1.1). Для ее осуществления приходится по существу воспользоваться не только йордановым тождеством (2.1), но и его не слишком очевидными следствиями, а также использовать то, что рассматриваемым нами J–S-системам соответствуют йордановы алгебры с единицей. Мы опускаем этот момент доказательства, т.к. он носит чисто алгебраический характер и, по-видимому, малоинтересен для читателей. Желающие могут восстановить пробел, воспользовавшись следствиями (2.1), приведенными в [8,9]. ■

Пример 3.2. В случае матричного уравнения Шредингера (2.9) из примера 2.1 явное автопреобразование имеет вид

$$\widetilde{U} = U_{xx} - U_x U^{-1} U_x - U\,V\,U, \qquad \widetilde{V} = -U^{-1}. \tag{3.12}$$ ■

Выясним, что происходит с высшими симметриями и законами сохранения J–S-систем при преобразованиях (3.7).

Предложение 3.1. *Преобразование* (3.7) *является автопреобразованием для высших симметрий J–S-систем.*

Схема доказательства. Так как преобразование (3.7) обратимо, то его можно применять к любой системе. Очевидно, что, подействовав обратимым преобразованием на симметрию J–S-системы, мы получаем некоторую симметрию. Воспользовавшись однородностью высших симметрий J–S-системы (см. [5]) и преобразования (3.7), можно показать, что полученная симметрия совпадает с исходной. ■

Предложение 3.2. *Плотности локальных законов сохранения J–S-систем под действием преобразования* (3.7) *переходят в эквивалентные.*

Схема доказательства. Пусть ρ – плотность локального закона сохранения. Через $\tilde{\rho}$ обозначим функцию ρ, в которой аргументы $U, V, U_x, V_x, \ldots$ заменены на $\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{U}_x, \widetilde{V}_x, \ldots$, соответственно. Функция $\tilde{\rho}$, в которой сделана замена переменных (3.7), по очевидным причинам также является плотностью локального закона сохранения. Требуется показать, что $\tilde{\rho}$ отличается от ρ на полную производную по x от некоторой функции. Другими словами, это означает, что найдется такая функция h, зависящая от конечного числа переменных из набора $U, V, U_x, V_x, \ldots$, что имеет место соотношение

$$\tilde{\rho} - \rho = h_x. \tag{3.13}$$

Воспользовавшись тем, что (см. [5]) плотности законов сохранения J–S-систем являются однородными полиномами от переменных u^i, v^i и их производных по x, квадратично зависящими от старших производных, можно убедиться в справедливости формулы (3.13). ■

Вопрос о том, допускают ли не попавшие в класс J–S-систем интегрируемые системы из [5] явные автопреобразования, пока остается открытым. Мы считаем, что ответ скорее отрицателен. Так, например, нам не удалось найти явного автопреобразования для хорошо известного векторного уравнения Шредингера (см. [6])

$$U_t = U_{xx} - 2\langle U, V\rangle U, \qquad V_t = -V_{xx} + 2\langle U, V\rangle V, \tag{3.14}$$

где $U = (u^1, \ldots, u^N)^T$, $V = (v^1, \ldots, v^N)^T$, $\langle , \rangle$ – обычное скалярное произведение. Отметим, что тем не менее любая интегрируемая система вида (2.13) из [5] имеет некоторое неявное преобразование Беклунда (см. [11]).

4. ЙОРДАНОВЫ ОБОБЩЕНИЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ (J–T-СИСТЕМЫ)

Этот раздел посвящен многополевым обобщениям бесконечной цепочки Тоды.

Точно так же, как в разделе 1 мы поступили с автопреобразованием (1.2), интерпретируем преобразование (3.7) как систему дискретно-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_{nxx} - \left\{ U_{nx} \circ P(U_n)^{-1} U_n \circ U_{nx} \right\} - \left\{ U_n \circ V_n \circ U_n \right\}, \\ V_{n+1} &= -P(U_n)^{-1} U_n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Исключив из (4.1) V_n, получаем многополевое дискретно-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} U_{nxx} = \left\{ U_{nx} \circ P(U_n)^{-1} U_n \circ U_{nx} \right\} &+ U_{n+1} \\ - \left\{ U_n \circ P(U_{n-1})^{-1} U_{n-1} \circ U_n \right\}&. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. *Всякой йордановой алгебре с единицей соответствует система дискретно-дифференциальных уравнений* (4.2), *которая имеет бесконечную серию высших симметрий и локальных законов сохранения.* ■

Системы вида (4.2) являются йордановыми обобщениями бесконечной цепочки Тоды (1.7) (легко видеть, что (1.7) получается из формулы (4.2) в случае тривиальной одномерной йордановой алгебры). Мы будем называть их J–T-системами.

ПРИМЕР 4.1. Соответствующая йордановой алгебре $J_{\mathrm{Mat}(N,N)}$ J–T-система имеет вид

$$U_{nxx} - U_{nx}U_n^{-1}U_{nx} = U_{n+1} - U_n U_{n-1}^{-1} U_n, \tag{4.3}$$

или, что то же самое,

$$(U_{nx}U_n^{-1})_x = U_{n+1}U_n^{-1} - U_n U_{n-1}^{-1}. \tag{4.4}$$

Она представляет собой не что иное, как хорошо известную матричную цепочку Тоды. ■

Еще один пример J–T-системы приведен в примере 1.1 (см. формулу (1.12)).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 4.1. Как уже говорилось, всякая J–S-система обладает как бесконечной серией высших симметрий, так и бесконечной серией локальных законов сохранения. С другой стороны, по симметриям и законам сохранения J–S-системы можно строить симметрии и законы сохранения соответствующей J–T-системы.

При построении симметрий мы опираемся на тот факт, что симметрия

$$U_\tau = F(U, V, U_x, V_x, \ldots), \qquad V_\tau = G(U, V, U_x, V_x, \ldots) \tag{4.5}$$

J–S-системы (2.7) инвариантна относительно преобразования (3.7) (см. предложение 3.1). Это эквивалентно тому, что многополевая цепочка

$$\begin{aligned} U_{n\tau} &= F(U_n, V_n, U_{nx}, V_{nx}, \ldots), \\ V_{n\tau} &= G(U_n, V_n, U_{nx}, V_{nx}, \ldots), \end{aligned} \tag{4.6}$$

полученная из (4.5) в результате перехода к переменным U_n, V_n, является симметрией цепочки (4.1). Симметрия J–T-системы (4.2) получается из (4.6), если выразить переменные $V_n, V_{nx}, V_{nxx}, \ldots$ через переменные $U_n, U_{nx}, U_{nxx}, \ldots$, пользуясь формулой

$$V_n = -P(U_{n-1})^{-1}U_{n-1} \tag{4.7}$$

(см. (4.1)). Заметим наконец, что старшие производные $U_{nxx}, U_{nxxx}, \ldots$ можно исключить при помощи (4.2). В результате по симметрии J–S-системы мы строим симметрию $U_{n\tau} = H_n$ соответствующей J–T-системы, правая часть H_n которой зависит только от переменных

$$U_n, U_{nx}, U_{n\pm1}, U_{n\pm1,x}, U_{n\pm2}, U_{n\pm2,x}, \ldots. \tag{4.8}$$

Уточним, что под локальным законом сохранения цепочки (4.2) понимается соотношение вида

$$(r_n)_x = s_{n+1} - s_n. \tag{4.9}$$

Здесь r_n, s_n – функции конечного числа переменных (4.8), r_n дифференцируется в силу (4.2). При построении локальных законов сохранения J–T-системы мы используем то обстоятельство, что для любой плотности ρ локального закона сохранения J–S-системы имеет место соотношение вида (3.13) (см. предложение 3.2). Переходя к переменным U_n, V_n и исключая $V_n, V_{nx}, V_{nxx}, \ldots$ при помощи формулы (4.7), мы получаем из (3.13) локальный закон сохранения (4.9) для J–T-системы (4.2). Ясно, что в результате этих операций плотность ρ переходит в функцию s_n, а функция h – в плотность r_n. ■

Заметим, что можно двигаться и в обратном направлении. А именно, по высшим симметриям и локальным законам сохранения J–T-системы можно строить симметрии и законы сохранения соответствующей J–T-системы (см. [1,12]).

Пример 4.2. По очевидным причинам для построения простейшей высшей симметрии J–T-системы (4.2) мы имеем право использовать в качестве исходной симметрии J–S-систему (2.7). Таким образом, одна из симметрий J–T-системы (4.2) имеет вид

$$U_{nt} = \left\{U_{nx} \circ P(U_n)^{-1} U_n \circ U_{nx}\right\} + U_{n+1} + \left\{U_n \circ P(U_{n-1})^{-1} U_{n-1} \circ U_n\right\}. \tag{4.10}$$

В случае матричной цепочки Тоды (4.4) она становится цепочкой

$$U_{nt} = U_{nx} U_n^{-1} U_{nx} + U_{n+1} + U_n U_{n-1}^{-1} U_n.$$

Еще одну симметрию J–T-системы читатель без труда может выписать самостоятельно, взяв за основу простейшую высшую симметрию (2.14) J–S-системы (2.7). ■

Пример 4.3. В случае матричного нелинейного уравнения Шредингера (2.9) первая из плотностей (2.15)–(2.17) имеет вид $\rho_1 = \mathrm{tr}(UV)$. Этой плотности соответствует функция $h_1 = -\mathrm{tr}(U_x U^{-1})$ (находится непосредственно из соотношения (3.13)). Описанная схема приводит к закону сохранения (4.9) матричной цепочки Тоды (4.4) с $r_n^1 = \mathrm{tr}(U_{nx} U_n^{-1})$, $s_n^1 = \mathrm{tr}(U_n U_{n-1}^{-1})$. Этот закон сохранения без труда можно получить прямо из (4.4). Не столь очевиден ответ, если использовать плотность $\rho_2 = \mathrm{tr}(UV_x)$. Здесь

$$r_n^2 = \mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}(U_{nx} U_n^{-1})^2 + U_n U_{n-1}^{-1}\right], \qquad s_n^2 = -\,\mathrm{tr}\left[U_n (U_{n-1}^{-1})_x\right].$$

В случае векторной J–S-системы (1.9) первые две плотности из (2.15)–(2.17) могут быть записаны следующим образом: $\rho_1 = \langle U, V\rangle$, $\rho_2 = \langle U, V_x\rangle$. Им соответствуют законы сохранения (4.9) векторной цепочки (1.12) с

$$\begin{aligned}
r_n^1 &= \langle U_n, U_n\rangle^{-1} \langle U_n, U_{nx}\rangle, \\
s_n^1 &= \langle U_{n-1}, U_{n-1}\rangle^{-1} \langle U_n, U_{n-1}\rangle, \\
r_n^2 &= \langle U_{n-1}, U_{n-1}\rangle^{-1} \langle U_n, U_{n-1}\rangle + \langle U_n, U_n\rangle^{-2} \langle U_n, U_{nx}\rangle^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle U_n, U_n\rangle^{-1} |U_{nx}|^2, \\
s_n^2 &= -\left\langle U_n, (\langle U_{n-1}, U_{n-1}\rangle^{-1} U_{n-1})_x \right\rangle. \ ■
\end{aligned}$$

Список литературы

[1] *Шабат А.Б., Ямилов Р.И.* // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. №2. С. 183–208.
[2] *Leznov A.N., Shabat A.B., Yamilov R.I.* // Phys. Lett. A. 1993. V. 240. P. 548–552.
[3] *Leznov A.N.* Bäcklund transformation for integrable systems: Prepint IHEP 92–87. Protvino: IHEP, 1992.
[4] *Fordy A.P., Kulish P.* // Commun. Math. Phys. 1983. V. 89. P. 427–443.
[5] *Svinolupov S.I.* // Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 559–575.
[6] *Манаков С.В.* // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 505–525.
[7] *Koecher M.* Jordan algebras and their applications. / Lecture Notes: University of Minesota, 1969.
[8] *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras / Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 39. Providence, R.I. 1968.
[9] *Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
[10] *Loos O.* Jordan Pairs // Lecture notes in mathematics. V. 460. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975.
[11] *Svinolupov S.I., Yamilov R.I.* // Phys. Lett. A. 1991. V. 160. P. 548–552.
[12] *Shabat A.V., Yamilov R.I.* // Phys. Lett. A. 1988. V. 130. №4–5. P. 271–275.

Институт математики
Уральского научного центра
Российской академии наук

Поступила в редакцию
13.I.1993г.

S. I. Svinolupov, R. I. Yamilov

EXACT AUTOTRANSFORMATIONS FOR MULTIFIELD SCHRÖDINGER EQUATIONS AND JORDAN GENERALIZATIONS OF THE TODDA CHAIN

For multifield analogs of the nonlinear Schrödinger equation corresponding to the unital Jordan algebras the Bäcklund transformations are found. These transformations turn out to be the exact inverse autotransformations and by this fact they are convenient for constructing exact solutions. It is found that these autotransformations are in correspondence with multifield discrete – differential equations generalizing the infinite dimensional Todda chain. The simple construction by which in every unital Jordan algebra the multifield analogs of the infinite dimensional Todda chain can be constructed is pointed out. New examples of such chains are given.