

Академия наук СССР
Башкирский филиал
Отдел физики и математики

А.Б.Вобст, Т.И.Вилков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА I И II МАТРИЦЫ
НАПРАВЛЕНИЯ

Препринт доклада Президиуму Башкирского
Филиала АН СССР

Уфа - 1961 г.

Интегрируемость системы уравнений $u_{i\bar{j}} = F(u)$ определяется свойствами характеристической алгебры Ли, задаваемой векторным полем $F(u)$ (см. [5]). В связи с этим возникает задача о классификации конечномерных (тип I) и допускающих конечномерное представление (тип II) характеристических алгебр. Мы рассмотрим экспоненциальные системы уравнений (ср. [5]). Экспоненциальная система с матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ записывается в виде

$$u_{i\bar{j}} = e^{v^i}, \quad v^i = a_{i1}u^1 + \dots + a_{in}u^n, \quad i=1, \dots, n \quad (I)$$

Если A - матрица Картана простой алгебры Ли, то эта система интегрируется в квадратурах (см. [3], [4]).

Относительно системы уравнений (I) с произвольной матрицей A в работе [5] высказана гипотеза о совпадении характеристической алгебры $\chi(A)$ с порожденной положительными корнями подалгеброй $G_+(A)$ контрагредиентной алгебры Ли канонически ассоциированной с матрицей A . Известно (см. [2]), что контрагредиентная алгебра Ли конечномерна тогда и только тогда, когда матрица A эквивалентна одной из матриц Картана простой алгебры Ли. Наша работа посвящена доказательству аналогичного утверждения для характеристических алгебр. Доказательство проводится на основе исследования разрешимости характеристического уравнения и допускает обобщение на случай систем типа II (ср. [5]). Если матрица коэффициентов системы (I) является матрицей Картана, то совпадение алгебр $\chi(A)$ и $G_+(A)$ проверяется непосредственно.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА I И МАТРИЦЫ КАРТАНА. А.Б.Шабат.
Р.И.Ямалов. Башкирский филиал АН СССР, 1981.

Рассматриваются экспоненциальные системы уравнений с частными производными интегрируемые в квадратурах. На основе исследования структуры алгебры Ли-Беклунда, допускаемой экспоненциальной системой, устанавливается, что список интегрируемых систем определяется матрицами Картана простых конечномерных алгебр Ли.

§ I. Описание конечномерных характеристических алгебр.

Нашей целью является описание конечномерных характеристических алгебр $\chi(A)$, соответствующих невырожденным матрицам A .

Элементами алгебры $\chi(A)$ являются операторы вида $\sum_{j=1}^n \{u_j, u_1, \dots, u_n\} \partial / \partial u_j$ в пространстве переменных $u_j = (u_j^1, \dots, u_j^r)$, $j \geq 1$. Образующие $X_1, \dots, X_r$ алгебры $\chi(A)$ определяются соотношениями

$$X_j D = (D + a_j) X_j, \quad X_j u_i^r = \delta_{ij}^r, \quad (2)$$

где $D: u_j \mapsto u_{j+1}$, $a_j = a_{j1} u_1^r + \dots + a_{jr} u_r^r$. Как векторное пространство характеристическая алгебра порождается кратными коммутаторами следующего специального вида

$$X_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \text{ad}_{\alpha_1} \dots \text{ad}_{\alpha_{n-1}} X_{\alpha_n}, \quad \text{ad}_{\alpha_j}: Y \mapsto [X_j, Y] \quad (3)$$

п. I. Формулировка классификационной теоремы. Условие невырожденности матрицы A системы уравнений (I) удобно заменить условиями

$$a_{11} = 2, \quad a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0, \quad a_{ij} = 0, -1, -2, \dots \quad (i, j = 1, \dots, r) \quad (4)$$

Матрицу, удовлетворяющую этим условиям (возможно вырожденную), будем называть обобщенной матрицей Картана. Покажем, что соотношения (4) являются следствием конечномерности алгебры $\chi(A)$ и условия $\det A \neq 0$.

Конечномерность характеристической алгебры означает равенство нулю коммутаторов (3) достаточно большого порядка n . Это следует из разложения

$$\chi(A) = \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \dots \oplus \chi_n \oplus \dots,$$

где χ_j — линейное подпространство, натянутое на коммутаторы порядка j . $\chi_j \cap \chi_\alpha = \{0\}$, так как коэффициенты $X_\alpha u_i^r$ оператора $X_\alpha \in \chi_\alpha$ являются обобщенно однородными полиномами степени $m - n$. Для операторов $X_1, \dots, X_r \in \chi_1$ это справедливо в силу формулы (2), а для коммутаторов (3) в силу общей формулы:

$$X_\alpha D = (D + a_{\alpha 1} + \dots + a_{\alpha n}) X_\alpha + X_{[\alpha]}, \quad (5)$$

$$X_{[\alpha]} = -a_{\alpha n+1} X_{\alpha/\alpha_n} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j X_{\alpha/\alpha_j}, \quad c_j = \sum_{k=j+1}^n a_{\alpha_k} \alpha_j^k,$$

где α/α_j — мультииндекс, полученный из α зачеркиванием компоненты с номером j .

Формула (5) дает, в частности, соотношение

$$X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} u_n = X_{[\alpha]} u_{n-1}, \quad n \geq 2 \quad (6)$$

из которого следует, что при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} (\text{ad}_j^n X_\alpha) u_{n+1}^i &= n(a_{\alpha j} + \frac{n-1}{2} a_{jj}) \text{ad}_j^{n-1} X_\alpha u_n^i = \dots = \\ &= n! \prod_{p=2}^n (a_{\alpha j} + \frac{p-1}{2} a_{jj}) X_j u_2^i = n! \prod_{p=2}^n (a_{\alpha j} + \frac{p-1}{2} a_{jj}) (a_{\alpha j} \delta_\alpha^i - a_{\alpha j} \delta_j^i) \end{aligned} \quad (7)$$

Пологая $a_{jj} = 0$, получаем

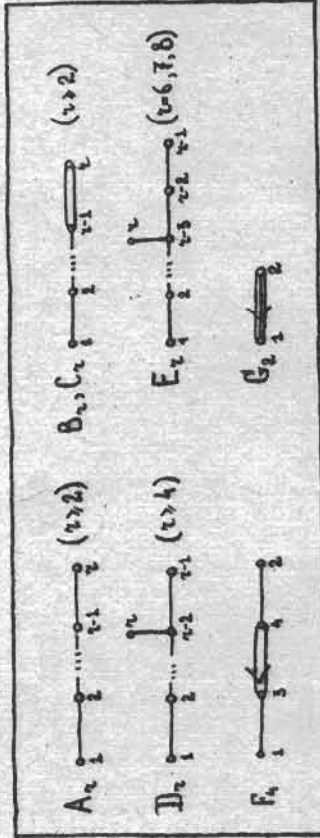
$$\text{ad}_j^n X_\alpha u_{n+1}^i = n! (a_{\alpha j})^{n-1}$$

Таким образом для конечномерной алгебры из $c_{jj} = 0$ следует $a_{\alpha j} = a_{j\alpha} = \dots = a_{jj} = 0$, что противоречит невырожденности матрицы A . Итак, можно положить $a_{jj} = 2 \quad \forall j = 1, \dots, r$. Формула (7) при $i = j$ дает $a_{j\alpha} (a_{\alpha j} + 1)(a_{\alpha j} + 2) \dots (a_{\alpha j} + n) = 0, \quad n \gg 1$. Соотношения (4) доказаны.

Матрица A порядка n называется разложимой, если для некоторого разбиения множества индексов $\{1, \dots, n\} = J_1 \cup J_2$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ элементы матрицы A удовлетворяют условиям $a_{ij} = 0$, $i \in J_1, j \in J_2$. Система уравнений (I) с разложимой матрицей A распадается на две независимые подсистемы. Матрицы систем уравнений (I), отличающихся только нумерацией переменных, будем называть эквивалентными.

Теорема (описание конечномерных характеристических алгебр). Неразложимая обобщенная матрица Картана с конечномерной характеристической алгеброй эквивалентна матрице Картана простой алгебры Ли (см. таблицу I).

Таблица I



В таблице I приведены графы (схемы Динкина) матриц Картана. Вершины графа пронумерованы. Ребро $\{i, j\}$ соединяет вершины с номерами i, j , если $a_{ij} a_{ji} \neq 0$. Указанные в таблице графы однозначно определяют матрицы Картана (ср. [1], стр. 244, 302-319). Кратность ребра $\{i, j\}$ указывает на величину произведения $a_{ij} a_{ji} = 1, 2, 3$. Стрелка определяет место элемента, не равного (-1). Отметим, что перестановке $u^i \leftrightarrow u^j$ переменных соответствует перестановка $i \leftrightarrow j$ вершин графа.

Замечание. Конечномерность характеристической алгебры, соот-

ветствующей одной из матриц Картана следует из соотношения

$$\alpha \Delta_j^i \chi_k = 0, \quad j \neq k$$

(см. (7)). Действительно, аналогичные соотношения полностью определяют порожденную положительными корнями подалгебру $\mathfrak{G}_+$ конечномерной алгебры Ли, которая является конечномерной в случае матриц Картана (см. [2]).

Классификационная теорема будет доказана в § 2. Как уже говорилось, доказательство основано на исследовании свойств характеристического уравнения.

п.2. Характеристическое уравнение. Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} W(u_1, \dots, u_n) = 0 \quad (8)$$

называется характеристическим уравнением системы $\dot{u}_i = F^i(u^1, \dots, u^n)$,

$i = 1, 2, \dots, n$. Оператор

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = F(u) \frac{\partial}{\partial u_1} + F_2(u) \frac{\partial}{\partial u_2} + F_3(u) \frac{\partial}{\partial u_3} + \dots \quad (9)$$

определяет характеристическую алгебру Ли $\chi(F)$ этой системы. Образующими алгебры $\chi(F)$ являются операторы вида (9), отвечающие различным значениям параметра $u = (u^1, \dots, u^n)$. Легко видеть, что в случае экспоненциальной системы (I), соответствующей обобщенной матрице Картана, так определенная характеристическая алгебра совпадает с алгеброй Ли, порожденной операторами (2).

Лемма I. Характеристическое уравнение (8) системы с конечномерной алгеброй $\chi(F)$, $F = (F^1, \dots, F^n)$, имеет n решений

$$W^k = W^k(u_1, \dots, u_n), \quad k = 1, \dots, n$$

удовлетворяющих условию независимости в главном

$$\det \left[\frac{\partial w^1}{\partial u_{n_1}}, \dots, \frac{\partial w^r}{\partial u_{n_r}} \right] \neq 0$$

Доказательство. Оператор $D = \partial/\partial z$ переводит решение уравнения (8) снова в решение. Определим числа $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ по индукции. Число n_1 выбирается минимальным из множества чисел n , для которых существует нетривиальное решение порядка n : $w = w(u_1, \dots, u_n)$, $\partial w / \partial u_{n_1} \neq 0$, характеристического уравнения. Решение порядка n_1 обозначим w^1 и выберем число $n_2 \gg n_1$ наименьшее, для которого существует решение w^2 порядка n_2 функционально независимое с w^1 , $Dw^1, \dots$. Решение w^3 порядка n_3 строится независимым от $w^1, w^2, Dw^1, Dw^2, \dots$ и т.д.

Существование решений $w^i, i=1, \dots, r$ следует из условия конечности. Действительно, обозначим через $\mathcal{X}^n = \mathcal{X}^n(f)$ алгебру Ли, порожденную операторами (9) в пространстве функций $w = w(u_1, \dots, u_n)$ и через $\mathcal{X}(n)$ — размерность векторного пространства $[\mathcal{X}^n]$, образованного линейными комбинациями элементов $\mathcal{X}^n$ с коэффициентами из поля рациональных функций от $u_1, \dots, u_n$. Число $N(n)$ функционально независимых решений уравнения (8) выражается формулой (см. [6], стр. 16)

$$N(n) = r \cdot n - \mathcal{X}(n), \quad (10)$$

где $\mathcal{X}(n) \leq \dim \mathcal{X}^n \leq \dim \mathcal{X}(f)$. Остается заметить, что число $N_1(n)$ функционально независимых решений вида $f(D^i w^j)$, $j=1, \dots, r$, удовлетворяет неравенству $N_1(n) \leq \sum_{j=1}^r (n - n_j + 1)$, т.е. $N(n) > N_1(n)$ ($n \gg 1$) при $r_1 < r$.

Независимость в главном построенных решений доказывается переходом в специальную систему координат. Предполагая, что $\partial w^1 / \partial u_{n_1} \neq 0$, сделаем замену $u_{n_1+k} \leftrightarrow D^k w^1$, $k \geq 0$. В новой

системе координат $\partial w^1 / \partial u_{n_1} = \delta_{i_1}^{i_1}$. Если $\partial w^1 / \partial u_{n_2} = 0$ $\forall i_1 \neq i_2$, то функция

$$w^2 = f(u_1, u_2, \dots, u_{n_2-1}, u_{n_2})$$

при любом фиксированном значении переменной $u_{n_2}^{i_1}$ является решением порядка $n_2 - 1$ характеристического уравнения и, в силу минимальности числа n_2 , функционально выражается через $D^k w^1$ (напомним, что $u_{n_2}^{i_1} = D^{n_2-n_1} w^1$). Таким образом $\partial w^2 / \partial u_{n_2}^{i_1} \neq 0$ при некотором $i_2 \neq i_1$. После замены $u_{n_2+k}^{i_2} \leftrightarrow D^k w^2$ ($k \geq 0$) имеем $\partial w^2 / \partial u_{n_2}^{i_2} = \delta_{i_2}^{i_2}$, $\partial w^2 / \partial u_{n_2}^{i_1} = \delta_{i_2}^{i_1}$ и т.д. Лемма 1 доказана.

Пусть $w^1, \dots, w^r$ решения характеристического уравнения указанные в лемме 1. Так как матрица $W = (\partial w^i / \partial u_{n_i}^{i_i})$, невырожденная в силу леммы 1, удовлетворяет уравнению $W \bar{z} = 0$, то вектор-функция

$$w^{(n)} = (D^{n-n_1} w^1, \dots, D^{n-n_r} w^r) W^{-1}$$

является решением того же уравнения. При $n \gg 1$

$$w^{(n)} = u_n + p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \dots \quad (11)$$

Подстановка (11) в (8) дает цепочку уравнений для последовательно-го определения матриц $p_1, p_2, \dots$. Для p_1 , в частности, имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} p_1 + \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \Rightarrow p_1 = p_1(u_i) + h, \quad h \bar{z} = 0$$

Ясно, что решение $w^{(n)} = w^{(n-1)} h$ имеет при $n \gg 1$ вид (11), и коэффициент при u_{n-1} зависит только от u_1 .

Выберем базис $\{X^i\}$ в множестве операторов (9), соответствующих различным значениям параметра u . Индукцией по номеру j докажем существование векторного решения вида (11), удовлетворяющего

шего условиям

$$P_j = P_j(u_1, \dots, u_j), \quad X^{a_1} X^{a_2} \dots X^{a_n} P_j = q(u_1, \dots, u_j - a_j). \quad (I2)$$

Предположим, что эти условия выполняются при $j < m$. Тогда для элемента φ матрицы P_m имеем

$$\varphi_{\bar{z}} = \varphi(u_1, \dots, u_{m-1}), \quad X^{a_1} \dots X^{a_n} \varphi = \omega(u_1, \dots, u_{m-k-1}) \quad (I3)$$

Для φ справедливо второе из условий (I2). Остается проверить, что из существования решения уравнения $\varphi_{\bar{z}} = \psi$ порядка $\ell > m$ следует существование решения порядка не выше m . Число решений порядка ℓ однородного уравнения $\partial\varphi/\partial\bar{z} = 0$ определяется, в силу формулы (I0), рангом $\alpha(\ell)$ матрицы, строки которой состоят из коэффициентов операторов X^i из X^ℓ и коэффициентов их кратных коммутаторов. С неоднородным уравнением связана расширенная матрица ранга $\alpha_1(\ell)$, соответствующая оператору $\partial/\partial\bar{z} + \psi \partial/\partial x$. Из существования решения порядка ℓ неоднородного уравнения и формулы (I0) следует равенство $\alpha_1(\ell) = \alpha(\ell)$. Пусть $\alpha_1(m) > \alpha(m)$ т.е. отсутствуют решения порядка m . Выберем $m+1$ линейно независимый столбец в расширенной матрице, соответствующей $[X^m]$. Дополнив этот набор до базиса в $[X^\ell]$ и заметив, что коммутаторы кратностей $m+1, m+2, \dots$ не содержат дифференцирования по дополнительной переменной x , приходим к соотношению $\alpha_1(\ell) = \alpha(\ell) + 1$. Полученное противоречие дает (I2).

Возвращаясь к экспоненциальным системам, формулируем основное свойство конечномерных характеристических алгебр $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots$.

Лемма 2. Пусть A — обобщенная матрица Кармана, $\dim X(A) < \infty$. Тогда любой конечный набор $\{X_{a_1} = X_{a_1} \dots a_m\} \subset X_m$ удовлетворяет условию:

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} X_{[\alpha]} = 0 \Rightarrow \sum_{\alpha} c_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^m a_{\alpha_k} \right) X_{\alpha} u_m^i = 0, \quad 1 \leq i \leq r$$

Доказательство. Рассмотрим решение вида (II) характеристического уравнения

$$\omega_{\bar{z}} = u_n^i + p_1 u_{n-1} + \dots + p_m u_{n-m} + \dots \quad (n \gg 1) \quad (I4)$$

Обозначив через φ одну из компонент вектора P_m , в силу (I2), (I3), имеем

$$\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_m), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0$$

После перехода в специальную систему координат (см. лемму I) этому уравнению

$$\partial\varphi/\partial u_m^i = \varphi_i, \quad \partial\varphi_i/\partial \bar{z} = 0, \quad 1 \leq i \leq r$$

нетрудно привести к виду, в котором $\varphi_i = 0$, если переменная u_m заменена на решение уравнения (8). В силу условий совместности оставшиеся $\varphi_i = \text{const}$, поэтому

$$\varphi = \text{const} \cdot u_m + \omega + \varphi_1(u_1, \dots, u_{m-1}), \quad \omega_{\bar{z}} = 0.$$

Иначе говоря (см. (6'))

$$X_{\alpha} P_m = X_{[\alpha]} P_m$$

Применив оператор $X = \sum c_{\alpha} X_{\alpha}$ к решению (I4), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= X \omega_{\bar{z}} = X u_n^i + (X p_m) u_{n-m} + \dots = \\ &= X u_n^i + \left(\sum c_{\alpha} X_{[\alpha]} P_m \right) u_{n-m} + \dots = X u_n^i + \dots \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем многоточные обозначает члены, зависящие только от переменных $u_1, \dots, u_{n-m-1}$. Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} X u_n^i &= X D u_{n-1}^i = D X u_{n-1}^i + \sum c_{\alpha} X_{[\alpha]} u_{n-1}^i + \dots = \\ &= D X u_{n-1}^i + \dots = D^2 X u_{n-2}^i + \dots = \dots = D^{n-m-1} X u_m^i + 1. \end{aligned}$$

Таким образом $X_{u_{m+1}} = 0$ и утверждение леммы следует из формулы (5).

§ 2. Доказательство классификационной теоремы.

Мы покажем, что для любой не содержащейся в таблице I матрицы A (неразложимой, удовлетворяющей условиям (4)), либо при некотором $n \leq 4$ $\dim \chi_{n+1}(A) > \dim \chi_n(A)$, и применима лемма 2, либо характеристическая алгебра $\chi(A)$ имеет бесконечномерную подалгебру, соответствующую вырожденной матрице. Тем самым будет доказана классификационная теорема (§ 1.1).

п.1. Условия конечномерности подалгебр с 2 или 3 образующими. Пусть A - неразложимая обобщенная матрица Картана порядка $r=2$. В силу формулы (5)

$$X_{[112]} = 2(1+a_{21})X_{12}, \quad X_{[212]} = 2(1+a_{12})X_{12}.$$

Лемма 2 дает

$$\begin{aligned} (1+a_{12})(2a_1+a_2)X_{112}u_3 - (1+a_{21})(a_1+2a_2)X_{212}u_3 = \\ = (1+a_{12})a_1X_{112}u_3 - (1+a_{21})a_2X_{212}u_3 = 0 \end{aligned}$$

В силу формулы (6)

$$X_{112}u_3 = 2(1+a_{21})X_{12}u_2, \quad X_{212}u_3 = 2(1+a_{12})X_{12}u_2.$$

Поэтому

$$(1+a_{12})(1+a_{21})(a_1-a_2)X_{12}u_2 = 0$$

Так как неразложимость матрицы A означает $X_{12}u_2 \neq 0$, то $(1+a_{12})(1+a_{21}) = 0$

Пологая, для определенности, $a_{12} = -1$, получаем $X_{212} = X_{2112} = 0$ и

$$X_{[1112]} = 4(3+a_{21})X_{112}, \quad X_{[2112]} = -X_{112}$$

Лемма 2 дает

$$(1+a_{21})(2+a_{21})(3+a_{21}) = 0$$

Полученный результат обобщается. Рассматривая подалгебры с двумя образующими, убеждаемся, что справедливо следующее

Предложение 1. Элементы обобщенной матрицы Картана $A = (a_{ij})$ с конечномерной характеристической алгеброй удовлетворяют условию

$$\forall i \neq j \quad a_{ij}a_{ji} = 0, 1, 2, 3$$

Доказанное утверждение исчерпывает вопрос о классификации матриц второго порядка (ср. табл. I).

Предложение 2. Элементы неразложимой обобщенной матрицы Картана $A = (a_{ij})$ ($r > 2$, $\dim \chi(A) < \infty$) удовлетворяют условию: $a_{ij}a_{ji} \neq 3$.

Доказательство. Достаточно, рассматривая матрицу $A = (a_{ij})$ порядка 3 с элементами $a_{12} = -3, a_{23} = -1$, показать, что $a_{12} + a_{13} = 0$. Проверим следующее:

$$a_{12}a_{13} \neq 0 \Rightarrow a_{12}a_{21}, a_{13}a_{31} \neq 2, 3$$

Если $a_{12}a_{21} = 2, 3$, то

$$2(a_{12}-a_{21})[3X_{[212]} + (a_{12}-3)X_{[123]}] +$$

$$+ [3(a_{13}-1)+a_{12}](X_{[112]}+X_{[211]}) + cX_{[223]} = 0$$

при подходящем выборе постоянной c . Пологая $i=1$ в лемме 2, находим

$$(3a_{13}+a_{12}-3)[(a_{12}-a_{31})X_{112}u_1^2 + (a_{12}-a_{31})X_{221}u_1^2] = 0.$$

Лемма 2 дает

$$(a_i - a_k) X_{ij} u_3^d + (a_j - a_k) X_{ji} u_3^d = 0,$$

где, в силу формулы (6), $(X_{ij} u_3^d)(X_{ji} u_3^d) = 0$. Получено противоречие.

Завершим классификацию матриц третьего порядка. В силу доказанного выше $a_{ij} a_{ji} \leq 2$. В случае $\max a_{ij} a_{ji} = 2$ ровно один внедиагональный элемент равен -2. Полагая $a_{32} = -2$. При $a_{12} a_{13} = 0$ неразложимая матрица A эквивалентна одной из матриц Картана B_3, C_3 . При $a_{12} a_{13} \neq 0$

$$10 X_{[1312]} + 12 X_{[2312]} - 6 X_{[3512]} - 3 X_{[2215]} + 5 X_{[1225]} = 0 \quad (15)$$

Вспользовавшись леммой 2 убеждаемся в бесконечности характеристической алгебры этой матрицы. В случае $\max a_{ij} a_{ji} = 1$ матрица A эквивалентна матрице Картана A_3 при $a_{12} a_{13} a_{23} = 0$. Наконец, если $a_{12} a_{13} a_{23} \neq 0$, то $a_{12} = a_{13} = a_{23} = -1$ и A совпадает с матрицей M_3^1 третьего порядка из таблицы 2 (см. п.2) матриц с бесконечной алгеброй.

п.2. Стандартные бесконечномерные подалгебры. Доказательство классификационной теоремы сводится к отысканию бесконечных подалгебр. В процессе доказательства выясняется, что любая бесконечная характеристическая алгебра, удовлетворяющая перечисленным в предложениях 1.2,3 условиям, содержит подалгебру, соответствующую одной из матриц таблиц 2,3.

Получено противоречие, так как $3a_{13} + a_{12} - 3 < 0$ и один из операторов X_{12}, X_{21} равен нулю. Аналогично приводится к противоречию предположение $a_{13} a_{31} = 2, 3$.

Докажем теперь, что $a_{12} a_{13} = 0$. В противном случае

$$a_{12} a_{21} = a_{13} a_{31} = 1, \text{ и}$$

$$X_{[1223]} - X_{[2225]} - 2 X_{[1125]} = 0,$$

что противоречит условию конечности, так как при $l=1$ в лемме 2, имеем $(a_{11} - a_{22}) X_{123} u^3 = 0$.

Если $a_{12} a_{21} = 0$, $a_{13} a_{31} > 1$, то тождество

$$X_{[123]} + \frac{1}{4} a_{31} X_{[225]} + \frac{3}{8} (a_{31} - a_{13})^{-1} (X_{[115]} + X_{[351]}) = 0$$

приводит к противоречию с условием $\dim \chi(A) < \infty$. Аналогично исключается случай $a_{13} a_{31} = 0$, $a_{12} a_{21} > 1$.

Осталось рассмотреть две матрицы с элементами $a_{12} a_{21} = 1$, $a_{13} a_{31} = 0$ и $a_{13} a_{31} = 1$, $a_{12} a_{21} = 0$, соответственно. Графы этих матриц содержатся в таблице 3 (см. п.2) вырожденных матриц с бесконечномерной характеристической алгеброй (первая матрица совпадает с N^2 , вторая переводится в N^1 заменой $u^2 \leftrightarrow u^3$). Доказательство закончено.

Предложение 3. Пусть $A = (a_{ij})$ - неразложимая обобщенная матрица Картана порядка $n \geq 3$, $\dim \chi(A) < \infty$. Тогда $a_{ij} a_{ji} = 2 \Rightarrow a_{ik} a_{ki}, a_{jk} a_{kj} \neq 2, k \neq i, j$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $a_{ij} a_{ji} = a_{ik} a_{ki} = 2$. Тогда

$$X_{[kij]} + \frac{a_{ji}}{a_{ki}} X_{[jik]} - \frac{2 + a_{jk} a_{ki} + a_{ji} a_{ik}}{2 a_{ki} (3 + 2 a_{ji})} (X_{[ij]} + X_{[jil]}) - \\ - \frac{2 + a_{ij} a_{ji} + a_{ki} a_{ik}}{2 a_{ki} (3 + 2 a_{ki})} (X_{[ilk]} + X_{[kli]}) = 0$$

Таблица 2

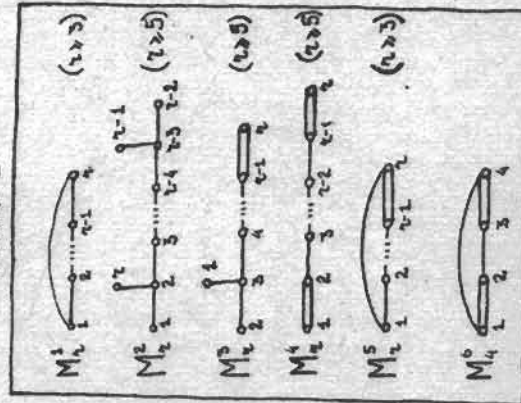
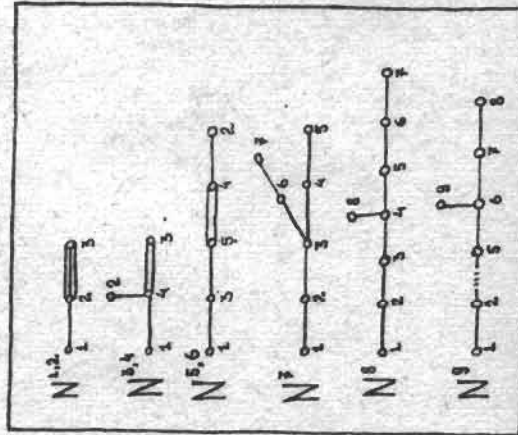


Таблица 3



Матрицы условно разделены на две таблицы. Бесконечность алгебр матриц таблицы 2 доказывается при помощи леммы 2 из § 1. Матрицы, для которых применение леммы 2 затруднительно или невозможно, отнесены в таблицу 3 вырожденных матриц (бесконечность соответствующих алгебр проверяется отдельно).

Имея в виду таблицу 2, выпишем соотношения $\sum c_{\alpha} X_{[\alpha]} = 0$, указавшие на применимость леммы 2. При использовании леммы 2 некоторые коэффициенты не осуществлены (ср. доказательство предл. 3); они не выписаны в явном виде.

$$M_1^1: X_{[v,1]} + \sum_{k=1}^{v-1} X_{[k, k+1]} = 0,$$

$$M_2^1: \sum_{k=3}^{v-4} X_{[k-1, k, k+1]} + \frac{1}{2} (X_{[1,2]} + X_{[3,2]} - X_{[1,2]} - X_{[1,2]}) -$$

$$- \frac{1}{2} (X_{[v-1, v-3, v-2]} - X_{[v-1, v-3, v-4]} - X_{[v-4, v-3, v-2]}) = 0, \quad v \geq 6,$$

$$M_3^1: X_{[3,12]} - X_{[5,12]} + X_{[4,23]} - X_{[5,24]} = 0,$$

$$M_4^1: X_{[1,23]} + X_{[1,34]} + X_{[2,34]} + 2 \sum_{k=4}^{v-2} X_{[k-1, k, k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[v-2, v-1, v]} + c_2 (X_{[v-1, v-1, v]} + X_{[v, v, v-1]}) = 0,$$

$$M_5^1: -(3+2a_{21})^{-1} (X_{[1,12]} + X_{[1,21]}) + 2X_{[2,2]} + 2a_{21} \sum_{k=3}^{v-2} X_{[k-1, k, k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[v-1, v-1, v]} + c_2 (X_{[v-1, v-1, v]} + X_{[v, v, v-1]}) = 0,$$

$$M_6^1: X_{[1,12]} + \frac{1}{a_{v,v-1}} X_{[v-1, 1, v]} + \sum_{k=2}^{v-2} X_{[k-1, k, k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[v-2, v-1, v]} + c_2 (X_{[v-1, v-1, v]} + X_{[v, v, v-1]}) = 0, \quad v \geq 4,$$

$$M_7^1: -\frac{a_{34}}{6+4a_{21}} (X_{[1,12]} + X_{[2,2]}) + a_{34} X_{[1,3]} + a_{21} X_{[2,34]} +$$

$$+ c (X_{[3,34]} + X_{[4,43]}) = 0.$$

Замечание. Применимость леммы для матрицы M_5^1 из таблицы проверена ранее (см. (15)).

Вырожденные матрицы из таблицы 3 рассматриваются единообразно. Для любой матрицы N^m , $1 \leq m \leq 9$ функции v^k (см. (1)) связаны линейной зависимостью вида $v^k = c_1 v^{k-1} + \dots + c_{v-1} v^{k-v+1}$, т.е. полученная из (1) система уравнений

$$v_{v-2}^k = \sum_{i=1}^v c_i v_i^k = F^k, \quad 1 \leq k \leq v-1,$$

является замкнутой. В предположении конечномерности алгебры $\chi(N^n)$ характеристическое уравнение этой системы имеет $\nu-1$ решение (см. (II), (I2)):

$$w_i = v_n^i + \sum_{j,k=1}^{n-1} c_k^j v_k^j v_{n-1}^j + \dots$$

Отсюда

$$\frac{\partial F^i}{\partial v^j} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k^j F^k = 0 \quad (I6)$$

Для приведенных в таблице матриц соотношение (I6) при $i=j=1$ приводит к противоречию. Например для матрицы N^2 ($a_{21}=-5$)

$$F^1 = 2e^1 - e^2, \quad F^2 = -e^1 + 2e^2 - e^3, \quad v^3 = -v^1 - 2v^2,$$

$$\frac{\partial F^1}{\partial v^1} = 2e^1 = -c_1^1 F^1 - c_2^1 F^2,$$

что противоречит линейной независимости функций $\exp v^1, F^1, F^2$.
п.3. Случай $\max a_{ij} a_{ji} = 2$. При изучение подалгебр характеристической алгебры $\chi(A)$ возникает вопрос о неразложимости матрицы $A_{i_1, \dots, i_k}$, составленной из элементов матрицы A , лежащих на пересечении строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_k$. Алгебра $\chi(A_{i_1, \dots, i_k})$ имеет образующими операторы $\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_k}$.
Лемма. Для неразложимой матрицы A порядка n существует нумерация переменных $u^1, \dots, u^z$, в которой матрица $A_{2,3, \dots, z}$ также неразложима.

Доказательство. Предположим, что матрица $A_{k, k+1, \dots, z}$ ($k \leq z$) неразложима. В силу неразложимости матрицы A найдется элемент $a_{ij} \neq 0$, $i < k$, $j \geq k$. После перестановки $u^i \leftrightarrow u^{k-1}$ получаем неразложимую матрицу $A_{k-1, k, \dots, z}$.

Предложение 4. В случае $\max a_{ij} a_{ji} = 2$ утверждение класси-

фикационной теоремы справедливо при дополнительном предположении: $a_{i, i-1} = -2$, $a_{ij} = 0, i > 1$ при $(i, j) \neq (z, z-1)$.

Доказательство проводится индукцией по порядку n матрицы A . Предположим, что при $n < n$ ($n \geq 5$) утверждение доказано.

Можно считать, что матрица $A_{2,3, \dots, n}$ совпадает с одной из матриц Картана B_{n-1}, C_{n-1} (см. лемму).

Рассмотрим элементы первой строки матрицы A и предположим, что $a_{12} + \dots + a_{1n} \neq 0$. Если при $i: j > 2$ $a_{1i} a_{1j} \neq 0$, то $\dim \chi(A) = \infty$, так как матрица $A_{1,2, \dots, n}$ отличается от матрицы Картана лишними минус единицами в первой строке, т.е. граф имеет узел (см. табл. I). Итак существует только один ненулевой элемент a_{1i} , $i > 2$.

При $a_{1i} \neq 0$, $2 < i < n$ рассмотрим матрицу $A_{1,2, \dots, i, \dots, n}$ порядка $n = n-i+2 > 4$. В этой матрице элемент $a_{1, i-1} = 0$, так как в противном случае подалгебра с образующими $\chi_1, \chi_{i-1}, \chi_i$ совпадает с алгеброй $\chi(M_2^3)$ (см. табл. 2). При $n=4$ матрица $A_{1,2, \dots, i, \dots, n}$ совпадает с одной из матриц N^3, N^4 таблицы 3, а при $n > 4$ с матрицей M_n^2 таблицы 2.

При $a_{1n} \neq 0$ матрица $A_{1,2, \dots, n-2, n-1, n}$ эквивалентна одной из вырожденных матриц N^5, N^6 таблицы 3. Таким образом у матрицы A с конечномерной алгеброй $a_{12} + \dots + a_{1n} = 0$.

Для завершения доказательства осталось рассмотреть матрицы порядков $n = 4, 5$. Если $A_{2,3, \dots, n}$ совпадает с B_{n-1} или C_{n-1} , то из приведенных выше соображений следует, что $a_{1i} = 0$, $2 < i < n$. При $a_{1n} = 0$, A - матрица Картана. При $a_{12} = -1$ матрица A эквивалентна одной из следующих: M_n^5 ($a_{12} \neq 0$), F_4 ($a_{12} = 0, n=4$), $N^{5,6}$ ($a_{12} = 0, n=5$). Пусть, наконец, $A_{2,3,4,5} = F_4$. Тогда $a_{13} + a_{14} + a_{15} \neq 0$, так как в противном случае $A \sim N^5$. Рассматривая матрицу $A_{1,3,4,5}$ убеждаемся в том, что либо $a_{13} = -1$,

$\alpha_{14} = \alpha_{15} = 0$; либо $\alpha_{14} = -1$, $\alpha_{13} = \alpha_{15} = 0$. Если $\alpha_{12} = -1$, то $A \sim M_5^5$ ($\alpha_{15} = -1$) , $A_{124} = M_3^1$ ($\alpha_{14} = -1$) . Если $\alpha_{12} = 0$, то $A = N^5$ ($\alpha_{15} = -1$) , $A_{1245} \sim N^2$ ($\alpha_{14} = -1$) . Предложение 4 доказано.

Предложение 5. Утверждение классификационной теоремы справедливо в случае $\max \alpha_{ij} \alpha_{ji} = 2$.

Доказательство. Пусть A - матрица порядка 4, удовлетворяющая условию $\alpha_{12} \alpha_{21} = \alpha_{34} \alpha_{43} = 2$. Остальные произведения $\alpha_{ij} \alpha_{ji} = 0, 1$ в силу предложения 3. При этом $\alpha_{13} \alpha_{31} = 0$ ($\alpha_{14} \alpha_{41} = 0$) , так как иначе $A_{134} (A_{124}) \sim M_3^1$. Аналогично $\alpha_{23} \alpha_{32} = \alpha_{13} \alpha_{31} = 0$ и, следовательно, рассматриваемая матрица A эквивалентна матрице с элементами такими, что

$$\alpha_{12} \alpha_{21} = \alpha_{34} \alpha_{43} = 2, \quad \alpha_{23} \alpha_{32} = 1, \quad \alpha_{13} = \alpha_{24} = 0$$

При $\alpha_{14} = -1$, $A = M_4^5$. Остается заметить, что соотношение $\sum c_k X_{[k]} = 0$, определявшее применимость леммы 2 из § I к матрице M_4^5 , остается справедливым при $\alpha_{14} = 0$. Легко видеть, что для матрицы A произвольного порядка из доказанного следует, что

$$\alpha_{ij} \alpha_{ji} = \alpha_{ik} \alpha_{kl} = 2 \Rightarrow \alpha_{ik} + \alpha_{kl} + \alpha_{jk} + \alpha_{jl} = 0 \quad (17)$$

Дальнейшее доказательство основано на предложении 4. Рассмотрим матрицу A порядка $n > 4$ с $m+1$ ($m > 0$) элементами $\alpha_{ij} = -2$. Выберем нумерацию (см. предл. 3), в которой

$$\alpha_{21} = \alpha_{43} = \dots = \alpha_{2m, 2m-1} = \alpha_{1, 2m-1} = -2.$$

Независимо от того, разложима матрица $A_{2m+1, \dots, n}$ или нет, существует нумерация входящих в нее переменных такая, что при некотором $k > 2m$ матрица $A_{k, k+1, \dots, n}$ неразложима и $\alpha_{ij} = 0$ при $j \geq k$, $2m < i < k$. Эта матрица удовлетворяет условиям

предложения 4 и эквивалентна, таким образом, одной из матриц Картана F_4 , $B_{2, 2, 1}$, $C_{2, 2, 1}$. Считаем в дальнейшем, что матрица $A_{k, \dots, n}$ имеет канонический вид, указанный в табл. I. В силу неразложимости матрицы A найдется номер $p < m$ такой, что $\alpha_{2p, q} + \alpha_{2p-1, q} \neq 0$ при некотором $k \leq q < n-1$. При $\alpha_{2p, q} + \alpha_{2p-1, q} = -2$ матрица $A_{2p-1, 2p, q}$ эквивалентна матрице M_3^5 , т.е. можно считать, что $\alpha_{2p, q} = -1$, $\alpha_{2p-1, q} = 0$. Выбрав q максимальным, перейдем к матрице $A_{2p-1, 2p, q, q+1, \dots, n}$ порядка пять или более. Легко проверить, что характеристическая алгебра этой матрицы имеет подалгебру, совпадающую с $\mathcal{X}(M_4^4)$. Предложение 5 доказано.

п. 4. Случай $\max \alpha_{ij} \alpha_{ji} = 1$.

Предложение 6. Утверждение классификационной теоремы справедливо в случае $\max \alpha_{ij} \alpha_{ji} = 1$.

Доказательство. Пусть предложение доказано для всех порядков $n < n$. Рассматривая матрицу A порядка n , считаем, как и в предл. 5, что матрица $A_{1, 2, \dots, n-1}$ совпадает с одной из матриц Картана. Покажем, что в последней строке матрицы A существует единственный элемент $\alpha_{n, k} = -1$ такой, что $k < n-1$. Действительно, если $\alpha_{n, k} = \alpha_{n, p} = -1$ при $k < p < n-1$, то граф матрицы $A_{1, 2, \dots, n-2, n}$ порядка, меньшего n , содержит цикл, что противоречит предположению индукции.

Случай I: $A_{1, 2, \dots, n-1} = A_{n-1}$. При $\alpha_{n, k} = \alpha_{n, n-1} = -1$ ($k < n-1$) матрица $A_{k, k+1, \dots, n} = M_{n-k-1}^1$. Следовательно только один из элементов $\alpha_{n, k}$ ($k=1, \dots, n-1$) последней строки матрицы A отличен от нуля. При $k \in \{1, n-1\} \cup \{2, n-2\}$, $n \geq 4$, матрица A эквивалентна A_n , D_n , соответственно. При $n = 6, 7, 8$ и $k \in \{3, n-3\}$ матрица A эквивалентна E_n . Таким образом осталось рассмотреть случаи: $3 < k < n-3$ ($n \geq 5$) , $k \in \{3, n-3\}$ ($n \geq 8$) .

При $3 < k < r-3$ ($r > 5$) вершина с номером k является точкой ветвления графа матрицы $A_{1,2,\dots,r-2,r}$. По предположению индукции $\dim \chi(A_{1,\dots,r-2,r}) = \infty$.

Если $k \in \{3, r-3\}$ ($r > 8$), то при $\alpha_{r-2,r-3} = -1$ матрица $A_{r-8,r-7,\dots,r} = N^9$. При $\alpha_{r-3} = -1$ рассуждения аналогичны.

Случай 2: $A_{1,2,\dots,r-1} = D_{r-1}$. Пусть $\alpha_{r-1} = \alpha_{r-1} = -1, k < r-1$. При $k < r-2$ матрица $A_{k,k+1,\dots,r-3,r-1,r} = M_{r-k-2}^1$, а при $k = r-2$ матрица $A_{r-3,r-2,r-1,r} = M_{r-1}^1$. Таким образом, как и в случае 1, в последней строке матрицы A находится единственный элемент $\alpha_{r-k} = -1$ ($k=1,\dots,r-1$). При $k=1, r \geq 4$ матрица $A \sim D_r$. При $k \in \{r-2, r-1\}, r=6,7,8$ матрица A эквивалентна E_r . При $k=r-2, r-1, r=4,5$ матрица A эквивалентна A_4, D_5 . Соответственно. Поэтому осталось рассмотреть случаи: $1 < k < r-2$ ($r > 5$), $k=r-2, r-1$ ($r > 8$), $k=2$ ($r=5$).

При $2 < k < r-2$ ($r > 5$) граф матрицы $A_{2,3,\dots,r}$ имеет две точки ветвления. При $k=2$ ($r \geq 5$) матрица A совпадает с M_r^2 . При $k=r-2, r-1$ ($r > 8$) матрица $A_{r-8,r-7,\dots,r}$ эквивалентна N^9 .

Случай 3: $A_{1,2,\dots,r-1} = E_{r-1}$, $r=7,8,9$. Пусть $r=7$. При $\alpha_{r-1} = \alpha_{r-1} = -1, k < 5$ граф матрицы $A_{1,2,4,6,7}$ имеет цикл. При $\alpha_{r-1} = \alpha_{r-1} = -1$ цикл имеет граф матрицы $A_{3,5,6,7}$. Поэтому в последней строке матрицы A находится единственный элемент $\alpha_{r-k} = -1$ ($k=1,\dots,6$). При $k=1,5$ матрица A эквивалентна E_7 . Осталось исключить случаи $k=2,3,4,6$. При $k=2,3$ матрица $A_{1,2,3,4,6,7}$ не эквивалентна матрицам A_6, D_6, E_6 . Случай $k=4$ исключается переходом к матрице шестого порядка

$A_{2,3,\dots,7}$. При $k=6$ $A \sim N^6$.

Переходя к случаям $r=8,9$ заметим, что доказана бесконечность алгебры, соответствующей матрице A порядка 7, удовлетворяющей условиям: $A_{1,\dots,6} = E_6, \alpha_{r-1} = -1$. При $r=8,9$ матрицы $A_{2,3,\dots,8}, A_{2,3,\dots,9}$ удовлетворяют этим условиям и, следовательно, $\alpha_{r-1} = 0$. Таким образом последние строки содержат единственный элемент $\alpha_{r-k} = -1$, причем $k < r-1$.

При $r=8, \alpha_{r-1} = -1$ матрица $A \sim E_8$. Случай $k=2,3,4$ исключается переходом к матрице седьмого порядка $A_{1,\dots,7}$. В случае $k=6$ имеем $A \sim N^6$.

При $r=9, \alpha_{r-1} = -1$ матрица A эквивалентна N^9 . Случай $k=2,3,4,5$ исключается рассмотрением матрицы восьмого порядка $A_{1,\dots,8}$. Наконец в случае $k=6$ бесконечна алгебра $\chi(A_{2,3,\dots,9})$. Предложение 6 доказано.

Замечание. Нетрудно построить базис характеристической алгебры, соответствующей матрице Картана из таблицы 1. Например, базис алгебры $\chi(A_r)$ состоит из коммутаторов вида $\chi_{m,m+1,\dots,m+n}$ ($1 \leq m \leq r-n$); базис алгебры $\chi(D_r)$ состоит из базисов подалгебр типа A_{r-1} , порожденных операторами $\chi_1, \dots, \chi_{r-2}, \chi_{r-1}$ и $\chi_2, \dots, \chi_{r-2}, \chi_r$, и коммутаторов вида $\chi_{r-m,r-m+1,\dots,r-1,r-2,r-3,\dots,r-n}$, где $1 \leq r-n \leq r-2$.

Доказательство того, что любой ненулевой коммутатор χ_A отличается множителем от некоторого элемента базиса, проводится индукцией по кратности коммутатора на основе определяющих соотношений (2), (5). Базис характеристической алгебры матрицы Картана совпадает с базисом нильпотентной части простой алгебры Ли, канонически ассоциированной с этой матрицей (см. [1], стр. 302-319).

В заключение авторы выражают благодарность А.Н. Лезнову и

В.Г.Смирнову за ценные обсуждения работы и полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, Мир, 1972.
2. Кац В.Г., Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста, Изв.АН СССР, сер.мат., 32, № 6, 1968, 1223-1267.
3. Лезнов А.Н., О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве, ТМФ, 42, № 3, 1980, 343-349.
4. Lenzov A.N., Savatiev M.V., Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations $x_1, x_2 = \exp(Kx)_{\lambda}$ and its integrability, Lett. in Math. Phys., 3, 1979, 489-494.
5. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б., Группы внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем, Препринт ИВЭЗ 81-11, Серпухов, 1981.
6. Зигенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947.