1987 г. июль—август т. 42, вып. 4(256)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9

# СИММЕТРИЙНЫЙ ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПОЛНЫЕ СПИСКИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов

СОДЕРЖАНИЕ



## Введение

Исторически именно наличие закона сохранения высокого порядка привлекло внимание к ставшим теперь классическими уравнению Кортевега — де Фриза, нелинейному уравнению Шрёдингера, уравнению синус-Гордона, проинтегрированным впоследствии методом обратной задачи рассеяния [1]—[3]. Задача о перечислении уравнений с одним полиномиальным законом сохранения фиксированного порядка $n$ рассматривалась, например, в работах [4], [5]. Это требование, сравнительно легко проверяемое для заданного уравнения при небольших значениях $n$, в классификационной задаче приводит к большому объему трудно контролируемых вычислений. Кроме того, указанный подход не гарантирует полноту полученного списка — результат существенно зависит от порядка $n$ закона сохранения.

Прогресс наметился при замене законов сохранения симметриями высокого порядка. Первый полный список нелинейных уравнений (моделей Клейна — Гордона $u_{xy} = f(u)$), обладающих высшими симметриями, был получен в работе [6]. Он состоит из трех известных уравнений:

$$u_{xy}=e^{u},\quad u_{xy}=e^{u}+e^{-u},\quad u_{xy}=e^{u}+e^{-2u}. \tag{0.1}$$

Высшие симметрии и законы сохранения являются важными внутренними свойствами уравнения — они чрезвычайно полезны как при построении точных решений, так и для качественного понимания поведения решения в целом. С надлежащими уточнениями наличие высших симметрий и законов сохранения мы принимаем за определение интегрируемости. Благодаря симметрийному подходу удалось сформулировать простые и общие необходимые условия интегрируемости (т. е. условия существования высших симметрий и законов сохранения). Простейшие условия интегрируемости, связанные с существованием высшей симметрии, были установлены в работе [7]. Позднее было показано, что эти же условия являются необходимыми и для существования двух локальных законов сохранения высокого порядка [8].

Условия интегрируемости доказали свою эффективность при решении классификационных задач — оказалось, что выполнения нескольких первых условий достаточно для полного определения правой части уравнений, обладающих высшими симметриями и законами сохранения. Иначе говоря, условия интегрируемости являются не только необходимыми, но и достаточными, т. е. представляют собой критерий интегрируемости. Конечным результатом симметрийного подхода являются полные списки интегрируемых систем уравнений

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{\Phi}(x,\ \mathbf{u},\ \partial\mathbf{u}/\partial x,\ \ldots,\ \partial^m\mathbf{u}/\partial x^m),\qquad m\geqslant 2, \tag{0.2}$$

где $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^M)$, $\mathbf{\Phi} = (\Phi^1, \ldots, \Phi^M)$, правая часть которых имеет, как правило, специальный вид. Задача о классификации интегрируемых уравнений привела к существенному расширению рамок классической теории обратимых преобразований, восходящей к работам Софуса Ли. Возникли новые отношения эквивалентности [9], [10], позволившие существенно сократить списки интегрируемых систем и сделать их обозримыми. Условиям, которые лежат в основе классификации при симметрийном подходе, удовлетворяют не только уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, но и уравнения типа Бюргерса $u_t = u_{xx} + uu_x$.

Классификация проводится по модулю обратимых преобразований. В скалярном случае любые два уравнения первого порядка $u_t = \Phi(x, u, u_x)$, $\Phi \neq 0$, эквивалентны с точностью до точечных и контактных преобразований. При $m = 2$ классификация скалярных уравнений (0.2) приводит к списку из трех уравнений типа Бюргерса (см. [11] и § 5). Эти уравнения обладают высшими симметриями и, хотя не сводятся к линейным уравнениям $u_t = u_{xx} + a(x)u_x + b(x)u + c(x)$ обратимыми преобразованиями, линеаризуются, как и уравнение Бюргерса, после введения потенциала.

Как было показано в работе [12] (ср. § 3), скалярные уравнения (0.2) четного порядка $m = 2, 4, 6, \ldots$ не имеют бесконечной серии локальных законов сохранения и, следовательно, уравнения типа Кортевега — де Фриза, обладающие как высшими симметриями, так и законами сохранения, соответствуют нечетным значениям $m = 3, 5, \ldots$ При $m = 3$ доведена до конца лишь классификация квазилинейных уравнений вида (0.2) ([13]—[15]). Общий случай требует существенного развития классической теории обратимых преобразований (ср. §§ 4, 6). Основная часть списка уравнений (0.2) с $\Phi = u_{xxx} + F(u, u_x, u_{xx})$ состоит из четырех известных в литературе по обратной задаче [16], [17] уравнений:

$$u_t = u_{xxx} + (\alpha u^2 + \beta u)\, u_x, \tag{0.3}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3 + (\alpha e^{2u} + \beta e^{-2u})\, u_x, \tag{0.4}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}[u_x^2 + Q(u)]^{-1}\left[u_x u_{xx}^2 + u_x u_{xx} Q'(u) + \frac{1}{4}Q'^2(u)\right] + \frac{1}{2}Q''(u)\, u_x,\quad d^5Q(u)/du^5 = 0, \tag{0.5}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u_x^{-1}[u_{xx}^2 + Q(u)],\quad d^5Q(u)/du^5 = 0. \tag{0.6}$$

Остальные уравнения из полученного в работе [8] полного списка либо могут быть найдены из уравнений (0.3), (0.4) заменой вида $v_1 = \varphi(u)$ (переход к потенциалу), либо являются уравнениями типа Бюргерса. Уравнение (0.6) является одним из первых примеров уравнений, интегрирование которых связано с задачей Римана на эллиптической кривой [18].

Подчеркнем, что перечисленные выше классификационные результаты носят окончательный характер и полученные списки являются полными. В скалярном случае общий алгоритм получения условий интегрируемости для уравнений вида (0.2) изложен в обзоре [19] (см. § 3). На основе этих условий получен ряд классификационных результатов для уравнений порядка $m > 3$ (см. [13], [20], [21]).

Вопрос о том, интегрируемо данное уравнение или нет, можно решать, либо сопоставив это уравнение с полученными в результате классификации списками, либо непосредственно проверив выполнение условий, использованных при классификации. Как правило, второй способ оказывается более удобным, так как не связан с отысканием обратимой замены, связывающей рассматриваемое уравнение с уравнениями списка. Условия, связанные с законами сохранения, дополняют и усиливают условия существования высших симметрий. В скалярном случае уравнения типа Бюргерса удовлетворяют при нечетном $m$ и этим усиленным условиям, так что списки, полученные при чисто симметрийном подходе, практически не отличаются от списков, полученных с использованием усиленных условий.

Ряд существенно новых примеров уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, получен в результате классификации цепочек нелинейных уравнений ([22], [23])

$$\frac{du_n}{dt} = \Phi(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{0.7}$$

и систем двух уравнений вида ([9], [24], [25])

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u})\,\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x), \quad \det A(\mathbf{u}) \neq 0. \tag{0.8}$$

Отметим, что в этих двух случаях усиленные симметрийные условия, полученные с использованием законов сохранения, почти полностью исключают уравнения типа Бюргерса.

Полный список уравнений (0.7), полученный по трем условиям (см. ниже), имеет много общего со списком скалярных уравнений (0.2) с $m = 3$. Основная часть списка состоит из четырех уравнений:

$$\frac{du_n}{dt} = P(u_n)(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad P''' = 0, \tag{0.9}$$

$$\frac{du_n}{dt} = P(u_n^2)\,[(u_{n+1} + u_n)^{-1} - (u_n + u_{n-1})^{-1}], \quad P''' = 0, \tag{0.10}$$

$$\frac{du_n}{dt} = Q(u_n)\,[(u_{n+1} - u_n)^{-1} + (u_n - u_{n-1})^{-1}], \quad Q^{\mathrm{V}} = 0, \tag{0.11}$$

$$\frac{du_n}{dt} = (u_{n+1} - u_{n-1})^{-1}\,[R(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) + \alpha\sqrt{R(u_{n-1}, u_n, u_{n-1})\,R(u_{n+1}, u_n, u_{n+1})}], \tag{0.12}$$

где $R(u, v, w) = (w - v)(u - v)(\beta + \frac{1}{12}Q''(v)) + (w - 2v + u)\frac{1}{4}Q'(v) + Q(v)$, $Q$ — произвольный полином четвертой степени, $\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha = 0, \pm 1$. Остальные уравнения списка получаются из (0.9)—(0.11) операциями $v_{n+1} \pm v_n = \varphi(u_n)$, аналогичными введению потенциала. Условия, на которых основана классификация цепочек уравнений (0.7), можно представить в виде

$$d\rho_1/dt, \ \rho_1^0, \ \rho_2^0 \in \operatorname{Im}(D - 1), \tag{0.13}$$

где $D$ — оператор сдвига, действующий на множестве функций от конечного числа переменных $u_0, u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \ldots$ Функции $\rho_1, \rho_1^0, \rho_2^0$ выражаются через правую часть $\Phi = \Phi(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$ системы (0.7) по следующим формулам:

$$\rho_1 = \ln \frac{\partial\Phi}{\partial u_{n+1}}, \quad \rho_1^0 = \ln \left( -\frac{\partial\Phi}{\partial u_{n+1}} \Big/ \frac{\partial\Phi}{\partial u_{n-1}} \right),$$

$$\rho_2^0 = [(D-1)^{-1}(\rho_1^0)]_t + 2\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}.$$

Условия (0.13) являются необходимыми условиями существования пары локальных законов сохранения высокого порядка. Вывод этих условий в рамках симметрийного подхода основан на общей схеме, изложенной в главе I (§ 3). Можно показать (см. [22], [23]), что все уравнения (0.7), удовлетворяющие условиям (0.13), имеют бесконечную серию локальных законов сохранения и что уравнения (0.10) и (0.12) при $\alpha = 0$ являются разностной аппроксимацией уравнений (0.4) и (0.6) соответственно. Предельный переход от уравнений (0.10), (0.12) к уравнениям (0.4), (0.6) осуществляется так же, как и для известного уравнения (0.9), являющегося разностным аналогом модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (0.3).

Описанию обширного списка систем уравнений (0.8) посвящена глава IV. Классификация проводится по указанному в главе III расширенному модулю обратимых преобразований. Это позволяет не только сократить список и сделать его обозримым, но и установить связи между уравнениями, считавшимися ранее существенно различными. Как и в случае цепочек уравнений (0.7), классификация основана на нескольких первых необходимых условиях существования пары локальных законов сохранения. Вопрос о достаточности рассматриваемого набора условий для существования бесконечной серии законов сохранения для большинства уравнений списка удается решить путем использования теории преобразований из главы III и установления связей со следующими тремя классическими уравнениями, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния:

(0.14) $$iu_t = u_{xx} + |u|^2 u,$$

(0.15) $$u_{tt} = u_{xxxx} + (u^2)_{xx},$$

(0.16) $$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \times I\mathbf{S}, \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1, \quad I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3).$$

Как уже говорилось, в принципе, уравнения списков удовлетворяют лишь нескольким первым необходимым условиям существования высших симметрий и законов сохранения, и вопрос об их интегрируемости и так называемых представлениях нулевой кривизны приходится решать вне рамок симметрийного подхода. Наиболее известным способом построения коммутационного представления

(0.17) $$A_t - B_x + [A, B] = 0$$

данного нелинейного уравнения является прямой метод, основанный непосредственно на определении (0.17). Задача при этом сводится к построению матричной алгебры Ли с частично заданной таблицей умножения. Нужно, однако, иметь в виду, что само по себе представление (0.17) без дополнительных требований на его структуру не гарантирует интегрируемость рассматриваемого уравнения. Примером может служить найденная в [26] система уравнений

$$u_t = u_{xx} + \alpha (u^{3/2}v^{1/2})_x + \beta u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} - \alpha (v^{3/2}u^{1/2})_x + \beta v^2 u,$$

не удовлетворяющая необходимым условиям существования локальных законов сохранения. Так или иначе коммутационные представления построены в настоящее время для всех систем (0.8) из списков главы IV, за исключением трех систем (*c*), (*n*), (*p*), и лишь недостаток места не позволил нам включить их в настоящий обзор. Системы (*n*), (*p*) могут служить примером того, что проверка условий интегрируемости — существенно более простая задача, чем задача о коммутационном представлении.

Симметрийный подход, в сущности, прост. На первом этапе строится каноническая серия законов сохранения. Доказывается, что локальность этих законов сохранения является необходимым условием существования высших симметрий и законов сохранения. Второй, более трудный, этап заключается в исследовании условий, возникающих из требования локальности нескольких первых канонических законов.

Для интегрируемых уравнений указанный в главе I алгоритм вычисления канонической серии представляет собой удобный способ построения высших законов сохранения. Отметим, что этот алгоритм не единствен, близкий алгоритм содержится в работе [27]. Серия законов сохранения, строящихся в методе обратной задачи по матрице рассеяния, совпадает, как показывает опыт, с канонической.

В настоящий обзор не включены результаты по классификации гиперболических уравнений. Интересный и наиболее изученный класс представляют собой экспоненциальные системы типа Лиувилля [28], [29], тесно связанные с конечномерными алгебрами Ли. Хотя анализ гиперболических систем следует общей схеме, здесь по сравнению с системами вида (0.2)имеются специфические трудности (см. [30]).

Случай трех и более независимых переменных существенно отличается от случая с двумя независимыми переменными. Сильные результаты, относящиеся к классификации интегрируемых систем на основе анализа рядов теории возмущений, $S$-матрицы и дополнительных законов сохранения, получены в последнее время в работах [31], [32].

# ГЛАВА I
# УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

В этой главе излагается общая схема вывода необходимых условий существования высших симметрий и законов сохранения для систем уравнений вида (0.2). В § 1 вводятся основные понятия симметрийного подхода. В § 2 излагается техника, связанная с формальными рядами по обратным степеням оператора дифференцирования (ср. [33], [34]). В § 3 сформулированы основные результаты (теоремы 3.2, 3.6) и приведены примеры, иллюстрирующие общий алгоритм вычисления канонических законов сохранения. Во многом мы следуем работе [19]. Для простоты всюду в этой главе предполагается, что правая часть уравнения (0.2) не зависит от $x$.

## § 1. Формальные симметрии и законы сохранения

**1.** При симметрийном подходе система уравнений в частных производных

$$\mathbf{u}_t = \Phi(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u}/\partial x, \ldots, \partial^m\mathbf{u}/\partial x^m), \quad \mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^M) \tag{1.1}$$

заменяется парой бесконечномерных динамических систем вида

$$\frac{d\mathbf{u}_k}{dt} = \Phi_k(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m_k}) \quad (k=0, 1, 2, \ldots), \tag{1.2}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_k}{dx} = \mathbf{u}_{k+1} \quad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{1.3}$$

Условие совместности систем (1.2), (1.3)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathbf{u}_k}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{u}_k}{dx}\right) \quad (k=0, 1, \ldots)$$

приводит к рекуррентным соотношениям

$$\Phi_{k+1} = D(\Phi_k) \quad (k=0, 1, \ldots), \tag{1.4}$$

где

$$D = \mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_0} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_1} + \ldots \tag{1.5}$$

— оператор полного дифференцирования по $x$ на множестве функций от $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... Полагая

$$\Phi_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m_0}) = \Phi(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m),$$

где $\Phi$ — правая часть рассматриваемой системы уравнений (1.1), мы получаем эквивалентную (1.1) (при соответствующем пересчете начальных условий) бесконечную систему уравнений (1.2), (1.3).

Инфинитезимальные симметрии бесконечномерной динамической системы определяются так же, как и в конечномерном случае. Напомним, что для конечномерной динамической системы

$$\frac{du_k}{dt} = \Phi_k(u_0, \ldots, u_N) \qquad (k = 0, \ldots, N) \tag{1.6}$$

инфинитезимальные преобразования симметрии

$$\bar{u}_k = u_k + \tau f_k(u_0, \ldots, u_N)$$

определяются из условия, что в первом порядке по малому параметру $\tau$ выполняются соотношения $d\bar{u}_k/dt = \Phi_k(\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_N)$ $\forall\, k$. Это приводит к следующим уравнениям для функций $f_0, \ldots, f_N$:

$$\frac{df_k}{dt} = \sum \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_i} f_i \qquad (k = 0, \ldots, N), \tag{1.7}$$

где $d/dt$ — оператор полного дифференцирования по $t$, действующий на функции от динамических переменных $u_0, \ldots, u_N$:

$$\frac{d}{dt} = \Phi_0 \frac{\partial}{\partial u_0} + \ldots + \Phi_N \frac{\partial}{\partial u_N}. \tag{1.8}$$

Легко проверить, что условие инвариантности (1.7) совпадает с условием коммутирования оператора (1.8) с оператором

$$\frac{d}{d\tau} = f_0 \frac{\partial}{\partial u_0} + \ldots + f_N \frac{\partial}{\partial u_N}. \tag{1.9}$$

Другими словами, условие (1.7) совпадает с условием совместности $d/dt(d/d\tau) = d/d\tau(d/dt)$ рассматриваемой системы (1.6) с динамической системой

$$\frac{du_k}{d\tau} = f_k(u_0, \ldots, u_N) \qquad (k = 0, \ldots, N). \tag{1.10}$$

В бесконечномерном случае условия совместности системы (1.2), (1.3) с динамической системой

$$\frac{d\mathbf{u}_k}{d\tau} = \mathbf{f}_k(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_{n_k}) \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1.11}$$

приводят к соотношениям

$$\frac{d\mathbf{f}_k}{dt} = \sum \frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{u}_i} \mathbf{f}_i, \quad D(\mathbf{f}_k) = \mathbf{f}_{k+1}. \tag{1.12}$$

Первое из этих соотношений является условием коммутирования операторов

$$\frac{d}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_k}, \quad \frac{d}{d\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_k}, \tag{1.13}$$

а второе означает, что вид системы (1.11) полностью определяется первым уравнением этой системы. Так как $\mathbf{f}_k = D^k(\mathbf{f}_0)$ и $\Phi_k = D^k(\Phi)$, то соотношения (1.12) можно записать в виде следующего уравнения на вектор-функцию $\mathbf{f}_0$ переменных $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_{n_0}$:

$$\frac{d\mathbf{f}_0}{dt} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}_i} D^i(\mathbf{f}_0). \tag{1.14}$$

Это уравнение можно рассматривать так же, как условие формальной совместности системы уравнений с частными производными (1.1) с системой, построенной по вектор-функции $\mathbf{f}_0$:

$$\partial\mathbf{u}/\partial\tau = \mathbf{f}_0(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u}/\partial x, \ldots, \partial^{n_0}\mathbf{u}/\partial x^{n_0}). \tag{1.15}$$

*Симметрией* (генератором инфинитезимальной симметрии) *системы уравнений в частных производных* (1.1) называется вектор-функция $\mathbf{f}$ конечного набора переменных $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$, удовлетворяющая уравнению (1.14). В отличие от конечномерного случая (1.6), инфинитезимальные преобразования $\bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}_k + \tau D^k \mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n)$, соответствующие высшим симметриям ($n > 1$), не порождают однопараметрической группы локальных преобразований вида $\bar{\mathbf{u}}_k = \psi_k(\tau, \mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_{n_k})$ (см. § 4).

Пример. Для уравнения Кортевега — де Фриза $u_t = u_{xxx} + uu_x$ функция $f = u_5 + 5(2u_0u_3 + 4u_1u_2 + u_0^2u_1)/6$ удовлетворяет (1.14)

$$\frac{df}{dt} = (D^3 + u_0D + u_1) f$$

и, таким образом, является симметрией. Из совместности динамических систем

$$\frac{du_k}{dt} = D^k(u_3 + u_0u_1), \quad \frac{du_k}{d\tau} = D^k(f) \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

следует, что конечномерная динамическая система, полученная из (1.2), (1.3) добавлением условий $D^k(f) = 0$ ($k = 0, 1, \ldots$), порождает конечно параметрическое семейство решений уравнения Кортевега — де Фриза [16].

В отличие от симметрий, понятие о первых интегралах не переносится на случай бесконечномерной динамической системы, их место занимают локальные законы сохранения. *Локальным законом сохранения системы* (1.2), (1.3) называется соотношение вида

$$\frac{d\rho}{dt} = D(\sigma), \tag{1.16}$$

где $\rho$, $\sigma$ — функции конечного набора динамических переменных $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ Функцию $\rho$ мы будем называть *плотностью*, а $\sigma$ — потоком. Если вернуться на язык уравнения с частными производными (1.1), то (1.16) перейдет в хорошо известное в механике и физике уравнение неразрывности $\rho_t = \sigma_x$. В периодической по $x$ задаче (с периодом $T$) интегрирование плотности приводит к константе движения $I = \int_0^T \rho dx$, $I_t = 0$.

Введем следующие обозначения. Бесконечную систему уравнений (1.2)—(1.4) мы будем записывать сокращенно в виде одного уравнения, опуская индекс при $\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}_t = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m), \; m \geqslant 2. \tag{1.17}$$

(1) Определим операцию линеаризации $*$ формулой

$$f_*(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \mathbf{f}(\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}, D(\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}), \ldots, D^n(\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}))\,|_{\varepsilon=0} \tag{1.18}$$

и перепишем уравнение (1.14), определяющее симметрии, в виде

$$\mathbf{f}_t = \Phi_*(\mathbf{f}). \tag{1.19}$$

где, в силу определения (1.18),

$$\Phi_* = \Phi_{\mathbf{u}} + \Phi_{\mathbf{u}_1} D + \ldots + \Phi_{\mathbf{u}_n} D^n. \tag{1.20}$$

Напомним, что $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^M)^\tau$, $\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^M)^\tau$ и, таким образом, $\Phi_{\mathbf{u}_k}$ — матрица размером $M \times M$ с элементами $\partial\Phi^i/\partial u_k^j$.

(2) $A^T$ обозначает дифференциальный оператор, формально сопряженный с $A$,

$$A = \sum A_k D^k, \quad A^T = \sum (-1)^k D^k A_k^\tau \tag{1.21}$$

(матрица $A_k^\tau$ получается из $A_k$ транспонированием).

(3) Определим вариационную производную $\delta/\delta\,\mathbf{u}$ от скалярной функции $h = h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ по следующему правилу:

$$\frac{\delta h}{\delta \mathbf{u}} = \sum_k (-1)^k D^k \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}_k}\right). \tag{1.22}$$

Вариационная производная является вектором-столбцом $\left(\frac{\delta h}{\delta u^1}, \ldots, \frac{\delta h}{\partial u^M}\right)^\tau$.

(4) Обозначим через $\operatorname{Im} D$ линейное пространство образа оператора $D$ ($h \in \operatorname{Im} D$ означает, что существует такая функция $\widetilde{h}$, зависящая от конечного набора динамических переменных, что $D\widetilde{h} = h$). Критерием принадлежности функции $h$ пространству $\operatorname{Im} D + \mathbb{C}$ является равенство (см. [35])

$$\frac{\delta h}{\delta \mathbf{u}} = 0 \iff h \in \operatorname{Im} D + \mathbb{C}. \tag{1.23}$$

Отметим, что $\operatorname{Ker} D$ — ядро оператора $D$ — совпадает с $\mathbb{C}$.

Приведем также некоторые легко проверяемые свойства введенных операций (см., например, [36]):

$$(\alpha\beta)_* = \alpha_*\beta + \beta_*\alpha, \tag{1.24}$$

$$(D(\alpha))_* = D \cdot \alpha_*, \tag{1.25}$$

$$(\alpha_t)_* = \alpha_{*,t} + \alpha_*\Phi_*, \tag{1.26}$$

$$\left(\frac{\delta\alpha}{\delta \mathbf{u}}\right)_* = \left[\left(\frac{\delta\alpha}{\delta \mathbf{u}}\right)_*\right]^T, \tag{1.27}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} = \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}}\frac{d}{dt} - \Phi_*^T \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}}, \tag{1.28}$$

где $\alpha$, $\beta$ — произвольные скалярные функции. Соотношение (1.28) следует из (1.26) и определения (1.22).

*Порядком симметрии* $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots)$ называется порядок дифференциального оператора $f_*$. Симметрия называется *невырожденной*, если старший коэффициент этого оператора является невырожденной матрицей.

Законы сохранения (1.16) считаются *эквивалентными*, если их плотности отличаются на полную производную. *Порядком закона сохранения* с плотностью $\rho$ называется порядок дифференциального оператора

$$\left(\frac{\delta\rho}{\delta \mathbf{u}}\right)_*. \tag{1.29}$$

Очевидно, что эквивалентные законы сохранения имеют одинаковый порядок. Закон сохранения называется *невырожденным*, если невырождена матрица старшего коэффициента этого оператора. Вариационная производная от плотности закона сохранения динамической системы (1.17) подчиняется хорошо известному уравнению [37]

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta\rho}{\delta \mathbf{u}} + \Phi_*^T \frac{\delta\rho}{\delta \mathbf{u}} = 0, \tag{1.30}$$

которое непосредственно следует из (1.16), (1.23) и соотношения (1.28).

2. Наша цель — получить необходимые условия существования симметрий и законов сохранения высокого порядка. При этом удобно перейти от уравнений (1.19), (1.30) к

$$L_t - [\Phi_*, L] = 0, \tag{1.31}$$

$$R_t + R\Phi_* + \Phi_*^T R = 0. \tag{1.32}$$

Здесь $L$, $R$ — формальные ряды вида

$$L = l_n D^n + l_{n-1} D^{n-1} + \ldots + l_0 + l_{-1} D^{-1} + l_{-2} D^{-2} + \ldots, \tag{1.33}$$

$$R = r_p D^p + r_{p-1} D^{p-1} + \ldots + r_0 + r_{-1} D^{-1} + r_{-2} D^{-2} + \ldots, \tag{1.34}$$

причем матричные коэффициенты $l_k$, $r_k$ являются функциями от конечного набора динамических переменных

$$l_k = l_k(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_{n_k}), \quad r_k = r_k(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_{p_k}).$$

Уравнения (1.31) (аналогично (1.32)) следует воспринимать как компактную запись системы уравнений на коэффициенты формального ряда $L$ (соответственно $R$). Правила умножения формальных рядов задаются следующим образом:

$$[D^k, D^m] = 0, \tag{1.35}$$

$$D^k a = a D^k + \binom{k}{1} D(a) D^{k-1} + \binom{k}{2} D^2(a) D^{k-2} + \ldots, \tag{1.36}$$

где $a$ — функция динамических переменных, $D^s(a)$ — $s$-кратное дифференцирование (1.5), $\binom{k}{n} = k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-n+1)/n!$. Формулы (1.35), (1.36) справедливы для любых целых чисел $k$, $m$.

*Степенью формального ряда* называется наибольшая степень символа $D$. Например, в (1.33) $\deg L = n$, в (1.34) $\deg R = p$. Если не оговорено противное, то старший коэффициент ряда считается невырожденной матрицей.

Определение. *Формальной симметрией порядка $N$* динамической системы (1.17) называется формальный ряд $L$ ненулевой степени, удовлетворяющий уравнению

$$L_t - [\Phi_*, L] = Q \tag{1.37}$$

с «остатком» $Q$ таким, что $\deg Q \leqslant \deg \Phi_* + \deg L - N$. *Степенью формальной симметрии* называется $\deg L$.

Теорема 1.1. *Если динамическая система* (1.17) *обладает симметрией $\mathbf{f}$ порядка больше или равного $N$ или двумя законами сохранения порядков $N_1 > N_2 \geqslant N + m$, причем один из них невырожден, то она имеет формальную симметрию порядка $N$.*

Доказательство. Линеаризуем, применив операцию $*$, уравнение (1.19). Воспользовавшись соотношениями (1.24)—(1.26) и заменив $\sum_{s,k} \Phi_{\mathbf{u}_s \mathbf{u}_k} D^k(\mathbf{f}) D^s$ на $(\Phi_*)_\tau$ в соответствии с (1.11), получим

$$L_t - [\Phi_*, L] = \Phi_{*,\tau}, \tag{1.38}$$

где $L = \mathbf{f}_*$. Очевидно, что $\deg Q = \deg \Phi_{*,\tau} \leqslant \deg \Phi_*$, поэтому из определения следует, что $L$ является формальной симметрией порядка $N$.

Пусть имеется два закона сохранения с плотностями $\rho_1$ и $\rho_2$ порядков $N_1 > N_2$ (для определенности будем считать, что с $\rho_2$ связан невырожденный закон сохранения). Линеаризуем соотношение (1.30). Используя (1.24)—(1.27), получим

$$R_{i,t} + R_i \Phi_* + \Phi_*^T R_i = Q_i \quad (i = 1, 2), \tag{1.39}$$

где $R_i = (\delta\rho_i/\delta\mathbf{u})_*$, $\deg Q_i \leqslant 2m$,

$$Q_i = \Phi_*^T \left(\frac{\delta\rho_i}{\delta\mathbf{u}}\right)_* - \left(\Phi_*^T \frac{\delta\rho_i}{\delta\mathbf{u}}\right)_* = \sum_{j,k} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\mathbf{u}_k} D^j \left(\frac{\delta\rho_i}{\delta\mathbf{u}}\right) D^k,$$

$\varphi_j$ — коэффициент оператора $\Phi_*^T = \sum \varphi_j D^j$. По оператору $R_2$ с невырожденным старшим коэффициентом можно однозначно вычислить формальный ряд $R_2^{-1}$, $\deg R_2^{-1} = -\deg R_2 = -N_2$, такой, что $R_2 R_2^{-1} = R_2^{-1} R_2 = E$ (см. § 2). Формальный ряд $L = R_2^{-1} R_1$, $\deg L = N_1 - N_2$, удовлетворяет уравнению (1.37) с остатком $Q = R_2^{-1} Q_1 - R_2^{-1} Q_2 R_2^{-1} R_1$, $\deg Q \leqslant 2m - 2N_2 + N_1$. ■

По аналогии с формальными симметриями мы определим формальные законы сохранения.

Определение. *Формальным законом сохранения порядка $N \geqslant m$* динамической системы (1.17) называется формальный ряд $R$, удовлетворяющий уравнению

$$R_t + R\Phi_* + \Phi_*^T R = Q \tag{1.40}$$

с остатком $Q$, причем $\deg Q \leqslant \deg R + \deg \Phi_* - N$.

Если система обладает законом сохранения с плотностью $\rho$ порядка $N \geqslant m$, то она обладает формальным законом сохранения $R = \left(\frac{\delta\rho}{\delta\mathbf{u}}\right)_*$ того же порядка (см. доказательство теоремы). Разрешимость уравнений (1.31), (1.32) означает существование формальных симметрий и законов сохранения произвольно высокого порядка.

Условия существования формальных симметрий и законов сохранения являются критерием при составлении списков уравнений, о которых говорилось во введении. Например, список уравнений вида $u_t = u_3 + \Phi(u, u_1, u_2)$ состоит из тех и только тех уравнений, которые обладают формальной симметрией седьмого порядка. Утверждение теоремы 1.1 означает, что эти условия являются необходимыми для существования высших симметрий и локальных законов сохранения.

В качестве примера получим условие существования формального закона сохранения порядка $m + 1$. Подставив (1.34) в (1.32) и приравняв нулю коэффициент при старшей степени символа $D$, получим

$$r_p \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{u}_m} + (-1)^m \left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{u}_m}\right)^\tau r_p = 0. \tag{1.41}$$

Рассмотрим вначале скалярный случай. Соотношение (1.41) выполняется только при нечетных $m$, это означает отсутствие локальных законов сохранения (порядка, большего $m$) у скалярных эволюционных уравнений четного порядка (ср. с [12]). Для систем двух уравнений ($M = 2$) четного порядка с невырожденной главной дифференциальной частью $\det \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}_m} \neq 0$ из (1.41) следует, во-первых, что $\operatorname{trace} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}_m} = 0$, а во-вторых, что законы сохранения, если они существуют, невырождены (ср. с [9]). Для систем $M$ уравнений четного порядка с невырожденной матрицей $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}_m}$, обладающих невырожденными законами сохранения, из (1.41) немедленно следует, что собственные значения матрицы $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}_m}$ встречаются парами:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = \ldots = 0 \quad \text{и } M \text{ четно.} \tag{1.42}$$

## § 2. Техника формальных рядов

Процедура нахождения условий существования формальных симметрий, в сущности, проста, но она приводит к большому объему алгебраических преобразований. Алгоритм вычисления удобно формулировать на языке формальных рядов, которому посвящен этот параграф. Этот язык легко объяснить компьютеру, он является общим и оказался полезным во мнотих задачах, возникающих в теории интегрируемых систем. В настоящее время уже созданы программы аналитических вычислений на ЭВМ, помогающие получать и анализировать критерии интегрируемости нелинейных уравнений.

Хотя условия интегрируемости допускают инвариантную матричную формулировку, удобно привести уравнение (1.31), связанное с формальными симметриями, к диагональному виду и свести задачу к скалярной. Мы воспользуемся инвариантностью уравнений (1.31), (1.32) относительно калибровочных преобразований

$$L \mapsto TLT^{-1}, \; R \mapsto T^{\mathrm{T}}RT, \quad \Phi_* \mapsto T\Phi_*T^{-1}+T_tT^{-1}, \tag{2.1}$$

где $T$ — произвольный формальный ряд.

Предложение 2.1. *Пусть матрица* $\Phi_{u_m}$ *(старший коэффициент оператора* $\Phi_*$*) не имеет кратных собственных значений и приводится к диагональному виду сопряжением* $T_0$*:*

$$\Phi_{u_m} = T_0^{-1}\Lambda T_0, \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_M).$$

*Тогда существует, и притом единственный, формальный ряд*

$$T = T_0(E + T_{-1}D^{-1} + T_{-2}D^{-2} + \ldots), \tag{2.2}$$

*удовлетворяющий условию* $\operatorname{diag} T_k = 0$ $(k = -1, -2, \ldots)$, *такой, что все коэффициенты формального ряда*

$$\hat{\Phi} = T\Phi_*T^{-1} + T_tT^{-1} \tag{2.3}$$

*диагональны.*

Доказательство. Подставим (2.2) и $\Phi_* = \sum_{k=0}^{m} \Phi_{m-k}D^{m-k}$, $\hat{\Phi} = \sum_{k=0}^{m} \varphi_{m-k}D^{m-k}$ в (2.3). В результате последовательного приравнивания нулю коэффициентов при $D^{m-i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ получим рекуррентную последовательность соотношений вида

$$[\Lambda, T_{-i}] + \varphi_{m-i} = \Delta_i, \tag{2.4}$$

где $\Delta_i = \Delta(T_0^{-1}, T_0, \ldots; T_{1-i}; T_{0,t}, \ldots, T_{m-i,t}; \varphi_{m-1}, \ldots, \varphi_{m-i+1}; \Phi, \Phi_m, \Phi_{m-1}, \ldots, \Phi_{m-i})$ — дифференциальный полином от указанных переменных. Соотношения (2.3) с учетом условия $\operatorname{diag} T_k = 0$ позволяют последовательно вычислять коэффициенты

$$\varphi_{m-i} = \operatorname{diag} \Delta_i \quad \text{и} \quad T_{-i} = \operatorname{ad}_\Lambda^{-1}(\Delta_i - \varphi_{m-i}). \; \blacksquare$$

Указанное в предложении калибровочное преобразование приводит $L$ к диагональному виду

$$\hat{L} = TLT^{-1}. \tag{2.5}$$

Действительно, из (1.31), (2.3), (2.5) следует, что

$$\hat{L}_t = [\hat{\Phi}, \hat{L}], \tag{2.6}$$

причем $\hat{\Phi}$ — формальный ряд с диагональными коэффициентами, старший коэффициент которого не имеет совпадающих собственных значений. Подставим $\hat{L} = l_nD^n + l_{n-1}D^{n-1} + \ldots$ в (2.6). В результате последовательного приравнивания коэффициентов при $D^{m+n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ получим цепочку соотношений, первое из которых имеет вид $[\Lambda, l_n] = 0$ и означает диагональность $l_n$. В диагональности следующих коэффициентов легко убедиться по индукции.

Формальный ряд $\hat{L}$, полученный калибровочным преобразованием (2.5) из формальной симметрии $L$, мы будем по-прежнему называть формальной симметрией динамической системы (1.17). Очевидно, что порядок формальной симметрии является калибровочно инвариантной характеристикой.

При нечетном $m$ формальный ряд $\hat{R} = T^T R T$ является диагональным (это доказывается так же, как в предыдущем случае формальной симметрии). При четных $m$ и выполнении условий (1.42) нетрудно проверить, что $\hat{R}$ является блочно-диагональной матрицей с $2 \times 2$-блоками, отвечающими парам собственных значений противоположного знака. Каждый $2 \times 2$-блок является антидиагональной матрицей. Поэтому уравнение (1.32) распадается на $M/2$ уравнений вида

$$R_{k,t} + \hat{\Phi}_k^T R_k + R_k \hat{\Phi}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, M/2), \tag{2.7}$$

где

$$\hat{\Phi}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & -\lambda_k \end{pmatrix} D^m + \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ 0 & G_k \end{pmatrix}, \quad R_k = \begin{pmatrix} 0 & r_k \\ s_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Следующая теорема показывает, что, в отличие от порядка, степень формальной симметрии несущественна. Напомним (см. § 1), что формальные симметрии и законы сохранения, если не оговорено противное, считаются невырожденными.

Теорема 2.1 (ср. [19]). *Пусть матрица старшего коэффициента ряда $\Phi_*$ не имеет нулевых и кратных собственных значений. Тогда*

1) *существование формальной симметрии порядка $N$ эквивалентно существованию формальной симметрии первой степени того же порядка;*

2) *существование формальных симметрии и закона сохранения порядка $N$ эквивалентно существованию формальных симметрии $L$ и закона сохранения $R$ порядка $N$ первой степени, удовлетворяющих условиям*

$$L^T = -RLR^{-1}, \quad R^T = -R. \tag{2.9}$$

Доказательство. 1) Пусть $L$ — формальная симметрия порядка $N$, а $\hat{L}$ — формальная симметрия, полученная в результате диагонализующего калибровочного преобразования (2.5) (предложение 2.1). Ряд $L_d = \operatorname{diag} \hat{L}$ также является формальной симметрией порядка $N$. Вместе с $L_d$ формальными симметриями того же порядка являются ряды $(L_d)^k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$), поэтому, не ограничивая общности, можно считать степень ряда $L_d$ положительной. Ряд $L_d = b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \ldots$ имеет диагональные коэффициенты, и существует простой способ извлечения из него корня степени $n$ (ср. [33], [34]). Коэффициенты ряда $A = a_1 D + a_0 + \ldots$ такого, что $A^n = L_d$, находятся из рекуррентных соотношений вида

$$a_1^n = b_n, \ \ldots, \ n a_1^{n-1} a_{1-k} = b_{n-k} + \theta_k, \tag{2.10}$$

где $\theta_k = \theta_k(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{n-k+1}; a_1, a_0, \ldots, a_{2-k})$ — дифференциальный полином указанных переменных. Соотношения (2.10) позволяют однозначно, с точностью до фиксации $b_n^{1/n}$, последовательно определить коэффициенты $a_k$. Из тождества

$$(L_d)_t - [\hat{\Phi}, L_d] = \sum_{k=0}^{n} A^k (A_t - [\hat{\Phi}, A]) A^{n-k-1} \tag{2.11}$$

следует, что ряд $A$ также является формальной симметрией порядка $N$ и $\deg A = 1$.

2) Вместе с $R$ формальными законами сохранения порядка $N$ являются ряды $RL$ и $R^T$. Отсюда, в частности, следует, что имеется формальный закон сохранения $R$ порядка $N$ такой, что $\deg R = 1$. Соотношения (2.9) калибровочно инвариантны, и их достаточно доказать в диагональной калиб-

ровке (см. предложение 2.1). При нечетном $m = \deg \Phi_*$ ряд $\hat{R}$ имеет диагональные коэффициенты. Поэтому ряд $\hat{R} - \hat{R}^T$ удовлетворяет второму из соотношений (2.9) и $\deg(\hat{R} - \hat{R}^T) = 1$. При четном $m$ может оказаться, что ряд $\hat{R} - \hat{R}^T$ вырожден или $\deg(\hat{R} - \hat{R}^T) < 1$. Однако, умножив $\hat{R}$ на подходящую постоянную диагональную матрицу $C$, можно добиться, чтобы ряд $\hat{R}C - C\hat{R}^T$ был невырожденным формальным законом сохранения степени 1. Вместе с $L$ формальной симметрией является ряд $R^{-1}L^TR$. Пусть $R^T = -R$, $\deg R = 1$. При нечетном $m$ требуемая формальная симметрия строится по формуле $L - R^{-1}L^TR$. Если же $m$ четно, то, как и в предыдущем случае, подбираем диагональную постоянную матрицу $C$ такую, что ряд $LC - R^{-1}(LC)^TR$ имеет невырожденный старший коэффициент и степень, равную единице. ■

*Вычетом* формального ряда

$$A = \sum_{k \leqslant n} a_k D^k \tag{2.12}$$

со скалярными коэффициентами $a_k$ называется коэффициент при $D^{-1}$ (ср. с [34]):

$$\operatorname{res} A = a_{-1}. \tag{2.13}$$

*Логарифмический вычет* формального ряда $A$ степени $n$ мы определим следующим образом:

$$\operatorname{res} \ln A = a_{n-1}/a_n. \tag{2.14}$$

Отметим, что для логарифмического вычета справедливы следующие тождества:

$$\operatorname{res} \ln(AB) = \operatorname{res} \ln A + \operatorname{res} \ln B + \deg A \, D(\ln b_n) \tag{2.15}$$

($b_n$ — старший коэффициент ряда $B$),

$$D(\operatorname{res} \ln A) = \operatorname{res}([D, A] A^{-1}). \tag{2.16}$$

Для коммутатора формальных рядов справедлива формула (ср. с [34]), легко проверяемая на одночленах,

$$\operatorname{res}[A, B] = D\sigma(A, B), \tag{2.17}$$

где $\sigma(A, B)$ — дифференциальный полином коэффициентов $a_k$, $b_k$ рядов $A$, $B$:

$$\sigma(A, B) = \sum_{\substack{p+q+1>0 \\ p \leqslant \deg B,\, q \leqslant \deg A}} \binom{q}{p+q+1} \sum_{s=0}^{p+q} (-1)^s D^s(a_q) D^{p+q-s}(b_p). \tag{2.18}$$

Логарифмический вычет коммутанта формальных рядов также является полной производной:

$$\operatorname{res} \ln(ABA^{-1}B^{-1}) = Ds(A, B), \tag{2.19}$$

$$s(A, B) = m \ln b_n - n \ln a_m, \tag{2.20}$$

где $m = \deg A$, $n = \deg B$. Приведем еще одно полезное тождество

$$\operatorname{res} \ln A^{-1} = \operatorname{res} \ln A^T = -\operatorname{res} \ln A + nD(\ln a_n). \tag{2.21}$$

Справедлива следующая очевидная

Лемма 2.1. *Формальные ряды $A$, $B$ первой степени совпадают в том и только в том случае, когда*

$$\operatorname{res} \ln A = \operatorname{res} \ln B, \quad \operatorname{res} A^k = \operatorname{res} B^k \quad (k = -1, 1, 2, 3, \ldots).$$

Более того, первые $k$ коэффициентов $a_1, a_0, \ldots, a_{k-2}$ ряда $A$ ($\deg A = 1$) находятся во взаимно однозначном соответствии с набором вычетов $\rho_{-1}, \rho_0, \ldots, \rho_{k-1}$, где $\rho_0 = \operatorname{res} \ln A$, $\rho_n = \operatorname{res} A^n$, $n \neq 0$. Действительно, вычисляя вычеты, получим

$$\rho_{-1} = 1/a_1, \quad \rho_0 = a_0/a_1, \quad \rho_1 = a_{-1}, \ldots, \qquad (2.22)$$
$$\rho_m = m a_1^{m-1} a_{-m} + \Delta(a_1, a_0, \ldots, a_{1-m}), \qquad m \geqslant 1,$$

где $\Delta$ — известный дифференциальный полином указанных переменных. Эта цепочка соотношений очевидным образом обращается и позволяет выразить коэффициенты ряда $A$ через дифференциальные полиномы от вычетов.

## § 3. Канонические законы сохранения и условия дивергентности

**1.** Как было показано в предыдущем параграфе, уравнение (1.31) для формальных симметрий бесконечномерной динамической системы (1.17) сводится (предложение 2.1, теорема 2.1) к задаче о вычислении коэффициентов скалярного ряда

$$L = l_1 D + l_0 + l_{-1} D^{-1} + \ldots \qquad (3.1)$$

из коммутационного соотношения

$$L_t = [F, L], \qquad (3.2)$$

где коэффициенты формального ряда

$$F = \lambda D^m + f_{m-1} D^{m-1} + f_{m-2} D^{m-2} + \ldots \qquad (3.3)$$

выражаются явными формулами через правую часть $\Phi(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_m)$ рассматриваемой динамической системы. В частности, первый коэффициент $\lambda$ ряда (3.3) — одно из собственных значений матрицы $\Phi_{\mathbf{u}_m}$. Напомним, что мы называем ряд (3.1) формальной симметрией порядка $N$ динамической системы (1.17), если

$$\deg(L_t - [F, L]) \leqslant m + 1 - N. \qquad (3.4)$$

Ясно, что для построения невырожденной формальной симметрии динамической системы (1.17) нужно построить $M$ приближенных решений (ср. доказательство теоремы 2.1) уравнений вида (3.2), соответствующих $M$ различным собственным значениям матрицы $\Phi_{\mathbf{u}_m}$.

Подставив ряд (3.1) в (3.4) и приравнивая нулю коэффициенты при $D^m, D^{m-1}, \ldots, D$, мы приходим к цепочке уравнений для определения коэффициентов ряда (3.1). Первое из уравнений этой цепочки дает

$$m\lambda D(l_1) = l_1 D(\lambda) \iff l_1 = \mathrm{const}\, \lambda^{1/m}. \qquad (3.5)$$

При $m > 2$ аналогичным образом находятся первые $m - 1$ коэффициентов ряда (3.1), и, не ограничивая общности, можно считать, что эти коэффициенты совпадают с первыми $m - 1$ коэффициентами ряда

$$F^{1/m} = \lambda^{1/m} D + \tilde{f}_0 + \tilde{f}_{-1} D^{-1} + \ldots, \qquad (3.6)$$

т.е. что

$$l_1 = \lambda^{1/m}, \; l_0 = \tilde{f}_0, \; \ldots, l_{3-m} = \tilde{f}_{3-m}. \qquad (3.7)$$

Действительно, из формулы (3.5) следует, что, умножив рассматриваемую формальную симметрию $L$ на постоянную, можно считать, что $l_1 = \lambda^{1/m}$. Остается доказать, что можно выбрать постоянные $c_0, c_{-1}, \ldots$ такие, что коэффициенты ряда

$$L + c_0 + c_{-1} L^{-1} + \ldots + c_{3-m} L^{3-m}$$

удовлетворяют условиям (3.7). В доказательстве (см. [19]) используется формула

$$\deg\{(F^{1/m})_t-[F,\ F^{1/m}]\}\leqslant 1, \tag{3.8}$$

означающая, что для любой динамической системы (1.17) ряд (3.6) является формальной симметрией порядка $m$. Эта формальная симметрия, эквивалентная $L = F$ (см. (2.11)), связана с инвариантностью динамической системы вида (1.17) относительно инфинитезимальных преобразований $\bar{t} = t + \tau$, $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u$ (сдвиг по времени).

Из формулы (3.8) следует, что при подстановке ряда (3.1), (3.7) в (3.4) сокращаются коэффициенты при $D^k$, $k > 1$, и цепочка уравнений для определения коэффициентов формальной симметрии порядка $N > m$ сводится к системе уравнений вида

$$\begin{cases} m\lambda D(l_{2-m})+(m-2)D(\lambda)\,l_{2-m}=l_{1,\,t}+r_{2-m}, \\ m\lambda D(l_{1-m})+(m-1)D(\lambda)\,l_{1-m}=l_{0,\,t}+r_{1-m}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m\lambda D(l_{3-N})+(3-N)D(\lambda)\,l_{3-N}=l_{m+2-N,\,t}+r_{3-N}, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $r_j$, $j \leqslant 2 - m$, является дифференциальным полиномом от коэффициентов ряда (3.3) и коэффициентов $l_k$ ряда (3.1) с номерами $k > j$. В частности, $r_{2-m}$ — дифференциальный полином от коэффициентов (3.3), (3.6).

Неизвестными в системе $N - m$ уравнений (3.9) являются коэффициенты $l_{2-m}, \dots, l_{3-N}$. Перейдем к новым переменным $\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-m-2}$. Замена задается набором соотношений

$$\sigma_0=\sigma(FL^{-1},\ L),\quad \sigma_k=\sigma(F,\ L^k),\quad k\neq 0, \tag{3.10}$$

где $\sigma(A, B)$ — дифференциальный полином коэффициентов формальных рядов $A$, $B$, определенный в (2.18). Из (3.10), (3.7) получаем формулы

$$\sigma_0=m\lambda^{(m-1)/m}l_{1-m}+\Delta_0,\quad \sigma_k=km\lambda^{(k+m-1)/m}l_{1-m-k}+\Delta_k,\quad k\neq 0, \tag{3.11}$$

где $\Delta_k$ — дифференциальные полиномы от коэффициентов ряда (3.3) и коэффициентов $l_n$, $n > 1 - m - k$. Эти формулы показывают, что замена переменных (3.10) линейна в главном, треугольна и, следовательно, обратима. Вычеты $\rho_k$ $(-1 \leqslant k \leqslant N - m - 2)$,

$$\rho_k=\operatorname{res} L^k,\quad k\neq 0,\qquad \rho_0=\operatorname{res}\ln L, \tag{3.12}$$

выражаются через коэффициенты ряда (3.6) и набор переменных $\sigma_{-1}, \dots, \sigma_{N-m-2}$, что позволяет написать систему уравнений на $\sigma_k$.

Лемма 3.1. *Система уравнений* (3.9) *эквивалентна системе уравнений на* $\sigma_k$:

$$D(\sigma_k)=\frac{d}{dt}\rho_k(\sigma_{k-m+1},\ \sigma_{k-m},\ \dots),\quad -1\leqslant k\leqslant N-m-2, \tag{3.13}$$

*где* $\rho_k$ *вычисляются по формулам* (3.10), (3.12).

Доказательство. Из (3.9) следует (3.4), и поэтому

$$\frac{d}{dt}\operatorname{res} L^k=\operatorname{res}[F,\ L^k],\quad -1\leqslant k\leqslant N-m-2,$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{res}\ln L=\operatorname{res}[FL^{-1},\ L]. \tag{3.14}$$

Утверждение леммы является следствием соотношений (3.10), (3.12), (3.14) и обратимости замены переменных (3.10). ■

Вычеты $\rho_k = \operatorname{res} L^k$, $k \neq 0$, $\rho_0 = \operatorname{res}\ln L$, выраженные в терминах переменных (3.11), называются в дальнейшем *плотностями канонических законов сохранения* (3.13). При $k < m - 2$ эти плотности являются дифференциальными полиномами от коэффициентов ряда (3.6) и переменной $\lambda^{-1/m}$.

При $k \geqslant m-2$ к этим переменным добавляются $\sigma_j$, $j<k$. Например, $\rho_{-1} = \lambda^{-1/m}$, и, как следствие леммы 3.1 с $N = m+1$, мы находим, что первое из уравнений системы (3.9) в результате замены (3.10) принимает вид

$$D(\sigma_{-1}) = \frac{d}{dt}(\lambda^{-1/m}). \tag{3.15}$$

Различным собственным значениям матрицы $\Phi_{u_m}$ соответствуют (см. предложение 2.1) $M$ различных уравнений вида (3.2):

$$\frac{d}{dt}L_j = [F_j, L_j] \quad (j = 1, \ldots, M) \tag{3.16}$$

и $M$ серий канонических законов сохранения

$$\frac{d}{dt}\rho_{k,j} = D(\sigma_{k,j}) \quad (k = -1, 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.17}$$

где, в соответствие с (3.10), $\sigma_{0,j} = \sigma(F_jL_j^{-1}, L_j)$, $\sigma_{k,j} = \sigma(F_j, L_j^k)$, $k \neq 0$, $\rho_{k,j} = \operatorname{res} L_j^k$. Непосредственным следствием предложения 2.1, теоремы 2.1 и леммы 3.1 является

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия предложения 2.1. Тогда критерием существования формальной симметрии порядка $N > m$ является разрешимость системы уравнений (3.17) с $k \leqslant N-m-2$.*

Пример 3.1. Для систем уравнений вида (1.17) с $m = 2$ вопрос о наличии формальной симметрии сводится к вопросу о разрешимости скалярного уравнения (3.2) с $F = \lambda D^2 + F_1D + F_0 + F_{-1}D^{-1} + \ldots$ Выпишем канонические плотности $\rho_{-1}$, $\rho_0$, $\rho_1$, связанные с этим уравнением. Ясно, что $\rho_{-1} = l_1^{-1} = \lambda^{-1/2}$ (см. (3.12), (3.7)). Отсюда следует, в частности, что в случае системы двух уравнений, удовлетворяющей условию $\operatorname{trace} \Phi_{u_2} = 0$ (см. (1.42)),

$$\rho_{-1} = [-\det \Phi_{u_2}]^{-1/4}. \tag{3.18}$$

Для того чтобы найти следующую каноническую плотность, нужно в формуле

$$\rho_0 = \operatorname{res} \ln L = l_0/l_1 \tag{3.19}$$

выразить $l_0$ через $\sigma_{-1} = \sigma(F, L^{-1})$. Формула (2.18) дает

$$\sigma_{-1} = -2l_0 + \lambda^{-1/2}F_1 - D(\lambda^{1/2}),$$

поэтому (см. (3.19))

$$-2\rho_0 = \lambda^{-1/2}\sigma_{-1} - \lambda^{-1}F_1 + D(\ln \lambda^{1/2}). \tag{3.20}$$

Точно так же находится $\rho_1 = \operatorname{res} L = l_{-1}$:

$$2\rho_1 = \lambda^{-1/2}(\sigma_0 - F_1\rho_0 + F_0) + \lambda^{1/2}(\rho_0^2 - D(\rho_0)). \tag{3.21}$$

Полученные формулы являются общими и будут использованы при классификации систем двух уравнений вида (0.8). Как уже отмечалось во введении, классификация скалярных уравнений $u_t = \Phi(u, u_1, u_2)$ основана на существовании формальной симметрии пятого порядка. В силу теоремы 3.1 эти условия совпадают с условиями разрешимости уравнений

$$\frac{d}{dt}\rho_k = D(\sigma_k) \quad (k = -1, 0, 1),$$

где $\rho_1 = (\Phi_{u_2})^{-1/2}$, а $\rho_0$, $\rho_1$ находятся по формулам (3.20), (3.21) с $F_1 = \Phi_{u_1}$, $F_0 = \Phi_u$.

Пример 3.2. Список (0.3)—(0.6) уравнений вида $u_t = u_3 + G(u, u_1, u_2)$ получен при помощи канонических плотностей

$$\begin{gathered}\rho_0 = G_{u_2}, \quad \rho_1 = 3G_{u_1} - (G_{u_2})^2, \quad \rho_3 = \sigma_1, \\ \rho_2 = 27G_u - 9G_{u_1}G_{u_2} + 2(G_{u_2})^3 + 9\sigma_0.\end{gathered} \tag{3.22}$$

В этом примере, в соответствие с (3.7), $l_1 = 1$, $l_0 = \frac{1}{3} G_{u_2}$, $\rho_{-1} = 1$, поэтому первый канонический закон сохранения тривиален. Канонические законы сохранения (3.17) можно упрощать, заменяя их на эквивалентные по правилу

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{k,j} &= \alpha_{k,j}\rho_{k,j} + D(r_{k,j}), \\ \bar{\sigma}_{k,j} &= \alpha_{k,j}\sigma_{k,j} + (r_{k,j})_t + \beta_{k,j}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

где $\alpha_{k,j}$, $\beta_{k,j}$ — постоянные, а $r_{k,j}$ — дифференциальные полиномы тех же переменных, что и $\rho_{k,j}$. Законы сохранения с плотностями (3.23) эквивалентны каноническим.

В заключение отметим, что, в силу теоремы 3.1, для существования формальной симметрии порядка $m+1$ системы (1.17) необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемая система обладала $M$ законами сохранения вида (3.15), где $\lambda$ — собственное число матрицы $\Phi_{u_m}$.

**2.** Условия существования формальных законов сохранения позволяют уточнить вид канонических законов сохранения (3.17). В конце § 1 было показано, что в случае системы четного порядка $m$ размерность $M$ системы четна и собственные числа матрицы $\Phi_{u_m}$ разбиваются на пары $\lambda_j$, $-\lambda_j$ ($j = 1, 2, \ldots, M/2$). Калибровочное преобразование (2.1) (см. предложение 2.1) приводит систему (1.32) к блочно-диагональному виду (2.7), (2.8). Поэтому при изучении формальных законов сохранения можно ограничиться рассмотрением системы двух уравнений вида (см. теорему 2.1)

$$R_t + \hat{\Phi}^T R + R\hat{\Phi} = 0,$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix},$$

$$F = \lambda D^m + F_{m-1}D^{m-1} + \ldots, \quad G = \lambda D^m + G_{m-1}D^{m-1} + \ldots \tag{3.24}$$

Очевидно, что (3.24) эквивалентно одному скалярному уравнению

$$r_t + F^T r - rG = 0. \tag{3.25}$$

Ряд $r$ ($\deg r = 1$), удовлетворяющий неравенству $\deg(r_t + F^T r - rG) \leqslant m + 1 - N$, мы также будем называть формальным законом сохранения порядка $N$ (ср. (1.40)).

Лемма 3.2. *Формальный ряд $r$ удовлетворяет уравнению* (3.25) *в том и только в том случае, если*

$$\operatorname{res} \ln G^{-1/m} (F^T + r_t r^{-1})^{1/m} = \operatorname{res} \ln (G^{-1/m} r G^{1/m} r^{-1}), \tag{3.26}$$

$$\operatorname{res} [G^{n/m} - (F^T + r_t r^{-1})^{n/m}] = \operatorname{res} [G^{n/m} r^{-1}, r], \quad n \geqslant 1. \tag{3.27}$$

Доказательство. Перепишем уравнение (3.25) в виде равенства двух рядов первой степени

$$(F^T + r_t r^{-1})^{1/m} = r G^{1/m} r^{-1}.$$

Утверждение леммы следует из леммы 2.1, аддитивности вычетов и формулы (2.15). ■

Как видно из формул (2.17), (2.19) правые части равенств (3.26), (3.27) являются полными производными. Это позволяет перейти к новому набору переменных

$$\sigma_0^0 = s(G^{-1/m}, r), \tag{3.28}$$

$$\sigma_k^0 = \sigma(G^{k/m} r^{-1}, r), \quad k \geqslant 1 \tag{3.29}$$

(см. (2.18), (2.20)), в котором цепочка уравнений на коэффициенты формального ряда $r$ запишется в виде

$$\rho_k^0 (\sigma_{k-m+1}^0, \sigma_{k-m}^0, \ldots) = D(\sigma_k^0) \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{3.30}$$

где

(3.31) $$\rho_0^0 = \operatorname{res} \ln G^{-1/m} (F^T + r_t r^{-1})^{1/m},$$

(3.32) $$\rho_k^0 = \operatorname{res} [G^{k/m} - (F^T + r_t r^{-1})^{k/m}], \quad k \geqslant 1.$$

Из (3.28), (3.29) следует, что $\sigma_k^0$ зависит от коэффициентов ряда $G$ и переменных $r_1, r_0, \ldots, r_{1-k}$, причем зависимость от $r_{1-k}$ является линейной. Поэтому замена переменных $(r_1, r_0, \ldots, r_{-N}) \mapsto (\sigma_0^0, \sigma_1^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)$ является обратимой. Вычеты (3.31), (3.32) при $0 \leqslant k \leqslant m-2$ зависят только от коэффициентов рядов $F$, $G$:

(3.33) $$\rho_0^0 = -\frac{1}{m} \frac{F_{m-1} + G_{m-1}}{\lambda} + D \ln \lambda,$$

(3.34) $$\rho_k^0 = \operatorname{res} [G^{k/m} + (-1)^{k+1} F^{k/m}], \quad 1 \leqslant k \leqslant m-2,$$

а при $k \geqslant m-1$ они зависят еще и от переменных $\sigma_0^0, \sigma_1^0, \ldots, \sigma_{k-m+1}^0$. При выводе (3.33) мы воспользовались тождествами (2.21) и

(3.35) $$\operatorname{res} \ln A^{1/m} = \frac{1}{m} \operatorname{res} \ln A - \frac{m-1}{2m} D \ln a_m,$$

где $A = a_m D^m + \ldots$ Для формальных законов сохранения аналогом теоремы 3.1 является

Теорема 3.2. *Формальный ряд* $r$ *удовлетворяет неравенству* $\deg(r_t + F^T r - rG) \leqslant m + 1 - N$ *тогда и только тогда, когда разрешима конечная цепочка уравнений* (3.30) *с* $0 \leqslant k \leqslant N-2$.

Пусть формальный ряд $\hat{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \overline{L} \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $\hat{L}_t = [\hat{\Phi}, \hat{L}]$, где ряд $\hat{\Phi}$ такой же, как в (3.24). Это уравнение распадается на два скалярных:

(3.36) $$L_t = [F, L], \quad \overline{L}_t = -[G, \overline{L}].$$

Их разрешимость эквивалентна существованию двух серий канонических законов сохранения (3.17). Если разрешимо уравнение (3.24), то уравнения (3.36) эквивалентны (так как $\overline{L} = -r^{-1} L^T r$ удовлетворяет второму из уравнений (3.36) (см. теорему 2.1)). Поэтому одну из серий канонических законов сохранения следует заменить условиями дивергентности.

Пример 3.3. На примере динамической системы

(3.37) $$u_t = u_2 + f(u, v, u_1, v_1), \quad -v_t = v_2 + g(u, v, u_1, v_1)$$

получим первые канонические законы сохранения и условия дивергентности. Оператор $\Phi_*$ для (3.37) имеет вид

(3.38) $$\Phi_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D^2 + \begin{pmatrix} f_{u_1} & f_{v_1} \\ -g_{u_1} & -g_{v_1} \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ -g_u & -g_v \end{pmatrix}.$$

С помощью калибровочного преобразования (предложение 2.1) приведем первые коэффициенты этого ряда к диагональному виду. Приравнивая коэффициенты при $D^k$ $(k = 0, 1)$ в выражении

$$\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} T = T\Phi_* + T_t,$$

где $T = E + T_{-1} D^{-1} + \ldots$, $\operatorname{diag} T_k = 0$, $F = D^2 + F_1 D + \ldots$, $G = D^2 + G_1 D + \ldots$, получим

$$F_1 = f_{u_1}, \quad G_1 = g_{v_1}, \quad T_{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & f_{v_1} \\ g_{u_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_0 = f_u - \frac{1}{2} f_{v_1} g_{u_1}, \quad G_0 = g_v - \frac{1}{2} f_{v_1} g_{u_1}.$$

Каноническая плотность $\rho_{-1} = 1$, поэтому $\sigma_{-1} = \mathrm{const}$. При вычислении канонических плотностей $\rho_0$, $\rho_1$ можно воспользоваться готовыми формулами примера 3.1, подставив в них $F_k$, полученные в результате диагонализации. Из (3.20), (3.21) получим

$$\rho_0 = \frac{1}{2} f_{u_1}, \tag{3.39}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{1}{8} f_{u_1}^2 + \frac{1}{2} f_u - \frac{1}{4} g_{u_1} f_{v_1} - \frac{1}{4} D(f_{u_1}). \tag{3.40}$$

Непосредственно из (3.33), (3.34) получим

$$\rho_0^0 = -\frac{1}{2}(f_{u_1} + g_{v_1}), \tag{3.41}$$

$$\rho_1^0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{0,\,t}^0 + \frac{1}{4} f_{u_1}^2 - \frac{1}{4} g_{v_1}^2 + g_v - f_u\right) + \frac{1}{4} D(f_{u_1} - g_{v_1}). \tag{3.42}$$

Если система (3.37) обладает формальной симметрией и законом сохранения высокого порядка, то $\rho_0^0 \in \operatorname{Im} D$, т. е. существует функция $\varphi(u, v)$ такая, что $D(\varphi) = \rho_0^0$. Можно доказать (см. [9]), что плотность закона сохранения

$$\rho(u, v, u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$$

при $n \geqslant 2$ имеет вид

$$\rho = e^{\varphi}[\alpha u_n v_n + \beta(v_{n-1} u_n - u_{n-1} v_n)] + \alpha(A u_n + B v_n) + C,$$

где $\alpha$, $\beta$ — числа, подчиняющиеся условию $\alpha\beta = 0$; $A$, $B$, $C$ — функции переменных $u, v, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}$, а при $n = 1$ имеет вид

$$\rho = \alpha e^{\varphi} u_1 v_1 + a(u, v) u_1 + b(u, v) v_1 + c(u, v).$$

В случае нечетного порядка $m$ системы (1.17) вопрос сводится к исследованию скалярного уравнения (1.32).

Лемма 3.3. *В скалярном случае ряд $R = r_1 D + r_0 + \ldots$, $R^T = -R$ (см. теорему 2.1), удовлетворяет уравнению (1.32) в том и только в том случае, когда*

$$2r_{-2k} + \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^i \binom{-2k+i}{i} D^i(r_{-2k+i}) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{3.43}$$

$$2F_{m-1}/F_m = D(r_1^m F_m^{m-1}), \tag{3.44}$$

$$\operatorname{res}\{F^{n/m} - (F + R^{-1}R_t)^{n/m}\} = \operatorname{res}[F^{n/m}R^{-1}, R] \quad (n = 2, 4, \ldots). \tag{3.45}$$

Как и прежде, определим новый набор переменных $\sigma_n^0 = \sigma_n^0(r_1, r_0, \ldots, r_{2-n})$ соотношениями

$$\sigma_0^0 = r_1^m F_m^{m-1}, \tag{3.46}$$

$$\sigma_n^0 = \sigma(F^{n/m}R^{-1}, R) \quad (n = 2, 4, \ldots) \tag{3.47}$$

и выразим переменные $r_k$ через $\sigma_k$ из (3.43), (3.46), (3.47). Пользуясь формулами

$$\rho_0^0 = 2F_{m-1}/F_m,$$

$$\rho_n^0 = \operatorname{res}\{F^{n/m} - (F + R^{-1}R_t)^{n/m}\} \quad (n = 2, 4, \ldots),$$

найдем $\rho_n^0 = \rho_n^0(\sigma_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-m+1})$. Из леммы 3.3 следует, что разрешимость уравнения (1.32) эквивалентна разрешимости цепочки соотношений

$$\rho_n^0 = D(\sigma_n^0).$$

Как и в случае четного порядка $m$ системы (1.17), переходя к самосопряженному решению скалярного уравнения (3.2) (см. теорему 2.1), мы заметим, что «половина» канонических законов сохранения заменяются условиями дивергентности [19].

Формула пересчета (2.1) формальных симметрий при калибровочных преобразованиях тесно связана с общей теорией преобразований и вопросом о формуле пересчета формальной симметрии при переходе от набора динамических переменных $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$, ... к другому набору $\bar{\mathbf{u}} = \psi(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $\bar{\mathbf{u}}_k = \psi_k(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_{n_k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ динамических переменных. Справедливо, например, следующее простое утверждение.

Лемма 3.4 [19]. *Пусть две динамические системы*

$$\mathbf{u}_t = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots), \quad \bar{\mathbf{u}}_{\bar{t}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}_1, \ldots)$$

*связаны подстановкой*

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{\mathbf{u}} = \psi(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_n) \tag{3.48}$$

*и заданы формальные симметрия* $\bar{L} = \sum \bar{l}_k(\bar{\mathbf{u}}, \ldots)\bar{D}^k$ *и закон сохранения* $\bar{R} = \sum \bar{r}_k(\bar{\mathbf{u}}, \ldots)\bar{D}^k$ *динамической системы* $\bar{\mathbf{u}}_{\bar{t}} = \bar{\Phi}$. *Тогда формулы*

$$L = \psi_*^{-1}\bar{L}\psi_*, \quad R = (\psi_*^T)^{-1}\bar{R}\psi_*^{-1}, \quad \bar{D} = D \tag{3.49}$$

*задают формальные симметрию* $L = \sum l_k(\mathbf{u}, \ldots)D^k$ *и закон сохранения* $R = \sum r_k(\mathbf{u}, \ldots)D^k$ *системы* $\mathbf{u}_t = \Phi$.

В формуле (3.49) $\psi_*$ — дифференциальный полином вида (1.20).

## ГЛАВА II
## ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе излагаются результаты С. И. Свинолупова по классификации скалярных уравнений вида

$$u_t = \Phi(x, u, u_x, u_{xx}).$$

Утверждения главы I легко переносятся на уравнения с правой частью, явно зависящей от переменной $x$. В частности, с каждым уравнением второго порядка связан набор плотностей $\rho_{-1}$, $\rho_0$, $\rho_1$ канонических законов сохранения. Эти плотности вычисляются по формулам, указанным в примере 3.1, и при включении $x$ в число динамических переменных меняется лишь оператор полного дифференцирования

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots$$

В § 4 излагается классическая теория Ли контактных преобразований, являющаяся моделью при расширении модуля обратимых преобразований в главе III. Отметим, что добавление $x$ к набору динамических переменных при классификации уравнений второго порядка является в известном смысле необходимым, так как отказ от контактных преобразований, затрагивающих переменную $x$, сильно усложняет анализ условий существования симметрий и делает список интегрируемых случаев трудно обозримым.

В § 5 приводится полный список уравнений второго порядка, обладающих формальными симметриями пятого порядка (теорема 5.1). Список состоит из линейного уравнения

$$u_t = u_{xx} + q(x)u$$

и трех уравнений типа Бюргерса. Симметрии линейного уравнения задаются формулой

$$u_\tau = [D^2 + q(x)]^k(u) \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Если оператор Шрёдингера $L = D^2 + q(x)$ коммутирует с некоторым оператором $M$ нечетного порядка, то в дополнение к указанным симметриям четного порядка, порожденным степенями $L$, имеются симметрии нечетного порядка, порожденные степенями дифференциального оператора $M$. Уравнения типа Бюргерса сводятся к линейному уравнению дифференциальными подстановками, обобщающими замену, связанную с введением потенциала. Явные формулы замен, указанные в конце § 5, позволяют пересчитать симметрии линейного уравнения. Таким образом, условия существования формальной симметрии (локальность канонических законов сохранения (3.17)) являются не только необходимыми (см. теорему 1.1), но и достаточными условиями существования бесконечного набора локальных симметрий.

## § 4. Обратимые преобразования

С общей точки зрения обратимые преобразования в наборе динамических переменных $x$, $u$, $u_1$, ... задаются формулами

$$(4.1)\quad \bar{x}=\varphi(x,u,\ldots,u_m),\ \bar{u}=\psi(x,u,\ldots,u_n),\ \bar{u}_1=\psi_1(x,u,\ldots,u_{n_1}),\ \ldots$$

Обратимость означает существование функций $\bar\varphi$, $\bar\psi$, $\bar\psi_1$, ... таких, что $x=\bar\varphi(\bar x, \bar u, \ldots, \bar u_{\bar m})$, $u=\bar\psi(\bar x, \bar u, \ldots, \bar u_{\bar n})$, $u_1=\bar\psi_1(\bar x, \bar u, \ldots, \bar u_{\bar n_1})$, ... В классической теории Ли, упрощенный вариант которой мы излагаем в этом параграфе, вводится дополнительное условие инвариантности бесконечномерной динамической системы (1.3) при замене (4.1). Это условие означает, что

$$\frac{d\bar u_k}{d\bar x}=\frac{d\psi_k}{dx}\frac{dx}{d\bar x}=\frac{D(\psi_k)}{D(\varphi)}=\bar u_{k+1}$$

или, короче, что

$$(4.2)\qquad \psi_{k+1}=D(\psi_k)/D(\varphi)\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорема 4.1. *Обратимые преобразования* (4.1), (4.2) *исчерпываются точечными преобразованиями* $\bar x=\varphi(x, u)$, $\bar u=\psi(x, u)$, *обратимыми в наборе переменных* $(x, u)$, *и контактными преобразованиями*

$$(4.3)\qquad \bar x=\varphi(x,u,u_1),\qquad \bar u=\psi(x,u,u_1),\qquad \varphi_{u_1}\psi_{u_1}\neq 0,$$

$$(4.4)\qquad \frac{\varphi_x+\varphi_u u_1}{\varphi_{u_1}}=\frac{\psi_x+\psi_u u_1}{\psi_{u_1}},\quad \det\begin{pmatrix}\varphi_u & \varphi_{u_1}\\ \psi_u & \psi_{u_1}\end{pmatrix}\neq 0,$$

*обратимыми в наборе переменных* $(x, u, u_1)$.

Заметим, что для контактных преобразований из (4.2)—(4.4) следует, что $\bar u_1=\psi_{u_1}/\varphi_{u_1}$ и что функции $\varphi$, $\psi$ не произвольны, а являются функционально независимыми решениями одного и того же уравнения вида

$$\Phi_x+\Phi_u u_1=A(x,u,u_1)\,\Phi_{u_1}.$$

Классическим примером контактного преобразования является преобразование Лежандра $\bar x=u_1$, $\bar u=xu_1-u$.

Доказательство теоремы 4.1. При любом $m\geqslant 0$ и $0\leqslant i\leqslant m$ выполняется неравенство $n_i\leqslant m$. Действительно, если $n_j>m$ при некотором $j\leqslant m$, то, в силу (4.2), $n_{i+1}=1+n_i$ $\forall\, i\geqslant j$ и матрица Якоби $\partial(\varphi, \psi, \psi_1, \ldots)/\partial(x, u, u_1, \ldots)$ не имеет правой обратной. Таким образом, при $m>0$ из (4.2) находим, что

$$(4.5)\quad \psi_{k+1}=\frac{D(\psi_k)}{D(\varphi)}=\frac{R(\psi_k)+u_{m+1}\psi_{k,u_m}}{R(\varphi)+u_{m+1}\varphi_{u_m}}=\frac{\psi_{k,u_m}}{\varphi_{u_m}}\quad (k=0,\ \ldots,\ m-1),$$

где $R=\partial/\partial x+u_1\partial/\partial u+\ldots+u_m\partial/\partial u_{m-1}$. Из (4.5) следует, что $\psi_{k,u_m}=\partial\psi_k/\partial u_m\neq 0$ $(k=0,\ldots, m-1)$ (иначе $\psi_{k+1}=0$ и замена (4.1) необратима) и что

$$\frac{R(\varphi)}{\varphi_{u_m}}=\frac{R(\psi)}{\psi_{u_m}}=\ldots=\frac{R(\psi_{m-1})}{\psi_{m-1,u_m}}\overset{\text{опр.}}{=\!=}A.$$

Покажем, что предположение $m \geqslant 2$ приводит к противоречию. Нетрудно проверить, что из $R(\varphi) = A\varphi_{u_m}$, $R(\psi) = A\psi_{u_m}$ следует соотношение

$$\left(R - A\frac{\partial\psi}{\partial u_m}\right)\left(\frac{\psi_{u_m}}{\varphi_{u_m}}\right) = \frac{\varphi_{u_m}\psi_{u_{m-1}} - \psi_{u_m}\varphi_{u_{m-1}}}{\varphi^2_{u_m}}.$$

Учитывая, что $\psi_1 = \psi_{u_m}/\varphi_{u_m}$, получаем равенство $\psi_{u_m}\varphi_{u_{m-1}} - \varphi_{u_m}\psi_{u_{m-1}} = 0$, которое означает, что функция $\psi$ выражается через функцию $\varphi$ по формуле $\psi = K(x, u, \ldots, u_{m-2}, \varphi)$. Из (4.5) следует теперь, что два последних столбца матрицы $\partial(\varphi, \psi, \ldots, \psi_m)/\partial(x, u, \ldots, u_m)$ пропорциональны. Это противоречит обратимости замены.

Случаи $m = 0$, 1 рассматриваются аналогично и приводят к контактным и точечным преобразованиям. ■

Заданная функция $u$ переменных $t$, $x$ в результате точечных и контактных преобразований вида (4.1) переходит в функцию $\bar u(\bar t, \bar x)$ $(\bar t = t)$, при этом $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $\bar u_k = \partial^k \bar u/\partial \bar x^k = \psi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (см. (4.3)). Частная производная функции $\bar u(\bar t, \bar x)$ по переменной $\bar t$ (вычисленная при условии $d\bar x = 0$) задается формулой

$$\bar u_{\bar t} = J u_t, \quad J = \psi_u - \frac{D(\psi)}{D(\varphi)}\varphi_u. \tag{4.6}$$

В случае точечных преобразований $J = [D(\varphi)]^{-1}\partial(\varphi, \psi)/\partial(x, u)$, а в случае контактных преобразований из формулы $D(\psi)\varphi_{u_1} = \psi_{u_1}D(\varphi)$ следует, что $J = (\varphi_{u_1})^{-1}\partial(\varphi, \psi)/\partial(u_1, u)$. Таким образом, обратимые преобразования (4.1), (4.2) позволяют рассматривать уравнения $u_t = \Phi(x, u, u_1, \ldots)$ и $\bar u_{\bar t} = \bar\Phi(\bar x, \bar u, \bar u_1, \ldots)$, связанные соотношением

$$J\Phi(x, u, u_1, \ldots) = \bar\Phi(\varphi, \psi, \psi_1, \ldots), \tag{4.7}$$

как эквивалентные уравнения. Нетрудно проверить, что условия существования формальных симметрий инвариантны относительно обратимых преобразований.

## § 5. Классификационная теорема

Как уже говорилось в начале главы, классификация уравнений второго порядка основана на сформулированном в теореме 3.1 критерии существования формальной симметрии. В случае бесконечномерной динамической системы, соответствующей уравнению

$$u_t = \Phi(x, u, u_1, u_2), \tag{5.1}$$

критерий существования формальной симметрии пятого порядка заключается в разрешимости в классе функций от $x$, $u$, $u_1$, ... системы трех уравнений относительно $\sigma_{-1}$, $\sigma_0$, $\sigma_1$:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = D(\sigma_k) \quad (k = -1, 0, 1), \tag{5.2}$$

где плотности канонических законов сохранения (5.2) вычислены в примере 3.1.

Теорема 5.1 [11]. *Уравнение* (5.1), *обладающее формальной симметрией пятого порядка, приводится обратимыми преобразованиями* (4.1), (4.2) *к одному из уравнений следующего списка:*

$$u_t = u_2 + q(x)u, \tag{5.3}$$

$$u_t = u_2 + 2uu_1 + p(x), \tag{5.4}$$

$$u_t = D(u^{-2}u_1 + \alpha x u + \beta u), \tag{5.5}$$

$$u_t = D(u^{-2}u_1 - 2x). \tag{5.6}$$

Доказательство. Мы будем опираться на следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Уравнение* (5.1) *обладает формальной симметрией третьего порядка в том и только в том случае, когда с точностью до обратимых преобразований записывается в виде*

$$(5.7)\qquad u_t = u_2 + h(x,\ u,\ u_1),$$

$$(5.8)\qquad u_t = D(u^{-2}u_1 + g(x,\ u)).$$

Доказательство леммы будет приведено после завершения классификации уравнений (5.7), (5.8). Рассмотрим уравнения вида (5.7). В этом случае (см. пример 3.1) $\rho_{-1} = 1$ и преобразованиями (3.23) следующие канонические плотности приводятся к виду

$$(5.9)\qquad \rho_0 = h_{u_1},\ \ \rho_1 = \sigma_0 + h_u + \frac{1}{2}\rho_0^2.$$

Заметим сначала, что уравнения вида (5.7) не имеют локальных законов сохранения первого порядка. Действительно, если $\rho = \rho(x,\ u,\ u_1)$, $\rho_{u_1u_1} \neq 0$,— плотность, то $\rho_t \sim \Phi\delta\rho/\delta u$ (функции $\rho_t$ и $\Phi\delta\rho/\delta u$ эквивалентны по модулю $\operatorname{Im} D$). Поэтому правая часть $\Phi$ рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\Phi = \frac{Au_2 + B}{Cu_2 + D},$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — функции переменных $x$, $u$, $u_1$, причем $C = \rho_{u_1u_1} \neq 0$, что противоречит (5.7).

Так как $d\rho_0/dt \in \operatorname{Im} D$ и $\rho_0 = h_{u_1}$, то

$$h_{u_1} = D(f(x,\ u)) + a(x,\ u).$$

Это означает, что уравнение (5.7) имеет вид

$$(5.10)\qquad u_t = u_2 + Au_1^2 + Bu_1 + C,$$

где $A$, $B$, $C$ — функции переменных $x$, $u$. Легко проверить, что заменой вида $\bar{x} = x$, $\bar{u} = \psi(x,\ u)$ уравнение (5.10) приводится к одному из следующих:

$$(5.11)\qquad u_t = u_2 + b(x,\ u),$$

$$(5.12)\qquad u_t = u_2 + a(x,\ u)u_1 + b(x,\ u),\quad a_u \neq 0.$$

Для уравнения (5.11) условие $\rho_{0,t} \in \operatorname{Im} D$ выполняется автоматически, а $\rho_1 = b_u$ (см. (5.9)). Имеем $b_{u,t} \sim -b_{uuu}u_1^2 + \varphi(x,\ u)$ и, следовательно, $b_{uuu} = 0$, $b = p(x)u^2 + q(x)u + r(x)$. Аналогично устанавливается, что $b_{uu} = 2p = 0$. Замена $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u + y(x)$, $y'' + qy = r$ приводит к уравнению (5.3) из списка, приведенного в теореме 5.1.

Для уравнения (5.12) $\rho_0 = -a$ (следующее условие не понадобится). Имеем $a_{uu} = 0$, т. е. $a = \beta_1(x)u + \beta_2(x)$, $\beta_1 \neq 0$. Замена $\bar{x} = x$, $\bar{u} = \alpha_1(x)u + \alpha_2(x)$, $2\alpha_1 = \beta_1$, $2\alpha_2 = \beta_2 - 2D\ln\alpha_1$ приводит уравнение к виду $u_t = u_2 + 2uu_1 + b(x,\ u)$. Так как теперь $\rho_0 = -2u$, то правая часть рассматриваемого уравнения является полной производной. Это означает, что $b_u = 0$ и что уравнение совпадает с уравнением (5.4).

Остается рассмотреть уравнения вида (5.8), для полного описания которых достаточно условия $\rho_{0,t} \in \operatorname{Im} D$, $\rho_0 \sim ug - u^2g_u$. Если $\rho = \rho(x,\ u)$ — плотность, то $\rho_t \sim -\rho_{uu}u^{-2}u_1^2 + \varphi(x,\ u)$. Поэтому $\rho \sim b(x)u$, причем

$$(5.13)\qquad u^{-1}b''(x) + b'(x)\,g(x,\ u) \in \operatorname{Im} D.$$

Каноническая плотность $\rho_0$ по модулю $\operatorname{Im} D$ эквивалентна функции $ug - u^2g_u$. Значит, $ug - u^2g_u = b(x)u + c(x)$ и $g(x,\ u) = a(x)u + b(x) + c(x)/2u$. Замена $\bar{x} = y(x)$, $\bar{u} = u/y'(x)$, $2y'' + cy' = 0$ приводит к уравнению (5.8) с $g = A(x)u + B(x)$. Условие (5.13) применительно к плотности $ug - u^2g_u =$

$= B(x)u$ означает, что $B'' = AB' = 0$. В случае $B' \neq 0$ $(B'' = A = 0)$ имеем $g = c_1 x + c_2$, $c_1$, $c_2 \in \mathbb{C}$. Полученное уравнение сводится к (5.6) растяжением $t$, $u$. В случае $B = 0$ имеем $g(x, u) = A(x)u$ и $\rho_1 \sim -A'(x)u$. Условие (5.13) дает $A''(x) = 0$. Полученное уравнение совпадает с (5.5). ■

Доказательство леммы, сформулированной в начале параграфа. Из уравнения (1.32) (см. главу I) следует, что уравнение (5.1) не имеет законов сохранения порядка два и выше. Это накладывает ограничение на вид плотности $\rho_{-1} = \Phi_{u_2}^{-1/2}$:

$$\rho_{-1} = D[f(x, u, u_1)] + a(x, u, u_1). \tag{5.14}$$

Из формулы (4.7) следует, что плотности $\rho_{-1}$ и $\bar{\rho}_{-1}$ канонических законов сохранения уравнений, связанных обратимым преобразованием (4.1), (4.2), удовлетворяют соотношению

$$\bar{\rho}_{-1}(\varphi, \psi, \psi_1, \psi_2) = \frac{1}{D(\varphi)} \rho_{-1}(x, u, u_1, u_2). \tag{5.15}$$

Замена, приводящая уравнение (5.1) к виду (5.7) или (5.8), строится по функциям $f$, $a$, входящим в правую часть (5.14). В случае $a = 0$, соответствующем тривиальности рассматриваемого закона сохранения, искомая замена имеет вид (4.1), (4.2) с $\varphi = f$ и приводит к уравнению вида (5.7). В случае $a_{u_1} = 0$, $a_u \neq 0$, соответствующем закону сохранения нулевого порядка, имеем $\Phi_{u_2 u_2} = 0$, т. е. $f_{u_1} = 0$ (см. (5.14)). Рассмотрим точечную замену $\bar{x} = \varphi(x, u)$, $\bar{u} = \psi(x, u)$ такую, что $\varphi_x = (f_x + a)\psi^{-1}$, $\varphi_u = f_u \psi^{-1}$. Так как $D(\varphi) = \psi^{-1}\rho_{-1}$, из формулы (5.15) и условия $(\rho_{-1})_t \in \operatorname{Im} D$ следует, что полученное уравнение имеет вид $u_t = u_2 u^{-2} + G(x, u, u_1)$. Учитывая, что теперь $\rho_{-1} = u$, получаем (5.8).

Осталось рассмотреть случай, когда каноническая плотность $\rho_{-1}$ задает закон сохранения второго порядка, т. е. когда $a_{u_1 u_1} \neq 0$. Покажем, что существует контактное преобразование (4.3), (4.4), переводящее плотность $a(x, u, u_1)$ в плотность $\bar{u}$. Ясно, что должно выполняться равенство вариационных производных

$$\frac{\delta}{\delta u}[\psi D(\varphi)] = \frac{\delta a}{\delta u}, \tag{5.16}$$

где $\delta/\delta u = \partial/\partial u - D\partial/\partial u_1 + D^2 \partial/\partial u_2 + \ldots$, и равенство (см. (4.4))

$$\frac{D(\psi)}{D(\varphi)} = \frac{\psi_{u_1}}{\varphi_{u_1}}. \tag{5.17}$$

Из (5.17) следует, как нетрудно проверить, что

$$\frac{\delta}{\delta u}[\psi D(\varphi)] = \psi_u D(\varphi) - \varphi_u D(\psi). \tag{5.18}$$

Из этой формулы в свою очередь следует, что соотношение (5.16) эквивалентно паре уравнений

$$a_{u_1 u_1} = \varphi_u \psi_{u_1} - \psi_u \varphi_{u_1},$$
$$a_{u u_1 u_1} + a_{x u_1} - a_u = \varphi_u \psi_x - \psi_u \varphi_x.$$

Добавляя к этим уравнениям соотношение (5.17), приводим систему (5.16), (5.17) к эквивалентной ей системе уравнений

$$\varphi_u \psi_{u_1} - \psi_u \varphi_{u_1} = a_{u_1 u_1},$$
$$\frac{\varphi_x + \varphi_u u_1}{\varphi_{u_1}} = \frac{\psi_x + \psi_u u_1}{\psi_{u_1}} = \frac{a_{x_1 u_1} + a_{u u_1} - a_u}{a_{u_1 u_1}}. \tag{5.19}$$

Разрешимость этой переопределенной системы уравнений относительно функций $\varphi$, $\psi$ доказывается стандартным методом характеристик. Построенное контактное преобразование переводит плотность $a(x, u, u_1)$ в плотность $\bar{u}$, т. е. приводит к уравнению, для которого $\bar{\rho}_{-1} = \bar{u}$ (чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться формулами $\rho_{-1} = D(F) + \psi D(\varphi)$ и (5.15). Таким образом, контактное преобразование сводит случай $a_{u_1u_1} \neq 0$ ($a$ — функция из правой части формулы (5.14)) к рассмотренному выше случаю $a_{u_1} = 0$, $a_u \neq 0$. ■

Уравнения (5.1) имеют симметрии высокого порядка только в исключительных случаях. Классификационная теорема показывает, что не все уравнения, обладающие формальными симметриями, сводятся при помощи обратимых преобразований к линейным. Будет показано, что вопрос об их интегрировании решается небольшим расширением модуля обратимых замен.

Фактически речь идет о добавлении одного, строго говоря, необратимого преобразования, которое часто называют операцией введения потенциала. Это преобразование возможно, если исходное уравнение имеет вид закона сохранения

$$u_t = D(F(x,\ u,\ u_1)). \tag{5.20}$$

В этом случае можно определить новый набор динамических переменных

$$\bar{x} = x,\quad \bar{u}_1 = u,\quad \bar{u}_2 = u_1,\ \ldots \tag{5.21}$$

и перейти к уравнению

$$\bar{u}_t = F(\bar{x},\ \bar{u}_1,\ \bar{u}_2). \tag{5.22}$$

Связь решений уравнений (5.20) и (5.22) очевидна.

В качестве примера рассмотрим уравнение Бюргерса (5.4). Оно имеет вид (5.20) и в результате потенциирования (5.21) приводится к виду (5.22) ($\bar{u}_t = \bar{u}_2 + \bar{u}_1^2 + q(\bar{x})$). Точечное преобразование $y = \bar{x}$, $v = \exp \bar{u}$ переводит последнее уравнение в линейное (5.3). Композиция этих двух преобразований совпадает с известной заменой Коула — Хопфа [38], [39]:

$$x = y,\quad u = v_1/v. \tag{5.23}$$

Другой пример замены такого типа связан с уравнением (5.6). Потенциирование и затем точечная замена $y = \bar{u}$, $v = \bar{x}$ приводят его к уравнению Бюргерса (5.4) с $q(x) = 0$. Композиция этих двух замен имеет вид

$$x = v,\quad u = 1/v_1. \tag{5.24}$$

Отметим, что эта же замена переводит уравнение (5.8) в линейное уравнение

$$v_t = v_2 - \alpha v - \beta \tag{5.25}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha$, $\beta$. Таким образом, это незначительное расширение модуля обратимых преобразований позволяет связать все уравнения, перечисленные в теореме 5.1, с линейными.

В общем случае операция потенциирования возможна, если уравнение обладает законом сохранения нулевого или второго порядка. Пусть $\rho = \rho(x, u)$ — плотность нулевого порядка, тогда новый набор динамических переменных можно определить из соотношений $\bar{x} = x$, $\bar{u}_1 = \rho(x,\ u)$. Если $\rho = a(x,\ u,\ u_1)$ — плотность второго порядка, то операция потенциирования задается соотношениями $\bar{x} = \varphi(x, u, u_1)$, $\bar{u}_1 = \psi(x, u, u_1)$, где $\varphi, \psi$ — функционально независимые решения уравнения (5.19). При потенциировании уравнения соответствующий закон сохранения «переходит» в симметрию ($\bar{u}_\tau = 1$). Нетрудно показать, что уравнение (5.1), имеющее симметрию нулевого или первого порядка, приводится точечным или контактным преобразованием к виду (5.22). При этом допустима замена $x = \bar{x}$, $u = \bar{u}_1$, $u_1 = \bar{u}_2$, переводящая уравнение (5.22) в (5.20), которую мы будем называть дифференцированием уравнения (5.22). Она является обратной к потенциированию.

В отличие от обратимых преобразований, операции потенциирования и дифференцирования не позволяют, вообще говоря, пересчитывать симметрии уравнений. Например, уравнение $u_t = D(u^{-2}u_1 - 2x - u)$, полученное из $\bar{u}_t = \bar{u}_1^{-2}\bar{u}_2 - \bar{u}_1 - 2\bar{x}$ дифференцированием, не имеет симметрий вида $g(x, u, u_1, \ldots, u_n)$ при $n \geqslant 3$, в то время как исходное уравнение имеет симметрии произвольно большого порядка и связано с уравнением Бюргерса $v_t = v_2 + 2vv_1 + 1$ точечным преобразованием $\bar{x} = v$, $\bar{u} = y$. В данном примере причина потери симметрий состоит в том, что переменная $t$ не включена в число динамических переменных. Можно проверить, что рассматриваемое уравнение обладает бесконечным набором симметрий вида $u_\tau = D^2(u^{-1}D + x - t)^k(x - t)$, так как оно сводится к (5.6) преобразованием Галилея.

Дифференцирование, соответственно потенциирование, не разрушает симметрий, если они не зависят от $u$, соответственно являются полными производными. Это простое наблюдение и указанные выше замены позволяют построить симметрии произвольно высокого порядка уравнений (5.3)—(5.6). Например, симметрии уравнения (5.5)

$$u_\tau = D\left[u \sum_{k=1}^{N} c_k (u^{-1}D)^k (u^{-1}) + c_0 ux + cu\right], \quad c_k,\ c \in \mathbb{C},$$

получаются из симметрий

$$v_\tau = c + \sum_{k=0}^{N} c_k v_k$$

линейного уравнения (5.25) подстановкой (5.24).

## ГЛАВА III
## РАСШИРЕНИЕ МОДУЛЯ ОБРАТИМЫХ ЗАМЕН

В случае систем уравнений с частными производными не существует полного аналога контактных преобразований. Но при этом модуль обратимых замен не исчерпывается точечными. Примерами неточечных обратимых замен являются преобразование $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v + u_1$ и преобразование $\bar{x} = \varphi(x, u, u_1)$, $u = \psi(x, u, u_1)$, $\bar{v} = \chi(x, u, v)$, где функции $\varphi$, $\psi$ подчиняются уравнениям (4.3), (4.4) и $\chi_v \neq 0$. В приложениях часто встречается ситуация, когда система обладает непрерывной точечной группой симметрий, и достаточно ограничиться суженным набором динамических переменных, состоящим из инвариантов группы. Для таких систем модуль обратимых преобразований удается существенно расширить, отказавшись от требования локальности преобразования переменных, не входящих в суженный набор динамических переменных.

В § 6 рассматриваются системы уравнений (1.17) с не зависящей от $x$ правой частью. Полное описание обратимых преобразований, локальных в наборе переменных $u, u_1, u_2, \ldots$, дает в скалярном случае теорема 6.1. Некоторые из этих преобразований обобщаются на случай систем уравнений и позволяют, в частности, привести системы вида (0.8), обладающие формальной симметрией третьего порядка, к более простому виду (ср. с леммой 5.1):

$$u_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x), \quad -v_t = v_{xx} + g(u, v, u_x, v_x).$$

В §§ 7, 8 рассматриваются системы двух уравнений указанного выше вида, инвариантные относительно инфинитезимальных преобразований $\bar{u} = u + \tau p(u)$, $\bar{v} = v + \tau q(v)$. Замены в соответствующем суженном наборе динамических переменных существенно используются в главе IV при классификации нелинейных систем типа Шрёдингера.

Отметим, что рассматриваемые в этой главе замены строятся, исходя из классических симметрий и законов сохранения. Такого рода замены не связаны рамками теории интегрируемых систем и могут быть использованы для широкого класса уравнений с частными производными.

## § 6. Обобщенные контактные преобразования

Для уравнений, инвариантных относительно пространственных сдвигов $\bar{x} = x + \tau$, можно ограничиться набором динамических переменных $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$, не содержащим переменную $x$. В этом суженном наборе переменных определим замену

$$\bar{u}^i = \psi^i(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_n), \quad \bar{u}^i_k = \psi^i_k(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_{n_k}), \ldots \quad (i=1, \ldots, M; \quad k=1,2,3, \ldots). \tag{6.1}$$

Требование локальности преобразования переменной $x$ мы заменим (ср. (4.1)) более слабым условием существования функции $\alpha = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ такой, что

$$d\bar{x} = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)\, dx. \tag{6.2}$$

Условие инвариантности динамической системы (1.2), (1.3) при замене (6.1), (6.2) приводит к соотношениям

$$\psi^i_{k+1} = \frac{D(\psi^i_k)}{\alpha} \quad (k=0, 1, \ldots; \quad i=1, \ldots, M), \tag{6.3}$$

эквивалентным формуле

$$\bar{D} = \alpha^{-1} D, \tag{6.4}$$

где $\bar{D} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{M} \bar{u}^i_{k+1} \partial/\partial \bar{u}^i_k$.

Требование обратимости замены (6.1)—(6.3) накладывает определенные ограничения на функции $\alpha, \psi^1, \ldots, \psi^M$. В случае $M = 1$ аналогом теоремы 4.1 является

Теорема 6.1. *В скалярном случае ($M = 1$) замена (6.1)—(6.3) обратима в наборе переменных $u, u_1, u_2, \ldots$ тогда и только тогда, когда функция $\alpha$ не принадлежит пространству* $\operatorname{Im} D$ *и имеет место один из следующих случаев*:

$$1) \quad \alpha = \alpha(u, u_1), \quad \psi = \psi(u); \tag{6.5}$$

$$2) \quad \alpha = D(a(u, u_1)) + b(u, u_1), \quad \psi = \psi(u, u_1), \quad a_{u_1} \neq 0, \quad a_{u_1}\psi_u = (a_u + u_1^{-1} b)\psi_{u_1}; \tag{6.6}$$

$$3) \quad \alpha = D(a(u, u_1, u_2)) + b(u, u_1, u_2), \quad \psi = \psi(u, u_1, u_2), \quad a_{u_2} \neq 0, \quad b_{u_2 u_2} \neq 0, \quad \psi_1 = \psi_1(u, u_1, u_2), \quad \psi_{u_2} = a_{u_2}\psi_1, \quad \psi_{u_1} = (a_{u_1} + b_{u_2})\psi_1, \quad \psi_u = (a_u + u^{-1}b - u_1^{-1} b_{u_2 u_2})\psi_1. \tag{6.7}$$

Сокращенное доказательство. Рассмотрим замену

$$\hat{x} = \psi(u, u_1, \ldots), \qquad \hat{u} = \psi_1(u, u_1, \ldots), \qquad \hat{u}_k = \hat{D}^k(\psi_1), \qquad k \geqslant 1, \tag{6.8}$$

где $\hat{D} = [D(\psi)]^{-1} D$, являющуюся композицией (6.1)—(6.3) с преобразованием $\hat{x} = \bar{u}$, $\hat{u} = \bar{u}_1, \ldots$ Можно проверить, что доказательство теоремы сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма 6.1. *Замена (6.8) является обратимым преобразованием из набора переменных $u, u_1, u_2, \ldots$ в набор переменных $\hat{x}, \hat{u}, \hat{u}_1, \ldots$ тогда и только тогда, когда имеет место один из двух случаев*:

$$\hat{x} = \psi(u, u_1), \quad \hat{u} = \psi_1(u, u_1), \quad \partial(\psi, \psi_1)/\partial(u, u_1) \neq 0,$$

*или*

$$\hat{x} = \psi(u, u_1, u_2), \quad \hat{u} = \psi_1(u, u_1, u_2),$$

$$\psi_{u_2} \cdot \psi_{1,u_2} \neq 0, \quad \psi_{u_2}^{-1}(\psi_u u_1 + \psi_{u_1} u_2) = \psi_{1u_2}^{-1}(\psi_{1u} u_1 + \psi_{1u_1} u_2), \quad \partial(\psi, \psi_1)/\partial(u_1, u_2) \neq 0.$$

Доказательства леммы 6.1 и теоремы 4.1 почти не различаются. ■

Отметим в дополнение к теореме 6.1, что обратные к преобразованиям (6.8) преобразования вида

$$(6.9)\quad d\bar{x}=\alpha(x,\ u,\ \ldots)\,dx,\ \bar{u}=\psi(x,\ u,\ldots),\ \bar{u}_1=\psi_1(x,\ u,\ \ldots),\ \ldots$$

описываются формулами, аналогичными (6.5)—(6.7). Например, в случае, аналогичном (6.5), имеем

$$(6.10)\qquad d\bar{x}=\alpha(x,\ u)\,dx,\ \alpha_u\neq 0,\ \bar{u}=\psi(u),$$

Преобразование, заданное формулами (6.5)

$$d\bar{x}=\alpha(u,\ u_1)\,dx,\ \bar{u}=\psi(u),\ \bar{u}_1=\psi_1(u,\ u_1),\ \ldots,$$

обобщается на случай систем уравнений. Действительно, замена

$$(6.11)\qquad d\bar{x}=\alpha(\mathbf{u},\ \mathbf{u}_1)\,dx,\ \bar{u}^i=u^i,\ \bar{u}_1^i=\alpha^{-1}u_1^i,\ \ldots$$

при $\alpha\neq\sum u_1^s\,\partial\alpha/\partial u_1^s$ является обратимой, так как матрица Якоби

$$\frac{\partial(\bar{u}_1^1,\ \ldots,\ \bar{u}_1^M)}{\partial(u_1^1,\ \ldots,\ u_1^M)}=\frac{1}{\alpha}\delta_{ij}-\frac{u_1^i}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial u_1^j}$$

имеет обратную с элементами

$$a_{ij}=\alpha\left(\delta_{ij}+\frac{u_1^i\,\partial\alpha/\partial u_1^j}{\alpha-\sum\limits_s u_1^s\partial\alpha/\partial u_1^s}\right).$$

Преобразования (6.1)—(6.3), обратимые в наборе $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, . . ., допускаются бесконечномерной динамической системой (1.17), если к набору динамических переменных $\mathbf{u}_k=\mathbf{u}_k(t,\ x)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$ можно добавить новую переменную $\bar{x}=X(t,\ x)$ такую, что

$$(6.12)\qquad \frac{\partial X}{\partial x}=\alpha(\mathbf{u},\ \mathbf{u}_1,\ \ldots),\quad \frac{\partial X}{\partial t}=\beta(\mathbf{u},\ \mathbf{u}_1,\ \ldots).$$

Условие совместности соотношений (6.12)

$$(6.13)\qquad \frac{d\alpha}{dt}=D(\beta)$$

означает, что функция $\alpha$ в (6.2) является плотностью закона сохранения исходной динамической системы (1.17). При этом обратимому полулокальному преобразованию (6.1)—(6.3) соответствует замена переменных

$$(6.14)\qquad \bar{t}=t,\ \bar{x}=X(t,\ x),\ \bar{u}^i=\psi^i(u,\ u_1,\ \ldots)\quad (i=1,\ \ldots,\ M).$$

Правая часть преобразованной системы

$$(6.15)\qquad d\bar{u}^i/d\bar{t}=\bar{\Phi}^i(\bar{\mathbf{u}},\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \ldots)\quad (i=1,\ \ldots,\ M)$$

вычисляется по формулам

$$(6.16)\qquad \bar{\Phi}^i=\sum_{k\geq 0}\sum_{j=1}^{M}\psi^i_{u_k^j}D^k(\Phi^j)-\frac{\beta}{\alpha}D(\psi^i).$$

В отличие от полулокального преобразования (6.1)—(6.3), обратимые преобразования вида (6.8), полное описание которых дает лемма 6.2, применимы к произвольным уравнениям и переводят динамическую систему $u_t=\Phi(x,\ u,\ u_1,\ \ldots)$ в систему вида

$$(6.17)\qquad \hat{u}_t=\hat{\Phi}(\hat{u},\ \hat{u}_1,\ \ldots)=\left[\psi_{1,u_1}-\frac{D(\psi_1)}{D(\psi)}\psi_{u_1}\right]\left[D(\Phi)-\frac{u_2}{u_1}\Phi\right].$$

Нетрудно проверить, что преобразованное уравнение (6.17) обладает локальным законом сохранения с плотностью $\alpha = D(\psi)/\psi_1$.

Рассматриваемые преобразования, затрагивающие переменную $x$, существенно меняют характер нелинейности исходного уравнения. Например, из формулы (6.17) следует, что полученное уравнение всегда квазилинейно. Для иллюстрации приложений изложенной теорией преобразований рассмотрим скалярные уравнения второго порядка $u_t = \Phi(u, u_1, u_2)$, удовлетворяющие первому условию интегрируемости $(\Phi_{u_2}^{-1/2})_t \in \operatorname{Im} D$ (ср. с леммой 5.1). Можно проверить, исходя из формулы (6.16), что при $\alpha = \Phi_{u_2}^{-1/2} \notin \operatorname{Im} D$ указанные в теореме 6.1 преобразования приводят к уравнению вида $\bar u_t = \bar u_2 + f(\bar u, \bar u_1)$. Например, уравнение $u_t = u^2 u_2$ сводится к линейному $\bar u_t = \bar u_2$ заменой $\bar t = t$, $d\bar x = u^{-1}dx - u_1 dt$, $\bar u = u$ (ср. [40]).

Проиллюстрируем общую схему применения обратимых преобразований (6.1)—(6.3) при классификации интегрируемых уравнений еще одним примером. Для квазилинейной системы двух уравнений второго порядка

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2 + \mathrm{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1), \quad \det A \neq 0, \tag{6.18}$$

первые необходимые условия существования законов сохранения и симметрий (см. пример 3.1) записываются в виде

$$\operatorname{trace} A = 0, \quad \frac{d}{dt}(\det A)^{-1/4} \in \operatorname{Im} D. \tag{6.19}$$

В случае $A = A(\mathbf{u})$ замена (6.11) в композиции с точечным преобразованием позволяет привести систему (6.18), (6.19) к диагональному виду [9]

$$u_t = u_2 + f(u, v, u_1, v_1), \quad -v_t = v_2 + g(u_1, v, u_1, v_1). \tag{6.20}$$

В общем случае $A = A(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$ уравнения (6.18) приводятся к системе с постоянными собственными значениями, равными $+1$ и $-1$. Функция $\alpha$ в (6.11) выбирается в обоих случаях равной $(\det A)^{-1/4}$. Например, система уравнений, рассматривавшаяся в [41],

$$u_t = i\sqrt{3}\, D^2 \frac{\partial}{\partial v}(uv)^{1/3}, \quad -v_t = i\sqrt{3}\, D^2 \frac{\partial}{\partial u}(uv)^{1/3}$$

преобразованием

$$-3\bar u = \exp(-2\pi i/3)\ln u + \exp(2\pi i/3)\ln v,$$
$$-3\bar v = \exp(2\pi i/3)\ln u + \exp(-2\pi i/3)\ln v$$

сводится к известной (см. [42], [43]) системе вида

$$\bar u_t = \bar u_2 + \bar v_1^2, \quad -\bar v_t = \bar v_2 + \bar u_1^2.$$

При классификации систем уравнений (0.8), обладающих бесконечной серией законов сохранения, мы будем использовать сформулированное ниже общее легко проверяемое утверждение, которое показывает, что локальность законов сохранения сохраняется при обратимых преобразованиях (6.1)—(6.3).

Лемма 6.2. *Пусть две динамические системы вида* (1.17):

$$\bar{\mathbf{u}}_{\bar t} = \bar\Phi(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}_1, \ldots), \quad \mathbf{u}_t = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots)$$

*связаны подстановкой*

$$\bar t = t, \quad d\bar x = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots)\,dx + \beta(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots)\,dt, \quad \bar{\mathbf{u}} = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots) \tag{6.21}$$

*и задан закон сохранения*

$$\frac{d}{dt}\bar\rho = \bar D(\bar\sigma) \tag{6.22}$$

*в наборе динамических переменных* $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{u}}_1$, $\bar{\mathbf{u}}_2$, ... *Тогда формулы*

$$\rho = \alpha\bar{\rho},\quad \sigma = \bar{\sigma} + \beta\bar{\rho} \tag{6.23}$$

*определяют закон сохранения*

$$\frac{d}{dt}\rho = D(\sigma) \tag{6.24}$$

*в наборе переменных* $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...

Подчеркнем, что общая формула (6.23) позволяет строить законы сохранения (6.24) и в случае необратимых преобразований вида (6.21). Закон сохранения $d\alpha/dt = D(\beta)$, порождающий соответствующую (6.21) замену $\bar{x} = X(t, x)$ (см. (6.12)), соответствует, в силу (6.23), тривиальному закону сохранения (6.22) с $\bar{\rho} = 1$.

Частные случаи преобразования (6.21)

$$\alpha = c + D(a(u)),\quad c \neq 0;\quad \psi = \psi(u),\quad \bar{x} = cx + a(u),$$

$$\alpha = c + D(a(u, u_1)),\quad c \neq 0;\quad \psi = \psi(u, u_1),\quad \bar{x} = cx + a(u, u_1),$$

удовлетворяющие условиям теоремы 6.1, соответствуют точечным и контактным преобразованиям, допускаемым классом уравнений, правая часть которых не зависит от $x$.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще один интересный пример применения преобразований типа (6.1)—(6.3), связанный с гиперболическими уравнениями вида

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0. \tag{6.25}$$

Здесь $a$, $b$, $c$, $d$ — некоторые функции от $u$, $u_x$, $u_y$. Естественным обобщением преобразования (6.11) является в данном случае замена

$$d\bar{x} = \alpha dx + \beta dy,\quad d\bar{y} = \gamma\, dx + \delta\, dy,\quad \bar{u} = u, \tag{6.26}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — функции от $u$, $u_x$, $u_y$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_y = \beta_x,\quad \gamma_y = \delta_x,\quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{6.27}$$

Если локальные законы сохранения (6.27) являются нетривиальными, то замена (6.26) обратима и полученное в результате замены уравнение имеет тот же вид (6.25).

Применим преобразование (6.26)—(6.27) к уравнению Клейна — Гордона

$$u_{xy} = dh(u)/du, \tag{6.28}$$

выбрав в качестве $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ компоненты тензора энергии-импульса:

$$\alpha = \frac{1}{2}u_x^2,\quad \beta = h(u),\quad \gamma = h(u),\quad \delta = \frac{1}{2}u_y^2.$$

Можно проверить (см. [44]), что полученное в результате замены уравнение (6.25) является лагранжевым с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = h^{-1}\left(1 + \sqrt{1 - 2h\bar{u}_{\bar{x}}\bar{u}_{\bar{y}}}\right).$$

Формула пересчета локальных законов сохранения, аналогичная (6.23), позволяет доказать, что уравнения, полученные указанной заменой из уравнений списка (0.1), обладают бесконечной серией локальных законов сохранения.

## § 7. Частичные дифференцирования и потенциирования

Модуль обратимых замен, сохраняющих вид системы уравнений (6.20), весьма беден. Он состоит из композиции элементарных замен $\bar{x} = ax + bt + c$, $\bar{t} = \alpha^2 t + d$, *конформных* преобразований $\bar{u} = U(u)$, $\bar{v} = V(v)$ и инволюции

$$(7.1)\qquad \bar{t}=-t,\quad \bar{x}=-x,\quad \bar{u}=v,\quad \bar{v}=u.$$

В этом параграфе мы расширим этот модуль, добавив замены, аналогичные дифференцированию и потенцированию скалярных уравнений.

Систему уравнений вида (6.20), инвариантную относительно непрерывной группы точечных преобразований, воспользовавшись конформными преобразованиями и инволюцией (7.1), можно привести к виду

$$(7.2)\qquad u_t=u_2+f(\varepsilon u+v,\ u_1,\ v_1),\quad -v_t=v_2+g(\varepsilon u+v,\ u_1,\ v_1)$$

с $\varepsilon=0$ или 1. Замена выбирается так, чтобы симметрия $u_\tau=\varphi(u)$, $v_\tau=\psi(v)$ исходного уравнения в новых переменных имела вид $u_\tau=1$, $v_\tau=-\varepsilon$. Например, хорошо известное уравнение Шрёдингера (0.14) очевидной заменой приводится к виду (7.2) с $\varepsilon=1$:

$$(7.3)\qquad u_t=u_2+u_1^2+\exp(u+v),\quad -v_t=v_2+v_1^2+\exp(u+v).$$

Максимальный набор динамических переменных, инвариантный относительно однопараметрической точечной группы, в дальнейшем мы будем называть *суженным набором динамических переменных*. В предыдущей главе мы уже встречались с сужениями наборов динамических переменных: например, уравнение (5.22) инвариантно относительно точечной группы $\bar{u}\to\bar{u}+\lambda$ ($\lambda=\mathrm{const}$), и соответствующий набор $\bar{x},\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ \ldots$ не содержит переменной $\bar{u}$. Другие примеры связаны с уравнениями, инвариантными относительно пространственных сдвигов, в этом случае суженный набор динамических переменных не содержит переменной $x$. В случае систем уравнений вида (7.2) суженный набор динамических переменных имеет вид $\varepsilon u+v$, $u_1,\ v_1,\ \ldots$, он порождается действием оператора $D$ на образующие, в качестве которых можно выбрать $\varepsilon u+v$, $u_1$.

Аналогом дифференцирования в случае систем (7.2) является замена, определенная на образующих наборов динамических переменных:

$$(7.4)\qquad \bar{u}=u_1,\quad \bar{v}=\varepsilon u+v.$$

Однако эта замена, вообще говоря, выводит из класса уравнений (6.20). Условие

$$(7.5)\qquad f_{v_1v_1}=0$$

гарантирует независимость коэффициента при $\bar{v}_2$ от $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$ в новой системе. Нетрудно проверить, что существует простое точечное преобразование, приводящее ее к виду (6.20). Композицию этих преобразований можно представить в виде

$$(7.6)\qquad \begin{aligned}\bar{u}&=\varphi(\varepsilon u+v,\ u_1), & 2\varphi_v&=f_{v_1}\varphi_{u_1},\\ \bar{v}&=\psi(\varepsilon u+v), & \varphi_{v_1}\psi_v&\neq 0.\end{aligned}$$

Замена (7.6) определена неоднозначно, с точностью до двух функций одной переменной. Эта неоднозначность соответствует произвольному конформному преобразованию в новой системе. Композиции точечных преобразований и замены (7.4) мы будем называть *частичным дифференцированием*. Частичное дифференцирование является обратимой заменой на суженном наборе динамических переменных исходной системы.

Если система уравнений (6.20) инвариантна относительно двупараметрической абелевой группы конформных преобразований, то она может быть приведена к виду

$$(7.7)\qquad u_t=u_2+f(u_1,\ v_1),\quad -v_t=v_2+g(u_1,\ v_1).$$

Система уравнений (7.7) допускает замену переменных

$$(7.8)\qquad \bar{u}=u_1,\quad \bar{v}=v_1,$$

приводящую к системе

$$\bar{u}_t = D(\bar{u}_1 + f(\bar{u}, \bar{v})), \quad -\bar{v}_t = D(\bar{v}_1 + g(\bar{u}, \bar{v})). \tag{7.9}$$

Преобразование (7.8), в отличие от (7.4), мы будем называть *полным дифференцированием*. Полное дифференцирование также является аналогом дифференцирования скалярных уравнений, оно обратимо на сужении набора динамических переменных исходной системы $(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots)$.

Система уравнений, полученная в результате частичного дифференцирования (7.4), так же, как и в скалярном случае, обладает локальным законом сохранения нулевого порядка с плотностью $\rho = \bar{u}$. Полное дифференцирование (7.8) приводит к системе (7.9), имеющей вид локальных законов сохранения с плотностями $\bar{u}$ и $\bar{v}$.

Перейдем к обсуждению замен, аналогичных операции потенциирования (5.21), определенной в скалярном случае. Пусть система (6.20) обладает локальным законом сохранения с плотностью $\rho = \rho(u, v)$, $\rho_u \neq 0$. Определим новый набор динамических переменных по правилу

$$\bar{u}_1 = \rho(u, v) \quad \bar{v} = v. \tag{7.10}$$

Замена (7.10) в (6.20) определяет эволюцию во времени суженного набора динамических переменных. Тот факт, что $\rho$ является плотностью локального закона сохранения $\rho_t = D(\sigma)$, позволяет продолжить эволюцию во времени на полный набор, добавив уравнение $\bar{u}_t = \sigma$. Преобразование (7.10) может вывести за пределы рассматриваемого класса уравнений (6.20). Если правая часть исходного уравнения удовлетворяет условиям

$$g_{u_1 u_1} = g_{u_1 v_1} = (g_{u_1}/\rho_u)_u = 0, \tag{7.11}$$

то систему, полученную в результате замены (7.10), можно привести точечным преобразованием к виду (6.20). Композицию этих преобразований можно представить в виде

$$\begin{gathered} \bar{u}_1 = \rho(u, v), \quad \varepsilon\bar{u} + \bar{v} = \chi(v), \\ \varepsilon = 0, \quad \chi(v) = v \quad \text{при} \quad g_{u_1} = 0, \\ \varepsilon = 1, \quad \chi'(v) = -g_{u_1}/\rho_u \quad \text{при} \quad g_{u_1} \neq 0. \end{gathered} \tag{7.12}$$

Замены (7.12) отображают уравнения вида (6.20), обладающие локальными законами сохранения, в уравнения вида (7.2), а замены (7.6) действуют в обратном направлении. Композицию замены (7.10) с точечным преобразованием мы будем называть *частичным потенциированием*. Полное потенциирование возможно при наличии двух законов сохранения нулевого порядка с функционально независимыми плотностями [1]). В результате получается система, инвариантная относительно абелевой двупараметрической группы точечных симметрий.

Проиллюстрируем обсуждаемые замены на примере следующих систем уравнений:

$$u_t = u_2 + u^2 v, \quad -v_t = v_2 + v^2 u, \tag{7.13}$$

$$u_t = u_2 + (u + v)\, u_1, \quad -v_t = v_2 - (u + v)\, v_1, \tag{7.14}$$

$$u_t = u_2 + D(u^2 + v), \quad -v_t = v_2 - 2D(uv), \tag{7.15}$$

$$u_t = u_2 + u_1^2 + v_1, \quad -v_t = v_2 - 2u_1 v_1. \tag{7.16}$$

При помощи операций дифференцирования и потенциирования эти системы уравнений можно построить, отправившись от любой из них. Возьмем за

---

[1]) В случае систем (6.20) любые две линейно независимые плотности являются функционально независимыми и существует не более трех линейно независимых плотностей [9].

основу нелинейное уравнение Шрёдингера (7.13). В нем можно сделать частичное дифференцирование (ср. с (7.3)):

$$\bar{u} = u_1/u, \quad \bar{v} = uv, \tag{7.17}$$

которое приводит к известному уравнению (7.15).

Замены мы будем изображать на диаграммах следующим образом: системам уравнений отвечают вершины, преобразованиям — стрелки. Преобразование по направлению сплошной стрелки обозначает частичное дифференцирование, а против — потенциирование. Полным дифференцированиям и потенциированиям отвечают пунктирные стрелки, ориентированные аналогичным образом. Например, замена (7.17) изображена на диаграмме рис. 1 стрелкой, соединяющей нижние вершины.

$$\begin{tikzcd}
(7.16) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & (7.14) \arrow[d] \\
(7.13) \arrow[r] & (7.15)
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

Уравнение Шрёдингера имеет закон сохранения с плотностью $uv$. Поэтому можно сделать частичное потенциирование:

$$\bar{u} = \ln u, \quad \bar{v}_1 = uv, \tag{7.18}$$

дающее систему уравнений (7.16). Ее можно получить также из системы (7.17) операцией полного потенциирования $\bar{u}_1 = u$, $\bar{v}_1 = v$, которая является композицией замен (7.17), (7.18) (ср. рис. 1). Последняя из четырех систем — система (7.14) — получается частичным дифференцированием

$$\bar{u} = 2u_1 + v, \quad \bar{v} = -v \tag{7.19}$$

из (7.16) или частичным потенциированием

$$\bar{u} + \bar{v} = 2u, \quad \bar{v}_1 = -v \tag{7.20}$$

из системы (7.15). Все приведенные нами замены изображены на диаграмме рис. 1. Отметим, что эта диаграмма коммутативна. Композиция замен (7.17), (7.20) является почти обратимым преобразованием

$$\bar{u}_1 = uv, \ \bar{u} + \bar{v} = 2u_1/u \tag{7.21}$$

и переводит нелинейное уравнение Шрёдингера (7.13) в (7.14). Отметим, наконец, что система уравнений (7.14) связана с известной системой Каупа [45]

$$\pi_t = \varphi_4 + \varphi_2 - 2D(\varphi_1\pi), \quad \varphi_t = \pi - \varphi_1^2$$

почти обратимой заменой

$$u + v = -2\varphi_1, \ v_1 - u_1 = 2\pi - 1.$$

В отличие от замен, обратимых на полных наборах динамических переменных, обсуждавшихся в предыдущей главе, операция дифференцирования, вообще говоря, разрушает структуру законов сохранения. Так, например, интегрируемая система

$$u_t = u_2 + 2vv_1, \quad -v_t = v_2 - u_1, \tag{7.22}$$

просто связанная с уравнением Буссинеска, частичным дифференцированием

$$\bar{u} = u_1 - v^2/2, \ \bar{v} = v$$

приводится к системе уравнений

$$\bar{u}_t = \bar{u}_2 + \bar{v}_1^2 + \bar{v}(\bar{u} - \bar{v}^2/2), \quad -\bar{v}_t = \bar{v}_2 - \bar{u} + \bar{v}^2/2,$$

не имеющей локальных законов сохранения: для него не выполнены условия интегрируемости (см. гл. I, IV). При потенциированиях локальные законы сохранения не исчезают. Это следует из леммы 6.2.

## § 8. Преобразования симметрических систем

Среди систем вида (7.2) особое место занимают системы, инвариантные относительно инволюции (7.1),

$$(8.1)\qquad u_t=u_2+f(u+v,\ u_1,\ v_1),\quad -v_t=v_2+g(u+v,\ u_1,\ v_1),\quad g=f^*$$

(где $f^*$ обозначает результат действия инволюции на функцию $f$). Эти системы в дальнейшем будут называться *симметрическими*. Мы покажем, что для систем (8.1) не только потенциирование, но и частичное дифференцирование не разрушают локальную структуру законов сохранения. Кроме того, в этом параграфе мы определим замены, обратимые на суженных наборах динамических переменных и действующие в классе симметрических систем. Эти замены также не будут разрушать локальные законы сохранения.

Несмотря на то, что вид (8.1) не инвариантен относительно конформных преобразований, конформно эквивалентные симметрические системы существуют. Они встречаются в тех случаях, когда у системы имеется непрерывная неабелева группа конформных симметрий. Например, известная модель Гайзенберга

$$(8.2)\qquad \mathbf{S}_t=\mathbf{S}\times\mathbf{S}_{xx},\quad S_1^2+S_2^2+S_3^2=1$$

может быть записана в симметрическом виде двумя способами:

$$(8.3)\qquad u_t=u_2-2\frac{u_1^2}{u+v},\quad -v_t=v_2-2\frac{v_1^2}{u+v},$$

$$(8.4)\qquad u_t=u_2-2\operatorname{th}(u+v)\,u_1^2,\quad -v_t=v_2-2\operatorname{th}(u+v)\,v_1^2.$$

Уравнение (8.3) получается из (8.2) при помощи точечного преобразования

$$(8.5)\qquad S_1+iS_2=\frac{2}{u+v},\quad S_1-iS_2=\frac{2uv}{u+v},\quad S_3=\frac{u-v}{u+v},\quad t\to it,$$

уравнение (8.4) получается из (8.3) конформной заменой

$$\bar u=\frac{1}{2}\ln u,\quad \bar v=-\frac{1}{2}\ln v.$$

Мы будем опираться на лемму об инвариантных плотностях. Функцию $h$ мы будем называть *инвариантной*, если $h_u=h_v$, $h^*=h$.

Лемма 8.1. *Если плотность $\rho$ локального закона сохранения*

$$(8.6)\qquad \frac{d\rho}{dt}=D(\sigma)$$

*является инвариантной функцией, то инвариантна и функция $\sigma$.*

Доказательство. Очевидно, что для любой функции $g$

$$(8.7)\qquad (Dg)^*=-D(g^*),\quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)g\right]^*=-\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)g^*$$

и, кроме этого, для симметрических систем $(g_t)^*=-(g^*)_t$. Применяя инволюцию к равенству (8.6), получим $D(\sigma-\sigma^*)=0$, откуда следует, что $\sigma$ инвариантна относительно инволюции, т. е. $\sigma^*=\sigma$. Действуя на равенство (8.6) оператором $\partial/\partial u-\partial/\partial v$, получим, что $D(\sigma_u-\sigma_v)=0$. Из инвариантности $\sigma$ относительно инволюции следует, что $\sigma_u=\sigma_v$. ■

Рассмотрим замену переменных

$$(8.8)\qquad \bar u+\bar v=p(u+v),\quad \bar u_1=\varphi(u+v,\ u_1),\quad p'\cdot\varphi_{u_1}\neq 0$$

для систем вида (8.1). Очевидно, что она обратима на суженных наборах динамических переменных. Динамическую систему на полном наборе новых переменных можно определить тогда и только тогда, когда $\varphi(u+v,\ u_1)$ является плотностью локального закона сохранения исходной системы. Если $\varphi$ — плотность, то $\varphi(u+v,\ u_1)=R(u+v)u_1+Q(u+v)$ (см. пример 3.3

§ 3). Нетрудно проверить, что замена (8.8) сохраняет вид (6.20) в том и только в том случае, когда $R(u+v) = p'(u+v)$.

Таким образом, замена переменных (8.8), сохраняющая вид (6.20), с необходимостью имеет вид

$$(8.9) \qquad \bar{u}+\bar{v}=p(u+v), \ \bar{u}_1=p'(u+v)u_1+p(u+v), \ p'\neq 0,$$

где $p'u_1+q$ — плотность локального закона сохранения исходной системы (8.1). Такие замены переменных мы будем называть *симметрическими*. Основанием для этого служит то обстоятельство, что симметрические замены не выводят за пределы класса симметрических систем. Действительно, так как функция $p'u_1+q$ является плотностью, то $[p'(u_1-v_1)+2q]_t = D(\sigma)$, причем, в силу леммы об инвариантных плотностях, $\sigma$ — инвариантная функция. Эволюция полного набора новых переменных определяется из соотношений

$$(8.10) \qquad \bar{u}_t+\bar{v}_t=p_t, \ \bar{u}_t-\bar{v}_t=\sigma.$$

При помощи этих формул нетрудно проверить, что новая система является симметрической.

Отметим, что функция $\sigma$ определена с точностью до аддитивной постоянной. Это означает, что всякая симметрическая замена (в том числе и «тождественная» замена $\bar{u}+\bar{v}=u+v$, $\bar{u}_1=u_1$) приводит к семейству симметрических систем, которые сводятся друг к другу преобразованиями вида $\bar{u}=u+ct$, $\bar{v}=v-ct$, $c\in\mathbb{C}$.

Предложение 8.1. *Симметрическая замена* (8.9) *задает отношение эквивалентности на множестве симметрических систем* (8.1).

Рефлексивность и симметричность отношения эквивалентности, заданного преобразованием (8.9), очевидны, транзитивность легко проверяется. Отметим, что симметрически эквивалентные системы конформно эквивалентными не являются и, наоборот, в тех случаях, когда симметрические системы конформно эквивалентны, они не являются симметрически эквивалентными (см. (8.3), (8.4)).

Определенное выше отношение эквивалентности разбивает множество симметрических систем на классы. Системы, принадлежащие одному классу, мы будем называть *симметрически эквивалентными*. Для того чтобы построить по системе (8.1) класс эквивалентности, нужно найти все плотности вида $p'(u+v)u_1+q(u+v)$ локальных законов сохранения этой системы. Если нетривиальных плотностей нет, то класс эквивалентности определяется заменой $\bar{u}+\bar{v}=u+v$, $\bar{u}_1=u_1+\lambda$, $\lambda$ — произвольная константа.

Пример 8.1. Рассмотрим два примера. Система вида (6.20) с

$$(8.11) \qquad f=2\alpha uvu_1+\beta u^2v_1+\frac{1}{2}\beta(\alpha-\beta)u^3v^2+\gamma u^2v, \quad g=f^*$$

конформной заменой $\bar{u}=\ln u$, $\bar{v}=\ln v$ приводится к виду (8.1) с

$$(8.12) \qquad f=u_1^2+(2\alpha u_1+\beta v_1+\gamma)\exp(u+v)+\frac{1}{2}\beta(\alpha-\beta)\exp(2u+2v).$$

Воспользовавшись законом сохранения системы (8.12) с плотностью $au_1+b\exp(u+v)$, где $a, b\in\mathbb{C}$, нетрудно проверить, что при $\beta=2\alpha$, $\gamma=0$ эта система симметрически эквивалентна линейной, при $\beta=2\alpha$, $\gamma\neq 0$ — нелинейному уравнению Шрёдингера (7.3), а при $\beta\neq 2\alpha$ она эквивалентна нелинейному уравнению Шрёдингера с производной (т. е. системе (8.1), (8.12) с $\alpha=\beta=1$, $\gamma=0$). Отдельные частные случаи системы (6.20), (8.11) изучались многими авторами с точки зрения метода обратной задачи рассеяния. При этом были обнаружены калибровочные преобразования, приводящие к симметрическим заменам. При нашем подходе замены строятся непосредственно по системе уравнений и не связаны с методом обратной задачи.

В качестве второго примера установим связь между известными системами (8.3) и

$$(8.13)\qquad u_t = u_2 - u_1^2 + 2u_1v_1, \quad -v_t = v_2 - v_1^2 + 2u_1v_1.$$

Система (8.13) изучалась при помощи обратной задачи многими авторами. Симметрическая замена $\bar{u} + \bar{v} = \ln(u + v)$, $\bar{u}_1 = (u + v)^{-1}u_1$ переводит систему уравнений (8.3) в (8.13).

Эти примеры показывают, что симметрически эквивалентными могут оказаться системы уравнений, на первый взгляд не связанные между собой. Критерий эквивалентности дает следующее вполне очевидное

Предложение 8.2. *Две симметрические системы уравнений (на $u$, $v$ и $\bar{u}$, $\bar{v}$) связаны заменой (8.9) в том и только в том случае, когда после частичного дифференцирования (7.4) с $\varepsilon = 1$ ($U = u_1$, $V = u + v$, $\bar{U} = \bar{u}_1$, $\bar{V} = \bar{u} + \bar{v}$) они связаны точечным преобразованием*

$$\bar{U} = p'(V)\,U + q(V), \quad \bar{V} = p(V).$$

Уточним это предложение применительно к важному классу симметрических систем, подчиняющихся условию $f_{v_1v_1} = 0$ (очевидно, что это условие симметрически инвариантно).

Следствие. *Две системы уравнений вида (8.1) с $f_{v_1v_1} = 0$ симметрически эквивалентны тогда и только тогда, когда после частичного дифференцирования (7.6) с $\varepsilon = 1$ они становятся конформно эквивалентными.*

Иначе говоря, симметрическую замену для этого класса уравнений можно рассматривать как композицию ча.тичного дифференцирования, конформной замены и потенциирования.

Из леммы 8.1 следует, что симметрические преобразования и частичные дифференцирования (7.6) с $\varepsilon = 1$ позволяют пересчитывать локальные законы сохранения с инвариантной плотностью, при этом свойство локальности не нарушается. Сле ующая теорема показывает, что, по существу, законы сохранения высокого порядка можно считать инвариантными.

Теорема 8.1. *Пусть симметрическая система имеет по крайней мере два локальных закона сохранения высокого порядка и $\rho$ — плотность закона сохранения порядка $N \geqslant 2$. Тогда $\rho + \rho^* = A + B$, где $A$, $B$ — плотности локальных законов сохранения порядков $N$ и $m \leqslant 1$ соответственно, причем $A$ инвариантна.*

Следствие. *Если симметрическая система имеет локальные законы сохранения высокого порядка, то система, полученная в результате частичного дифференцирования (7.6) с $\varepsilon = 1$ или симметрической замены (8.9), также обладает этим свойством.*

При доказательстве теоремы мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 8.2. *Пусть функция $f$ в правой части симметрической системы (8.1) имеет вид*

$$(8.14)\qquad f = v_1^2 + pv_1 + q,$$

*или*

$$(8.15)\qquad f = Au_1^2v_1 + Bu_1^2 + Cu_1v_1 + ru_1 + pv_1 + q,$$

*где $A$, $B$, $C$, $r$, $p$, $q$ — некоторые функции переменной $u + v$. Тогда для любой плотности $\rho$ локального закона сохранения порядка 0 или 1 существует плотность $\bar{\rho}$ порядка 0 или 1 соответственно, удовлетворяющая условию*

$$(8.16)\qquad \rho - \rho^* = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\bar{\rho}.$$

Мы не нашли короткого доказательства этой леммы. Наше доказательство сводится к перечислению всех плотностей порядков 0, 1 указанных систем уравнений и непосредственной проверке утверждения. Например, в случае систем (8.1), (8.14) законов сохранения первого порядка нет, а общий вид плотности нулевого порядка следующий:

$$(8.17)\quad \rho=\alpha\exp(-u-v)+\beta\exp(-\lambda u-\lambda v)+\gamma\exp(-\lambda u-\lambda v),$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — произвольные константы, $\lambda=\exp(2\pi i/3)$, $\bar\lambda=\exp(-2\pi i/3)$. Плотность $\bar\rho$, удовлетворяющая условию (8.16), существует и имеет вид

$$\bar\rho=\frac{\beta-\gamma}{\bar\lambda-\lambda}(\exp(-\lambda u-\bar\lambda v)-\exp(-\bar\lambda u-\lambda v)).$$

Доказательство теоремы. Вместе с $\rho$ плотностью локального закона сохранения симметрической системы является функция $\rho+\rho^*$. Как указано в примере 3.3,

$$(8.18)\quad \rho=\begin{cases}\Phi(u+v)\,u_nv_n+R+\operatorname{Im}D, & N=2n,\\ \Phi(u+v)\,(u_nv_{n-1}-v_nu_{n-1})+Q+\operatorname{Im}D, & N=2n+1,\end{cases}$$

где $Q=Q(u,v,\ldots,u_{n-1},v_{n-1})$, $R=R(u,v,\ldots,u_n,v_n)$, причем $R$ — линейная функция переменных $u_n$, $v_n$. Поэтому плотность $\rho+\rho^*$ имеет тот же порядок $N$. Эту плотность можно представить в виде $\rho+\rho^*=A+B$, где $A$ — инвариантная функция, $B=B(u,v,u_1,v_1)$ — функция, линейная по $u_1$, $v_1$. Действительно, очевидно, что функция $\tilde\rho=(\partial/\partial u-\partial/\partial v)(\rho+\rho^*)$ также является плотностью локального закона сохранения симметрической системы, причем $\tilde\rho^*=-\tilde\rho$. Из (8.18) следует, что любая антиинволютивная плотность имеет порядок, не превосходящий единицы, поэтому существует функция $B(u,v,u_1,v_1)$, удовлетворяющая условиям $\tilde\rho=(\partial/\partial u-\partial/\partial v)B$, $B^*=B$. При этом функция $A=\rho+\rho^*-B$ инвариантна. Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что в качестве $B$ можно выбрать некоторую плотность локального закона сохранения нашей системы. В следующей главе будет показано, что симметрическая система, удовлетворяющая условиям теоремы, с необходимостью имеет вид (8.1), (8.14) или (8.1), (8.15). Поэтому существование нужной нам плотности $B$ следует из леммы 8.2. ■

## ГЛАВА IV
## ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

В этой главе излагаются результаты по классификации систем уравнений, обладающих локальными законами сохранения высокого порядка. Мы рассматриваем системы двух уравнений вида (6.20), к которым относятся известные уравнения Шрёдингера и Ландау — Лифшица. Задача о составлении полного списка интегрируемых систем такого вида имеет довольно длинную историю. Здесь использовались различные подходы, в основном связанные с поиском $L-A$ пар, однако до работ [9], [24] не была установлена даже общая структура нелинейности в интегрируемых случаях.

Симметрийный подход позволяет сформулировать в определенном смысле явный критерий интегрируемости систем типа Шрёдингера и получить исчерпывающий список уравнений, обладающих локальными законами сохранения высокого порядка. Развитая в главе III теория преобразований существенно упрощает классификацию интегрируемых случаев. Отметим, что уравнения списка удовлетворяют априори лишь нескольким необходимым условиям интегрируемости. Тем не менее удается показать, что все системы, за исключением двух, для которых доказательство пока отсутствует, обладают бесконечным набором локальных законов сохранения. Доказательство основано на построении $L-A$ пар для ключевых уравнений списка.

## § 9. Список интегрируемых уравнений

Рассматривая системы уравнений $\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u})\mathbf{u}_2 + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$, $\det A \neq 0$, $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$, мы можем, как было показано в § 6, ограничиться системами вида (6.20), диагональными в главном:

$$(9.1) \qquad u_t = u_2 + f(u, v, u_1, v_1), \quad -v_t = v_2 + g(u, v, u_1, v_1).$$

Основным результатом работ [9], [24], [25] являются приведенные ниже списки уравнений вида (9.1). Эти списки получены в результате кропотливой и трудной работы, связанной с уточнением вида функций $f$, $g$ в (9.1) при помощи необходимых условий существования локальных законов сохранения (условий интегрируемости), сформулированных в § 3. Исходя из этих условий, доказывается, что функции $f$ и $g$ являются полиномами от $u_1$, $v_1$ и имеют следующий вид:

$$(9.2) \qquad \begin{aligned} f &= Au_1^2v_1 + B_uu_1^2 + C_vu_1v_1 + ru_1 + F(u, v, v_1), \\ g &= -Av_1^2u_1 + B_vv_1^2 + C_uu_1v_1 - rv_1 + G(u, v, u_1), \end{aligned}$$

где $A$, $B$, $C$, $r$ зависят только от $u$, $v$, а $F$ и $G$ — квадратичные полиномы по $v_1$ и $u_1$ соответственно.

Классификационная задача упрощается, если ограничиться системами (9.1), которые конформными преобразованиями $\bar{u} = \varphi(u)$, $\bar{v} = \psi(v)$ приводятся к симметрическому виду

$$(9.3) \quad u_t = u_2 + f(u + v, u_1, v_1), \quad -v_t = v_2 + f(u + v, -u_1, -v_1).$$

Теория преобразований, развитая в § 8, существенно используется при доказательстве теоремы 10.1 о полноте списка симметрических систем (9.3) (список I). Классификация в остальных случаях проводится по модулю конформных замен

$$(9.4) \qquad \bar{u} = \varphi(u), \quad \bar{v} = \psi(v)$$

и масштабных преобразований

$$(9.5) \qquad \bar{t} = t, \quad \bar{x} = x + \alpha t,$$

$$(9.6) \qquad \bar{t} = \alpha^2 t, \quad \bar{x} = \alpha x,$$

$$(9.7) \qquad \bar{t} = -t, \quad \bar{u} = v, \quad \bar{v} = u.$$

Если система (9.1) не сводится к симметрической системе (9.3) конформной заменой, то она связана композицией преобразований (9.4) — (9.7) с одной из систем списков II, III, или с распадающейся ($f = f(u, u_1)$), или с линейной системами. Критерием при составлении списков I, II, III служат условия, необходимые и достаточные для существования формальных симметрии и закона сохранения порядка 6 (см. § 10). Отметим, что в списке III собраны удовлетворяющие этим условиям системы уравнений вида

$$(9.8) \qquad u_t = u_2 + f(u_1, v_1), \qquad -v_t = v_2 + g(u_1, v_1),$$

$$(9.9) \qquad u_t = u_2 + D(p(u, v)), \qquad -v_t = v_2 + D(q(u, v)).$$

### Список I

(a) $u_t = u_2 + (u+v)^2, \quad -v_t = v_2 + (u+v)^2;$

(b) $u_t = u_2 + (u+v)\,u_1, \quad -v_t = v_2 - (u+v)\,v_1;$

(c) $u_t = u_2 + (u+v)\,v_1 - \frac{1}{6}(u+v)^3, \quad -v_t = v_2 - (u+v)\,u_1 - \frac{1}{6}(u+v)^3;$

(d) $u_t = u_2 + u_1^2 + \exp(u+v), \quad -v_t = v_2 + v_1^2 + \exp(u+v);$

(e) $$u_t=u_2+u_1^2+(2u_1+v_1)\exp(u+v),\quad -v_t=v_2+v_1^2-(2v_1+u_1)\exp(u+v);$$

(f) $$u_t=u_2+(u_1^2+\alpha)y,\quad -v_t=v_2+(v_1^2+\alpha)y$$

(где $y=y(u+v)$, $2y'=y^2-4\beta$, $\alpha,\ \beta\in\{0,\ 1\}$);

(g) $$u_t=u_2+v_1^2+q,\quad -v_t=v_2+u_1^2+q$$

(где $q=\alpha\exp(u+v)+\beta\exp(-2u-2v)$, $\alpha,\ \beta,\ \in\{0,\ 1\}$);

(h) $$u_t=u_2+R(y)u_1^2v_1+R'(y)u_1^2-\frac{2}{3}[R''(y)-2\gamma]u_1+\frac{1}{3}R'''(y),$$
$$-v_t=v_2-R(y)v_1^2u_1+R'(y)v_1^2+\frac{2}{3}[R''(y)-2\gamma]v_1+\frac{1}{3}R'''(y)$$

(где $y=y(u+v)$, $y'=R(y)$, $R(y)=\alpha y^4+\beta y^3+\gamma y^2+\delta y+\varepsilon$).

## Список II

(i) $$u_t=u_2+D(u^2+v^{-1}),\quad -v_t=v_2-2D(uv)-1;$$

(j) $$u_t=u_2+v_1,\quad -v_t=v_2-u_1^2-\left(v+\frac{1}{2}u^2\right)u_1;$$

(k) $$u_t=u_2-\frac{1}{2}(u+v)^{-1}(u_1^2+2u_1v_1)+\alpha(u+v),$$
$$-v_t=v_2-\frac{1}{2}(u+v)^{-1}(v_1^2+2u_1v_1)+\beta(u+v);$$

(l) $$u_t=u_2-2(u+v)^{-1}[u_1^2+R(u)]+\frac{1}{2}R'(u),$$
$$-v_t=v_2-2(u+v)^{-1}[v_1^2+R(-v)]-\frac{1}{2}R'(-v);$$

(m) $$u_t=u_2-2(u+v)^{-1}u_1^2-4[P(u,\ v)u_1+R(u)v_1](u+v)^{-2},$$
$$-v_t=v_2-2(u+v)^{-1}v_1^2+4[P(u,\ v)v_1+R(-v)u_1](u+v)^{-2}$$

(в уравнениях (l), (m) $R(z)=\alpha z^4+\beta z^3+\gamma z^2+\delta z+\varepsilon$, $P(u,\ v)=$ $=2\alpha u^2v^2+\beta(uv^2-vu^2)-2\gamma uv+\delta(u-v)+2\varepsilon$);

(n) $$u_t=u_2+\exp(\varphi)(u_1^2+1)v_1+\varphi_u(u_1^2+1),$$
$$-v_t=v_2-\exp(\varphi)(v_1^2+1)u_1+\varphi_v(v_1^2+1);$$

(p) $$u_t=u_2+\exp(\varphi)(u_1^2+1)v_1+\varphi_u u_1^2+2ru_1,$$
$$-v_t=v_2-\exp(\varphi)(v_1^2+1)u_1+\varphi_v v_1^2-2rv_1$$

(в уравнениях (n), (p) $\exp(\varphi)=y(u+v)-y(u-v)$, $r=y(u+v)-y(u-v)$, в случае (n) $(y')^2=-y^4+\alpha y^3+\beta y^2+\gamma y+\delta$, в случае (p) $(y')^2=-4y^4+$ $+\alpha y^3+\beta y^2+\gamma y+\delta$;

(q) $$u_t=u_2+v_1^2+\chi_u v_1,\quad -v_t=v_2+u_1^2-\chi_v u_1$$

(где $\chi=\alpha\exp(-u-v)+\exp(-\lambda u-\bar\lambda v)+\exp(-\bar\lambda u-\lambda v)$);

(r) $$u_t=u_2+v_1^2+z_v,\quad -v_t=v_2+u_1^2+z_u$$

(где $z=\alpha\exp(u+v)+\exp(\lambda u+\bar\lambda v)+\exp(\bar\lambda u+\lambda v)$);

(s) $$u_t=u_2+v_1^2+z_v,\ -v_t=v_2+u_1^2+z_u$$

(где $z=\alpha\exp(-2u-2v)+\exp(-2\lambda u-2\bar\lambda v)+\exp(-2\bar\lambda u-2\lambda v)$);

(t) $$u_t=u_2+v_1^2+\chi_u v_1+z_v,\quad -v_t=v_2+u_1^2-\chi_v u_1+z_u$$

(где $\chi=\alpha\exp(-u-v)+\exp(-\lambda u-\bar\lambda v)+\exp(-\bar\lambda u-\lambda v)$,

$$z=-\frac{1}{6}[\exp(u+v)+\alpha\exp(\lambda u+\bar\lambda v)+\alpha\exp(\bar\lambda u+\lambda v)]+$$
$$+\frac{1}{12}\left[\alpha^2\exp(-2u-2v)+\exp(-2\lambda u-2\bar\lambda v)+\exp(-2\bar\lambda u-2\lambda v)\right]).$$

В уравнениях (q) — (t) $\alpha\in\{0,1\}$, $\lambda$, $\bar\lambda$ обозначают корни третьей степени из 1: $\lambda=\exp(2\pi i/3)$, $\bar\lambda=\exp(-2\pi i/3)$.

### Список III

$$(\mathrm{w}_1)\qquad u_t=u_2+v_1+\alpha,\quad -v_t=v_2-u_1^2+\beta u_1+\gamma;$$
$$(\mathrm{w}_2)\qquad u_t=u_2+v_1^2+\alpha v_1+\beta,\quad -v_t=v_2+u_1^2+\gamma u_1+\delta;$$
$$(\mathrm{w}_3)\qquad u_t=u_2+\varepsilon u_1^2v_1+\alpha u_1^2-2\beta u_1v_1+\gamma v_1+\lambda,$$
$$-v_t=v_2-\varepsilon v_1^2u_1+\beta v_1^2-2\alpha u_1v_1+\delta u_1+\mu;$$
$$(\mathrm{z}_1)\qquad u_t=u_2+D(v),\quad -v_t=v_2-D(u^2);$$
$$(\mathrm{z}_2)\qquad u_t=u_2+D(v^2),\quad -v_t=v_2+D(u^2);$$
$$(\mathrm{z}_3)\qquad u_t=u_2+D(\varepsilon u^2v+\alpha u^2-2\beta uv+\gamma v),$$
$$-v_t=v_2+D(-\varepsilon v^2u+\beta v^2-2\alpha uv+\delta u).$$

Как было показано в §§ 7, 8, частичное дифференцирование (7.6) и интегрирование (7.12) позволяют установить скрытые связи между интегрируемыми уравнениями. Прежде всего заметим, что система (i) получается частичным дифференцированием из распавшейся системы

$$(\mathrm{i})\leftarrow u_t=u_2+v^{-1},\quad -v_t=v_2,$$

а система (k) частичным дифференцированием переводится в линейную

$$(\mathrm{k})\to u_t=u_2+v_1+(\alpha-\beta)u/2,\quad -v_t=v_2-2\beta u_1+(\alpha-\beta)v/2.$$

Оставшиеся уравнения списков можно условно разбить на три группы. Системы, близкие к уравнению Шрёдингера (0.14)

(9.10) (b), (d), (e), (f), (h), $(\mathrm{z}_3)$, $(\mathrm{w}_3)$,

системы типа уравнения Буссинеска (0.15)

(9.11) (a), (c), (g), (j), (q) — (t), $(\mathrm{z}_1)$, $(\mathrm{z}_2)$, $(\mathrm{w}_1)$, $(\mathrm{w}_2)$

и системы типа уравнения Ландау — Лифшица (0.16), интегрирование которых связано со спектральной задачей с параметром на эллиптической кривой [1]):

(9.12) (l), (m), (n), (p).

Отметим еще, что каждая из систем списка I является представителем класса уравнений, связанных друг с другом симметрическими заменами (ср. с теоремой 10.1).

В §§ 7, 8 детально разобран ряд примеров преобразований интегрируемых систем. В частности, на рис. 1 показана взаимосвязь систем (d), (b) и частных случаев $(\mathrm{z}_3)$, $(\mathrm{w}_3)$, соответствующих $\varepsilon=\beta=\delta=0$, $\alpha=\gamma=1$. В общем случае система $(\mathrm{z}_3)$ сводится заменами (9.4) — (9.7) к одному из уравнений следующего списка:

$$(\mathrm{z}_4)\qquad u_t=u_2+D(u^2+v),\quad -v_t=v_2-2D(uv);$$
$$(\mathrm{z}_5)\qquad u_t=u_2+D(2uv-u^2),\quad -v_t=v_2+D(2uv-v^2);$$
$$(\mathrm{z}_6)\qquad u_t=u_2+D(u^2v),\quad -v_t=v_2-D(v^2u);$$
$$(\mathrm{z}_7)\qquad u_t=u_2+D(u^2v),\quad -v_t=v_2-D(v^2u+u);$$
$$(\mathrm{z}_8)\qquad u_t=u_2+D(u^2v+v),\quad -v_t=v_2-D(v^2u+u).$$

[1]) Для последних двух систем из (9.12) это гипотеза.

Точечные замены и частичные дифференцирования позволяют установить связи между уравнениями (9.10), изображенные на рис. 2.

На рис. 2 две черты соединяют конформно эквивалентные системы уравнений, стрелки, так же, как и в главе III (рис. 1), обозначают частичные дифференцирования (7.6) с $\varepsilon = 1$; $(f_1)$ — $(f_4)$ обозначают системы типа (f) с коэффициентами $(\alpha, \beta)$, равными $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$ соответственно; $(h_1)$ — $(h_4)$ — это частные случаи системы типа (h) с $y = u + v$, $y = \exp(u + v)$, $y = (u + v)^{-1}$ и $y = \operatorname{th}(u + v)$ соответственно; $(m_1)$ и $(m_2)$ — это вырождения системы типа (m) с $R(z) = z$ и $R(z) = 1 - z^2$.

$$\begin{tikzcd}
(d) \arrow[r] & (z_4) & (b) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(z_8) & (f_2) \arrow[l] & (h_3) \arrow[l] \arrow[r, equal] & (h_4) \arrow[r] & (m_2)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& & & & (z_6) \arrow[r, equal] & (e) \arrow[r] & (z_5) \\
(f_4) \arrow[r] & (z_7) & (f_3) \arrow[l] \arrow[r, equal] & (f_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & & & (h_1) \arrow[r, equal] & (h_2) \arrow[r] & (m_1)
\end{tikzcd}$$

Рис. 2

Дополнительные соотношения между указанными уравнениями можно установить, вводя преобразования типа Миуры (ср. [14]). Преобразования такого рода позволяют связать три компоненты графа, изображенного на рис. 2. Для этого нужно перейти от систем $(f_2)$, $(f_4)$ к эквивалентным им с точностью до симметрических замен (8.9) системам вида

$$\begin{aligned} u_t &= u_2 + Au_1^2 + Bu_1v_1 + \exp(u + v), \\ -v_t &= v_2 + Av_1^2 + Bu_1v_1 + \exp(u + v), \end{aligned} \tag{9.13}$$

где

$$A = \frac{\varepsilon - \exp(u+v)}{\varepsilon - 2\exp(u+v)}, \quad B = \frac{2\exp(u+v)}{\varepsilon - 2\exp(u+v)} \tag{9.14}$$

и $\varepsilon = 0$ для $(f_4)$, $\varepsilon \neq 0$ для $(f_2)$. Подстановка

$$\begin{aligned} \bar{u} &= e^u\,[(\varepsilon - 2\exp(u + v))^{1/2} u_1 + 1], \\ \bar{v} &= e^v\,[(\varepsilon - 2\exp(u + v))^{1/2} v_1 + 1] \end{aligned} \tag{9.15}$$

связывает уравнение Шрёдингера (7.13), записанное в наборе динамических переменных $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$, ..., с системой (9.13), (9.14).

Указанные связи между уравнениями типа Шрёдингера позволяют пересчитывать (см. § 8 и лемму 6.2) бесконечные наборы локальных законов сохранения, которые в методе обратной задачи получаются в результате асимптотического разложения диагональных элементов матрицы рассеяния [16]. Выбрав в качестве опорных уравнений системы (d), $(f_1)$ и $(f_2)$, т. е. нелинейное уравнение Шрёдингера [2], модель Гайзенберга (8.2) [46] и одноосную модель Ландау — Лифшица (0.16) с $I_1 = I_2 \neq I_3$ [47], нетрудно проверить, например, что изображенные на рис. 2 связи позволяют охватить системы $(z_4)$ — $(z_8)$ из приведенного выше списка.

Отметим еще следующие связи между уравнениями (9.11). Системы (a) и $(w_2)$ связаны преобразованием типа Миуры [42], системы $(z_1)$ и (j) получаются из (a) и (c) частичным дифференцированием. Можно построить преобразование типа Миуры из системы (c) в (a).

## § 10. Описание симметрических систем. Признаки интегрируемости

Основным преимуществом симметрийного подхода к классификации систем уравнений (9.1) является возможность сформулировать в определенном смысле явные необходимые условия существования локальных законов сохранения высокого порядка. Удивительно, что нескольких первых условий оказывается в конечном счете достаточно для существования локальных законов сохранения сколь угодно высокого порядка. Этот набор необходимых условий может служить критерием при проверке, сводится ли заданная конкретная система уравнений вида (9.1) к одной из систем списков I — III, рассмотренных в предыдущем параграфе.

**1.** Алгоритм получения условий интегрируемости, изложенный в § 3, связан с громоздкими вычислениями, которые мы опускаем. Результатом этих вычислений является приведенная ниже таблица (10.3) — (10.8) канонических плотностей $\rho_k$, $\rho_k^0$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ (см. пример 3.3 и формулы (3.39) — (3.42)), задающих канонические законы сохранения

$$\frac{d\rho_k}{dt} = D(\sigma_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{10.1}$$

и условия дивергентности

$$\rho_k^0 = D(\sigma_k^0) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{10.2}$$

$$\rho_1^0 = \frac{1}{2}(f_{u_1} + g_{v_1}),\ \rho_1 = \frac{1}{2}(f_{u_1} - g_{v_1}), \tag{10.3}$$

$$\rho_2^0 = \sigma_{1,t}^0 - \rho_1^0\rho_1 + f_u - g_v, \tag{10.4}$$

$$\rho_3^0 = \sigma_{2,t}^0 + 2\rho_1^0 f_{v_1} g_{u_1} - 2(f_{v_1} g_u + g_{u_1} f_v), \tag{10.5}$$

$$\rho_2 = \sigma_1 - \frac{1}{2}[(\rho_1^0)^2 + \rho_1^2] - f_{v_1} g_{u_1} + f_u + g_v,\ \ \rho_3 = \sigma_2, \tag{10.6}$$

$$\begin{gathered}\rho_4^0 = \sigma_{3,t}^0 + \rho_2^0\rho_2 + \rho_1[\rho_3^0 - \sigma_{2,t}^0] + (f_u + g_v)_t + D(\rho_1^0)D(\rho_1) + \\ + \rho_1^0[D(f_{v_1})g_{u_1} - D(g_{u_1})f_{v_1}] + g_v D(g_{v_1}) - f_u D(f_{u_1}) + 2f_v D(g_{u_1}) - 2g_u D(f_{v_1}),\end{gathered} \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned}\rho_4 = \sigma_3 &+ \frac{1}{2}[(\rho_2^0)^2 + \rho_2^2] - \rho_1^0[\rho_3^0 - \sigma_{2,t}^0] + \frac{1}{2}[(D\rho_1^0)^2 + (D\rho_1)^2] + \\ &+ \rho_1[g_{u_1}D(f_{v_1}) - f_{v_1}D(g_{u_1})] + f_{v_1}(g_{u_1})_t - g_{u_1}(f_{v_1})_t - \\ &- f_u D(f_{u_1}) - g_v D(g_{v_1}) + 2f_v D(g_{u_1}) + 2g_u D(f_{v_1}) - \\ &- f_{v_1}^2 g_{u_1}^2 + 2f_{v_1}g_{u_1}(f_u + g_v) + (f_u - g_v)_t - 2D(f_{v_1})D(g_{u_1}) - 4f_v g_u.\end{aligned} \tag{10.8}$$

Разрешимость системы уравнений (10.1) — (10.2) на функции $\sigma_k$, $\sigma_k^0 (k \leqslant 4)$ переменных $u$, $v$, $u_1$, $v_1$, ... является, в силу теорем 3.1, 3.2 из § 3, критерием существования невырожденных формальных симметрии и закона сохранения порядка 6. Напомним, что существование пары законов сохранения высокого порядка гарантирует существование как формальной симметрии, так и формального закона сохранения, удовлетворяющих условию невырожденности (см. § 1 и теорему 1.1). Таким образом, условия разрешимости

$$\frac{d\rho_k}{dt},\ \rho_k^0 \in \operatorname{Im} D \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{10.9}$$

системы (10.1), (10.2) являются необходимыми условиями существования законов сохранения.

При $k = 1$ условия (10.9) являются явными. При $k = k_0 > 1$ предполагается, что условия (10.9) выполнены для меньших значений $k$ и что найдены локальные функции $\sigma_k$, $\sigma_k^0$ $(k < k_0)$, являющиеся решением усеченной системы (10.1), (10.2) с $k = 1, \ldots, k_0 - 1$.

Лемма 10.1. *Пусть система уравнений* (9.1) *удовлетворяет условиям* (10.9) *с* $k = 1, 2$. *Тогда существуют функции* $\varphi$, $\psi$, $r$ *переменных* $u$, $v$ *и константа* $\varepsilon \in \mathbb{C}$ *такие, что*

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon e^{\varphi} u_1^2 v_1 + \frac{1}{2}(\varphi + \psi)_u u_1^2 + (\varphi - \psi)_v u_1 v_1 + r u_1 + F(u,\ v,\ v_1), \\ g &= -\varepsilon e^{\varphi} v_1^2 u_1 + \frac{1}{2}(\varphi + \psi)_v v_1^2 + (\varphi - \psi)_u u_1 v_1 - r v_1 + G(u, v, u_1). \end{aligned} \tag{10.10}$$

Доказательство. Условие (10.9) с $k=1$ означает (см. пример 3.3), что существуют функции $\varphi$, $a$, $b$, $r$ переменных $u$, $v$ такие, что

$$\frac{1}{2}(f_{u_1}+g_{v_1})=\varphi_u u_1+\varphi_v v_1,$$

$$\frac{1}{2}(f_{u_1}-g_{v_1})=2\varepsilon e^{\varphi}u_1v_1+au_1-bv_1+r.$$

Складывая и вычитая эти равенства, мы получаем, что функции имеют вид

$$f=\varepsilon v^{\varphi}u_1^2v_1+Au_1^2+Cu_1v_1+ru_1+F,$$
$$g=-\varepsilon e^{\varphi}v_1^2u_1+Bv_1^2+Du_1v_1-rv_1+G,$$

где $A=a+\varphi_u/2$, $B=b+\varphi_v/2$, $C=\varphi_v-b$, $D=\varphi_u-a$. При этом решением первого из уравнений (10.2) является $\sigma_1^0=\varphi$, и можно перейти к условию $\rho_2^0=\varphi_t-\rho_1^0\rho_1+f_u-g_v\in \operatorname{Im} D$ (см. (10.4)). Дифференцируя по $t$, получаем

$$(10.11)\quad \rho_2^0=D(\varphi_u u_1-\varphi_v v_1)+\varphi_{vv}v_1^2-\varphi_{uu}u_1^2+\varphi_u f-\varphi_v g-\rho_1^0\rho_1+f_u-g_v.$$

Равенство нулю коэффициента при $u_1v_1$ в (10.11) дает, как нетрудно проверить, что $a_v=b_u$. Поэтому существует функция $\psi(u,v)$ такая, что $\psi_u=a$, $\psi_v=b$. Эти соотношения и полученные выше выражения для $f$, $g$ дают (10.10). ■.

Указанные в лемме 10.1 выражения для $f$, $g$ гарантируют выполнение условия $\rho_1^0\in\operatorname{Im} D$ и делают явным условие $\rho_2^0\in\operatorname{Im} D$ (см. (10.11)). Следующий список тождеств облегчает исследование уравнений (10.1) и позволяет уточнять вид функций $\sigma_k$:

$$(10.12)\quad (au_1+bv_1+c)_t-D[au_2-bv_2+(b_u-a_v)u_1v_1+af-bg+$$
$$+c_uu_1-c_vv_1]=(b_u-a_v)(v_1f+u_1g)-u_1v_1D(b_u-a_v)+c_uf-c_vg+c_{vv}v_1^2-c_{uu}u_1^2,$$

$$(10.13)\quad [H(u,\ v,\ u_1\ v_1)]_t=H_{v_1v_1}v_2^2-H_{u_1u_1}u_2^2+f[H_u-D_0(H_{u_1})]+$$
$$+g[-H_v+D_0(H_{v_1})]+u_2[H_{u_1v_1}g-H_{u_1u_1}f+H_u-D_0(H_{u_1})]+$$
$$+v_2[-H_{u_1v_1}f+H_{v_1v_1}g-H_v+D_0(H_{v_1})]+\operatorname{Im} D,$$

$$(10.14)\quad [e^{\varphi}(v_1u_2-u_1v_2)]_t=2e^{\varphi}(\varphi_uv_1-g_{u_1})u_2^2+2e^{\varphi}(\varphi_vu_1-f_{v_1})v_2^2+$$
$$+2e^{\varphi}[(v_1f+u_1g)\varphi_u-D_0(g)]u_2+2e^{\varphi}[(v_1f+u_1g)\varphi_v-D_0(f)]v_2+$$
$$+e^{\varphi}[(D\varphi)^2+u_1D\varphi_u+v_1D\varphi_v](v_1u_2+u_1v_2+v_1f+u_1g)+\operatorname{Im} D,$$

$$(10.15)\quad (e^{\varphi}u_1v_1)_t-D(\theta)=e^{\varphi}[u_1v_1D(r)-v_1^2\varphi_vF+u_1^2\varphi_uG]+$$
$$+\frac{1}{2}e^{\varphi}\{u_1^3v_1[\varphi_u(\varphi-\psi)_u-(\varphi-\psi)_{uu}]+v_1^3u_1[(\varphi-\psi)_{vv}-\varphi_v(\varphi-\psi)_v]\}+D_0(P-Q),$$
$$\partial P(u,\ v,\ v_1)/\partial v_1=e^{\varphi}F,\qquad \partial Q(u,\ v,\ u_1)/\partial u_1=e^{\varphi}G,$$

$$(10.16)\quad \theta=e^{\varphi}\left[v_1u_2-u_1v_2+\frac{3}{2}\varepsilon e^{\varphi}u_1^2v_1^2+\psi_uu_1^2v_1-\psi_vv_1^2u_1\right]+$$
$$+e^{\varphi}[ru_1v_1+v_1F-u_1G]-P+Q.$$

Тождества (10.12), (10.13) справедливы для любой системы вида (9.1), а (10.14), (10.15) — для любой системы вида (9.1), (10.10), причем $D_0\overset{\text{опр.}}{=\!=}u_1\partial/\partial u+v_1\partial/\partial v$.

Лемма 10.2. *В условиях леммы* 10.1 *имеют место равенства*

$$(10.17)\quad \begin{aligned}&[F_{v_1}+(\varphi+\psi)_v u_1+\varepsilon e^{\varphi}u_1^2]G_{u_1u_1u_1}+[3(\varphi-\psi)_v+6\varepsilon e^{\varphi}u_1]G_{u_1u_1}=0,\\&[G_{u_1}+(\varphi-\psi)_u v_1-\varepsilon e^{\varphi}v_1^2]F_{v_1v_1v_1}+[3(\varphi-\psi)_u-6\varepsilon e^{\varphi}v_1]F_{v_1v_1}=0.\end{aligned}$$

Доказательство. В силу (10.10) имеем

$$(10.18)\quad \rho_1=2\varepsilon e^{\varphi}u_1v_1+\psi_uu_1-\psi_vv_1+r.$$

Применив формулы (10.12), (10.16), получаем из уравнений $D(\sigma_1) = \rho_{1,t}$, что

$$(10.19)\quad \sigma_1 = 2\varepsilon\theta + \psi_u f + \psi_v g - 4\psi_{uv}u_1v_1 - \psi_{uu}u_1^2 - \psi_{vv}v_1^2 + D(r) + D^2(\psi) + \chi.$$

Вид функции $\chi = \chi(u, v)$ в (10.19) определится только после выполнения условия $\rho_{1,t} \in \operatorname{Im} D$. Подставляя (10.19) в формулу (10.6), находим, что

$$(10.20)\quad \rho_2 = 2\varepsilon e^{\varphi}(v_1u_2 - u_1v_2) + H(u, v, u_1, v_1) + D^2(\psi).$$

Условие $\rho_{2,t} \in \operatorname{Im} D$ дает, в силу (10.13), (10.14),

$$(10.21)\quad H_{u_1u_1} = 4\varepsilon e^{\varphi}(\varphi_u v_1 - g_{u_1}), \quad H_{v_1v_1} = 4\varepsilon e^{\varphi}(\varphi_v u_1 - f_{v_1}).$$

Эквивалентность (10.17) и (10.21) проверяется непосредственным вычислением. ■

Доказательство общей классификационной теоремы, т. е. теоремы о полноте списков I — III § 9, заключается в переборе всех вариантов выполнения условий (10.9). Кроме большого числа априори возможных случаев, сложность задачи связана с необходимостью последовательного уточнения вида канонических законов сохранения (10.1) с $k = 2, 3, 4$. Это уточнение основано на тождествах (10.12) — (10.16) и дивергентных условиях (10.2). Выясняется, что выполнение канонического закона сохранения (10.1) с плотностью $\rho_k$ эквивалентной функции вида

$$(10.22)\quad e^{\varphi}(v_1u_2 - u_1v_2) + H(u, v, u_1, v_1)$$

полностью определяет вид рассматриваемой системы. Например, для системы уравнений (10.10) при $\varepsilon \neq 0$ уже каноническая плотность $\rho_2$ имеет вид (10.22) в силу формулы (10.20). Таким образом, при классификации систем с $\varepsilon \neq 0$ можно ограничиться двумя первыми каноническими законами сохранения (10.1). Для систем вида

$$(10.23)\quad u_t = u_2 + p(u, v), \quad -v_t = v_2 + q(u, v)$$

плотности $\rho_1 = \rho_1^0 = 0$, $\rho_2^0 = p_u - q_v$, $\rho_2 = p_u + q_v$. Условие $\rho_2^0 \in \operatorname{Im} D$ дает $p_u = q_v$. Вводя потенциал $p = z_v$, $q = z_u$, получаем, пользуясь (10.12), что

$$\rho_2 = 2z_{uv}, \quad \rho_3 = 2(z_{uvu}u_1 - z_{uvv}v_1), \quad \rho_4 = \sigma_3 + z_{uv}^2 - 4z_{uu}z_{vv}.$$

При $z_{uu} = 0$ (или $z_{vv} = 0$) система (10.23) распадается. При $z_{uu}z_{vv} \neq 0$ можно проверить при помощи таблицы тождеств (10.12) — (10.16), что условия (10.9) эквивалентны уравнениям

$$z_{uvuu} = z_{uvvv} = z_{uuuu} = z_{vvvv} = 0, \quad z_v(z_{uu}z_{vv})_u = z_u(z_{uu}z_{vv})_v.$$

Отсюда при $z_{uvuv} = 0$ получаем систему (a), а при $z_{uvuv} \neq 0$ — систему, эквивалентную (d). Таким образом, для систем вида (10.23) канонические законы сохранения порядка три и выше вообще не используются при классификации.

При доказательстве общей классификационной теоремы системы уравнений (10.10) разбиваются по своим свойствам на классы. К простейшему из этих классов относятся системы, обладающие абелевой двупараметрической группой (системы ($\mathrm{w}_1$), ($\mathrm{w}_2$), ($\mathrm{w}_3$) списка III). Мы приведем доказательство классификационной теоремы для симметрических систем и остановимся кратко на свойствах, выделяющих не встречавшиеся в литературе системы (n), (p) и (q) — (t). Заметим, что к интегрируемым симметрическим системам относятся как системы списка I, так и системы, приводящиеся к ним симметрическими преобразованиями. Таким образом, класс систем, приводящихся к системам списка I, более широк, чем остальные классы интегрируемых систем, содержащиеся в списках II, III.

Теорема 10.1. *Любая симметрическая система* (9.3), *удовлетворяющая условиям* (10.9), *приводится симметрическим преобразованием* (8.9) *и масштабными преобразованиями* (9.5), (9.6) *либо к одной из систем* (a) — (h) *списка* I *из* § 9, *либо к системам*

$$u_t=u_2+u_1^2,\quad -v_t=v_2+v_1^2;\quad u_t=u_2+\alpha(u+v),\quad -v_t=v_2+\alpha(u+v).$$

Рассматриваемые уравнения разбиваются на два класса в соответствие со следующей леммой.

Лемма 10.3. *Для систем* (9.3), (10.10) *имеет место альтернатива: либо* $F=pv_1+q$, *либо* $F=sv_1^2+pv_1+q$ *и* $s'=r'=0$, $\varepsilon=\varphi'=\psi'=0$.

Доказательство леммы. Дифференцируя второе из равенств (10.17), получаем $G_{u_1u_1}F_{v_1v_1v_1}=0$. Так как $G(u,v,u_1)=F(u+v,-u_1)$, то отсюда следует, что $F=sv_1^2+pv_1+q$. Случай $s\neq 0$ требует детального анализа. Второе из соотношений (10.17) дает $\varepsilon=0$, $\varphi'=\psi'$. Рассмотрим условие $\rho_{1,t}\in \operatorname{Im} D$, где, в силу (10.18), $\rho_1=\psi'(u_1-v_1)+r$. Член с $u_1^3$ в $\rho_{1,t}$ (см. (10.12)) дает $\psi''=0$. Учитывая, что $\varphi'=\psi'$, получаем $\varphi'=\psi'=\mathrm{const}$. Из (10.19), (10.6) находим, что плотность $\rho_2$ можно представить в виде

$$\rho_2=-4s^2u_1v_1-(s'+\varphi's)(u_1^2-v_1^2)+A(u+v)(u_1-v_1)+B(u+v).$$

Условие $\rho_{2t}\in \operatorname{Im} D$ дает теперь

$$s^2=\mathrm{const}\,e^{\varphi},\quad s'+\varphi's=0\Rightarrow s'=\varphi'=0.$$

Осталось показать, что $r'=0$.

Из (10.11) находим, что $\sigma_2^0=r+p$. Собирая члены с $u_1^2$ в $\rho_3^0$ (10.5), находим $p''+sp'+4sr'=0$. Равенство нулю коэффициента при $u_1^2$ в $\rho_{1,t}$ дает уравнение $r''+sr'=0$. Теперь условие $\rho_{1,t}\in\operatorname{Im} D$ выполнено и

$$\rho_2=-4s^2u_1v_1+(2r'-p'-2sp)(u_1-v_1)+b(u+v).$$

Равенство нулю коэффициента при $u_1^3$ в $\rho_{2,t}$ дает третье условие на коэффициенты $r$, $p$: $sp'+(2r'-p'-2sp)'=0$. Сравнив полученные три уравнения, находим, что $r'=0$ и

$$p''+sp'=0. \tag{10.24}$$

Доказательство теоремы 10.1 для систем вида

$$u_t=u_2+v_1^2+pv_1+q,\quad -v_t=v_2+u_1^2-pu_1+q. \tag{10.25}$$

Из уравнения (10.24) находим, что $p=\alpha\exp(-u-v)+\beta$. Симметрическая замена[1] $\bar u+\bar v=u+v$, $\bar u_1=u_1-\frac{\alpha}{4}\exp(-u-v)-\beta/2$ приводит к системе вида (10.25) с $p=0$. В этом случае

$$\rho_1=\rho_1^0=\rho_2^0=0,\quad \rho_3^0=-4D(q),\quad \rho_4^0=(2q'-4q)_t+4q'(u_2-v_2).$$

Условие $\rho_4^0\in\operatorname{Im} D$ эквивалентно уравнению $q'''+q''-2q'=0$. Полученная система совпадает с системой (g) списка I.

Доказательство теоремы 10.1 для систем вида

$$\begin{aligned} &u_t=u_2+\lambda u_1^2+ru_1+pv_1+q,\\ &-v_t=v_2+\lambda v_1^2-rv_1-pu_1+q,\quad \lambda=0,1. \end{aligned} \tag{10.26}$$

Системы вида (10.26) допускают симметрические замены

$$\bar u+\bar v=u+v,\quad \bar u_1=u_1+\rho,\quad \rho''=\lambda\rho'.$$

Для преобразованной системы

$$\bar r=r-2\lambda\rho,\quad \bar p=p-2\rho',\quad \bar\lambda=\lambda. \tag{10.27}$$

[1]) При симметрических заменах формальные симметрии и законы сохранения пересчитываются по формулам, аналогичным (3.49). Порядки формальных симметрий и законов сохранения не изменяются. Поэтому преобразованная система также удовлетворяет условиям (10.9).

Для любой системы (10.26) условия $\rho_1^0$, $\rho_2^0 \in \operatorname{Im} D$ выполнены и

$$\sigma_2^0 = \lambda (u_1 - v_1) + r + p + \lambda \int p(u+v)\, d(u+v).$$

Условия $\rho_{1,t}$, $\rho_3^0 \in \operatorname{Im} D$ эквивалентны уравнениям

$$r'' = \lambda r', \quad p'' = \lambda p. \tag{10.28}$$

Находя $r$ и $p$ из (10.28), убеждаемся при помощи формул (10.27), что указанные в формулировке теоремы преобразования позволяют свести задачу к следующим двум случаям:

$$\lambda = 0,\ r = \alpha(u+v), \qquad p = \beta(u+v),$$
$$\lambda = 1,\ r = \alpha \exp(u+v), \qquad p = \beta \exp(-u-v),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha = 0, 1$. Далее проверяем, что $\rho_4^0 - \rho_{2t} \in \operatorname{Im} D$ в том и только в том случае, когда

$$\lambda = 0,\ \alpha\beta = 0 \text{ или } \lambda = 1,\ \beta = 0.$$

При этом условие $\rho_{2t} \in \operatorname{Im} D$ эквивалентно соотношениям

$$q''' + \beta^2 = 0 \quad (\lambda = 0), \qquad q''' = q' \quad (\lambda = 1).$$

Простые преобразования (как симметрические, так и точечные) приводят полученные системы либо к системам (a), (c) из списка I, либо к следующим трем случаям:

$$\lambda = \beta = 0, \quad \alpha = 1, \quad q = \gamma (u+v)^2, \quad r = (u+v), \quad p = 0, \tag{10.29}$$

$$\lambda = \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad q = \gamma \exp(-u-v), \quad r = \exp(u+v), \quad p = 0, \tag{10.30}$$

$$\lambda = 1, \quad \alpha = \beta = 0, \quad q = \gamma \exp(-u-v) + \delta \exp(u+v), \quad r = p = 0. \tag{10.31}$$

В случаях (10.29), (10.30) условие $\rho_{3t} \in \operatorname{Im} D$ дает $\gamma = 0$. Полученные при этом системы совпадают с (b) и следующей системой:

$$u_t = u_2 + u_1^2 + u_1 \exp(u+v), \qquad -v_t = v_2 + v_1^2 - v_1 \exp(u+v),$$

симметрически эквивалентной системе (e) (см. пример 8.1). В случае (10.31) $\rho_{3,t} \in \operatorname{Im} D$, а условие $\rho_{4,t} \in \operatorname{Im} D$ эквивалентно равенству $\gamma = 0$. Полученная система конформно эквивалентна либо линейной, либо (d).

Доказательство теоремы 10.1 в случае

$$F = pv_1 + q, \quad |\varepsilon| + |\psi''| + |(\varphi - \psi)'| \neq 0. \tag{10.32}$$

Допустимые симметрические замены имеют вид

$$\begin{gathered} \bar u + \bar v = \int a(u+v)\, d(u+v), \quad \bar u_1 = a u_1 + b, \\ a'' = \frac{1}{2}(3\varphi - \psi)' a' - \varepsilon e^{\varphi} b', \quad b'' = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)' b' + pa', \end{gathered} \tag{10.33}$$

причем коэффициенты при $\bar u_1 \bar v_1$, $\bar v_1$ в преобразованной системе таковы:

$$\bar\varphi' - \bar\psi' = [(\varphi - \psi)' a - 2a' - 2\varepsilon e^{\varphi} b]\, a^{-2}, \tag{10.34}$$

$$\bar p = p - 2b' a^{-1} + [\varepsilon e^{\varphi} b + 2a' - (\varphi - \psi)' a]\, b a^{-2}. \tag{10.35}$$

Условие $\rho_2^0 \in \operatorname{Im} D$ (см. (10.11)) эквивалентно уравнению

$$(\varphi - \psi)'' = \varphi' (\varphi - \psi)'. \tag{10.36}$$

Нетрудно проверить, что при выполнении (10.36) система, состоящая из уравнения $(\varphi - \psi)' a = 2a' + 2\varepsilon e^{\varphi} b$ (ср. (10.34)) и уравнений (10.33), совместна. Поэтому функции $a$, $b$ можно выбрать так, чтобы коэффициент при $\bar u_1 \bar v_1$ в преобразованной системе оказался нулем. Уравнение

$$p' = \varphi' p \tag{10.37}$$

при $\varepsilon \neq 0$ следует из условия $\rho_{1,t} \in \operatorname{Im} D$, а при $\varepsilon = 0$ — из $\rho_{2,t} \in \operatorname{Im} D$ (нужно приравнять нулю коэффициент при $u_1^3$ в $\rho_{1,t}$ и $\rho_{2,t}$). Если $\varphi' - \psi' = 0$ и выполнено соотношение (10.37), то из равенств нулю правых частей соотношений (10.34), (10.35) следует равенство (10.33). Поэтому функции $a$, $b$ можно выбрать так, что в новой системе $\bar{p} = 0$.

Далее рассмотрим системы с $p = (\varphi - \psi)' = 0$. Такие системы полностью описываются следующими уравнениями:

$$2\varphi''' - 2\varphi'\varphi'' + 3\varepsilon r' e^{\varphi} = 0, \tag{10.38}$$

$$r'' - \varphi' r' + 2\varepsilon q' = 0, \tag{10.39}$$

$$q'' - \varphi' q' = 0. \tag{10.40}$$

Уравнения (10.38), (10.39) следуют из $\rho_{1,t} \in \operatorname{Im} D$. Уравнение (10.40) получаем из $\rho_{2,t} \in \operatorname{Im} D$ при $\varepsilon \neq 0$, из $\rho_{3,t} \in \operatorname{Im} D$ (приравниваем нулю коэффициент при $u_1^3$) при $\varepsilon = 0$. Если $\varepsilon = 0$, то $\varphi'' = \exp(\varphi)$ (см. (10.38)) и $r = \lambda\varphi' + \mu$ (см. (10.39)). Симметрическая замена $\bar{u} + \bar{v} = u + v$, $\bar{u}_1 = u_1 + \lambda/2$ и преобразование (9.5) приводят к системе с $r = 0$. Система с $\varepsilon = r = 0$ конформно эквивалентна системе (f) списка I. Осталось рассмотреть случай $\varepsilon \neq 0$, $\varphi' - \psi' = p = 0$. В этом случае система, которую описывают уравнения (10.38) — (10.40), совпадает с системой (h) с точностью до преобразования (9.5).

Для завершения доказательства теоремы 10.1 осталось убедиться в том, что мы рассмотрели все случаи, перечисленные в лемме 10.3. Если при $F = pv_1 + q$ нарушено условие (10.32), то $\varepsilon = (\varphi - \psi') = \psi'' = 0$ и система имеет вид (10.26). Во втором случае $F = sv_1^2 + pv_1 + q$ система в силу леммы 10.3 приводится к виду (10.25) масштабными преобразованиями. ■

Переходим к рассмотрению систем (q) — (t) списка II. Эти системы относятся к классу уравнений (9.1), удовлетворяющих условию

$$f_{v_1v_1} \neq 0, \quad g_{u_1u_1} \neq 0. \tag{10.41}$$

Как и при доказательстве леммы 10.3, проверяется, что в случае (10.41) функции (10.10) удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \varepsilon = 0, \quad (\varphi - \psi)_u (\varphi - \psi)_v = 0, \quad \psi_{uv} = 0, \quad r = \text{const}, \\ F = \tilde{s}v_1^2 + \tilde{p}v_1 + \tilde{q}, \quad G = su_1^2 + pu_1 + q. \end{gathered} \tag{10.42}$$

Существенным моментом является выбор подходящей конформной системы координат, в которой проводится анализ условий разрешимости системы уравнений (10.41), (10.42). Конформная замена $\bar{u} = U(u)$, $\bar{v} = V(v)$ преобразует коэффициентные функции $\varphi$, $\psi$ в (10.10) следующим образом:

$$\begin{gathered} \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(u, v) - \ln U'(u) - \ln V'(v), \\ \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}) = \psi(u, v) - \ln U'(u) - \ln V'(v). \end{gathered} \tag{10.43}$$

Из (10.42) следует, что $\varphi_{uv} = 0$, и поэтому можно выбрать конформную систему координат, в которой $\varphi = 0$. В этих координатах (ср. доказательство леммы 10.3) не только $r$, но и $s$, $\tilde{s}$ являются константами, и масштабными преобразованиями рассматриваемые системы приводятся к виду

$$u_t = u_2 + v_1^2 + \chi_u v_1 + z_v, \quad -v_t = v_2 + u_1^2 - \chi_v u_1 + z_u. \tag{10.44}$$

Если система (10.44) не является симметрической (см. (g) из списка I) и не совпадает с системой ($w_2$) из списка III, то коэффициентные функции $\chi$, $z$ в (10.44) должны удовлетворять уравнениям

$$\chi_{uu} + \chi_v = \chi_{vv} + \chi_u = 0, \quad z_{uuu} = z_{vvv}, \tag{10.45}$$

$$2\chi_u z_{uu} + z_u\chi_{uu} = 2\chi_v z_{vv} + z_v\chi_{vv}, \tag{10.46}$$

$$z_{uvvv} + z_{uvu} - 2z_{vv} = z_{uvuu} + z_{uvv} - 2z_{uu} = 0, \tag{10.47}$$

$$z_u(\chi_u\chi_v + 2z_{uv})_v = z_v(\chi_u\chi_v + 2z_{uv})_u. \tag{10.48}$$

Уравнения (10.45) — (10.48) гарантируют выполнение условий $\rho_k^0 \in \operatorname{Im} D$ $(k \leqslant 4)$; $\rho_{k,t} \in \operatorname{Im} D$ $(k = 1,\ 2)$. Анализ полученных уравнений приводит к случаям (q) — (t) из списка II.

В заключение приведем инвариантное относительно конформных преобразований описание систем (n) и (p). При $\varepsilon = 1$ уравнения (9.1), (10.10) либо приводятся конформным преобразованием к симметрической системе или системе ($w_3$) списка III, либо $\varphi = \psi$ и рассматриваемая система имеет вид

$$
(10.49)\qquad \begin{aligned} u_t &= u_2 + e^{\varphi} u_1^2 v_1 + \varphi_u u_1^2 + r u_1 + \tilde{p} v_1 + e^{-\varphi} z_v, \\ -v_t &= v_2 - e^{\varphi} v_1^2 u_1 + \varphi_v v_1^2 - r v_1 - p u_1 + e^{-\varphi} z_u, \end{aligned}
$$

где

$$
(10.50)\qquad \tilde{p}_v = \varphi_v \tilde{p}, \quad p_u = \varphi_u p, \quad p\tilde{p} \neq 0,
$$

$$
(10.51)\qquad \tilde{p}_u + \varphi_u \tilde{p} = \chi_v, \quad p_v + \varphi_v p = \chi_u,
$$

$$
(10.52)\qquad -\chi + 2z = 0, \quad 2\varphi_{uv} e^{-\varphi} + 3r + \chi = 0,
$$

$$
(10.53)\qquad (\tilde{p} z_u)_u = (p z_v)_v, \quad z_u r_v = z_v r_u,
$$

$$
(10.54)\qquad (e^{-\varphi} z_v)_v + \tilde{p} z = (e^{-\varphi} z_u)_u + p z = 0.
$$

Условия (10.50) — (10.54) являются критерием того, что система (10.49) приводится конформным преобразованием к системам (n) и (p). Система координат в (n), (p) выбрана так, чтобы

$$
(10.55)\qquad p = \tilde{p} = e^{\varphi}.
$$

В общем случае из (10.50) находим, что $p = e^{\varphi} B(v)$, $\tilde{p} = e^{\varphi} A(u)$. При конформном преобразовании $\bar{u} = U(u)$, $\bar{v} = V(v)$ функции $p$, $\tilde{p}$ в (10.49) преобразуются по формулам

$$
\bar{p}(\bar{u},\ \bar{v}) = p(u,\ v)\,\frac{V'(v)}{U'(u)}, \qquad \bar{\tilde{p}}(\bar{u},\ \bar{v}) = \tilde{p}(u,\ v)\,\frac{U'(u)}{V'(v)}.
$$

Учитывая соотношения (10.43), находим, что при $U' = A^{-1/2}$, $V' = B^{-1/2}$ функции $p$ и $\tilde{p}$ в новой системе координат имеют вид (10.55).

## § 11. Краткий библиографический комментарий

Многие из систем уравнений списков I — III были известны в литературе по методу обратной задачи. Не претендуя на полноту, ниже мы приведем необходимую библиографию. Для следующих систем типа Буссинеска (9.11) (a), ($z_1$), ($z_2$), ($w_2$) и (s) коммутационные представления были найдены в работах [48], [49], [43], [42] и [40]. Воспользовавшись методом групп редукций [43], [50], мы нашли коммутационные представления для систем ($w_2$), (g), (s), (q) и (t), оказалось, что они связаны с группами $\mathbb{Z}_3$, двумя представлениями группы диэдра $D_3$, группой тетраэдра и группой октаэдра. Для системы (r) оно было найдено непосредственно из определения (0.17). Мы не приводим здесь эти новые коммутационные представления за недостатком места. Лучше всего изучены коммутационные представления для систем, близких к нелинейному уравнению Шрёдингера (9.10). Для систем (b), (d), (e) = ($z_6$), ($f_1$) = ($f_3$), ($f_2$), ($z_4$), ($z_5$) их можно извлечь из работ [45], [2], [51], [52], [47], [53], [54] соответственно. И, наконец, для систем (l) и (m) коммутационные представления были найдены в работах [55], [56] и [57]. Интересные задачи возникают при построении и классификации представлений нулевой кривизны [43], [50] и $r$-матриц [58], [59], связанных с уравнениями списков.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. Korteweg — de Vries equation and generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion//J. Math. Phys.— 1968.— V. 9, № 8.— P. 1204—1209.

[2] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах//ЖЭТФ.— 1971.— Т. 61, № 1.— С. 118—134.

[3] Lamb G. L. Higher conservation laws in ultrashot optical pluse propagation//Phys. Lett.— 1970.— V. 32A.— P. 251—252.

[4] Кулиш П. П. Факторизация классической и квантовой $S$-матрицы и закон сохранения//ТМФ.— 1976.— Т. 26, № 2.— С. 198—205.

[5] Dodd R. K., Bullough R. K. Polynomial conserved densities for the Sine-Gordon equations//Proc. R. Soc. Lond. A.— 1977.— V. 352.— P. 481—503.

[6] Жибер А. В., Шабат А. Б. Уравнения Клейна — Гордона с нетривиальной группой//ДАН СССР.— 1979.— Т. 247, № 5.— С. 1104—1107.

[7] Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. О бесконечных алгебрах Ли — Беклунда //Функцион. анализ и его прил.— 1980.— Т. 14, вып. 4.— С. 79—80.

[8] Свинолупов С. И., Соколов В. В. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения//Фунцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, вып. 4.— С. 86—87.

[9] Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u)\, u_{xx} + F(u, u_x)$.I//ТМФ.— 1985.— Т. 62, № 2.— С. 163—185.

[10] Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. О расширении модуля обратимых преобразований//ДАН СССР.— 1987.— Т. 295, № 2.

[11] Свинолупов С. И. Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями//УМН.— 1985.— Т. 40, вып. 5.— С. 263—264.

[12] Abellanas L., Galindo A. J. Conserved densities for nonlinear evolution equations I. Even order case//J. Math. Phys.— 1979.— V. 20, № 6.— P. 1239—1243.

[13] Свинолупов С. И. Эволюционные уравнения, обладающие симметриями. Кандидатская диссертация//Уфа, 1985.

[14] Свинолупов С. И., Соколов В. В., Ямилов Р. И. О преобразованиях Беклунда для интегрируемых эволюционных уравнений//ДАН СССР.— 1983.— Т. 271, № 4.— С. 802—805.

[15] Свинолупов С. И., Соколов В. В. Классификация интегрируемых квазилинейных уравнений третьего порядка//Препринт, Уфа, 1986.

[16] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.

[17] Колоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны.— М.: Мир, 1985.

[18] Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения//УМН.— 1980.— Т. 35, вып. 6.— С. 47—68.

[19] Sokolov V. V., Shabat A. B. Classification of integrable evolution equations. Soviet Scientific Revies, Section C//Math. Phys. Rev.— 1984.— V. 4.— P. 221—280.

[20] Дринфельд В. Г., Свинолупов С. И., Соколов В. В. Классификация эволюционных уравнений пятого порядка, обладающих бесконечной серией законов сохранения//ДАН УССР. Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки.— 1985.— № 10.— С. 8—10.

[21] Свинолупов С. И. Об аналогах уравнения Бюргерса произвольного порядка//ТМФ.— 1985.— Т. 65, № 2.— С. 303—307.

[22] Ямилов Р. И. Дискретные уравнения вида $du_n/dt = F(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$ $(n \in \mathbb{Z})$ с бесконечным набором локальных законов сохранения//Кандидатская диссертация, Уфа, 1984.

[23] Ямилов Р. И. О классификации дискретных эволюционных уравнений//УМН.— 1983.— Т. 38, вып. 6.— С. 155—156.

[24] Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u) u_{xx} + F(u, u_x)$. II//ТМФ.— 1985.— Т. 66, № 1.— С. 47—65.

[25] Шабат А. Б., Ямилов Р. И. О полном списке интегрируемых систем уравнений вида: $iu_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x)$, $-iv_t = v_{xx} + g(u, v, u_x, v_x)$//Препринт БФ АН СССР, Уфа, 1985.

[26] Dodd R. K., Fordy A. P. Prolongation structures of complex quasipolynomial evolution equations//J. Phys. A.: Math. Gen.— 1984.— V. 17.— P. 3249—3266.

[27] Chen H. H., Lee Y. C., Liu C. S. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method//Physica Scr.—1979.— V. 20.— P. 490—492.

[28] Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем//ТМФ.— 1982.— Т. 51, № 1.— С. 10—22.

[29] Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана//Препринт БФ АН СССР, Уфа, 1981.

[30] Жибер А. В., Шабат А. Б. Системы уравнений $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$, обладающие симметриями//ДАН СССР.— 1984.— Т. 277, № 1.— С. 29—33.

[31] Захаров В. Е., Шульман Е. И. О матрице рассеяния интегрируемости классических волновых систем, обладающих дополнительным интегралом движения//ДАН СССР.— 1985.— Т. 283, № 6.— С. 1325—1328.

[32] Zakharov V. E., Schulman E. I.//Phys.— 1980.— V. 1D, № 2.— P. 191—202.

[33] Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы//Функцион. анализ и его прил.— 1976.— Т. 10, вып. 4.— С. 13—29.

[34] Adler M. On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg—de Vries type equations//Inventiones Math.— 1979.— V. 50.— P. 219—248.

[35] Гельфанд И. М., Манин Ю. И., Шубин М. А. Скобки Пуассона и ядро вариационной производной в формальном вариационном исчислении//Функцион. анализ и его прил.— 1976.— Т. 10, вып. 4.— С. 30—34.

[36] Интегрируемые системы. Сб. статей под редакцией А. Б. Шабата.— Уфа: Издательство БФ АН СССР, 1982.

[37] Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation//Comm. Pure Appl. Math.— 1975.— V. 28.— P. 141—188.

[38] Cole J. D. On a quasilinear parabolic equation used in aerodynamics//Quart. Appl. Math.— 1951— V. 2.— P. 225—236.

[39] Hopf E. The partial differential equation $u_t = uu_x + \mu u_{xx}$//Comm. Pure and Appl. Math.— 1965.— V. 3.— P. 201—230.

[40] Rosen G. Nonlinear Heat conduction in solid $H_2$//Phys. Rev.— 1979.— V. B19, № 4.— P. 2392—2399.

[41] Fordy A. P., Gibbons J.//J. Math. Phys.— 1981.— V. 22.— P. 1170—1175.

[42] Соколов В. В., Шабат А. Б. $(L, A)$-пары и замена типа Рикатти//Функцион. анализ и его прил.— 1980.— Т. 14, вып. 2.— С. 79—80.

[43] Mikhailov A. V. The reduction problem and the inverse scattering method in solitin theory.— Proc. of the Soviet — American Symposium on Soliton Theory. Kiev, USSR, 1979. Rds S. V. Manakov, V. E. Zakharov. Physica. 3D: 1—2, 1981.— C. 73—117.

[44] Мукминов Ф. Х. О выпрямлении характеристик квазилинейного уравнения второго порядка//ТМФ.— 1986.

[45] Kaup D. J. Finding eigenvalue problems for solving nonlinear evolution equations//Progr. of Theor. Phys.— 1975.— V. 54, № 1.— P. 72—78.

[46] Lakshmanan M. Continuum spin system as an exactly solvable dynamic system//Phys. Lett.— 1977.— V. 61A, № 1.— P. 53—57.

[47] Боровик А. Е. $N$-солитонные решения нелинейного уравнения Ландау—Лифшица//Письма в ЖЭТФ.— 1978.— Т. 28, № 10.— С. 629—632.

[48] Захаров В. Е. К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов//ЖЭТФ.— 1973.— Т. 65, № 1.— С. 219—225.

[49] Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебра Ли и уравнения типа Кортевега — де Фриза// Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики, Новейшие достижения.— 1984.— Т. 24.— М.: ВИНИТИ.— С. 81—180.

[50] Михайлов А. В. Редукции в интегрируемых системах. Группа редукции// Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 32, № 1.— С. 187—192.

[51] Kaup D. J., Newell A. S. An exact solution for a derived nonlinear Schrödinger equation// J. Math. Phys.— 1978.— V. 19.— P. 798—801.

[52] Takhtajan L. A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method// Phys. Lett.— 1977.— V. 64, № 2.— P. 235—237.

[53] Рейман А. Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли.— В кн.: Дифференц. геометрия, группы Ли и механика// Зап. науч. семинаров ЛОМИ.— Л.: Наука, 1980.— Т. 95.— С. 3—54.

[54] Levi D. Nonlinear differential-difference equations as Bàklund transformations// J. of Phys. A.: Math. Gen.— 1981.— V. 14.— P. 1083—1098.

[55] Боровик А. Е. Докторская диссертация.— Харьков, 1981.

[56] Sklyanin. On complete integrability of the Landau — Lifschitz equation// Preprint LOMI E-3-1979, Leningrad, 1979.

[57] Голод П. И. Конечнозонные расширения гамильтоновых уравнений задачи Кирхгофа в интегрируемом случае Стеклова// Препринт ИТФ, 84-87 Р. ИТФ АН УССР, Киев, 1984.

[58] Белавин А. А., Дринфельд В. Г. О решениях классического уравнения Янга — Бакстера для простых алгебр Ли// Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, вып. 3.— С. 1—29.

[59] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.— М.: Наука, 1986.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР

Башкирский филиал АН СССР

Поступила в редакцию
17 сентября 1986 г.