ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 152 (2018). С. 159–164

УДК 517.547

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ КОНТИНУАЛЬНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

© 2018 г. **Р. Н. ГАРИФУЛЛИН, Р. И. ЯМИЛОВ**

Аннотация. В работе изучается новый пример решеточного уравнения, являющегося одним из ключевых согласно классификации пятиточечных дифференциально-разностных уравнений. Это уравнение имеет два различных континуальных предела, которые являются хорошо известными дифференциальными уравнениями с частными производными пятого порядка: уравнением Савады—Котеры и уравнением Каупа—Купершмидта. При помощи построенных L-A-пары и иерархии законов сохранения доказана интегрируемость рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, интегрируемость, пара Лакса, закон сохранения.

AMS Subject Classification: 37K10, 35G50, 39A10

1. Введение. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$u_{n,t} = (u_n + 1)\left(\frac{u_{n+2}u_n(u_{n+1}+1)^2}{u_{n+1}} - \frac{u_{n-2}u_n(u_{n-1}+1)^2}{u_{n-1}} + (2u_n+1)(u_{n+1}-u_{n-1})\right), \qquad (1)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $u_n(t)$ — неизвестная функция одной дискретной переменной n и одной непрерывной переменной t; индекс t в $u_{n,t}$ обозначает производную по времени. Уравнение (1) появляется в обобщенной симметрийной классификации пятиточечных дифференциально-разностных уравнений вида

$$u_{n,t} = F(u_{n+2}, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n-2}), \qquad (2)$$

проведенной в [10–12]. Уравнение (1) совпадает с уравнением (E16) в [11]; ранее оно было получено в [1]. Уравнение вида (2) играет важную роль в изучении четырехточечных дискретных уравнений на квадратной решетке, представляющих значительный интерес (см., например [2, 6, 8, 16]).

В настоящее время об уравнении (1) известно немного. В [11] было показано, что уравнение (1) обладает девятиточечной обобщенной симметрией вида

$$u_{n,\theta} = G(u_{n+4}, u_{n+3}, \ldots, u_{n-4}).$$

Что касается связей этого уравнения с другими известными интегрируемыми уравнениями вида (2), не известно ничего полезного с точки зрения построения решений (см. подробности в следующем разделе).

Тем не менее рассматриваемое уравнение занимает особое место в классификации (см. [10–12]). В частности, оно обладает замечательным свойством, обнаруженным в [9]: оно имеет два различных континуальных предела, каковыми являются известные уравнения Каупа—Купершмидта и Савады—Котеры. По этой причине уравнение (1) заслуживает более детального изучения.

В разделе 2 обсуждаются известные свойства уравнения (1). Чтобы обосновать интегрируемость уравнения (1), в разделе 3 мы строим L-A-пару и в разделе 4 доказываем, что она обеспечивает бесконечную иерархию законов сохранения.

2. Особая роль уравнения (1) **в классификации [10–12].** В двух списках интегрируемых уравнений вида (2), приведенных в [11, 12], особое место занимают уравнение (1) и уравнения

$$u_{n,t} = (u_n^2 - 1)\Big(u_{n+2}\sqrt{u_{n+1}^2 - 1} - u_{n-2}\sqrt{u_{n-1}^2 - 1}\Big), \tag{3}$$

$$u_{n,t} = u_n^2\big(u_{n+2}u_{n+1} - u_{n-1}u_{n-2}\big) - u_n\big(u_{n+1} - u_{n-1}\big), \tag{4}$$

$$u_{n,t} = u_{n+1}u_n^3u_{n-1}\big(u_{n+2}u_{n+1} - u_{n-1}u_{n-2}\big) - u_n^2\big(u_{n+1} - u_{n-1}\big). \tag{5}$$

Уравнения (3)–(5) — это уравнения (E17), (E15) в [11] и уравнение (E14) в [12] соответственно. Уравнение (4) известно уже достаточно давно (см. [18]).

Все остальные уравнения из [11, 12] в континуальном пределе переходят в уравнение третьего порядка вида

$$U_\tau = U_{xxx} + F(U_{xx}, U_x, U), \tag{6}$$

где индексы τ и x обозначают частные производные по соответствующим переменным, и в основном в уравнение Кортевега—де Фриза. Эти четыре уравнения в континуальном пределе соответствуют уравнениям пятого порядка следующего вида:

$$U_\tau = U_{xxxxx} + F(U_{xxxx}, U_{xxx}, U_{xx}, U_x, U). \tag{7}$$

Для всех четырех уравнений (1), (3)–(5) в континуальном пределе получаем одно из двух хорошо известных уравнений. Одно из них — уравнение Каупа—Купершмидта (см. [7, 13])

$$U_\tau = U_{xxxxx} + 5UU_{xxx} + \frac{25}{2}U_xU_{xx} + 5U^2U_x, \tag{8}$$

а второе — уравнение Савады—Котеры (см. [17])

$$U_\tau = U_{xxxxx} + 5UU_{xxx} + 5U_xU_{xx} + 5U^2U_x. \tag{9}$$

Используя в уравнении (5) подстановку

$$u_n(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon^2 U\left(\tau - \frac{18}{5}\varepsilon^5 t, x + \frac{4}{3}\varepsilon t\right), \quad x = \varepsilon n, \tag{10}$$

в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем уравнение Савады—Котеры (9). Все остальные континуальные пределы известны (см. [6] для уравнения (4) и [9] для уравнений (1) и (3)). Здесь мы явно повторяем подстановки для рассматриваемого уравнения (1), которое имеет два различных континуальных предела. Подстановка

$$u_n(t) = -\frac{4}{3} - \varepsilon^2 U\left(\tau - \frac{18}{5}\varepsilon^5 t, x + \frac{4}{3}\varepsilon t\right), \quad x = \varepsilon n \tag{11}$$

в (1) приводит к уравнению (8), тогда как подстановка

$$u_n(t) = -\frac{2}{3} + \varepsilon^2 U\left(\tau - \frac{18}{5}\varepsilon^5 t, x + \frac{4}{3}\varepsilon t\right), \quad x = \varepsilon n \tag{12}$$

— к уравнению (9). Связь между этими дискретными и непрерывными уравнениями показана на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
(3) \arrow[dr] & & (1) \arrow[dl, "(11)"'] \arrow[dr, "(12)"] & & (4) \arrow[dl] & \\
& (8) & & (9) & & (5) \arrow[ll, "(10)"']
\end{tikzcd}$$

Видим, что уравнение (8) имеет две различных интегрируемых аппроксимации, в то время как уравнение (9) — три аппроксимации.

Насколько нам известно, между уравнениями (1), (3)–(5) и другими известными уравнениями вида (2), представленными в [11, 12], не имеется каких-либо соотношений. Более точно, мы имеем в виду соотношения, имеющие вид преобразований

$$\hat{u}_n = \varphi(u_{n+k}, u_{n+k-1}, \ldots, u_{n+m}), \quad k > m, \tag{13}$$

и их композиций (см. подробности в [10]). Что касается соотношений между уравнениями (1), (3)–(5), то уравнение (5) превращается в (4) при преобразовании $\hat{u}_n = u_{n+1}u_n$, т.е. уравнение (5) является просто модификацией уравнения (4). Имеются более сложные соотношения между уравнениями (1) и (4) (см. [1]); в [11] было показано, что это композиции двух преобразований типы Миуры. Использовать такие соотношения для построения решений весьма затруднительно, ибо задача сводится к решению дискретных уравнений типа Риккати (см. [11]).

Имеется полный список интегрируемых уравнений вида (7) (см. [3, 4, 15]). Уравнения (8) и (9) играют ключевую роль в этом списке, поскольку все остальные уравнения могут быть сведены к этим двум при помощи преобразований вида

$$\hat{U} = \Phi(U, U_x, U_{xx}, \dots, U_{x\dots x}).$$

3. L-A-пара. Из анализа континуального предела становится ясно, что уравнение (1) близко к уравнениям (3) и (4) по свойствам интегрируемости; эти уравнения (3), (4) обладают L-A парами, задаваемыми матрицами размера 3×3 (см. [6, 9]). В этом разделе мы построим L-A-пару для уравнения (1), следуя [9].

Будем искать L-A-пару в виде

$$L_n\psi_n = 0, \quad \psi_{n,t} = A_n\psi_n, \tag{14}$$

где оператор L_n имеет вид

$$L_n = T^2 + l_n^{(1)}T + l_n^{(0)} + l_n^{(-1)}T^{-1}; \tag{15}$$

здесь $l_n^{(k)}$, $k = -1, 0, 1$, зависят от конечного числа функций u_{n+j}, T — оператор сдвига: $Th_n = h_{n+1}$. В случае (15) оператор A_n можно выбрать в виде

$$A_n = a_n^{(1)}T + a_n^{(0)} + a_n^{(-1)}T^{-1}.$$

Условие совместности системы (14) имеет вид

$$\frac{d(L_n\psi_n)}{dt} = (L_{n,t} + L_nA_n)\psi_n = 0 \tag{16}$$

и может быть удовлетворено в силу уравнений (1) и $L_n\psi_n = 0$.

Если предположить, что коэффициенты $l_n^{(k)}$ зависят только от u_n, то нетрудно проверить, что $a_n^{(k)}$ должны также зависеть только от u_{n-1}, u_n. Однако в этом случае задача не имеет решений для уравнения (1). Поэтому перейдем к ситуации, когда функции $l_n^{(k)}$ зависят от u_n и u_{n+1}; в этом случае коэффициенты $a_n^{(k)}$ должны зависеть от u_{n-1}, u_n и u_{n+1}. Таким образом, требуется найти операторы L_n и A_n, содержащие одну неустранимую произвольную константу λ, играющую роль спектрального параметра:

$$L_n = T^2 - \frac{U_{n+1}}{u_{n+1}}T + \lambda\frac{U_{n+1}}{u_n}\left(1 - \frac{u_n}{U_n}T^{-1}\right), \tag{17}$$

$$A_n = \frac{u_n}{U_n}\big(\lambda T^{-1} - \lambda^{-1}T\big) + \frac{u_n}{U_n^2}\big(u_{n-1} + u_{n+1}T^{-1}\big)(T-1), \tag{18}$$

где

$$U_n = \frac{u_n}{1+u_n}. \tag{19}$$

L-A-Пару (14), (17), (18) можно записать в стандартной матричной форме с (3×3)-матрицами $\tilde{L}_n$ и $\tilde{A}_n$:

$$\Psi_{n+1} = \tilde{L}_n\Psi_n, \quad \Psi_{n,t} = \tilde{A}_n\Psi_n,$$

где Ψ_n — спектральная вектор-функция, стандартная форма которой

$$\Psi_n = \begin{pmatrix}\psi_{n+1}\\ \psi_n\\ \psi_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Здесь мы немного изменили Ψ при помощи калибровочного преобразования с целью упростить матрицы $\tilde{L}_n$ и $\tilde{A}_n$:

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} U_n\left(\lambda\psi_{n+1} + \dfrac{1}{u_n}\psi_n\right) \\ \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix},$$

так что операторы $\tilde{L}_n$ и $\tilde{A}_n$ принимают вид

$$\tilde{L}_n = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{u_n} & \dfrac{1}{U_n} \\ \lambda U_n & \dfrac{U_n}{u_n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{u_{n-1}u_{n-2}}{U_{n-1}^2} - \dfrac{u_{n+1}u_n}{U_n^2} - u_n + u_{n-1} & -\dfrac{u_{n-1}}{\lambda U_{n-1}} - \dfrac{u_{n-1}u_{n-2}}{\lambda U_{n-1}^2} & \dfrac{u_{n+1}u_n + u_{n+1} + u_n}{U_n} \\ \lambda(1+u_n)u_{n-1} - u_n & \dfrac{u_{n+1}u_n + u_{n+1} - u_n u_{n-1}}{U_n} - \dfrac{1}{\lambda} & \dfrac{\lambda u_n}{U_n} - \dfrac{u_{n+1}u_n}{U_n^2} \\ \lambda u_{n-1} - (1+u_{n-1})u_n & \dfrac{u_{n-1}u_{n-2}}{U_{n-1}^2} - \dfrac{u_{n-1}}{\lambda U_{n-1}} & \lambda - \dfrac{u_{n-1}u_{n-2}}{U_{n-1}^2} + \dfrac{u_n u_{n-1}}{U_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

В этом случае, в отличие от (16), условие совместности можно представить в матричной форме, не использующей спектральной вектор-функции Ψ_n:

$$\tilde{L}_{n,t} = \tilde{A}_{n+1}\tilde{L}_n - \tilde{L}_n\tilde{A}_n. \tag{22}$$

4. Законы сохранения. Насколько нам известно, существуют два метода построения законов сохранения с использованием матричной L-A-пары (22) (см. [2,5,14]). Однако неясно, как применять эти методы в случае матриц (20) и (21). Здесь мы будем использовать другую схему вывода законов сохранения из L-A-пары (14), представленную в [9]. В [9] эта схема была применена лишь к уравнению (3). Сейчас мы вновь проверим ее на примере еще одного уравнения (1).

Структура операторов (17) и (18) позволяет переписать L-A-пару (14) в виде пары Лакса. Оператор L_n линейно зависит от λ:

$$L_n = P_n - \lambda Q_n, \tag{23}$$

где

$$P_n = T^2 - \frac{U_{n+1}}{u_{n+1}}T, \quad Q_n = -\frac{U_{n+1}}{u_n}\left(1 - \frac{u_n}{U_n}T^{-1}\right),$$

а U_n определены формулой (19). Вводя обозначение $\hat{L}_n = Q_n^{-1}P_n$, приходим к уравнению вида

$$\hat{L}_n\psi_n = \lambda\psi_n. \tag{24}$$

Функции $\lambda\psi_n$ и $\lambda^{-1}\psi_n$ во втором уравнении (14) можно вызарить через $\hat{L}_n$ и ψ_n, используя формулу (24) и ее следствие $\lambda^{-1}\psi_n = \hat{L}_n^{-1}\psi_n$. В результате получаем

$$\psi_{n,t} = \hat{A}_n\psi_n, \tag{25}$$

где

$$\hat{A}_n = \frac{u_n}{U_n}\Big(T^{-1}Q_n^{-1}P_n - TP_n^{-1}Q_n\Big) + \frac{u_n}{U_n^2}\Big(u_{n-1} + u_{n+1}T^{-1}\Big)(T-1).$$

Важно отметить, что операторы $\hat{L}_n$ и $\hat{A}_n$ в L-A-паре (24), (25) не зависят от спектрального параметра λ. По этой причине условие совместности можно записать в операторной форме без использования ψ-функции:

$$\hat{L}_{n,t} = \hat{A}_n\hat{L}_n - \hat{L}_n\hat{A}_n = [\hat{A}_n, \hat{L}_n]; \tag{26}$$

это не что иное как уравнение Лакса. Разница между этой L-A-парой и хорошо известными парами Лакса для уравнений Тоды и Вольтерра заключается в том, что операторы $\hat{L}_n$ и $\hat{A}_n$ нелокальны. Тем не менее, используя определение обратных операторов

$$P_nP_n^{-1} = P_n^{-1}P_n = 1, \quad Q_nQ_n^{-1} = Q_n^{-1}Q_n = 1 \tag{27}$$

и тот факт, что они линейны, нетрудно проверить (26) прямым вычислением.

Законы сохранения для уравнения (1), представляющие собой выражения вида

$$\rho_{n,t}^{(k)} = (T-1)\sigma_n^{(k)}, \quad k \geqslant 0,$$

можно вывести из уравнения Лакса (26), несмотря на нелокальную структуру операторов $\hat{L}_n$, $\hat{A}_n$ (см. [19]). Для этого, во-первых, необходимо представить операторы $\hat{L}_n$, $\hat{A}_n$ в виде формальных рядов по степеням T^{-1}:

$$H_n = \sum_{k\leqslant N} h_n^{(k)}T^k. \tag{28}$$

Формальные ряды такого вида можно умножать по правилу $(a_nT^k)(b_nT^j) = a_nb_{n+k}T^{k+j}$. Обратный ряд вида (28) легко получить, пользуясь определением (27), например,

$$Q_n^{-1} = -\Big(1 + q_nT^{-1} + (q_nT^{-1})^2 + \ldots + (q_nT^{-1})^k + \ldots\Big)\frac{u_n}{U_{n+1}}, \quad q_n = \frac{u_n}{U_n}.$$

Ряд $\hat{L}_n$ имеет второй порядок:

$$\hat{L}_n = \sum_{k\leqslant 2} l_n^{(k)}T^k = -\left(\frac{u_n}{U_{n+1}}T^2 + u_n\left(\frac{u_{n-1}}{U_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)T + \frac{u_{n-1}}{U_n}\left(\frac{u_nu_{n-2}}{U_{n-1}^2} - 1\right)T^0 + \ldots\right).$$

Сохраняющиеся плотности $\rho_n^{(k)}$ для уравнения (1) можно найти следующим образом:

$$\rho_n^{(0)} = \log l_n^{(2)}, \qquad \rho_n^{(k)} = \operatorname{res}\hat{L}_n^k, quad k \geqslant 1, \tag{29}$$

где вычет формального ряда (28) определен правилом $\operatorname{res} H_n = h_n^{(0)}$ (см. [19]). Соответствующие функциии $\sigma_n^{(k)}$ легко найти прямым вычислением.

Сохраняющиеся плотности $\hat{\rho}_n^{(k)}$ найдены ниже именно этим способом, а затем упрощены в соответствии с правилом

$$\hat{\rho}_n^{(k)} = c_k\rho_n^{(k)} + (T-1)g_n^{(k)},$$

где c_k — константа, а $g_n^{(k)}$ — функция. Первые три плотности для уравнения (1) имеют вид

$$\hat{\rho}_n^{(0)} = \log(u_n+1), \quad \hat{\rho}_n^{(1)} = \frac{V_{n+1}u_{n-1}}{U_n},$$

$$\hat{\rho}_n^{(2)} = \frac{u_{n+2}u_{n+1}u_n^2u_{n-1}u_{n-2}}{U_{n+1}^2U_nU_{n-1}^2} + \frac{u_{n+1}u_{n-2}(V_n^2 - u_nu_{n-1})}{U_nU_{n-1}} + \frac{u_{n+1}^2u_n^2u_{n-1}}{2U_{n+1}^2U_n^3} - \\ - \frac{u_{n+1}u_nu_{n-1}}{U_{n+1}U_n} + \frac{u_{n+1}u_{n-1}(V_{n+1}-1)V_n}{2U_{n+1}U_n^2} + \frac{u_{n-1}^2}{2U_n^2},$$

где

$$V_n = u_nu_{n-1} + u_n + u_{n-1}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{{}^2\hat{\rho}_n^{(1)}}{u_{n+1}\partial u_{n-1}} \neq 0, \quad \frac{{}^2\hat{\rho}_n^{(2)}}{u_{n+2}\partial u_{n-2}} \neq 0.$$

Следовательно, в соответствии с теорией, изложенной в обзоре [19], сохраняющиеся плотности $\hat\rho_n^{(0)}$, $\hat\rho_n^{(1)}$, $\hat\rho_n^{(2)}$ имеют порядки 0, 2, 4 соответственно. Это означает, что мы получили три нетривиальные и существенно различные сохраняющиеся плотности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адлер В. Э.* Интегрируемые Мебиус-инвариантные эволюционные цепочки второго порядка// Функц. анал. прилож. — 2016. — *50*, № 4. — С. 13–25.
2. *Гарифуллин Р. Н., Михайлов А. В., Ямилов Р. И.* Дискретное уравнение на квадратной решетке с нестандартной структурой высших симметрий// Теор. мат. физ. — 2014. — *180*, № 1. — С. 17–34.
3. *Дринфельд В. Г., Свинолупов С. И., Соколов В. В.* Классификация эволюционных уравнений пятого порядка, обладающих бесконечной серией законов сохранения// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1985. — № 10. — С. 7–10.
4. *Мешков А. Г., Соколов В. В.* Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой// Уфим. мат. ж. — 2012. — *4*, № 3. — С. 104–154.
5. *Хабибуллин И.Т., Янгубаева М. В.* Формальная диагонализация дискретного оператора Лакса и законы сохранения и симметрии динамических систем// Теор. мат. физ. — 2013. — *177*, № 3. — 441–467.
6. *Adler V. E.* On a discrete analog of the Tzitzeica equation/ `arXiv:1103.5139 [nlin.SI]`.
7. *Fordy A. P., Gibbons J.* Factorization of operators, I. Miura transformations// J. Math. Phys. — 1980. — *21*. — С. 2508–2510.
8. *Garifullin R. N., Yamilov R. I.* Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters// J. Phys. A: Math. Theor. — 2012. — *45*. — 345205.
9. *Garifullin R. N., Yamilov R. I.* On integrability of a discrete analogue of Kaup—Kupershmidt equation// Уфим. мат. ж. — 2017. — *9*, № 3. — С. 158–164; `arXiv:1612.03652v1 [nlin.SI]`.
10. *Garifullin R. N., Yamilov R. I., Levi D.*. Non-invertible transformations of differential-difference equations// J. Phys. A: Math. Theor. — 2016. — *49*. — 37LT01.
11. *Garifullin R. N., Yamilov R. I., Levi D.* Classification of five-point differential-difference equations// J. Phys. A: Math. Theor. — 2017. — *50*. — 125201.
12. *Garifullin R. N., Yamilov R. I., Levi D.* Classification of five-point differential-difference equations, II/ `arXiv:1708.02456 [nlin.SI]`.
13. *Kaup D. J.* On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx}+6Q\psi_x+6R\psi = \lambda\psi$// Stud. Appl. Math. — 1980. — *62*. — С. 189–216.
14. *Mikhailov A. V.* Formal diagonalisation of Lax—Darboux schemes// Модел. анал. информ. систем. — 2015. — *22*, № 6. — С. 795–817.
15. *Mikhailov A. V., Sokolov V. V., Shabat A. B.* The symmetry approach to classification of integrable equations// в сб.: What is Integrability?/ Springer Ser. Nonlin. Dynamics. — 1991. — С. 115–184.
16. *Mikhailov A. V., Xenitidis P.* Second-order integrability conditions for difference equations: An integrable equation// Lett. Math. Phys. — 2014. — *104*, № 4. — С. 431–450.
17. *Sawada K., Kotera T.* A method for finding N-soliton solutions of the KdV equation and KdV-like equation// Progr. Theor. Phys. — 1974. — *51*. — С. 1355–1367.
18. *Tsujimoto S., Hirota R.* Pfaffian representation of solutions to the discrete BKP hierarchy in bilinear form// J. Phys. Soc. Jpn. — 1996. — *65*. — С. 2797–2806.
19. *Yamilov R.* Symmetries as integrability criteria for differential difference equations// J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — *39*. — R541–R623.

Р. Н. Гарифуллин
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия
E-mail: `rustem@matem.anrb.ru`

Р. И. Ямилов
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия
E-mail: `RvlYamilov@matem.anrb.ru`