Р. Н. Гарифуллин, Р. И. Ямилов, Необычная серия автономных дискретных интегрируемых уравнений на квадратной решетке, *ТМФ*, 2019, том 200, номер 1, 50–71

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9701

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 200, № 1
июль, 2019

 Р. Н. Гарифуллин*, **Р. И. Ямилов***

НЕОБЫЧНАЯ СЕРИЯ АВТОНОМНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Представлена бесконечная серия автономных дискретных уравнений на квадратной решетке, обладающих иерархиями автономных обобщенных симметрий и законов сохранения по обоим направлениям решетки. Порядки этих симметрий и законов сохранения равны κN, где κ – произвольное натуральное число, а N – номер уравнения в серии. В случае $N > 2$ такая структура иерархий является новой для дискретных уравнений. Симметрии и законы сохранения строятся с помощью мастер-симметрий, которые находятся напрямую вместе с обобщенными симметриями. Данная схема построения законов сохранения представляется новой. Еще один новый момент заключается в том, что по одному из направлений в коэффициенты дискретных уравнений вводится время мастер-симметрии. В наиболее интересном случае $N = 2$ показано, что обобщенная симметрия второго порядка тесно связана с интегрируемым уравнением типа релятивистского уравнения Тоды; для автономных дискретных уравнений такое свойство имеет место очень редко.

Ключевые слова: интегрируемая система, квад-уравнение, обобщенная симметрия, закон сохранения, L–A пара.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9701

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно [1], [2] следующее дискретное интегрируемое уравнение:

$$(u_{n,m+1}+1)(u_{n,m}-1) = (u_{n+1,m+1}-1)(u_{n+1,m}+1). \tag{1}$$

В последнее время было найдено несколько интегрируемых обобщений этого уравнения [3]–[5]. Все они являются неавтономными, и здесь мы приведем два наиболее

Р. И. Ямилов благодарит за финансовую поддержку грант Российского научного фонда (проект № 15-11-20007).

*Институт математики с вычислительным центром, Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия.
E-mail: rustem@matem.anrb.ru, RvlYamilov@matem.anrb.ru

интересных из них. Одно уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}(u_{n,m+1}+\chi_{n+m+1})(u_{n,m}-\chi_{n+m})=(u_{n+1,m+1}-\chi_{n+m})(u_{n+1,m}+\chi_{n+m+1}),\\ \chi_k=\frac{1}{2}(1+(-1)^k);\end{gathered}\tag{2}$$

это уравнение (77) из работы [4] с точностью до инволюции $n\leftrightarrow m$. Второй пример, который изучался в работе [5], на самом деле представляет собой серию дискретных уравнений, отвечающих различным периодам коэффициентов по дискретной переменной n: для каждого фиксированного $N\geqslant 1$ уравнение записывается как

$$\begin{gathered}\alpha_n(u_{n,m+1}+1)(u_{n,m}-1)=\alpha_{n+1}(u_{n+1,m+1}-1)(u_{n+1,m}+1),\\ \alpha_{n+N}=\alpha_n\neq 0\quad\text{при всех}\quad n\in\mathbb{Z}.\end{gathered}\tag{3}$$

Данные обобщения в обоих случаях обладают иерархиями обобщенных симметрий и законов сохранения по обоим направлениям m и n, а также L–A парой, но все эти объекты являются неавтономными, т. е. явно зависят от дискретной переменной n или m.

В настоящей работе мы строим серию автономных интегрируемых обобщений уравнения (1). Мы показываем, что все эти уравнения имеют автономные L–A пары, обобщенные симметрии и законы сохранения. В частности, эти уравнения дают нам примеры автономных дискретных уравнений, у которых минимально возможный порядок их автономных обобщенных симметрий по любому направлению может быть сколь угодно высоким. Построенная нами серия уравнений представляет собой частный случай уравнения (3), однако результаты настоящей работы не являются прямым следствием результатов, представленных в [5].

В разделе 2 рассматривается автономное обобщение уравнения (1) с произвольным постоянным коэффициентом, которое включает в себя всю рассматриваемую серию уравнений, и строятся иерархии его обобщенных симметрий и законов сохранения в m-направлении. Эти результаты необходимы для следующих разделов. В разделе 3 мы строим и изучаем серию автономных интегрируемых обобщений уравнения (1), что является целью настоящей работы. Автономные обобщенные симметрии и законы сохранения в m-направлении строятся в п. 3.1, а симметрии и законы сохранения в n-направлении обсуждаются в п. 3.2, 3.4. В п. 3.3 более подробно рассматривается наиболее интересный случай $N=2$ и обсуждается его связь с релятивистским уравнением типа Тоды. Автономные L–A пары для уравнений из построенной серии получены в п. 3.5. В заключительном разделе 4, опираясь на полученные результаты, мы формулируем и обсуждаем важную гипотезу о структуре симметрий полученных уравнений, а также подводим вкратце итоги работы.

2. АВТОНОМНОЕ ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1) С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Насколько нам известно, наиболее широкое обобщение уравнения (1) имеет вид

$$\begin{gathered}(u_{n,m+1}+a_{n,m+1})(u_{n,m}-a_{n,m})=(u_{n+1,m+1}-b_{n+1,m+1})(u_{n+1,m}+b_{n+1,m}),\\ a_{n,m+2}=a_{n,m},\qquad b_{n,m+2}=b_{n,m},\qquad a_{n,m}^2=b_{n,m}^2.\end{gathered}\tag{4}$$

Оно совпадает с уравнением (40) из статьи [4] с точностью до преобразований $n \leftrightarrow m$ и $b_{n,m} \to -b_{n,m}$. Уравнения (1) и (2) являются его частными случаями. Если $b_{n,m} = a_{n,m} \neq 0$ при всех n, m, то после перемасштабирования $u_{n,m} = \hat{u}_{n,m} a_{n,m}$ для функции $\hat{u}_{n,m}$ мы получаем следующее уравнение:

$$\alpha_n (u_{n,m+1} + 1)(u_{n,m} - 1) = \alpha_{n+1}(u_{n+1,m+1} - 1)(u_{n+1,m} + 1), \qquad \alpha_n \neq 0, \tag{5}$$

где $\alpha_n = a_{n,m+1} a_{n,m}$. В несколько ином виде оно было введено в разделе 3 работы [3].

Имеется очевидный автономный частный случай уравнения (5) с произвольным постоянным коэффициентом β:

$$(u_{n,m+1} + 1)(u_{n,m} - 1) = \beta(u_{n+1,m+1} - 1)(u_{n+1,m} + 1), \qquad \beta \neq 0. \tag{6}$$

Он отвечает условию $\alpha_{n+1}/\alpha_n = \beta$ для всех n, т. е. с точностью до множителя мы имеем $\alpha_n = \beta^n$. Уравнение (6) обладает L–A парой и иерархиями обобщенных симметрий и законов сохранения в m-направлении, но все они являются неавтономными. Уравнение (6) включает в себя как частный случай всю интересующую нас серию уравнений. Результаты, представленные здесь, нам потребуются в следующих разделах.

L–A пара для уравнения (6) задается как

$$\Psi_{n+1,m} = L^{(1)}_{n,m} \Psi_{n,m}, \qquad \Psi_{n,m+1} = L^{(2)}_{n,m} \Psi_{n,m}, \tag{7}$$

где $\Psi_{n,m}$ – векторнозначная функция, матрицы $L^{(1)}_{n,m}$ и $L^{(2)}_{n,m}$ имеют вид

$$\begin{gathered} L^{(1)}_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda\beta^n (u_{n,m}+1) \\ -\dfrac{2}{u_{n,m}-1} & \dfrac{u_{n,m}+1}{u_{n,m}-1} \end{pmatrix}, \\ L^{(2)}_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda\beta^n (u_{n,m}+1)(u_{n,m+1}-1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{8}$$

а λ – спектральный параметр. Для более общего случая, отвечающего уравнению (5), L–A пара была представлена в [5]; впервые она была построена в работе [3].

2.1. Обобщенные симметрии в m-направлении. Дифференциально-разностное уравнение вида

$$\partial_t u_{n,m} = h_{n,m}(u_{n,m+\mu}, u_{n,m+\mu-1}, \dots, u_{n,m-\mu}), \qquad \mu > 0, \tag{9}$$

называется обобщенной симметрией дискретного уравнения

$$\Phi_{n,m}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}, u_{n+1,m+1}) = 0 \tag{10}$$

в m-направлении, если уравнения (9) и (10) совместны. Условие совместности получается путем дифференцирования уравнения (10) по времени t с учетом (9):

$$\sum_{i,j \in \{0,1\}} h_{n+i,m+j} \frac{\partial \Phi_{n,m}}{\partial u_{n+i,m+j}} = 0. \tag{11}$$

Это условие должно выполняться тождественно на решениях уравнения (10).

Предположим, что существуют числа n_1, m_1, n_2, m_2, такие что

$$\frac{\partial h_{n_1,m_1}}{\partial u_{n_1,m_1+\mu}} \neq 0, \qquad \frac{\partial h_{n_2,m_2}}{\partial u_{n_2,m_2-\mu}} \neq 0. \tag{12}$$

Число μ называется порядком обобщенной симметрии (9). Уравнение (9) в некотором смысле симметрично, объяснение того, почему такой вид является естественным для интегрируемых дифференциально-разностных уравнений, см. в работе [6].

Сначала обсудим известный частный случай уравнения (6) с $\beta = 1$. Он является важным, поскольку в терминах симметрий этого частного случая строятся обобщенные симметрии в общем случае (3). Простейшая обобщенная симметрия в m-направлении имеет вид

$$\partial_{t_1'} u_{n,m} = (u_{n,m}^2 - 1)(u_{n,m+1} - u_{n,m-1}) = f_{n,m}^{(1)} \tag{13}$$

и представляет собой не что иное, как модифицированное уравнение Вольтерра. Известная мастер-симметрия уравнения (13) может быть записана как [7]

$$\partial_{\tau'} u_{n,m} = (u_{n,m}^2 - 1)((m+1)u_{n,m+1} - (m-1)u_{n,m-1}) = g_{n,m}. \tag{14}$$

Иерархия симметрий уравнения (13) строится следующим образом:

$$\partial_{t_k'} u_{n,m} = f_{n,m}^{(k)}(u_{n,m+k}, u_{n,m+k-1}, \ldots, u_{n,m-k}), \qquad k \geqslant 1, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} f_{n,m}^{(k+1)} &= \mathrm{ad}_{g_{n,m}} f_{n,m}^{(k)} = [g_{n,m}, f_{n,m}^{(k)}] = D_{\tau'} f_{n,m}^{(k)} - D_{t_k'} g_{n,m} = \\ &= \sum_{j=-k}^{k} g_{n,m+j} \frac{\partial f_{n,m}^{(k)}}{\partial u_{n,m+j}} - \sum_{j=-1}^{1} f_{n,m+j}^{(k)} \frac{\partial g_{n,m}}{\partial u_{n,m+j}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $D_{\tau'}$ и $D_{t_k'}$ – операторы полных производных, строящиеся с учетом уравнений (14) и (15) соответственно, определенные в правой части формулы (16).

Таким образом мы получаем стандартные и известные симметрии модифицированного уравнения Вольтерра. Поскольку $[f_{n,m}^{(1)}, f_{n,m}^{(k)}] = 0$ для построенных нами функций и

$$g_{n,m} = m f_{n,m}^{(1)} + (u_{n,m}^2 - 1)(u_{n,m+1} + u_{n,m-1}), \tag{17}$$

нетрудно доказать по индукции, что все $f_{n,m}^{(k)}$ не зависят явно от m, например

$$f_{n,m}^{(2)} = (u_{n,m}^2 - 1)[(u_{n,m+1}^2 - 1)(u_{n,m+2} + u_{n,m}) - (u_{n,m-1}^2 - 1)(u_{n,m} + u_{n,m-2})]. \tag{18}$$

Можно показать (см. ниже), что уравнения (15) также являются обобщенными симметриями дискретного уравнения (6) с $\beta = 1$. Кроме того, отметим, что и уравнение (13), и его мастер-симметрия (14) являются обобщенными симметриями дискретного уравнения (6) с $\beta = 1$.

В общем случае уравнения (6) простейшая обобщенная симметрия в m-направлении имеет вид

$$\partial_{t_1} u_{n,m} = \beta^n f_{n,m}^{(1)}, \tag{19}$$

а мастер-симметрия задается как

$$\partial_{\tau''} u_{n,m} = \beta^n g_{n,m}, \tag{20}$$

но она не является обобщенной симметрией уравнения (6) и, следовательно, позволяет построить обобщенные симметрии уравнения (19), но не (6). Для решения этой задачи необходимо ввести в дискретное уравнение (6) и в оба уравнения (19), (20) специальную зависимость от временной переменной мастер-симметрии. Такая схема с введением в дискретное уравнение времени мастер-симметрии используется, по-видимому, впервые.

Рассмотрим специальное обобщение уравнения (6):

$$A_n(\tau)(u_{n,m+1}+1)(u_{n,m}-1) = A_{n+1}(\tau)(u_{n+1,m+1}-1)(u_{n+1,m}+1), \tag{21}$$

где

$$A_n(\tau) = (\beta^{-n}+4\tau)^{-1}, \qquad A_n'(\tau) = -4A_n^2(\tau), \qquad A_n(0) = \beta^n, \tag{22}$$

а τ – внешний параметр, в данном случае представляющий собой время мастер-симметрии. Можно проверить, что два следующих уравнения являются обобщенными симметриями уравнения (21):

$$\partial_{t_1} u_{n,m} = F_{n,m}^{(1)} = A_n(\tau) f_{n,m}^{(1)}, \tag{23}$$

$$\partial_\tau u_{n,m} = G_{n,m} = A_n(\tau) g_{n,m}. \tag{24}$$

Важным следствием условия совместности уравнений (21) и (24) является, в частности, соотношение $A_n' = -4A_n^2$ в (22). Поскольку (24) не коммутирует с (23), резонно ожидать, что для всех $k \geqslant 1$ следующие функции определяют нетривиальные обобщенные симметрии уравнения (21):

$$\begin{aligned} F_{n,m}^{(k+1)} = \operatorname{ad}_{G_{n,m}} F_{n,m}^{(k)} = [G_{n,m}, F_{n,m}^{(k)}] = D_\tau F_{n,m}^{(k)} - D_{t_k} G_{n,m} = \\ = \frac{\partial F_{n,m}^{(k)}}{\partial \tau} + \sum_{j=-k}^{k} G_{n,m+j} \frac{\partial F_{n,m}^{(k)}}{\partial u_{n,m+j}} - \sum_{j=-1}^{1} F_{n,m+j}^{(k)} \frac{\partial G_{n,m}}{\partial u_{n,m+j}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Видно, что уравнение (24) позволяет построить иерархию обобщенных симметрий уравнения (21). Также оно порождает иерархию законов сохранения (см. п. 2.2). По этой причине уравнение (24) играет роль мастер-симметрии не только для (23), но и для дискретного уравнения (21).

Теперь изучим структуру этих обобщенных симметрий, чтобы далее выделить среди них автономные. По индукции можно доказать, что имеет место следующая формула:

$$F_{n,m}^{(k)} = A_n^k(\tau) \sum_{j=0}^{k-1} 4^j c_{k,j} f_{n,m}^{(k-j)}, \tag{26}$$

где $c_{k,j}$ – некоторые постоянные, в частности

$$c_{1,0} = 1, \quad c_{2,0} = 1, \quad c_{2,1} = -1, \quad c_{3,0} = 1, \quad c_{3,1} = -3, \quad c_{3,2} = 2. \tag{27}$$

Подставим выражение (26) в (25) и получим

$$F_{n,m}^{(k+1)} = \frac{\partial A_n^k(\tau)}{\partial \tau} \sum_{j=0}^{k-1} 4^j c_{k,j} f_{n,m}^{(k-j)} + A_n^{k+1}(\tau) \sum_{j=0}^{k-1} 4^j c_{k,j} \operatorname{ad}_{g_{n,m}} f_{n,m}^{(k-j)}. \tag{28}$$

Учитывая соотношения (16) и (22), имеем

$$F_{n,m}^{(k+1)} = -kA_n^{k+1}(\tau)\sum_{j=1}^{k} 4^j c_{k,j-1} f_{n,m}^{(k+1-j)} + A_n^{k+1}(\tau)\sum_{j=0}^{k-1} 4^j c_{k,j} f_{n,m}^{(k+1-j)}. \qquad (29)$$

Сравнив (26) и (29), выводим следующую рекуррентную формулу:

$$c_{k+1,j} = c_{k,j} - kc_{k,j-1}, \quad c_{k,-1} = c_{k,k} = 0, \quad c_{1,0} = 1, \qquad 0 \leqslant j \leqslant k, \quad k \geqslant 1. \qquad (30)$$

Мы видим, что обобщенные симметрии уравнения (21) имеют вид

$$\partial_{t_k} u_{n,m} = F_{n,m}^{(k)}, \qquad k \geqslant 1, \qquad (31)$$

где функции $F_{n,m}^{(k)}$ заданы в (26), а $f_{n,m}^{(k)}$, $A_n(\tau)$ и $c_{k,j}$ – в (16), (22) и (30). Порядок данной симметрии равен k. Явная зависимость от n и τ задается множителем $A_n^k(\tau)$, а явная зависимость от m отсутствует. При $\tau = 0$ уравнение (21) переходит в (6), при этом симметрии (31) становятся обобщенными симметриями уравнения (6).

Теорема 1. *Дискретное уравнение* (6) *обладает обобщенными симметриями*

$$\partial_{t_k} u_{n,m} = \beta^{nk}\sum_{j=0}^{k-1} 4^j c_{k,j} f_{n,m}^{(k-j)}, \qquad k \geqslant 1, \qquad (32)$$

где $f_{n,m}^{(k)}$ и $c_{k,j}$ заданы в (16) *и* (30). *Эти симметрии не имеют явной зависимости от m, а зависимость от n задается множителем β^{nk}.*

Мы видим, что в случае $\beta = 1$ обобщенные симметрии уравнения (6) задаются не только линейными комбинациями (32) функций $f_{n,m}^{(k)}$, но и любой из функций $f_{n,m}^{(k)}$.

2.2. Законы сохранения в m-направлении. Рассмотрим соотношение

$$(T_n - 1)p_{n,m} = (T_m - 1)q_{n,m}, \qquad (33)$$

где функции $p_{n,m}$, $q_{n,m}$ зависят от n, m, $u_{n+i,m+j}$, а T_n, T_m – операторы сдвига в n- и m-направлениях: $T_n h_{n,m} = h_{n+1,m}$, $T_m h_{n,m} = h_{n,m+1}$. Это соотношение называется законом сохранения дискретного уравнения (10), если (33) выполнено тождественно на решениях уравнения (10). Используя (10), мы можем переписать $p_{n,m}$, $q_{n,m}$ как функции только от n, m и функций $u_{n+i,m}$, $u_{n,m+j}$; мы будем представлять их именно в таком виде. Для m-направления $p_{n,m}$ имеет вид $p_{n,m} = p_{n,m}(u_{n,m+k_1}, u_{n,m+k_1-1}, \ldots, u_{n,m+k_2})$, где $k_1 \geqslant k_2$. Эту функцию $p_{n,m}$ можно назвать сохраняющейся плотностью по аналогии с дискретно-дифференциальным случаем.

При $k_1 > k_2$ мы получаем сохраняющиеся плотности $p_{n,m}$, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial^2 p_{n,m}}{\partial u_{n,m+k_1}\partial u_{n,m+k_2}} \neq 0 \quad \text{при всех} \quad n, m.$$

В этом случае число $k_1 - k_2$ можно назвать порядком закона сохранения (см., например, работу [6]). Если $k_1 = k_2$ и $p_{n,m}$ не является константой, то закон сохранения является нетривиальным, и его порядок равен нулю. Законы сохранения разных порядков существенно различны.

Законы сохранения для уравнения (6) были построены в работе [8] с использованием L–A пары (8). Однако мы имеем только способ построения законов сохранения и несколько таких законов. На этом пути трудно проследить структуру законов сохранения и выделить из них автономные. В настоящей работе мы решаем эту задачу, используя мастер-симметрию (24). Такой способ построения законов сохранения, видимо, является новым.

Известно, что в дискретно-дифференциальном случае, дифференцируя закон сохранения с учетом мастер-симметрии, можно получить новые законы сохранения [6]. Мы покажем, что это верно и для дискретных законов сохранения (33), подробно рассматривая в качестве примера дискретное уравнение (21) и его мастер-симметрию (24). Затем, как и выше, мы перейдем к уравнению (6), положив $\tau = 0$.

Нетрудно проверить, что функции

$$p^{(1)}_{n,m} = A_n(\tau)(u_{n,m+1} - 1)(u_{n,m} + 1), \qquad q^{(1)}_{n,m} = -2A_n(\tau)u_{n,m} \tag{34}$$

определяют закон сохранения для уравнения (21) в m-направлении. Применяя его и мастер-симметрию (24), мы можем построить иерархию законов сохранения для уравнения (21):

$$(T_n - 1)p^{(k)}_{n,m} = (T_m - 1)q^{(k)}_{n,m}, \qquad k \geqslant 1; \tag{35}$$

все они не зависят явно от m. Мы сделаем это по индукции, используя тот факт, что следующее уравнение также является законом сохранения:

$$(T_n - 1)D_\tau p^{(k)}_{n,m} = (T_m - 1)D_\tau q^{(k)}_{n,m}, \tag{36}$$

где D_τ – полная производная, вычисляющаяся с учетом мастер-симметрии (24), которая представляет собой одну из обобщенных симметрий уравнения (21) в m-направлении. В результате оператор D_τ автоматически коммутирует с T_m, при этом он коммутирует с T_n на решениях дискретного уравнения (21).

Новый закон сохранения (36) явно зависит от m. Чтобы устранить эту зависимость, учтем, что можно прибавить к обеим сторонам закона сохранения (33) функцию вида $(T_n - 1)(T_m - 1)h_{n,m}$ и получить новый закон сохранения

$$\tilde{p}_{n,m} = p_{n,m} + (T_m - 1)h_{n,m}, \qquad \tilde{q}_{n,m} = q_{n,m} + (T_n - 1)h_{n,m}. \tag{37}$$

Кроме того, используем, что $p^{(k)}_{n,m}$ также являются сохраняющимися плотностями для дифференциально-разностного уравнения (23):

$$D_{t_1} p^{(k)}_{n,m} = (T_m - 1)r^{(k)}_{n,m}. \tag{38}$$

Этот факт имеет место, поскольку в случае $k = 1$, если выбрать

$$r^{(1)}_{n,m} = A_n^2(\tau)(u_{n,m+1} - 1)(u^2_{n,m} - 1)(u_{n,m-1} + 1),$$

то уравнение (38) выполнено, при этом, как известно из дифференциально-разностного случая, если $p^{(k)}_{n,m}$ – сохраняющиеся плотности для уравнения (23), то функция $D_\tau p^{(k)}_{n,m}$ также является сохраняющейся плотностью.

Предположим, что функции $p^{(k)}_{n,m}$, $q^{(k)}_{n,m}$, $r^{(k)}_{n,m}$ не имеют явной зависимости от m при некотором $k \geqslant 1$. Тогда полная производная $D_\tau p^{(k)}_{n,m}$ линейно зависит от m, а именно

$$D_\tau p^{(k)}_{n,m} = (m-1)D_{t_1} p^{(k)}_{n,m} + \cdots . \tag{39}$$

Поскольку выполнено уравнение (38), мы можем применить преобразование (37) с $h_{n,m} = -(m-1)r^{(k)}_{n,m}$, в результате получим

$$p^{(k+1)}_{n,m} = D_\tau p^{(k)}_{n,m} - (T_m - 1)[(m-1)r^{(k)}_{n,m}], \tag{40}$$

$$q^{(k+1)}_{n,m} = D_\tau q^{(k)}_{n,m} - (T_n - 1)[(m-1)r^{(k)}_{n,m}]. \tag{41}$$

Функция $p^{(k+1)}_{n,m}$ – это новая сохраняющаяся плотность для дискретного уравнения (21) и его симметрии (23), не зависящая явно от m.

Объясним, как построить функцию $r^{(k+1)}_{n,m}$, и почему она не зависит явно от m. Также опишем более простую схему построения функций $p^{(k)}_{n,m}$, которая дает важную информацию об их структуре, а также еще одно, более строгое, обоснование того, почему эти функции являются сохраняющимися плотностями для (23).

Функция

$$v_{n,m} = A_n(\tau)(u_{n,m+1} - 1)(u_{n,m} + 1) \tag{42}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\partial_{t_1} v_{n,m} = v_{n,m}(v_{n,m+1} - v_{n,m-1}), \tag{43}$$

$$\partial_\tau v_{n,m} = v_{n,m}((m+2)v_{n,m+1} + v_{n,m} - (m-1)v_{n,m-1}), \tag{44}$$

которые представляют собой не что иное, как уравнение Вольтерра и его мастер-симметрию [9]. Соотношение (42) – это неавтономное обобщение известного дискретного преобразования Миуры. Оно превращает задачу построения функций $p^{(k)}_{n,m}$ и $r^{(k)}_{n,m}$ в известную задачу для уравнения Вольтерра. В частности, начальная сохраняющаяся плотность $p^{(1)}_{n,m}$ имеет вид $p^{(1)}_{n,m} = v_{n,m}$ и является общей плотностью для всех обобщенных симметрий уравнения Вольтерра (43). Поэтому можно строго доказать, что при всех k функции $D^k_\tau p^{(1)}_{n,m}$ – сохраняющиеся плотности для уравнения (43) (см. теорему 20 в работе [6]).

Функция $r^{(1)}_{n,m}$ принимает вид $r^{(1)}_{n,m} = v_{n,m}v_{n,m-1}$. Все функции $p^{(k)}_{n,m}$ и $r^{(k)}_{n,m}$ можно также выразить через $v_{n,m+j}$, т. е. соотношения (38) превращаются в законы сохранения для уравнения Вольтерра (43). Структура этих законов сохранения описывается следующей леммой.

Лемма 1. *При каждом $k \geqslant 1$ функция $p^{(k)}_{n,m}$ есть автономный и однородный полином степени k, имеющий вид*

$$p^{(k)}_{n,m} = P^{(k)}(v_{n,m}, v_{n,m+1}, \ldots, v_{n,m+k-1}), \qquad \frac{\partial^2 P^{(k)}}{\partial v_{n,m}\,\partial v_{n,m+k-1}} \neq 0. \tag{45}$$

Функция $r^{(k)}_{n,m}$ также есть автономный и однородный полином степени $k+1$, имеющий вид

$$r^{(k)}_{n,m} = R^{(k)}(v_{n,m-1}, v_{n,m}, v_{n,m+1}, \ldots, v_{n,m+k-1}). \tag{46}$$

Напомним, что для каждого $k \geqslant 1$ такие функции задают закон сохранения порядка $k-1$ для дифференциально-разностного уравнения (43) (см., например, работу [6]). Функции $p^{(k)}_{n,m}$ и $r^{(k)}_{n,m}$ автономны в том смысле, что они не зависят явно ни от n, ни от m.

Набросок доказательства. Для $k=1$ лемма верна. Предположим, что она верна для некоторого $k \geqslant 1$, и докажем лемму для $k+1$. Для построения $p^{(k+1)}_{n,m}$ применим ту же формулу (40). Нетрудно проверить, что в этом случае полученная функция удовлетворяет условиям леммы. Функция $p^{(k+1)}_{n,m}$ является следующей сохраняющейся плотностью для уравнения (43). Поэтому существует функция $r^{(k+1)}_{n,m}$, удовлетворяющая соотношению (38) и зависящая от функций $v_{n,m+j}$, которая без труда строится непосредственно из уравнения (38) (см., например, работу [6]). Кроме того, левая часть уравнения (38) представляет собой автономный однородный полином от $v_{n,m+j}$ степени $k+2$. Если искать $r^{(k+1)}_{n,m}$ как однородный полином, то он будет единственным и автономным. Получающаяся в результате функция удовлетворяет утверждению леммы.

Если в обеих функциях $p^{(k)}_{n,m}$ и $r^{(k)}_{n,m}$ заменить $v_{n,m+j}$ на $u_{n,m+j}$, используя выражение (42), мы получим закон сохранения для симметрии (23); порядок этого закона сохранения равен k (см. теорему 18 в [6]). Понятно, что построенные таким образом функции $p^{(k)}_{n,m}$ и $r^{(k)}_{n,m}$ не зависят явно от m. Функция $p^{(k)}_{n,m}$ в (45) является однородным полиномом степени k, поэтому ее как функцию от $u_{n,m+j}$ можно записать в виде

$$p^{(k)}_{n,m} = A^k_n(\tau)\widehat{P}^{(k)}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k}), \tag{47}$$

где $\widehat{P}^{(k)}$ – автономный полином. Зависимость от n и τ содержится только в множителе $A^k_n(\tau)$.

Теперь покажем, что функция $q^{(k+1)}_{n,m}$ не зависит явно от m, а структура функции $q^{(k)}_{n,m}$ аналогична (47).

Лемма 2. *При каждом $k \geqslant 1$ функция $q^{(k)}_{n,m}$ имеет вид*

$$q^{(k)}_{n,m} = A^k_n(\tau)\widehat{Q}^{(k)}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k-1}), \tag{48}$$

где $\widehat{Q}^{(k)}$ – автономный полином. Функцию $q^{(k+1)}_{n,m}$ можно получить по следующей рекуррентной формуле:

$$q^{(k+1)}_{n,m} = \frac{\partial q^{(k)}_{n,m}}{\partial \tau} + A_n(\tau)\sum_{j=0}^{k-1}(u^2_{n,m+j}-1)((j+2)u_{n,m+j+1} - ju_{n,m+j-1})\frac{\partial q^{(k)}_{n,m}}{\partial u_{n,m+j}}. \tag{49}$$

Доказательство. Из соотношений (39) и (41) следует, что функция $q^{(k+1)}_{n,m}$ линейно зависит от m:

$$q^{(k+1)}_{n,m} = (m-1)W^{(k)}_{n,m} + Z^{(k)}_{n,m}, \qquad W^{(k)}_{n,m} = D_{t_1} q^{(k)}_{n,m} - (T_n - 1)r^{(k)}_{n,m}.$$

Соотношение (35), в котором k следует заменить на $k+1$, и независимость функции $p^{(k+1)}_{n,m}$ от m влекут, что $(T_m - 1)W^{(k)}_{n,m} = 0$ на решениях уравнения (21).

Функцию $W_{n,m}^{(k)}$ можно записать только в переменных n, τ и $u_{n,m+j}$. Это очевидно для функции $D_{t_1} q_{n,m}^{(k)}$, а для $r_{n,m}^{(k)}$ верно в силу соотношений (42) и (46). Из определения (42) функции $v_{n,m}$ и дискретного уравнения (21) следует, что

$$v_{n+1,m} = A_n(\tau)(u_{n,m+1}+1)(u_{n,m}-1), \tag{50}$$

поэтому функцию $T_n r_{n,m}^{(k)} = R^{(k)}(v_{n+1,m-1}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+1,m+k-1})$ можно выразить таким же образом. Важно, что $W_{n,m}^{(k)}$ зависит от $u_{n,m+j}$ полиномиально и удовлетворяет уравнению $(T_m - 1)W_{n,m}^{(k)} = 0$ тогда и только тогда, когда она не зависит от $u_{n,m+j}$, т. е. $W_{n,m}^{(k)} = \eta_n^{(k)}(\tau)$. Однако эта функция равна нулю, если $u_{n,m+j} = 1$ при всех j, следовательно, $W_{n,m}^{(k)} \equiv 0$.

Теперь получим для $q_{n,m}^{(k+1)}$ формулу $q_{n,m}^{(k+1)} = (D_\tau - (m-1)D_{t_1})q_{n,m}^{(k)}$, которую можно переписать как (49). Структура вида (48) для $q_{n,m}^{(k+1)}$ является следствием соотношений (22), (34) и рекуррентной формулы (49). Лемма доказана.

Таким способом мы получаем следующие явные формулы:

$$p_{n,m}^{(1)} = v_{n,m}, \qquad q_{n,m}^{(1)} = -2A_n(\tau)u_{n,m}, \qquad r_{n,m}^{(1)} = v_{n,m}v_{n,m-1}, \tag{51}$$

$$\begin{aligned} p_{n,m}^{(2)} &= v_{n,m}(2v_{n,m+1} + v_{n,m}), \\ q_{n,m}^{(2)} &= -4A_n^2(\tau)(u_{n,m+1}u_{n,m}^2 - u_{n,m+1} - 2u_{n,m}), \\ r_{n,m}^{(2)} &= 2v_{n,m}v_{n,m-1}(v_{n,m+1} + v_{n,m}), \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} p_{n,m}^{(3)} &= 2v_{n,m}(3v_{n,m+2}v_{n,m+1} + 3v_{n,m+1}v_{n,m} + 3v_{n,m+1}^2 + v_{n,m}^2), \\ q_{n,m}^{(3)} &= -4A_n^3(\tau)[3(u_{n,m}^2 - 1)(u_{n,m+2}u_{n,m+1}^2 + u_{n,m+1}^2 u_{n,m} - \\ &\qquad - u_{n,m+2} - 4u_{n,m+1} - 5u_{n,m}) + 16u_{n,m}^3], \\ r_{n,m}^{(3)} &= 6v_{n,m}v_{n,m-1}(v_{n,m+2}v_{n,m+1} + 2v_{n,m+1}v_{n,m} + v_{n,m+1}^2 + v_{n,m}^2), \end{aligned} \tag{53}$$

где $v_{n,m}$ задана в (42). Эти формулы иллюстрируют описанную выше схему построения функций.

При $\tau = 0$ дискретное уравнение (21) превращается в (6), а его законы сохранения – в законы сохранения для уравнения (6). Поскольку $A_n(0) = \beta^n$, для этих законов сохранения (6) мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *При каждом $k \geqslant 1$ дискретное уравнение (6) обладает законом сохранения (35) порядка k, задающимся функциями вида*

$$\begin{aligned} p_{n,m}^{(k)} &= \beta^{nk}\widehat{P}^{(k)}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k}), \\ q_{n,m}^{(k)} &= \beta^{nk}\widehat{Q}^{(k)}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k-1}), \end{aligned} \tag{54}$$

где полиномы $\widehat{P}^{(k)}$ и $\widehat{Q}^{(k)}$ не имеют явной зависимости ни от n, ни от m.

3. СЕРИЯ АВТОНОМНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ОБОБЩЕНИЙ

В разделе 2 мы рассмотрели автономное дискретное уравнение (6), обладающее L–A парой и иерархиями обобщенных симметрий и законов сохранения в m-направлении. Однако все эти объекты по существу не являются автономными. Симметрии, законы сохранения и L–A пары рассмотренных в настоящем разделе автономных дискретных уравнений оказываются автономными, и эти уравнения имеют иерархии обобщенных симметрий и законов сохранения в обоих направлениях n и m. В работе [5] было показано, что дискретное уравнение (3) с периодическим коэффициентом α_n должно иметь иерархии обобщенных симметрий и законов сохранения в направлениях n и m. Для законов сохранения это было показано с помощью L–A пары, а для симметрий были изучены некоторые частные случаи.

Поскольку нас интересуют автономные уравнения, рассмотрим пересечение уравнений (3) и (6). Из равенства $\alpha_n = \beta^n$ следует, что $\beta^N = 1$, поэтому изучим следующее уравнение:

$$(u_{n,m+1}+1)(u_{n,m}-1) = \beta_N(u_{n+1,m+1}-1)(u_{n+1,m}+1), \qquad \beta_N^N = 1, \qquad N \geqslant 1. \tag{55}$$

Чтобы разделить случаи с различными N, мы будем рассматривать первообразные корни из единицы. Ясно, что $\beta_1 = 1$, при этом мы имеем хорошо известное уравнение (1). Если $N > 1$, то

$$\beta_N^N = 1, \qquad \beta_N^j \neq 1 \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant j < N. \tag{56}$$

В частности,

$$\beta_1 = 1, \qquad \beta_2 = -1, \qquad \beta_3 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta_4 = \pm i, \tag{57}$$

при этом в последних двух случаях имеются два первообразных корня, отвечающих знакам плюс и минус. Вообще при $N > 4$ существуют по крайней мере два первообразных корня, задающиеся как $\beta_N = e^{\pm 2i\pi/N}$. Итак, далее мы рассматриваем уравнение (55), в котором β_N – первообразный корень из единицы.

На сегодняшний день нам известна только одна аналогичная серия интегрируемых дискретных уравнений [10]. Это уравнения типа Бюргерса, интегрируемые по Дарбу, и минимальный порядок их первых интегралов может быть сколь угодно высоким. Уравнения (55) интегрируются методом обратной задачи рассеяния.

Для уравнения (55) с условием (56) в случае $N = 2$ мы имеем $\beta_2 = -1$, т. е. уравнение записывается как

$$(u_{n,m+1}+1)(u_{n,m}-1) = -(u_{n+1,m+1}-1)(u_{n+1,m}+1). \tag{58}$$

Это самый интересный пример в серии, так как его коэффициенты вещественные. Данное уравнение было найдено в работе [11], где авторы искали дискретные уравнения на квадратной решетке, используя в качестве обобщенной симметрии пятиточечные дифференциально-разностные уравнения, полученные в недавней полученные в недавней симметрийной классификации [12], [13].

3.1. Автономные обобщенные симметрии и законы сохранения в m-направлении. В этом пункте мы используем результаты раздела 2 для построения автономных обобщенных симметрий и законов сохранения в m-направлении для уравнения (55) с условием (56).

В теореме 1 мы построили симметрию (32), в которой явная зависимость от n содержится в множителе β^{nk}. Из этой теоремы следует, что уравнение (55) с условием (56) имеет бесконечно много автономных обобщенных симметрий в m-направлении, которые задаются соотношениями (32) с $k = N, 2N, 3N, \dots$.

Следствие 1. *При каждом $N \geqslant 2$ дискретное уравнение* (55) *с условием* (56) *имеет автономные обобщенные симметрии в m-направлении, задающиеся соотношениями* (32), (16), (30) *с $k = \kappa N$, $\kappa \in \mathbb{N}$.*

Простейшая автономная обобщенная симметрия в m-направлении для уравнения (58) имеет вид

$$\partial_{t_2} u_{n,m} = c_{2,0} f^{(2)}_{n,m} + 4c_{2,1} f^{(1)}_{n,m}. \tag{59}$$

Из рекуррентных формул (30) находим $c_{2,0} = 1$, $c_{2,1} = -1$ и, используя соотношения (13), (18) для функций $f^{(1)}_{n,m}$, $f^{(2)}_{n,m}$, получаем следующую явную формулу:

$$\begin{aligned}\partial_{t_2} u_{n,m} = (u^2_{n,m} - 1)\big[(u^2_{n,m+1} - 1)(u_{n,m+2} + u_{n,m}) - {}\\ - (u^2_{n,m-1} - 1)(u_{n,m} + u_{n,m-2}) - 4(u_{n,m+1} - u_{n,m-1})\big].\end{aligned} \tag{60}$$

Эта симметрия была найдена в работе [11].

В теореме 2 мы построили законы сохранения (54) для уравнения (6), в которых явная зависимость от N содержится в множителе β^{nk}. Из этой теоремы следует, что уравнение (55) с условием (56) имеет бесконечно много автономных законов сохранения в m-направлении, которые задаются соотношениями (54) с $k = N, 2N, 3N, \dots$.

Следствие 2. *При каждом $N \geqslant 2$ дискретное уравнение* (55) *с условием* (56) *имеет бесконечно много автономных законов сохранения, порядки которых кратны числу N.*

В случае уравнения (58) простейший автономный закон сохранения из выписанных в (52) имеет второй порядок:

$$p^{(2)}_{n,m} = v_{n,m}(2v_{n,m+1} + v_{n,m}), \qquad v_{n,m} = (u_{n,m+1} - 1)(u_{n,m} + 1),$$
$$q^{(2)}_{n,m} = -4(u_{n,m+1} u^2_{n,m} - u_{n,m+1} - 2u_{n,m}).$$

3.2. Обобщенные симметрии в n-направлении. Дискретное уравнение (10) имеет обобщенную симметрию в n-направлении, заданную как

$$\partial_\theta u_{n,m} = \zeta_{n,m}(u_{n+\nu,m}, u_{n+\nu-1,m}, \dots, u_{n-\nu,m}), \qquad \nu > 0, \tag{61}$$

если уравнения (10) и (61) совместны, т. е. на решениях уравнения (10) тождественно выполняется равенство

$$D_\theta \Phi_{n,m} = \sum_{i,j \in \{0,1\}} \zeta_{n+i,m+j} \frac{\partial \partial \Phi_{n,m}}{u_{n+i,m+j}} = 0. \tag{62}$$

Естественно предпололожить, что существуют числа n_1, m_1, n_2, m_2, такие что

$$\frac{\partial \zeta_{n_1,m_1}}{\partial u_{n_1+\nu,m_1}} \neq 0, \qquad \frac{\partial \zeta_{n_2,m_2}}{\partial u_{n_2-\nu,m_2}} \neq 0. \tag{63}$$

Число ν называется порядком симметрии (61). Как в п. 2.1, уравнение (61) является симметричным по той же причине, что и уравнение (9).

В работе [5] были доказаны две теоремы для уравнения (5) и его "невырожденных" симметрий первого и второго порядков (см. раздел 4). Здесь мы докажем аналогичные теоремы для уравнения (6) и его симметрий первого, второго и третьего порядков без использования каких-либо условий невырожденности.

Теорема 3. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Если уравнение* (6) *имеет в n-направлении обобщенную симметрию* (61) *порядка $N = 1, 2, 3$, то $\beta^N = 1$, т. е. уравнение* (6) *имеет вид* (55).

2. *Уравнение* (55) *с $N = 1, 2, 3$ и коэффициентом β_N, заданным как первообразный корень из единицы, имеет обобщенную симметрию порядка N и не имеет обобщенных симметрий более низких порядков.*

Набросок доказательства. Для построения обобщенных симметрий дискретных уравнений мы используем метод, разработанный в работах [3], [14] (см. также [15] для его наиболее продвинутой версии). Условие совместности (62) является функциональным уравнением относительно неизвестной функции $\zeta_{n,m}$. Этот метод позволяет получить следствия из (62) в виде уравнений в частных производных от функции $\zeta_{n,m}$, если использовать так называемые аннигилирующие операторы [16].

1. Если (6) имеет обобщенную симметрию (61) порядка $N = 1, 2, 3$, то простейшие дифференциальные уравнения, вытекающие из (62), записываются как

$$(\beta^N - 1)\frac{\partial \zeta_{n,m}}{\partial u_{n+N,m}} = 0, \qquad (\beta^N - 1)\frac{\partial \zeta_{n,m}}{\partial u_{n-N,m}} = 0, \tag{64}$$

причем эти соотношения должны быть выполнены при всех n, m. Условия (63), (64) влекут $\beta^N = 1$.

2. Для уравнения (55) с $N = 1, 2, 3$ и коэффициентом β_N, заданным как первообразный корень из единицы, ищем симметрии вида (61), где $\nu = N$, при этом мы не используем никаких ограничений типа (63). В результате находим следующие обобщенные симметрии.

В случае $N = 1$ мы имеем

$$\partial_{\theta_1} u_{n,m} = (u_{n,m}^2 - 1)\left(\frac{a_{n+1}}{u_{n+1,m} + u_{n,m}} - \frac{a_n}{u_{n,m} + u_{n-1,m}}\right), \tag{65}$$

где $a_n = b + cn$, а b, c – произвольные постоянные.

В случае $N = 2$ мы имеем

$$\partial_{\theta_2} u_{n,m} = (u_{n,m}^2 - 1)(T_n - 1)\left(\frac{a_{n+1}(u_{n+1,m} + u_{n,m})}{U_{n,m}} + \frac{a_n(u_{n-1,m} + u_{n-2,m})}{U_{n-1,m}}\right), \tag{66}$$

где

$$U_{n,m} = (u_{n+1,m} + u_{n,m})(u_{n,m} + u_{n-1,m}) - 2(u_{n,m}^2 - 1); \tag{67}$$

здесь $a_n = b_n + cn$, где c – константа, а b_n – произвольная функция от n с периодом два, $b_{n+2} \equiv b_n$. Ее можно представить как $b_n = b^{(1)} + (-1)^n b^{(2)}$, где $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ – произвольные постоянные.

В случае $N = 3$ обобщенная симметрия имеет вид

$$\partial_{\theta_3} u_{n,m} = (u_{n,m}^2 - 1)(T_n - 1)\left(\frac{a_{n+2}V_{n,m}}{U_{n,m}} + \frac{a_n W_{n,m}}{U_{n-2,m}} + (T_n + 1)\frac{a_{n+1}Z_{n,m}}{U_{n-1,m}}\right), \tag{68}$$

где

$$V_{n,m} = \beta_3^2(u_{n+1,m}^2 - 1) + u_{n+1,m}(u_{n+2,m} - u_{n-1,m}) - u_{n+2,m}u_{n-1,m} + 1,$$
$$W_{n,m} = \beta_3(u_{n-2,m}^2 - 1) + u_{n-2,m}(u_{n-1,m} + u_{n-3,m}) + u_{n-1,m}u_{n-3,m} + 1,$$

$$
\begin{aligned}
Z_{n,m} &= (u_{n+1,m} + u_{n,m})(u_{n-1,m} + u_{n-2,m}),\\
U_{n,m} &= \beta_3^2(u_{n+1,m}^2 - 1)(u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \beta_3(u_{n,m}^2 - 1)(u_{n+2,m} + u_{n+1,m}) +\\
&\quad + (u_{n+1,m}u_{n,m} + 1)(u_{n+2,m} + u_{n-1,m}) + (u_{n+1,m} + u_{n,m})(u_{n+2,m}u_{n-1,m} + 1);
\end{aligned}
$$

здесь β_3 – любой из двух первообразных корней из единицы, заданных формулами (57), $a_n = b_n + cn$, где c – константа, а b_n – произвольная функция от n с периодом три, $b_{n+3} \equiv b_n$. Ее можно представить как $b_n = b^{(1)} + b^{(2)}\beta_3^n + b^{(3)}\beta_3^{2n}$, где $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ – произвольные постоянные.

Мы видим, что уравнение (55) имеет обобщенную симметрию порядка N во всех трех случаях. Мы также замечаем, что при $N = 2, 3$ обобщенные симметрии более низких порядков не существуют, вследствие того, что условие $\frac{\partial\zeta_{n,m}}{\partial u_{n+N,m}} \equiv 0$ или $\frac{\partial\zeta_{n,m}}{\partial u_{n-N,m}} \equiv 0$ влечет $\zeta_{n,m} \equiv 0$. Это завершает доказательство теоремы.

В случае $N = 2$ мы имеем только один первообразный корень $\beta_2 = -1$, и формулы для b_n при $N = 2$ и $N = 3$ аналогичны. В результате для автономных уравнений (55) получаем следующее важное следствие из теоремы 3.

Следствие 3. *Каждое из уравнений* (55) *с* $N = 1, 2, 3$ *и коэффициентом* β_N, *заданным как первообразный корень из единицы, имеет автономную обобщенную симметрию порядка* N, *определяющуюся соотношениями* (65)–(68) *с* $a_n \equiv 1$, *и не имеет автономных обобщенных симметрий более низких порядков.*

Эти автономные симметрии служат примерами интегрируемых дифференциально-разностных уравнений с одной непрерывной переменной θ_N и одной дискретной переменной n, при этом параметр m не является существенным. Симметрия (65) с $a_n \equiv 1$ была найдена в работе [3], она отвечает хорошо известному интегрируемому уравнению типа Вольтерра [6], [17]. Симметрия (66) является частным случаем неавтономной симметрии дискретного уравнения (5), она была найдена в [5]. Тем не менее уравнения (66) и (67) с $a_n \equiv 1$ дают новые примеры автономных интегрируемых дифференциально-разностных уравнений второго и третьего порядков.

Если $N = 2$, то частные случаи уравнения (66) с $a_n \equiv 1$ и $a_n \equiv (-1)^n$ совместны, т. е. мы имеем две коммутирующие обобщенные симметрии второго порядка. Когда $N = 3$, в частных случях уравнения (67) с $a_n \equiv 1$, $a_n \equiv \beta_3^n$ и $a_n \equiv \beta_3^{2n}$ совместны, т. е. мы имеем три коммутирующие обобщенные симметрии третьего порядка.

Уравнение (65) с $a_n \equiv n$ представляет собой известную мастер-симметрию дифференциально-разностного уравнения (65) с $a_n \equiv 1$ [18]. Для нас важно, что во всех трех случаях $N = 1, 2, 3$ симметрия, соответствующая $a_n \equiv n$, играет роль мастер-симметрии дискретного уравнения (55) с параметром β_N, являющимся первообразным корнем единицы. По сравнению с п. 2.1 эти мастер-симметрии более удобны в использовании, поскольку они не зависят явно от времени мастер-симметрии.

Обозначим как

$$\partial_{\hat\theta_N} u_{n,m} = \Xi_{n,m}^{(N)} \tag{69}$$

обобщенную симметрию дискретного уравнения (55) с $N = 2$ или $N = 3$, отвечающую $a_n \equiv n$ в (66) или (67), которая играет роль мастер-симметрии. Покажем, как построить обобщенные симметрии высших порядков

$$\partial_{\tilde\theta_{k,N}} u_{n,m} = \Upsilon_{n,m}^{(k,N)}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{70}$$

начав с симметрий (66) или (67) с периодическими коэффициентами $a_n \equiv b_n$, которые соответствуют симметрии (70) с $k = 1$. Порядок такой симметрии равен kN. Правые части уравнений для симметрий строятся с использованием рекуррентной формулы

$$\Upsilon^{(k+1,N)}_{n,m} = \mathrm{ad}_{\Xi^{(N)}_{n,m}} \Upsilon^{(k,N)}_{n,m} = D_{\hat\theta_N} \Upsilon^{(k,N)}_{n,m} - D_{\tilde\theta_{k,N}} \Xi^{(N)}_{n,m} = \\ = \sum_{j=-kN}^{kN} \Xi^{(N)}_{n+j,m} \frac{\partial \Upsilon^{(k,N)}_{n,m}}{\partial u_{n+j,m}} - \sum_{j=-N}^{N} \Upsilon^{(k,N)}_{n+j,m} \frac{\partial \Xi^{(N)}_{n,m}}{\partial u_{n+j,m}}, \qquad (71)$$

где $D_{\hat\theta_N}$, $D_{\tilde\theta_{k,N}}$ – полные производные, построенные с учетом уравнений (69), (70).

3.3. Сравнение случая $N = 2$ с известным примером. Связь с релятивистскими уравнениями типа Тоды. Рассмотрим более подробно дискретное уравнение (58). Нам известен единственный автономный пример, аналогичный (58) с точки зрения структуры обобщенной симметрии. Он был найден в работе [19], а затем изучен в [20]. Этот пример имеет вид

$$u_{n+1,m+1}(u_{n,m} - u_{n,m+1}) - u_{n+1,m}(u_{n,m} + u_{n,m+1}) + 2 = 0. \qquad (72)$$

Его обобщенные симметрии первого и второго порядков в m-направлении таковы:

$$\partial_{t_1} u_{n,m} = (-1)^n \frac{u_{n,m+1}u_{n,m-1} + u^2_{n,m}}{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}}, \qquad (73)$$

$$\partial_{t_2} u_{n,m} = \frac{(u_{n,m+2} - u_{n,m-2})(u^2_{n,m+1} - u^2_{n,m})(u^2_{n,m} - u^2_{n,m-1})}{(u_{n,m} + u_{n,m-2})(u_{n,m+1} + u_{n,m-1})^2(u_{n,m+2} + u_{n,m})}. \qquad (74)$$

Простейшая симметрия в n-направлении имеет второй порядок:

$$\partial_{\tilde\theta_2} u_{n,m} = (u_{n+1,m}u_{n,m} - 1)(u_{n,m}u_{n-1,m} - 1)(b_{n+1}u_{n+2,m} - b_n u_{n-2,m}), \qquad (75)$$

где b_n – произвольная функция с периодом два, $b_{n+2} \equiv b_n$, другими словами, она имеет вид $b_n = b^{(1)} + b^{(2)}(-1)^n$ с произвольными постоянными $b^{(1)}$, $b^{(2)}$. В случае дискретного уравнения (58) аналогичная (73) симметрия имеет вид

$$\partial_{t_1} u_{n,m} = (-1)^n (u^2_{n,m} - 1)(u_{n,m+1} - u_{n,m-1}). \qquad (76)$$

Обобщенные симметрии уравнения (58), аналогичные (74) и (75), задаются соотношениями (60) и (66) с $a_n \equiv b_n$.

Автономные дискретные уравнения (58) и (72) имеют иерархии автономных обобщенных симметрий в обоих направлениях. Порядки этих автономных симметрий четные, при этом, как видно из приведенных выше примеров, простейшие автономные обобщенные симметрии по обоим направлениям имеют второй порядок.

В работе [20] мы показали, что дифференциально-разностное уравнение (75) эквивалентно системе Цучиды [21] (см. подробности ниже). Однако в классе пятиточечных дифференциально-разностных уравнений это уравнение само по себе является интересным интегрируемым примером. Уравнение (66) с $a_n \equiv b_n$, как мы полагаем, представляет собой новый интегрируемый пример пятиточечного дифференциально-разностного уравнения. В работе [20] мы вкратце отметили, что с точки зрения свойств обобщенной симметрии уравнение (75) схоже с релятивистскими уравнениями типа Тоды, см. обзорные статьи [22] (п. 4.2, 4.3) и [6] (п. 3.3). В работе [5] для неавтономного уравнения мы продемонстрировали такую связь с релятивистскими уравнениями типа Тоды более явным образом. Здесь, следуя [5], мы покажем, что подобная связь имеет место для уравнений (75) и (66) с $a_n \equiv b_n$.

Сначала рассмотрим обобщенную симметрию (75). Для каждого фиксированного m введем $v_k = u_{2k,m}$, $w_k = u_{2k-1,m}$, $\varsigma = b_{2k}$, $\eta = b_{2k-1}$ и перепишем уравнение (75) как систему

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde\theta_2} v_k &= (\eta v_{k+1} - \varsigma v_{k-1})(w_{k+1}v_k - 1)(v_k w_k - 1), \\ \partial_{\tilde\theta_2} w_k &= (\varsigma w_{k+1} - \eta w_{k-1})(v_k w_k - 1)(w_k v_{k-1} - 1). \end{aligned} \tag{77}$$

Это не что иное, как система Цучиды (3.13) из работы [21]. В каждом из двух случаев $\varsigma = 1$, $\eta = 0$ или $\varsigma = 0$, $\eta = 1$ введем функции $U_k = \ln v_k$ или $U_k = -\ln w_k$ и получим в каждом из этих четырех случаев следующие релятивистские уравнения типа Тоды:

$$\ddot U_k = \dot U_k(\dot U_{k+1} - \dot U_{k-1} - e^{U_{k+1}-U_k} + e^{U_k - U_{k-1}}), \tag{78}$$

где введено обозначение $\dot U_k = \partial_{\tilde\theta_2} U_k$. Это уравнение (Ld3) из работы [6] с $\mu = 0$, $\nu = 1$.

Далее рассмотрим симметрию (66) с $a_n \equiv b_n$. Для каждого фиксированного m зададим функцию $\tilde u_n$ равенством

$$u_{n,m} = \frac{\tilde u_n + \tilde u_{n+1}}{\tilde u_n - \tilde u_{n+1}}.$$

Это преобразование необратимо, но линеаризуемо, т. е. не является преобразованием типа Миуры в терминологии статьи [23]. В результате получаем следующую интегрируемую модификацию уравнения (66) с $a_n \equiv b_n$:

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde\theta_2} \tilde u_n = {}& \frac{(\tilde u_{n+2} - \tilde u_n)(\tilde u_{n+1} - \tilde u_n)(\tilde u_n - \tilde u_{n-1})}{2(\tilde u_{n+2}\tilde u_n + \tilde u_{n+1}\tilde u_{n-1}) - (\tilde u_{n+2} + \tilde u_n)(\tilde u_{n+1} + \tilde u_{n-1})}\, b_{n+1} + \\ &+ \frac{(\tilde u_{n+1} - \tilde u_n)(\tilde u_n - \tilde u_{n-1})(\tilde u_n - \tilde u_{n-2})}{2(\tilde u_{n+1}\tilde u_{n-1} + \tilde u_n \tilde u_{n-2}) - (\tilde u_{n+1} + \tilde u_{n-1})(\tilde u_n + \tilde u_{n-2})}\, b_n. \end{aligned} \tag{79}$$

Теперь перейдем к $v_k = \tilde u_{2k}$, $w_k = \tilde u_{2k-1}$, $\varsigma = b_{2k}$, $\eta = b_{2k-1}$ и получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde\theta_2} v_k = {}& \frac{(v_{k+1} - v_k)(w_{k+1} - v_k)(v_k - w_k)}{2(v_{k+1}v_k + w_{k+1}w_k) - (v_{k+1} + v_k)(w_{k+1} + w_k)}\, \eta + \\ &+ \frac{(w_{k+1} - v_k)(v_k - w_k)(v_k - v_{k-1})}{2(w_{k+1}w_k + v_k v_{k-1}) - (w_{k+1} + w_k)(v_k + v_{k-1})}\, \varsigma, \\ \partial_{\tilde\theta_2} w_k = {}& \frac{(w_{k+1} - w_k)(v_k - w_k)(w_k - v_{k-1})}{2(w_{k+1}w_k + v_k v_{k-1}) - (w_{k+1} + w_k)(v_k + v_{k-1})}\, \varsigma + \\ &+ \frac{(v_k - w_k)(w_k - v_{k-1})(w_k - w_{k-1})}{2(v_k v_{k-1} + w_k w_{k-1}) - (v_k + v_{k-1})(w_k + w_{k-1})}\, \eta. \end{aligned} \tag{80}$$

В каждом из двух случаев $\varsigma = 2$, $\eta = 0$ или $\varsigma = 0$, $\eta = 2$ введем $U_k = v_k$ или $U_k = w_k$ и получим в любом из этих четырех случаев релятивистское уравнение типа Тоды:

$$\ddot U_k = \dot U_k^2 \left(\frac{\dot U_{k-1}}{(U_k - U_{k-1})^2} - \frac{\dot U_{k+1}}{(U_k - U_{k+1})^2} + \frac{1}{U_k - U_{k-1}} + \frac{1}{U_k - U_{k+1}} \right),$$

где введено обозначение $\dot{U}_k = \partial_{\tilde{\theta}_2} U_k$. Это уравнение (L2) из работы [6], в котором $r(x, y) = (x - y)^2/2$.

Недавно в работе [24] были представлены новые примеры пятиточечных дифференциальных уравнений, аналогичных (66) с $a_n \equiv b_n$ и уравнению (75).

3.4. Законы сохранения в n-направлении. Уравнение (55) с $N = 1$ хорошо известно, рассмотрим случаи $N = 2$, $N = 3$ и законы сохранения в n-направлении, которые оказываются автономными.

Соотношение

$$(T_n - 1)\check{p}_{n,m} = (T_m - 1)\check{q}_{n,m}, \tag{81}$$

где $\check{p}_{n,m}$, $\check{q}_{n,m}$ зависят от n, m, $u_{n+i,m+j}$, называется законом сохранения для дискретного уравнения (55) с условием (56), если оно выполняется тождественно на решениях этого уравнения. С учетом уравнения (55) можно выразить $\check{p}_{n,m}$, $\check{q}_{n,m}$ только через n, m и функции $u_{n+i,m}$, $u_{n,m+j}$, и мы запишем именно это представление. Для n-направления $\check{q}_{n,m}$ принимают вид

$$\check{q}_{n,m} = \check{q}_{n,m}(u_{n+k_1,m}, u_{n+k_1-1,m}, \ldots, u_{n+k_2,m}), \qquad k_1 \geqslant k_2.$$

Функцию $\check{q}_{n,m}$ можно назвать сохраняющейся плотностью по аналогии с дискретно-дифференциальным случаем.

При $k_1 > k_2$ мы получаем плотности $\check{q}_{n,m}$, такие что

$$\frac{\partial^2 \check{q}_{n,m}}{\partial u_{n+k_1,m}\, \partial u_{n+k_2,m}} \neq 0 \quad \text{при всех} \quad n,\, m,$$

при этом $k_1 - k_2$ называется порядком данного закона сохранения. Если $k_1 = k_2$ и функция $\check{q}_{n,m}$ не равна константе, то (81) есть нетривиальный закон сохранения нулевого порядка. Законы сохранения разных порядков существенно различны.

Для построения законов сохранения в случаях $N = 2, 3$ используются мастер-симметрии (69). Они проще, чем в п. 2.1, в том смысле, что не зависят явно от времени $\hat{\theta}_N$ мастер-симметрии. Однако такой способ построения законов сохранения является новым даже в случае отсутствия зависимости от $\hat{\theta}_N$.

Построим иерархию не зависящих от n законов сохранения для уравнения (55) с условием (56) при $N = 2, 3$:

$$(T_n - 1)\check{p}^{(k)}_{n,m} = (T_m - 1)\check{q}^{(k)}_{n,m}, \qquad k \geqslant 1. \tag{82}$$

Аналогично п. 2.2 можно получить законы сохранения по индукции, используя тот факт, что

$$(T_n - 1)D_{\hat{\theta}_N}\check{p}^{(k)}_{n,m} = (T_m - 1)D_{\hat{\theta}_N}\check{q}^{(k)}_{n,m} \tag{83}$$

также является законом сохранения. Здесь $D_{\hat{\theta}_N}$ – полная производная, построенная с учетом уравнения (69).

В обоих случаях $N = 2$, $N = 3$ начальный закон сохранения строится с помощью соотношения (33) из [3]. Обозначим автономные симметрии (66), (67) с $a_n \equiv 1$ как

$$\partial_{\tilde{\theta}_N} u_{n,m} = \Omega^{(N)}_{n,m} \tag{84}$$

и перепишем соответствующее дискретное уравнение (55) с условием (56) в виде

$$u_{n+1,m+1} = \varphi^{(N)}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}).$$

Тогда начальный закон сохранения есть

$$(1 - T_n^N)T_n^{-1} \ln \frac{\partial \varphi^{(N)}}{\partial u_{n+1,m}} = (T_m - 1) \ln \frac{\partial \Omega_{n,m}^{(N)}}{\partial u_{n+N,m}}; \tag{85}$$

он является автономным с сохраняющейся плотностью $\check{q}_{n,m}^{(1)} = \ln \frac{\partial \Omega_{n,m}^{(N)}}{\partial u_{n+N,m}}$. Закон сохранения (83) явно зависит от переменной n. В п. 2.2 мы объяснили, как убрать из него зависимость от n. Это возможно, потому что мастер-симметрия (69) линейно зависит от n, при этом функция $\check{q}_{n,m}^{(1)}$ также является сохраняющейся плотностью для уравнения (84), и мы можем добавить функцию вида (37) к обеим частям закона сохранения (83).

Если $N = 2$, можно переписать (85) в виде

$$(T_m - 1)\check{q}_{n,m}^{(k)} = (T_n^2 - 1)\check{p}_{n,m}^{(k)}, \tag{86}$$

где $k = 1$ и

$$\check{q}_{n,m}^{(1)} = \ln \frac{(u_{n+1,m}^2 - 1)(u_{n,m}^2 - 1)}{U_{n+1,m}^2}, \qquad \check{p}_{n,m}^{(1)} = \ln \frac{u_{n,m} + 1}{u_{n,m+1} - 1}, \tag{87}$$

а $U_{n,m}$ задана в (68). Этот закон сохранения имеет специфический вид, но является частным случаем (82) с $\check{p}_{n,m}^{(k)} = (T_n + 1)\check{p}_{n,m}^{(k)}$. Используя мастер-симметрию (69), мы получаем следующий закон сохранения, который можно сделать автономным и записать в таком же специфическом виде (86). Он задается как

$$\begin{aligned} \check{q}_{n,m}^{(2)} &= -\frac{(u_{n+4,m} + u_{n+3,m})(u_{n+2,m}^2 - 1)(u_{n+1,m} + u_{n,m})}{U_{n+3,m}U_{n+1,m}} + \frac{u_{n+1,m}^2 - 1}{U_{n+1,m}}, \\ \check{p}_{n,m}^{(2)} &= \frac{(u_{n+2,m} + u_{n+1,m})(u_{n,m} - 1)}{U_{n+1,m}}. \end{aligned}$$

Порядки этих законов сохранения равны 2 и 4. Данные законы сохранения были построены в работе [5] в немного другом виде с помощью L–A пары.

Если $N = 3$, можно переписать (85) в виде

$$(T_m - 1)\check{q}_{n,m}^{(k)} = (T_n^3 - 1)\check{p}_{n,m}^{(k)}, \tag{88}$$

где $k = 1$, функция $\check{p}_{n,m}^{(1)}$ определена в (87), при этом

$$\check{q}_{n,m}^{(1)} = \ln \frac{(u_{n+2,m}^2 - 1)(u_{n+1,m}^2 - 1)(u_{n,m}^2 - 1)}{U_{n+1,m}^2}$$

с функцией $U_{n,m}$, заданной в (68). Уравнение (88) специфического вида также представляет собой частный случай (82). Этот закон сохранения является автономным и имеет третий порядок. Используя мастер-симметрию (69), мы получаем следующий закон сохранения, который можно сделать автономным и записать в таком же специфическом виде (88) при $k = 2$. Его порядок равен 6, но этот закон сохранения является слишком громоздким, и мы его не приводим.

Здесь следует отметить, что, используя неавтономные обобщенные симметрии (66) и (67) с $a_n \equiv b_n$, а также формулу (85) для начальных законов сохранения, мы можем попробовать получить неавтономные законы сохранения. Однако при этом не возникает новых законов сохранения, поскольку после действия оператора $T_m - 1$ явная зависимость от n пропадает.

3.5. Автономные L–A пары. Найдем автономные L–A пары для серии дискретных уравнений (55) с условием (56), используя неавтономную L–A пару (7), (8) для уравнения (6). При $N = 1$ имеем $\beta_1 = 1$, и в этом случае L–A пара, очевидно, является автономной.

Применяя оператор T_n^{N-1} к первому из уравнений (7), мы получаем

$$\Psi_{n+N,m} = L^{(1,N)}_{n,m}\Psi_{n,m}, \qquad \Psi_{n,m+1} = L^{(2)}_{n,m}\Psi_{n,m}, \tag{89}$$

где $N \geqslant 2$, $L^{(1,N)}_{n,m} = L^{(1)}_{n+N-1,m}L^{(1)}_{n+N-2,m}\dots L^{(1)}_{n+1,m}L^{(1)}_{n,m}$ и в матрицах $L^{(1)}_{n,m}$, $L^{(2)}_{n,m}$ параметр β заменен на β_N. Условие совместности для уравнений (89) имеет вид

$$L^{(1,N)}_{n,m+1}L^{(2)}_{n,m} = L^{(2)}_{n+N,m}L^{(1,N)}_{n,m}. \tag{90}$$

Поскольку $\beta_N^N = 1$, множитель β_N^n не изменяется не только в матрице $L^{(1,N)}_{n,m+1}$, но и в $L^{(2)}_{n+N,m}$. По этой причине он не влияет на уравнение (90), и мы можем заменить β_N^n на константу, которую можно устранить, масштабируя спектральный параметр λ. В результате получаем соотношение

$$\Lambda^{(1,N)}_{n,m+1}\Lambda^{(2)}_{n,m} = \Lambda^{(2)}_{n+N,m}\Lambda^{(1,N)}_{n,m}, \tag{91}$$

определяющееся матрицами

$$\Lambda^{(1,N)}_{n,m} = \Theta^{(N-1)}_{n,m}\Theta^{(N-2)}_{n,m}\dots\Theta^{(1)}_{n,m}\Theta^{(0)}_{n,m}. \tag{92}$$

В этих формулах

$$\Theta^{(k)}_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda\beta_N^k(u_{n+k,m}+1) \\ -\dfrac{2}{u_{n+k,m}-1} & \dfrac{u_{n+k,m}+1}{u_{n+k,m}-1}, \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{(2)}_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda(u_{n,m}+1)(u_{n,m+1}-1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для любого $N \geqslant 2$ матричное соотношение (91) является следствием дискретного уравнения (55), в котором выполнено (56). Путем непосредственных вычислений мы проверили, что для $N = 2, 3, 4$ соотношение (91) эквивалентно уравнению (55) с условием (56). Весьма вероятно, что то же самое верно для любого $N \geqslant 2$, и мы получаем для уравнения (55) с условием (56) следующую автономную L–A пару:

$$\Psi_{n+N,m} = \Lambda^{(1,N)}_{n,m}\Psi_{n,m}, \qquad \Psi_{n,m+1} = \Lambda^{(2)}_{n,m}\Psi_{n,m}. \tag{93}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы построили серию автономных интегрируемых дискретных уравнений (55), в которых β_N – первообразный корень из единицы. Уравнение (55) с $N = 1$ хорошо известно. Уравнения (55) с условием (56) имеют иерархии автономных обобщенных симметрий и законов сохранения по обоим направлениям, а также автономные L–A пары.

Мы построили симметрии и законы сохранения уравнения (55) с условием (56), используя мастер-симметрии, возникающие как обобщенные симметрии этого дискретного уравнения, которые линейно зависят от одной из двух дискретных переменных (см. п. 2.1, 3.2). Одна из этих мастер-симметрий, кроме того, явно зависит от своего времени. В случае законов сохранения такая схема построения, по-видимому, является новой. Также новым аспектом метода представляется введение временной переменной мастер-симметрии в соответствующее дискретное уравнение.

Нам представляется, что верна следующая гипотеза о структуре обобщенных симметрий.

Гипотеза. *Каждое из автономных уравнений* (55) *с условием* (56) *имеет бесконечную иерархию автономных обобщенных симметрий порядков* κN, $\kappa \geqslant 1$, *по обоим направлениям. Минимально возможный порядок автономной обобщенной симметрии для любого направления равен* N.

Нам неизвестны какие-либо примеры подобного рода в случае гиперболических уравнений в частных производных, аналогичных дискретным уравнениям вида (10). Нашу гипотезу подтверждают результаты, которые представлены в п. 3.1, 3.2. Следствие 1 утверждает, что существуют автономные обобщенные симметрии порядка κN в m-направлении. В теореме 3 мы доказали, в частности, что уравнения (55) с условием (56) при $N = 2, 3$ имеют автономные обобщенные симметрии порядка N в n-направлении и не имеют автономных симметрий меньшего порядка. Можно доказать аналогичный результат для m-направления.

Теорема 4. *Уравнение* (55) *с условием* (56) *при* $N = 2, 3$ *имеет в* m*-направлении автономные обобщенные симметрии порядка* N *и не имеет таких симметрий более низких порядков.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, но достататочно громоздко, и здесь мы его не приводим.

Сформулированная выше гипотеза важна с точки зрения применения метода обобщенных симметрий к дискретным уравнениям, когда мы классифицируем дискретные уравнения, используя факт существования обобщенных симметрий фиксированного порядка [14], [19]. Поскольку минимальный порядок автономной обобщенной симметрии может быть сколь угодно высоким, в автономном случае мы не можем классифицировать таким образом все интегрируемые дискретные уравнения (10).

Как показывают наши результаты, иерархии автономных законов сохранения должны иметь аналогичную структуру. Любое из автономных уравнений (55) с условием (56) должно иметь бесконечную иерархию автономных законов сохранения по обоим направлениям, имеющих порядок κN, $\kappa \geqslant 1$. Для m-направления это действительно так (см. следствие 2).

Наиболее интересен случай $N = 2$, так как при этом дискретное уравнение (58) не имеет комплексных коэффициентов. Мы подробно рассмотрели его в п. 3.3. Для этого уравнения (58) и его известного аналога (72) мы показали, что их обобщенные симметрии второго порядка в n-направлении имеют тесную связь с интегрируемыми дифференциально-разностными уравнениями типа релятивистского уравнения Тоды. За исключением (58), (72), мы не знаем ни одного автономного дискретного примера с обобщенными симметриями такого типа.

В заключение отметим, что, несмотря на то что автономные уравнения (55) с условием (56) представляют собой более или менее очевидные частные случаи неавтономных уравнений (5), многие результаты, связанные с этими автономными уравнениями, являются новыми.

Список литературы

[1] R. Hirota, S. Tsujimoto, “Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations”, *J. Phys. Soc. Japan*, **64**:9 (1995), 3125–3127.

[2] F. Nijhoff, H. Capel, “The discrete Korteweg-de Vries equation”, *Acta Appl. Math.*, **39**:1–3 (1995), 133–158.

[3] D. Levi, R. I. Yamilov, “The generalized symmetry method for discrete equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:45 (2009), 454012, 18 pp.

[4] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, “Integrable discrete nonautonomous quad-equations as Bäcklund auto-transformations for known Volterra and Toda type semidiscrete equations”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **621**:1 (2015), 012005, 18 pp.

[5] R. N. Garifullin, I. T. Habibullin, R. I. Yamilov, “Peculiar symmetry structure of some known discrete nonautonomous equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:23 (2015), 235201, 27 pp., arXiv: 1501.05435.

[6] R. Yamilov, “Symmetries as integrability criteria for differential difference equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:45 (2006), R541–R623.

[7] H. Zhang, G. Tu, W. Oevel, B. Fuchssteiner, “Symmetries, conserved quantities and hierarchies for some lattice systems with soliton structure”, *J. Math. Phys.*, **32**:7 (1991), 1908–1918.

[8] И. Т. Хабибуллин, М. В. Янгубаева, “Формальная диагонализация дискретного оператора Лакса и законы сохранения и симметрии динамических систем”, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 441–467.

[9] W. Oevel, H. Zhang, B. Fuchssteiner, “Mastersymmetries and multi-Hamiltonian formulations for some integrable lattice systems”, *Progr. Theor. Phys.*, **81**:2 (1989), 294–308.

[10] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, “Examples of Darboux integrable discrete equations possessing first integrals of an arbitrarily high minimal order”, *Уфимск. матем. журн.*, **4**:3 (2012), 177–183.

[11] R. N. Garifullin, G. Gubbiotti, R. I. Yamilov, “Integrable discrete autonomous quad-equations admitting, as generalized symmetries, known five-point differential-difference equations”, *J. Nonl. Math. Phys.*, **26**:3 (2019), 333–357, arXiv: 1810.11184.

[12] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, D. Levi, “Classification of five-point differential-difference equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:12 (2017), 125201, 27 pp., arXiv: 1610.07342.

[13] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, D. Levi, “Classification of five-point differential-difference equations II”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **51**:6 (2018), 065204, 16 pp., arXiv: 1708.02456.

[14] D. Levi, R. I. Yamilov, “Generalized symmetry integrability test for discrete equations on the square lattice”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:14 (2011), 145207, 22 pp., arXiv: 1011.0070.

[15] R. N. Garifullin, E. V. Gudkova, I. T. Habibullin, “Method for searching higher symmetries for quad-graph equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:32 (2011), 325202, 16 pp.

[16] I. T. Habibullin, “Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations”, *SIGMA*, **1** (2005), 023, 9 pp.

[17] Р. И. Ямилов, “О классификации дискретных эволюционных уравнений”, *УМН*, **38**:6(234) (1983), 155–156.

[18] I. Yu. Cherdantsev, R. I. Yamilov, “Master symmetries for differential-difference equations of the Volterra type”, *Phys. D*, **87**:1–4 (1995), 140–144.

[19] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, “Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:34 (2012), 345205, 23 pp.

[20] Р. Н. Гарифуллин, А. В. Михайлов, Р. И. Ямилов, “Дискретное уравнение на квадратной решетке с нестандартной структурой высших симметрий”, *ТМФ*, **180**:1 (2014), 17–34.

[21] T. Tsuchida, “Integrable discretizations of derivative nonlinear Schrödinger equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:36 (2002), 7827–7847, arXiv: nlin/0105053.

[22] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, “Симметрийный подход к проблеме интегрируемости”, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.

[23] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, D. Levi, “Non-invertible transformations of differential-difference equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:37 (2016), 37LT01, 12 pp.

[24] В. Э. Адлер, “Интегрируемые семиточечные дискретные уравнения и эволюционные цепочки второго порядка”, *ТМФ*, **195**:1 (2018), 27–43.

Поступила в редакцию 24.01.2019,
после доработки 24.01.2019,
принята к публикации 29.01.2019