**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 180, № 1
июль, 2014**

© 2014 г. **Р. Н. Гарифуллин***, **А. В. Михайлов**†, **Р. И. Ямилов***

ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ С НЕСТАНДАРТНОЙ СТРУКТУРОЙ ВЫСШИХ СИММЕТРИЙ

Уточнена природа интегрируемости недавно найденного дискретного уравнения на квадратной решетке, обладающего нестандартной симметрийной структурой. Найдена его L–A-пара и показано, что она также является необычной. Для этого дискретного уравнения построены иерархии высших симметрий и законов сохранения, из этого уравнения получены две интегрируемые системы гиперболического типа. Иерархии высших симметрий и законов сохранения также оказываются нестандартными по сравнению с известными уравнениями этого класса.

Ключевые слова: дискретные интегрируемые уравнения, высшие симметрии, законы сохранения, L–A-пара.

DOI: 10.4213/tmf8663

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было найдено уравнение

$$u_{n+1,m+1}(u_{n,m}-u_{n,m+1})-u_{n+1,m}(u_{n,m}+u_{n,m+1})+2=0, \tag{1}$$

где n,m – произвольные целые числа. Было показано, что его высшая симметрия в направлении m имеет вид

$$\frac{d}{dt_2}u_{n,m}=(-1)^n\frac{u_{n,m+1}u_{n,m-1}+u_{n,m}^2}{u_{n,m+1}+u_{n,m-1}}. \tag{2}$$

Простейшая высшая симметрия в направлении n оказывается уравнением следующего вида:

$$\frac{d}{dt_1}u_{n,m}=h_{n,m}h_{n-1,m}(a_nu_{n+2,m}-a_{n-1}u_{n-2,m}), \tag{3}$$

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия.
E-mail: rustem@matem.anrb.ru, RvlYamilov@matem.anrb.ru

†University of Leeds, Department of Applied Mathematics, Leeds, UK.
E-mail: A.V.Mikhailov@leeds.ac.uk

где

$$h_{n,m} = u_{n+1,m}u_{n,m} - 1, \qquad a_{n+2} = a_n.$$

Эта симметрия зависит от произвольной двухпериодической функции a_n, которая может быть представлена следующим образом:

$$a_n = \tilde{a} + \hat{a}(-1)^n, \tag{4}$$

где $\tilde{a}$, $\hat{a}$ – произвольные комплексные числа. Мы имеем здесь как автономный частный случай $a_n = 1$, так и неавтономный случай $a_n = (-1)^n$, все остальные возможные частные случаи являются их линейными комбинациями. Например, мы можем получить:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1, \\ 1, & n = 2k. \end{cases} \tag{5}$$

Высшие симметрии (2), (3) сами по себе являются интегрируемыми уравнениями. Более точно, при каждом фиксированном n в случае (2) и любом фиксированном m в случае (3) мы имеем интегрируемое уравнение с одной непрерывной и одной дискретной переменной. Уравнение (1) порождает цепочки автопреобразований Беклунда для каждого из уравнений (2), (3) (подробнее см. в [2]). Симметрии (2), (3) совместны не только с уравнением (1), но и друг с другом на решениях дискретного уравнения (1). С другой стороны, уравнение (1) может быть получено как условие совместности высших симметрий (2), (3). По этим и многим другим причинам в работе рассматривается тройка уравнений (1)–(3) в совокупности вместо одного дискретного уравнения (1). Такой подход позволяет получить некие важные результаты, представленные в разделах 2, 3.

Практически все известные интегрируемые дискретные уравнения вида

$$F_{n,m}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}, u_{n+1,m+1}) = 0, \tag{6}$$

у которых существуют симметрии в каждом из направлений n и m, имеют высшие симметрии вида [2]–[5]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} u_{n,m} &= \Phi_{n,m}(u_{n+1,m}, u_{n,m}, u_{n-1,m}), \\ \frac{d}{dt_2} u_{n,m} &= \Psi_{n,m}(u_{n,m+1}, u_{n,m}, u_{n,m-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Помимо уравнения (1) нам известны только несколько исключений, полученных в работах [6]–[8]. В этих примерах простейшие высшие симметрии в обоих направлениях имеют более сложную структуру, чем (7): они зависят также от $u_{n\pm2,m}$ или $u_{n,m\pm2}$.

С точки зрения структуры высших симметрий уравнение (1) является единственным в своем роде, поэтому мы изучим его более детально. В разделе 2 мы строим L–A-пары для каждого из уравнений (1)–(3) и демонстрируем, что L–A-пара уравнения (1) также является нестандартной. В разделе 3, используя полученную тройку L–A-пар, мы находим для дискретного уравнения (1) две иерархии законов сохранения. В разделе 4 построены мастер-симметрия для уравнения (2) и оператор рекурсии для уравнения (3), таким образом мы получаем иерархии высших симметрий дискретного уравнения в каждом из направлений n и m. В разделе 5 с использованием тройки уравнений (1)–(3) мы построили два примера непрерывных интегрируемых гиперболических систем.

2. L–A-ПАРЫ

При построении L–A-пары уравнения (1) мы используем следующее интересное свойство симметрии (3). Оказывается, она эквивалентна известной системе двух уравнений, найденной Цучидой (см. [9], (3.13)), и L–A-пара для этой системы известна и приводится в той же статье.

Система Цучиды после преобразования

$$v_k \to (-1)^k v_k, \qquad w_k \to (-1)^{k+1} w_k$$

и добавления точечной симметрии может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} v_k &= (\alpha v_{k+1} - \beta v_{k-1})(v_k w_k - 1)(v_k w_{k+1} - 1), \\ \frac{d}{dt_1} w_k &= (\beta w_{k+1} - \alpha w_{k-1})(v_k w_k - 1)(v_{k-1} w_k - 1). \end{aligned} \tag{8}$$

Эта система является интегрируемой дискретизацией одного из нелинейных уравнений Шредингера с производной, введенного в работе [10] (см. также [11]). Уравнение (3) при любом фиксированном m связано с системой (8) следующим образом:

$$v_k = u_{2k,m}, \qquad w_k = u_{2k-1,m}, \qquad \alpha = a_{2k}, \qquad \beta = a_{2k-1}. \tag{9}$$

Отметим, что система (8) является линейной комбинацией двух совместных систем, соответствующих частным случаям $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 1$. В этом смысле система (8) аналогична известной цепочке Абловица–Ладика, которая также является линейной комбинацией двух коммутирующих уравнений типа релятивистской цепочки Тоды (см., например, п. 5.2 в работе [12]).

Уравнения, связанные преобразованием (9), эквивалентны, и мы можем переносить обобщенные симметрии и законы сохранения с одного уравнения на другое (см. [13]). Мы получаем L–A-пару для уравнения (3) с помощью преобразования (9), переписывая известную L–A-пару уравнения (8), найденную в работе [9]. Эта L–A-пара стандартна и задается следующей парой совместных линейных уравнений:

$$T_k \Phi_k = U_k \Phi_k, \qquad D_{t_1} \Phi_k = V_k \Phi_k, \tag{10}$$

где Φ_k является двухкомпонентной вектор-функцией, U_k, V_k – (2×2)-матрицы, зависящие от спектрального параметра, T_k – оператор сдвига по переменой k: $T_k h_k = h_{k+1}$.

Из преобразования (9) видно, что сдвиг v_k, w_k по переменной k соответствует двойному сдвигу $u_{n,m}$ по n. Поэтому мы получаем L–A-пару для уравнения (3) в несколько иной форме:

$$T_n^2 \Psi_{n,m} = N_{n,m} \Psi_{n,m}, \qquad D_{t_1} \Psi_{n,m} = A_{n,m} \Psi_{n,m}. \tag{11}$$

Здесь T_n – оператор сдвига по переменной n, а матрицы $N_{n,m}$, $A_{n,m}$ имеют вид

$$N_{n,m} = \begin{pmatrix} h_{n,m}(1-\lambda) - 2\lambda & u_{n+1,m}(\lambda - 1) \\ -2\lambda u_{n,m} h_{n+1,m} & h_{n+1,m}(\lambda - 1) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$A_{n,m} = \begin{pmatrix} \begin{array}{r} h_{n-1,m}\big(a_{n-1}u_{n+1,m}u_{n-2,m} + a_n\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\big) + \\ + a_{n-1}\frac{2\lambda}{\lambda-1} \end{array} & -a_n u_{n-1,m}\frac{\lambda-1}{\lambda+1} - a_{n-1}u_{n+1,m} \\ \begin{array}{r} 2\lambda h_{n-1,m}\big(\frac{u_{n,m}a_n}{1+\lambda} + \frac{u_{n-2,m}a_{n-1}}{\lambda-1}\big) - \\ - a_n u_{n,m}u_{n-1,m}\frac{2\lambda}{1+\lambda} \end{array} & h_{n,m}(a_n u_{n-1,m}u_{n+2,m} - a_{n-1}) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Оператор $T_n^2 - N_{n,m}$, возникающий в первом из уравнений (11), является дискретным аналогом оператора Шредингера с матричными коэффициентами. Условие совместности уравнений (11) имеет вид

$$D_{t_1}N_{n,m} = (T_n^2 A_{n,m})N_{n,m} - N_{n,m}A_{n,m}, \tag{14}$$

и это соотношение эквивалентно уравнению (3). В терминах (4×4)-матриц L–A-пара может быть переписана в стандартном виде:

$$T_n\begin{pmatrix}\Psi_{n,m}\\ \Psi_{n+1,m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & E\\ N_{n,m} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{n,m}\\ \Psi_{n+1,m}\end{pmatrix},$$

$$D_{t_1}\begin{pmatrix}\Psi_{n,m}\\ \Psi_{n+1,m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{n,m} & 0\\ 0 & A_{n+1,m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{n,m}\\ \Psi_{n+1,m}\end{pmatrix}.$$

Что касается симметрии (2), то при любом фиксированном $n \in \mathbb{Z}$, переходя к $z_m = i^m u_{n,m}$ и используя растяжение времени, мы получаем хорошо известное уравнение [14], [15]

$$\frac{dz_m}{dt_2} = \frac{z_{m+1}z_{m-1} + z_m^2}{z_{m+1} - z_{m-1}}. \tag{15}$$

Для уравнений этого типа вспомогательная линейная задача известна [4] и является стандартной:

$$T_m\Psi_{n,m} = M_{n,m}\Psi_{n,m}, \qquad D_{t_2}\Psi_{n,m} = B_{n,m}\Psi_{n,m}. \tag{16}$$

Здесь $M_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1})$, $B_{n,m}(u_{n,m-1}, u_{n,m}, u_{n,m+1})$ – (2×2)-матрицы, и условие совместности имеет вид

$$D_{t_2}M_{n,m} = (T_m B_{n,m})M_{n,m} - M_{n,m}B_{n,m}. \tag{17}$$

Первые линейные дискретные уравнения из (11), (16) задают пару Лакса для дискретного уравнения (1), если в них совпадают вектор-функции $\Psi_{n,m}$ и спектральные параметры λ. После замены вектор-функции с помощью матрицы $\Omega_{n,m}$ матрица $M_{n,m}$ изменяется в соответствии с калибровочным преобразованием

$$\widetilde{M}_{n,m} = \Omega_{n,m+1}^{-1}M_{n,m}\Omega_{n,m}.$$

Матрица $\Omega_{n,m}$ и замена спектрального параметра могут быть найдены прямым вычислением, но мы предпочитаем другой, более простой путь. Мы используем соотношение

$$(T_n^2 M_{n,m})N_{n,m} = (T_m N_{n,m})M_{n,m}, \tag{18}$$

эквивалентное (1), известную матрицу $N_{n,m}$ и ищем матрицу $M_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1})$. В результате мы получаем

$$M_{n,m} = \begin{pmatrix} \lambda & \dfrac{1-\lambda}{u_{n,m}+u_{n,m+1}} \\ \lambda(u_{n,m+1}-u_{n,m}) & \dfrac{\lambda(u_{n,m}-u_{n,m+1})}{u_{n,m}+u_{n,m+1}} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Соответствующая матрица $B_{n,m}$, задающая L–A-пару для уравнения (2), строится при помощи условия (17):

$$B_{n,m} = \frac{(-1)^n}{u_{n,m+1}+u_{n,m-1}} \times \\ \times \begin{pmatrix} (1-\lambda)(u_{n,m-1}-u_{n,m}) & 1-\lambda \\ \lambda(u_{n,m}^2-u_{n,m+1}^2) & \lambda(u_{n,m}+u_{n,m+1})-(u_{n,m}+u_{n,m-1}) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Отметим, что дискретная L–A-пара (18) тоже может быть переписана в стандартном виде:

$$(T_n\widetilde{M}_{n,m})\widetilde{N}_{n,m} = (T_m\widetilde{N}_{n,m})\widetilde{M}_{n,m} \tag{21}$$

в терминах (4×4)-матриц $\widetilde{M}_{n,m}, \widetilde{N}_{n,m}$ блочной структуры. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *L–A-пары для уравнений* (1)–(3) *задаются соответственно соотношениями* (18), (17), (14), *в которых* (2×2)-*матрицы имеют вид* (12), (13), (19), (20).

Практически для всех известных интегрируемых дискретных уравнений вида (6) L–A-пара задается соотношением (21) с (2×2)-матрицами $\widetilde{M}_{n,m}, \widetilde{N}_{n,m}$. Известны два исключения [6], [7], в которых L–A-пара имеет тот же вид (21), но задается матрицами размера 3×3. Эти уравнения являются дискретными аналогами уравнения Цицейки [16]

$$u_{xy} = e^u + e^{-2u},$$

для которого L–A-пара определяется уравнениями

$$D_x\Psi = L\Psi, \qquad D_y\Psi = A\Psi$$

с (3×3)-матрицами L, A [17]. Наше уравнение (1) является еще одним исключением: его L–A-пара (18) задается (2×2)-матрицами и может быть переписана в форме (21) с матрицами размера 4×4.

Мы проверили, что дискретное уравнение (1) не имеет стандартной L–A-пары (21) в терминах (2×2)-матриц. Более точно, мы зафиксировали матрицу $\widetilde{M}_{n,m} = M_{n,m}$ из (19) и искали (2×2)-матрицу $\widetilde{N}_{n,m}(u_{n-1,m}, u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n+2,m})$. Используя эквивалентность L–A-пары (21) дискретному уравнению (1), мы показали, что матрицы $\widetilde{N}_{n,m}$ такого вида не существует.

Уравнение (2) с $a_n \equiv 1$ при любом фиксированном $m\in\mathbb{Z}$ является автономной цепочкой вида

$$\frac{d}{dt}u_n = G(u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}). \tag{22}$$

В этом классе уравнений оно занимает особое место, аналогичное месту уравнения (1) в классе (6). Большинство известных интегрируемых уравнений (22) являются высшими симметриями уравнений типа Вольтерра [14], [15] и имеют L–A-пары вида

$$D_t L = (T_n A)L - LA \tag{23}$$

с (2×2)-матрицами L, A. Остальные известные нам интегрируемые цепочки являются аналогами уравнения Ито–Нариты–Богоявленского (см., например, [18]–[20])

$$\frac{d}{dt} u_n = u_n(u_{n+2} + u_{n+1} - u_{n-1} - u_{n-2}), \tag{24}$$

у которых L–A-пара (23) задается матрицами размера 3×3. Наше уравнение (2) с $a_n \equiv 1$ имеет L–A-пару вида

$$D_t L = (T_n^2 A)L - LA \tag{25}$$

с (2×2)-матрицами. Она может быть переписана в виде (23) с матрицами размера 4×4.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В этом разделе мы строим законы сохранения для дискретного уравнения (1), используя схему, предложенную Михайловым [21]. Этот подход предполагает существенное использование тройки совместных L–A-пар (18), (17), (14) для дискретного уравнения (1) и его высших симметрий (2), (3). Имеется альтернативный подход, который также позволяет решить эту задачу [22].

Метод, который мы используем для построения законов сохранения, предполагает формальную диагонализацию всех матриц, определяющих тройку L–A-пар (18), (17), (14). Причем удобно начинать эту диагонализацию с линейных дифференциальных уравнений, входящих в (11), (16). Для этого используются известные результаты теории линейных дифференциальных уравнений [23] (см. также [24]).

Вектор-функция $\Psi_{n,m}$ может быть преобразована с помощью матрицы $\Omega_{n,m}$:

$$\widetilde{\Psi}_{n,m} = \Omega_{n,m}\Psi_{n,m}.$$

При этом матрицы, определяющие L–A-пары (14), (17), (18), преобразуются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_{n,m} &= \Omega_{n,m}^{-1} B_{n,m}\Omega_{n,m} - \Omega_{n,m}^{-1}\partial_{t_2}\Omega_{n,m}, \\
\widetilde{M}_{n,m} &= \Omega_{n,m+1}^{-1} M_{n,m}\Omega_{n,m}, \\
\widetilde{N}_{n,m} &= \Omega_{n+2,m}^{-1} N_{n,m}\Omega_{n,m}, \\
\widetilde{A}_{n,m} &= \Omega_{n,m}^{-1} A_{n,m}\Omega_{n,m} - \Omega_{n,m}^{-1}\partial_{t_1}\Omega_{n,m}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Формальная диагонализация строится эффективно в окрестности полюсов матриц линейных дифференциальных операторов. Матрицы $B_{n,m}$ и $A_{n,m}$ имеют полюсы в точках $\lambda = \infty$ и $\lambda = \pm 1$ соответственно. Сформулируем лемму о диагонализации матрицы $B_{n,m}$ в окрестности ее полюса (см., например, [24], с. 86).

Лемма 1. *Если главная часть $\partial B_{n,m}/\partial\lambda$ матрицы $B_{n,m}$ имеет различные собственные значения, то существует формальный ряд*

$$\Omega_{n,m} = \Omega^*_{n,m}\left(E + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j}\Omega^{(-j)}_{n,m}\right),$$

такой, что E – единичная матрица и $\Omega^{(-j)}_{n,m}$, $j \geqslant 1$, являются антидиагональными матрицами. При этом матрица $\widetilde{B}_{n,m}$, полученная при помощи первой из формул (26), *имеет вид*

$$\widetilde{B}_{n,m} = \lambda B^{(1)}_{n,m} + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} B^{(-j)}_{n,m},$$

где $B^{(l)}_{n,m}$ – диагональные матрицы.

Здесь мы имеем дело с формальными рядами. Вопросы сходимости этих рядов не обсуждаются. Для построения любого конечного числа законов сохранения достаточно знать конечное число коэффициентов формальных рядов.

Матрица $\partial B_{n,m}/\partial\lambda$ имеет различные собственные значения, поэтому существует преобразование, приводящее ее к диагональному виду. В качестве матрицы $\Omega^*_{n,m}$ можно взять любую из матриц этого преобразования, в частности

$$\Omega^*_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u_{n,m} - u_{n,m-1} & u_{n,m} + u_{n,m-1} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

При этом находится $B^{(1)}_{n,m}$:

$$B^{(1)}_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Для нахождения матриц $\Omega^{(l)}_{n,m}$ и $B^{(l)}_{n,m}$ с $l \leqslant 0$ перепишем первое из уравнений (26) в виде

$$\Omega_{n,m}\widetilde{B}_{n,m} = B_{n,m}\Omega_{n,m} - \partial_{t_2}\Omega_{n,m}$$

и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ. Соотношение, соответствующее λ^1, выполняется тождественно за счет выбора $\Omega^*_{n,m}$ и $B^{(1)}_{n,m}$. Соотношения при других степенях λ задают рекуррентные формулы для остальных коэффициентов $\widetilde{B}_{n,m}$ и $\Omega_{n,m}$, из которых эти коэффициенты находятся явным образом. В частности,

$$\Omega^{(-1)}_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(u_{n,m+1} + u_{n,m+2})(u_{n,m} - u_{n,m-1})}{(u_{n,m} + u_{n,m-2})(u_{n,m+1} + u_{n,m-1})} \\ \dfrac{(u_{n,m} - u_{n,m-1})(u_{n,m-1} - u_{n,m-2})}{(u_{n,m} + u_{n,m-2})(u_{n,m+1} + u_{n,m-1})} & 0 \end{pmatrix},$$

другие коэффициенты мы не приводим по причине их громоздкости.

Используя уравнение (17) и формулу (28) для $B^{(1)}_{n,m}$, мы можем доказать по индукции, что матрица $\widetilde{M}_{n,m}$ является диагональной. Из (26) мы находим

$$\widetilde{M}_{n,m} = -\lambda\frac{u_{n,m+1}+u_{n,m-1}}{u_{n,m}+u_{n,m+1}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \\ -\begin{pmatrix}\frac{(u_{n,m+2}+u_{n,m+1})u_{n,m-1}-u_{n,m}(u_{n,m+1}+u_{n,m+2})}{(u_{n,m+2}+u_{n,m})(u_{n,m}+u_{n,m+1})} & 0\\ 0 & \frac{u_{n,m+1}-u_{n,m}}{u_{n,m}+u_{n,m+2}}\end{pmatrix} + \cdots .$$

Используя уравнение (18) и коэффициент ряда $\widetilde{M}_{n,m}$ при λ, мы можем доказать при помощи индукции, что матрица $\widetilde{N}_{n,m}$ также является диагональной. Из (26) мы получаем

$$\widetilde{N}_{n,m} = -\lambda\begin{pmatrix}1+u_{n+1,m}u_{n,m-1} & 0\\ 0 & 1-u_{n+1,m}u_{n,m+1}\end{pmatrix} - \\ -\frac{u_{n,m+1}-u_{n,m-1}}{u_{n,m+1}+u_{n,m-1}}\begin{pmatrix}1+u_{n+1,m}u_{n,m-1} & 0\\ 0 & -1+u_{n+1,m}u_{n,m+1}\end{pmatrix} + \cdots .$$

Матрицы $\widetilde{M}_{n,m}$, $\widetilde{N}_{n,m}$ диагональны, и их элементы являются формальными рядами по степеням λ^{-1}. Уравнение (18) для этих матриц может быть переписано в виде

$$(T_n^2-1)\ln\widetilde{M}_{n,m} = (T_m-1)\ln\widetilde{N}_{n,m}, \tag{29}$$

причем мы используем обозначения

$$\ln\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ln\alpha & 0\\ 0 & \ln\beta\end{pmatrix}.$$

Следующие диагональные элементы разлагаются в формальные ряды:

$$(\ln\widetilde{M}_{n,m})_{1,1} = \ln\lambda + \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{-j}p^{(j)}_{n,m}, \qquad (\ln\widetilde{N}_{n,m})_{1,1} = \ln\lambda + \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{-j}q^{(j)}_{n,m},$$

и мы получаем иерархию законов сохранения:

$$(T_n^2-1)p^{(j)}_{n,m} = (T_m-1)q^{(j)}_{n,m}, \qquad j\geqslant 0. \tag{30}$$

Эти законы сохранения могут быть переписаны в стандартном виде:

$$(T_n-1)p_{n,m} = (T_m-1)q_{n,m}, \tag{31}$$

поскольку $T_n^2-1=(T_n-1)(T_n+1)$.

Первые два закона сохранения выглядят следующим образом:

$$p^{(0)}_{n,m} = \ln\frac{u_{n,m+1}+u_{n,m-1}}{u_{n,m}+u_{n,m+1}}, \qquad q^{(0)}_{n,m} = \ln(1+u_{n+1,m}u_{n,m+1});$$

$$p^{(1)}_{n,m} = \frac{(u_{n,m+1}+u_{n,m+2})(u_{n,m}-u_{n,m-1})}{(u_{n,m+2}+u_{n,m})(u_{n,m+1}+u_{n,m-1})}, \qquad q^{(1)}_{n,m} = \frac{u_{n,m+1}-u_{n,m-1}}{u_{n,m+1}+u_{n,m-1}}.$$

Из вторых диагональных элементов мы получаем такие же законы сохранения (в соответствии с приведенным ниже комментарием), за исключением первого шага, на котором имеем

$$\hat{p}^{(0)}_{n,m} = \ln \frac{u_{n,m} - u_{n,m+1}}{u_{n,m} + u_{n,m+2}}, \qquad \hat{q}^{(0)}_{n,m} = \ln(1 - u_{n+1,m} u_{n,m+1}).$$

Все плотности законов сохранения $p^{(j)}_{n,m}$ этой иерархии зависят от конечного числа функций из множества

$$u_{n,m+k}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{32}$$

Для законов сохранения этого типа мы формулируем лемму 2 и определяем понятие порядка закона сохранения. Это позволяет нам различать законы сохранения между собой и выделять среди них тривиальные.

Определим сначала формальную вариационную производную в направлении m от плотности $p_{n,m}$:

$$\frac{\delta_m p_{n,m}}{\delta_m u_{n,m}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_m^{-k} \frac{\partial p_{n,m}}{\partial u_{n,m+k}}.$$

Эта сумма всегда конечна, так как $p_{n,m}$ зависит от конечного числа функций (32). Для любой сохраняющейся плотности $p_{n,m}$ имеем

$$\frac{\delta_m p_{n,m}}{\delta_m u_{n,m}} = P_{n,m}(u_{n,m-M}, u_{n,m-M+1}, \dots, u_{n,m+M-1}, u_{n,m+M}).$$

Используя функцию $r_{n,m}$, зависящую от конечного числа функций (32), мы можем перейти к *эквивалентному* закону сохранения

$$(T_n^2 - 1)\tilde{p}_{n,m} = (T_m - 1)\tilde{q}_{n,m}$$

по правилу

$$\tilde{p}_{n,m} = p_{n,m} + (T_m - 1) r_{n,m}, \qquad \tilde{q}_{n,m} = q_{n,m} + (T_n^2 - 1) r_{n,m}. \tag{33}$$

Лемма 2. *При помощи преобразования эквивалентности* (33) *плотность любого закона сохранения* (30) *может быть приведена к одному из следующих трех видов*:

1) $\tilde{p}_{n,m} = 0 \Leftrightarrow P_{n,m} = 0$;

2) $\tilde{p}_{n,m} = \tilde{p}_{n,m}(u_{n,m})$, $\tilde{p}'_{n,m} \not\equiv 0 \Leftrightarrow M = 0$, $P_{n,m}(u_{n,m}) \not\equiv 0$;

3) $\tilde{p}_{n,m} = \tilde{p}_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+M})$, $\partial^2 \tilde{p}_{n,m}/\partial u_{n,m} \partial u_{n,m+M} \not\equiv 0 \Leftrightarrow M > 0$, $\partial P_{n,m}/\partial u_{n,m-M} \not\equiv 0$, $\partial P_{n,m}/\partial u_{n,m+M} \not\equiv 0$.

В случае 1 леммы 2 закон сохранения называется *тривиальным*. В случаях 2 и 3 мы называем его *нетривиальным законом сохранения порядка* M, мы будем писать $\operatorname{ord} p_{n,m} = M$. Видно, что законы сохранения различного порядка не эквивалентны в смысле преобразования (33). Например, мы имеем следующее свойство: число переменных функции $p_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, p_{n,m+k})$, $k > 0$, может быть уменьшено с помощью преобразования (33) тогда и только тогда, когда $\partial^2 p_{n,m}/\partial u_{n,m} \partial u_{n,m+k} \equiv 0$ для всех $n, m \in \mathbb{Z}$.

Эта теория полностью аналогична теории для дискретно-дифференциальных законов сохранения вида

$$D_t p_m = (T_m - 1) q_m.$$

Подробное обсуждение этой теории вместе с доказательствами приводится, например, в [13], [15]. Соответствующая теория для дискретных законов сохранения вида (31) обсуждается в работе [25].

Мы видим, что

$$\operatorname{ord} p^{(0)}_{n,m} = 2, \qquad \operatorname{ord} p^{(1)}_{n,m} = 3, \qquad \operatorname{ord} \hat{p}^{(0)}_{n,m} = 2.$$

Таким образом, плотность $p^{(1)}_{n,m}$ отличается от двух других. Плотности $p^{(0)}_{n,m}$ и $\hat{p}^{(0)}_{n,m}$ могут быть, в принципе, эквивалентными с точностью до полной разности и умножения на константу. Однако если мы построим новый закон сохранения следующим образом:

$$\begin{aligned} \check{p}^{(0)}_{n,m} &= \hat{p}^{(0)}_{n,m} + p^{(0)}_{n,m} + (T_m - 1)(p^{(0)}_{n,m} + \ln(u_{n,m} + u_{n,m+1})) = \ln \frac{u_{n,m} - u_{n,m+1}}{u_{n,m} + u_{n,m+1}}, \\ \check{q}^{(0)}_{n,m} &= \hat{q}^{(0)}_{n,m} + q^{(0)}_{n,m} + (T_n^2 - 1)(p^{(0)}_{n,m} + \ln(u_{n,m} + u_{n,m+1})) = \ln(h_{n,m} h_{n+1,m}), \end{aligned} \tag{34}$$

то мы увидим, что $\operatorname{ord} \check{p}^{(0)}_{n,m} = 1$. Таким образом, мы имеем три различных нетривиальных закона сохранения, порядок которых равен 1, 2 и 3.

Для построения законов сохранения в направлении n используется линейное дифференциальное уравнение из (11) и диагонализация начинается с матрицы $A_{n,m}$. Матрица $A_{n,m}$ (13) имеет полюсы при $\lambda = \pm 1$, и мы можем провести формальную диагонализацию в терминах формальных рядов по степеням $\lambda + 1$ или $\lambda - 1$, воспользовавшись аналогом леммы 1. В обоих случаях результаты совпадают, и мы ограничимся случаем $\lambda = -1$. В этом случае

$$\Omega_{n,m} = \begin{pmatrix} u_{n-1,m} & 1 \\ -h_{n-1,m} & u_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda+1}{2} \frac{1 - h_{n,m} h_{n+1,m}}{u_{n+1,m}} + \cdots \\ \frac{\lambda+1}{2} u_{n-3,m} h_{n-1,m} h_{n-2,m} + \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{N}_{n,m} = \\ = \begin{pmatrix} 2 + (\lambda+1)(h_{n,m} u_{n-1,m} u_{n+2,m} - h_{n-1,m} - 2) & 0 \\ 0 & -(\lambda+1) h_{n,m} h_{n+1,m} \end{pmatrix} + \cdots,$$

$$\widetilde{M}_{n,m} = \\ = \begin{pmatrix} 1 - (\lambda+1) \frac{u_{n,m}(1 + u_{n,m+1} u_{n-1,m})}{u_{n,m} + u_{n,m+1}} & 0 \\ 0 & \frac{u_{n,m+1} - u_{n,m}}{u_{n,m+1} + u_{n,m}} \left(1 + (\lambda+1) \frac{h_{n-1,m} u_{n,m+1}}{u_{n,m+1} + u_{n,m}}\right) \end{pmatrix} + \cdots.$$

В главном члене разложения порядка $(\lambda+1)^0$ получаем закон сохранения (34), в следующих порядках $(\lambda+1)^1$ и $(\lambda+1)^2$ получаем законы сохранения

$$\begin{aligned} \check{p}^{(1)}_{n,m} &= \frac{2 h_{n-1,m} u_{n,m+1}}{u_{n,m+1} + u_{n,m}}, \\ \check{q}^{(1)}_{n,m} &= u_{n-1,m}(u_{n+2,m} h_{n,m} - u_{n,m}), \\ \check{p}^{(2)}_{n,m} &= 4 h_{n-1,m} \left(\frac{h_{n-1,m}(u_{n+2,m} h_{n,m} + u_{n,m})}{u_{n,m} + u_{n,m+1}} - \frac{u^2_{n,m} h_{n-1,m}}{(u_{n,m} + u_{n,m+1})^2} \right) + \\ &\quad + 4 h_{n-1,m} - 4 u_{n-1,m} u_{n+2,m} h_{n-1,m} h_{n,m}, \end{aligned}$$

$$\breve{q}^{(2)}_{n,m} = 2u_{n-1,m}u_{n+4,m}h_{n,m}h_{n+1,m}h_{n+2,m} + (h_{n-1,m}h_{n+1,m} - u_{n-1,m}u_{n+2,m} - 1)^2 - \\ - 2h_{n-1,m}h_{n+1,m} - (h_{n+1,m} + 2)^2.$$

Таким способом мы можем получить иерархию законов сохранения вида (30), в которых функция $q^{(j)}_{n,m}$ зависит от конечного числа функций из множества

$$u_{n+k,m}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$

Теория в этом случае аналогична той, которую мы обсуждали выше для законов сохранения в направлении m. Удобно переписать законы сохранения (30) в стандартной форме (31), где

$$p_{n,m} = (T_n + 1)p^{(j)}_{n,m}, \qquad q_{n,m} = q^{(j)}_{n,m}.$$

В этом случае функция $q_{n,m}$ играет роль плотности закона сохранения. Мы вводим формальную вариационную производную в направлении n:

$$\frac{\delta_n q_{n,m}}{\delta_n u_{n,m}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_n^{-k}\frac{\partial q_{n,m}}{\partial u_{n+k,m}} = Q(u_{n-N,m}, u_{n-N+1,m}, \ldots, u_{n+N,m})$$

и определяем порядок закона сохранения, как в предыдущем случае. Преобразование эквивалентности теперь имеет вид

$$\tilde{q}_{n,m} = q_{n,m} + (T_n - 1)s_{n,m}, \qquad \tilde{p}_{n,m} = p_{n,m} + (T_m - 1)s_{n,m}, \tag{36}$$

где $s_{n,m}$ зависит от конечного числа функций (35).

Для законов сохранения, приведенных выше, мы имеем

$$\operatorname{ord}\breve{q}^{(0)}_{n,m} = 1, \qquad \operatorname{ord}\breve{q}^{(1)}_{n,m} = 3, \qquad \operatorname{ord}\breve{q}^{(2)}_{n,m} = 5.$$

Функция $\breve{q}^{(0)}_{n,m}$ зависит от трех переменных, поэтому мы можем уменьшить их число и получить

$$\breve{p}^{(0)}_{n,m} = \ln\left(\frac{u_{n,m} - u_{n,m+1}}{u_{n,m} + u_{n,m+1}}\right)^2, \qquad \breve{q}^{(0)}_{n,m} = 2\ln h_{n,m}.$$

Дальнейшего упрощения можно достичь, вводя зависящий от n квадратный корень из единицы:

$$\bar{p}^{(0)}_{n,m} = \ln\left((-1)^n\frac{u_{n,m} - u_{n,m+1}}{u_{n,m} + u_{n,m+1}}\right), \qquad \bar{q}^{(0)}_{n,m} = \ln h_{n,m}. \tag{37}$$

Отметим, что можно перейти от закона сохранения (34) к (37), применяя оператор $(T_n + 1)^{-1}$ к обеим его частям и принимая во внимание, что $(-1)^n$ принадлежит ядру оператора $T_n + 1$.

Таким образом, мы можем построить законы сохранения в направлении m любого натурального порядка, а в случае направления n мы получаем законы сохранения нечетного порядка. Законы сохранения четного порядка, по-видимому, не существуют, и мы можем доказать это в случае порядка 2. Более точно, мы рассматриваем сохраняющуюся плотность вида $q_{n,m}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n+2,m})$ и допускаем явную зависимость от n, m. Соответствующая функция $p_{n,m}$ должна зависеть от $u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}$. Мы используем наиболее слабое предположение, что $\partial^2 q_{n,m}/\partial u_{n,m}\partial u_{n+2,m} \neq 0$ хотя бы в одной точке n, m, и доказываем, что такого закона сохранения не существует.

4. МАСТЕР-СИММЕТРИЯ И ОПЕРАТОР РЕКУРСИИ ДЛЯ ВЫСШИХ СИММЕТРИЙ

В этом разделе мы обсуждаем проблему построения высших симметрий для дискретного уравнения (1). Имеются две иерархии симметрий в направлениях n и m. Рассмотрим сначала случай направления m и построим симметрии, аналогичные (2).

Как отмечалось выше, симметрия (2) эквивалентна известному уравнению (15) типа уравнения Вольтерра. Уравнения, аналогичные (15), обладают мастер-симметриями, которые генерируют для них высшие симметрии и законы сохранения [12]. Более подробное обсуждение можно найти в работах [2], [15], работа [2] содержит конкретные примеры. Здесь мы всего лишь переписываем известную мастер-симметрию уравнения (15) в переменных уравнения (2).

Для мастер-симметрии такого рода сначала мы должны ввести обобщение уравнения (2), зависящее от параметра τ, который будет играть роль времени мастер-симметрии:

$$\frac{d}{dt_2^{(1)}}u_{n,m} = \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch}\tau}\frac{u_{n,m}^2 + u_{n,m-1}u_{n,m+1}}{u_{n,m-1}+u_{n,m+1}} + \\ + \operatorname{th}\tau\frac{u_{n,m}(u_{n,m+1}-u_{n,m-1})}{u_{n,m-1}+u_{n,m+1}} = \Psi_{n,m}^{(1)}(\tau). \tag{38}$$

Уравнение (38) при $\tau = 0$ совпадает с уравнением (2). Соответствующая мастер-симметрия имеет вид

$$\frac{d}{d\tau}u_{n,m} = m\Psi_{n,m}^{(1)}(\tau) = \Psi_{n,m}^{*}. \tag{39}$$

Она порождает иерархию симметрий

$$\frac{d}{dt_2^{(j)}}u_{n,m} = \Psi_{n,m}^{(j)}(\tau) \tag{40}$$

в соответствии с формулой

$$\Psi_{n,m}^{(j+1)}(\tau) = [\Psi_{n,m}^{*}, \Psi_{n,m}^{(j)}(\tau)] = D_\tau\Psi_{n,m}^{(j)}(\tau) - D_{t_2^{(j)}}\Psi_{n,m}^{*} = \\ = \frac{\partial\Psi_{n,m}^{(j)}(\tau)}{\partial\tau} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\Psi_{n,m+k}^{*}\frac{\partial\Psi_{n,m}^{(j)}(\tau)}{\partial u_{n,m+k}} - \Psi_{n,m+k}^{(j)}(\tau)\frac{\partial\Psi_{n,m}^{*}}{\partial u_{n,m+k}}\right).$$

Для всех уравнений (40) величина τ является внешним параметром, и эти уравнения совместны для любого значения этого параметра. По этой причине мы можем положить $\tau = 0$ в уравнениях (40) и получаем иерархию высших симметрий для уравнения (2). Полученные уравнения являются высшими симметриями также и для дискретного уравнения (1).

Например, при $j = 2$, $\tau = 0$

$$\frac{d}{dt_2^{(2)}}u_{n,m} = \Psi_{n,m}^{(2)}(0) = \frac{(u_{n,m+2}-u_{n,m-2})(u_{n,m+1}^2-u_{n,m}^2)(u_{n,m}^2-u_{n,m-1}^2)}{(u_{n,m}+u_{n,m-2})(u_{n,m+1}+u_{n,m-1})^2(u_{n,m+2}+u_{n,m})}.$$

Прямым вычислением можно проверить, что это уравнение совместно не только с (2), но и с дискретным уравнением (1).

В случае направления n мы используем оператор рекурсии для построения высших симметрий. Уравнение (3) эквивалентно известной системе (8), для которой оператор рекурсии был построен в работе [26]. Используя соотношения (9), мы только переписываем этот оператор в скалярном виде, пригодном для уравнения (3).

В этом случае удобно строить оператор рекурсии R в виде

$$R = H \circ S, \tag{41}$$

где оператор H является гамильтоновым, а S – симплектический оператор. Эти операторы имеют вид

$$S = (-1)^n \left(\frac{1}{h_{n,m}} T_n + \frac{1}{h_{n-1,m}} T_n^{-1} \right), \tag{42}$$

$$\begin{aligned} H = {} & h_{n,m} h_{n-1,m} (c_n u_{n+2,m} - c_{n-1} u_{n-2,m}) (T_n - 1)^{-1} (-1)^n u_{n,m} + \\ & + (-1)^n u_{n,m} T_n (T_n - 1)^{-1} h_{n,m} h_{n-1,m} (c_n u_{n+2,m} - c_{n-1} u_{n-2,m}) - \\ & - (-1)^n h_{n-1,m} h_{n,m} (c_n h_{n+1,m} T_n + c_{n-1} h_{n-2,m} T_n^{-1}), \end{aligned} \tag{43}$$

где c_n – произвольная двухпериодическая функция, зависящая от n.

Эти операторы удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt_1} + S \circ f^*_{n,m} + f^{*\perp}_{n,m} \circ S = 0, \\ \frac{dH}{dt_1} = f^*_{n,m} \circ H + H \circ f^{*\perp}_{n,m}. \end{aligned} \tag{44}$$

Здесь $f^*_{n,m}$, $f^{*\perp}_{n,m}$ – операторы, определяемые правой частью $f_{n,m}$ уравнения (3):

$$\frac{d}{dt_1} u_{n,m} = f_{n,m}. \tag{45}$$

Дискретный аналог производной Фреше $f^*_{n,m}$ функции $f_{n,m}$ имеет вид

$$f^*_{n,m} = \sum_{k=-2}^{2} \frac{\partial f_{n,m}}{\partial u_{n+k,m}} T_n^k,$$

а сопряженный ему оператор $f^{*\perp}_{n,m}$ определяется формулой

$$f^{*\perp}_{n,m} = \sum_{k=-2}^{2} \frac{\partial f_{n+k,m}}{\partial u_{n,m}} T_n^k.$$

Из (44) следует, что оператор $R = H \circ S$ удовлетворяет следующему уравнению Лакса:

$$\frac{dR}{dt_1} = [f^*_{n,m}, R], \tag{46}$$

где $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. Все эти формулы стандартны и могут быть найдены, например, в работе [15] для случая автономных уравнений (45) и в работе [13] для неавтономного случая.

Уравнения (44) и (46) можно считать определениями симплектического, гамильтонова и рекурсионного операторов (см., например, [25]). Гамильтонов оператор H и симплектический оператор S обеспечивают связь между законами сохранения и высшими симметриями уравнения (3). Оператор R, удовлетворяющий (46), позволяет строить законы сохранения и высшие симметрии уравнения (3). Например, из (46) мы получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t_1^{(k)}} u_{n,m} = R^{k-1}(f_{n,m}) = f_{n,m}^{(k)}, \qquad k \geqslant 2, \tag{47}$$

являются высшими симметриями уравнений (3), (45). В случае $k = 2$

$$\begin{aligned} f_{n,m}^{(2)} &= \hat{f}_{n,m}^{(2)} - (c_n + c_{n-1}) f_{n,m} + (c_n a_{n-1} - c_{n-1} a_n)(-1)^n u_{n,m}, \\ \hat{f}_{n,m}^{(2)} &= h_{n,m} h_{n-1,m} (b_n h_{n+1,m} h_{n+2,m} u_{n+4,m} - b_{n-1} h_{n-2,m} h_{n-3,m} u_{n-4,m} + \\ &\quad + u_{n,m}(b_n u_{n+2,m} h_{n-2,m} u_{n-3,m} - b_{n-1} u_{n-2,m} h_{n+1,m} u_{n+3,m}) + \\ &\quad + (u_{n-1,m} h_{n,m} - u_{n+1,m})(b_n u_{n+2,m}^2 - b_{n-1} u_{n-2,m}^2) - \\ &\quad - u_{n,m}(b_n u_{n-1,m} u_{n+2,m} - b_{n-1} u_{n+1,m} u_{n-2,m})), \end{aligned} \tag{48}$$

где $b_n = a_n c_n$. Эта симметрия была найдена в работе [1]. Можно проверить, что она также является высшей симметрией дискретного уравнения (1).

По формуле (47) строятся симметрии вида

$$\frac{\partial}{\partial t_1^{(k)}} u_{n,m} = f_{n,m}^{(k)}(u_{n+2k,m}, u_{n+2k-1,m}, \ldots, u_{n-2k+1,m}, u_{n-2k,m}),$$

которые можно назвать симметриями четных порядков $2k$. В работе [1] было показано, что симметрии первого порядка не существует. Вероятно, в этом случае не существует высших симметрий нечетных порядков.

Мы видим, что высшие симметрии для уравнений (3) и (1) зависят от произвольных двухпериодических функций переменной n. То же самое верно для гамильтонова и рекурсионного операторов. Такая ситуация необычна в случае скалярных дискретно-дифференциальных уравнений типа (3) и, вероятно, возникает впервые. Поэтому систему Цучиды (8) можно считать аналогом релятивистской цепочки Тоды, у которой симметрии и эти операторы также зависят от двух параметров. Подобные свойства симметрий обсуждались в работе [12], а свойства операторов исследовались в [27].

5. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы получаем две интегрируемые гиперболические системы уравнений вместе с L–A-парами из высших симметрий дискретного уравнения (1).

Рассмотрим две совместные симметрии вида (3) с $a_n = \chi_n$ и $a_n = \chi_{n-1}$, где $\chi_n = (1 + (-1)^n)/2$, а именно уравнения

$$\begin{aligned} \partial_x u_{n,m} &= h_{n,m} h_{n-1,m} (\chi_n u_{n+2,m} - \chi_{n-1} u_{n-2,m}), \\ \partial_y u_{n,m} &= h_{n,m} h_{n-1,m} (\chi_{n-1} u_{n+2,m} - \chi_n u_{n-2,m}). \end{aligned} \tag{49}$$

Из (11), (13) можно получить следующие системы линейных уравнений:

$$D_x\Psi_{n,m} = A^{(1)}_{n,m}\Psi_{n,m}, \qquad D_y\Psi_{n,m} = A^{(2)}_{n,m}\Psi_{n,m}, \tag{50}$$

где $A^{(1)}_{n,m}$ и $A^{(2)}_{n,m}$ совпадают с матрицей $A_{n,m}$, в которую подставлено $a_n = \chi_n$ и $a_n = \chi_{n-1}$ соответственно. Эта система линейных уравнений совместна на решениях системы (49). Теперь мы изменяем матрицы $A^{(1)}_{n,m}$ и $A^{(2)}_{n,m}$, выражая функции $u_{n\pm2,m}$ через $u_{n,m}, u_{n\pm1,m}$, а также $\partial_x u_{n,m}$ или $\partial_y u_{n,m}$. Мы делаем это, используя следствия системы (49)

$$\begin{aligned} \chi_n u_{n+2,m} &= \frac{\chi_n \partial_x u_{n,m}}{h_{n,m}h_{n-1,m}}, \qquad & \chi_{n-1}u_{n-2,m} &= -\frac{\chi_{n-1}\partial_x u_{n,m}}{h_{n,m}h_{n-1,m}},\\ \chi_{n-1}u_{n+2,m} &= \frac{\chi_{n-1}\partial_y u_{n,m}}{h_{n,m}h_{n-1,m}}, \qquad & \chi_n u_{n-2,m} &= -\frac{\chi_n\partial_y u_{n,m}}{h_{n,m}h_{n-1,m}}. \end{aligned} \tag{51}$$

В результате мы получаем матрицы, которые зависят только от $u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n-1,m}$, и, используя эти матрицы, мы можем получить из (50) систему трех уравнений для трех неизвестных функций.

Чтобы избежать явной зависимости от n, следует перейти к четным или нечетным n. В случае нечетных $n = 2k-1$ введем следующие обозначения:

$$p = u_{2k-1,m}, \qquad q = u_{2k,m}, \qquad r = u_{2k-2,m}. \tag{52}$$

Тогда матрицы примут вид

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{qp_x}{1-pq} + \dfrac{2\lambda}{\lambda-1} & -q \\ \dfrac{2\lambda p_x}{(\lambda-1)(1-pq)} & 1-pq \end{pmatrix}, \tag{53}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{(\lambda-1)(pr-1)}{1+\lambda} & \dfrac{(1-\lambda)r}{1+\lambda} \\ \dfrac{2\lambda p(pr-1)}{1+\lambda} & \dfrac{rp_y}{pr-1} - \dfrac{2\lambda pr}{1+\lambda} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Соответствующие линейные уравнения можно записать в виде

$$D_x\Psi = A^{(1)}\Psi, \qquad D_y\Psi = A^{(2)}\Psi,$$

и их условие совместности выглядит следующим образом:

$$D_x A^{(2)} - D_y A^{(1)} = [A^{(1)}, A^{(2)}]. \tag{55}$$

Это матричное уравнение эквивалентно гиперболической системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial x\,\partial y} + \frac{p_x p_y}{p^2(pq-1)(pr-1)} + (pq-1)(pr-1) = 0,\\ (pr-1)q_y + qrp_y - r(pq-1)(pr-1) = 0,\\ (pq-1)r_x + qrp_x + q(pq-1)(pr-1) = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Таким образом, мы получили интегрируемую систему (56) трех гиперболических уравнений вместе с L–A-парой (53)–(55). Если $u_{n,m}(x,y)$ – общее решение уравнений (49), то функции (52) удовлетворяют системе (56) при любых k,m.

При четных значениях $n=2k$ мы получаем ту же самую гиперболическую систему с точностью до инволюции $x\leftrightarrow y$. В обоих случаях, независимо от четности n, первое из уравнений (56) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 \ln u_{n,m}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial_x u_{n,m}\partial_y u_{n,m}}{u_{n,m}^2(u_{n,m}u_{n-1,m}-1)(u_{n,m}u_{n+1,m}-1)}+\\ +(u_{n,m}u_{n-1,m}-1)(u_{n,m}u_{n+1,m}-1)=0, \tag{57}$$

и это – не что иное, как $(2+1)$-мерная цепочка (m – внешний параметр), подобная $(2+1)$-мерному обобщению цепочки Тоды [17]. Любое совместное решение $u_{n,m}(x,y)$ уравнений (49) является также решением цепочки (57). Вопрос об интегрируемости цепочки (57) в настоящей работе не исследовался и остается открытым.

Для получения второй гиперболической системы уравнений рассматривается следующая пара высших симметрий:

$$\begin{aligned}\partial_x u_{n,m}&=h_{n,m}h_{n-1,m}(\chi_n u_{n+2,m}-\chi_{n-1}u_{n-2,m}),\\ \partial_z u_{n,m}&=(-1)^n\frac{u_{n,m}^2+u_{n,m+1}u_{n,m-1}}{u_{n,m+1}+u_{n,m-1}},\end{aligned} \tag{58}$$

совместная на решениях дискретного уравнения (1). Соответствующая вспомогательная линейная задача имеет вид

$$D_x\Psi_{n,m}=A^{(1)}_{n,m}\Psi_{n,m},\qquad D_z\Psi_{n,m}=B_{n,m}\Psi_{n,m}.$$

Здесь матрица $A^{(1)}_{n,m}$ определена, как в предыдущем случае, матрица $B_{n,m}$ задается формулой (20).

Матрица $A^{(1)}_{n,m}$ преобразовывается при помощи формул (51), в матрице $B_{n,m}$ мы исключаем $u_{n,m-1}$, используя второе из уравнений (58). Для устранения явной зависимости от n перейдем к нечетным $n=2k-1$ и введем обозначения

$$p=u_{2k-1,m},\qquad q=u_{2k,m},\qquad r=u_{2k-1,m+1}. \tag{59}$$

В результате мы получаем ту же самую матрицу $A^{(1)}$ (53) и следующую матрицу B:

$$B=\frac{1}{p-r}\begin{pmatrix}(\lambda-1)(p_z+p) & \dfrac{(1-\lambda)(p_z+r)}{p+r}\\ \lambda(p+r)(p_z+p) & \dfrac{(p-r)(p_z-p)}{p+r}-\lambda(p_z+r)\end{pmatrix}.$$

В этом случае вместо (55) мы приходим к матричному соотношению

$$D_xB-D_zA^{(1)}=[A^{(1)},B]. \tag{60}$$

Соотношение (60) эквивалентно следующей гиперболической системе:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ln p}{\partial x\,\partial z}+\frac{(p_z-p)(p-r)p_x}{p^2(p+r)(pq-1)}+\frac{(p_z+p)(p+r)(pq-1)}{(p-r)p}&=0,\\ (p^2-r^2)q_z-2(qr-1)p_z-q(p^2+r^2)+2r&=0,\\ (pq-1)r_x-(qr-1)p_x-(p+r)(pq-1)(qr-1)&=0.\end{aligned} \tag{61}$$

Имеются четыре варианта гиперболических систем в зависимости от выбора четного или нечетного n и исключения функции $u_{n,m+1}$ или $u_{n,m-1}$ в матрице $B_{n,m}$. Однако все эти системы являются эквивалентными с точностью до простых точечных преобразований.

Случай высших симметрий (49), совместных друг с другом без дополнительных предположений, аналогичен примерам, рассмотренным в работах [12], [28]. Второй случай высших симметрий (58), которые совместны на решениях дискретного уравнения (1), по-видимому, является новым.

Во втором случае мы также можем построить $(2+1)$-мерную цепочку, подобную (57). Однако она является неавтономной и весьма громоздкой, и по этим причинам мы ее не выписываем.

В системах (56), (61) мы можем исключить r или q, используя соответственно второе или третье уравнение. В этом случае мы получим гиперболические системы двух уравнений, аналогичные системам, представленным в работах [12], [28]. Однако эти системы содержат квадратные корни и имеют сложный вид.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы построили L–A-пару для дискретного уравнения (1) и продемонстрировали, что это уравнение отличается от известных примеров с точки зрения L–A-пар.

Большинство известных интегрируемых дискретных уравнений вида (6) имеет L–A-пару вида

$$(T_n - N_{n,m})\Psi_{n,m} = 0, \qquad (T_m - M_{n,m})\Psi_{n,m} = 0 \tag{62}$$

с (2×2)-матрицами $N_{n,m}$, $M_{n,m}$. Имеются также дискретные аналоги уравнения Цицейки с (3×3)-матрицами в L–A-паре (62). L–A-пара нашего уравнения (1) имеет вид

$$(T_n^2 - N_{n,m})\Psi_{n,m} = 0, \qquad (T_m - M_{n,m})\Psi_{n,m} = 0 \tag{63}$$

с (2×2)-матрицами.

В разделе 4 мы построили для уравнения (1) две иерархии высших симметрий в обоих направлениях m и n. Эти иерархии оказываются разнотипными: в направлении m имеются симметрии любого натурального порядка, тогда как в направлении n мы имеем только симметрии четного порядка. Для других известных примеров обе иерархии однотипны.

Иерархии законов сохранения, построенные в разделе 3, также оказываются разнотипными. В направлении m существуют законы сохранения любого натурального порядка, а в направлении n – только нечетного порядка.

Уравнение (3) с $a_n = 1$ относится к классу автономных уравнений вида (22) и является младшим членом своей иерархии. Можно было ожидать, что оно окажется аналогом цепочки Ито–Нариты–Богоявленского (24). Наше исследование показало, что уравнение (3) с $a_n = 1$ тесно связано с известной интегрируемой системой Цучиды (8), которая по своим симметрийным свойствам близка к релятивистской цепочке Тоды.

Другие известные интегрируемые цепочки вида (22) имеют L–A-пары (23) с (2×2)- или (3×3)-матрицами. Наш пример уравнения (3) с $a_n = 1$ отличается от них тем, что L–A-пара имеет вид (25) с матрицами размера 2×2.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (гранты № 12-01-31208, 13-01-00070, 14-01-97008-р-поволжье_а) и Министерством образования и науки РФ (соглашение 8499).

Список литературы

[1] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, *J. Phys. A*, **45**:34 (2012), 345205, 23 pp.
[2] D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna, R. Yamilov, *SIGMA*, **4** (2008), 077, 14 pp.
[3] D. Levi, R. I. Yamilov, *J. Phys. A*, **44**:14 (2011), 145207, 22 pp., arXiv: 1011.0070.
[4] P. Xenitidis, "Integrability and symmetries of difference equations: the Adler–Bobenko–Suris case", *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems* (Protaras, Cyprus, October 26–30, 2008), University of Cyprus, Nicosia, 2009, 226–242, arXiv: 0902.3954.
[5] P. D. Xenitidis, V. G. Papageorgiou, *J. Phys. A*, **42**:45 (2009), 454025, 13 pp.
[6] V. E. Adler, "On a discrete analog of the Tzitzeica equation", arXiv: 1103.5139.
[7] A. V. Mikhailov, P. Xenitidis, *Lett. Math. Phys.*, **104**:4 (2013), 431–450, arXiv: 1305.4347.
[8] C. Scimiterna, M. Hay, D. Levi, *On the integrability of a new lattice equation found by multiple scale analysis*, arXiv: 1401.5691.
[9] T. Tsuchida, *J. Phys. A*, **35**:36 (2002), 7827–7847, arXiv: nlin/0105053.
[10] M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, *J. Math. Phys.*, **21**:5 (1980), 1006–1015.
[11] V. S. Gerdjikov, M. I. Ivanov, *Bulgar. J. Phys.*, **10**:2 (1983), 130–143.
[12] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
[13] D. Levi, R. Yamilov, *J. Math. Phys.*, **38**:12 (1997), 6648–6674.
[14] Р. И. Ямилов, *УМН*, **38**:1(229) (1983), 155–156.
[15] R. Yamilov, *J. Phys. A*, **39**:45 (2006), R541–R623.
[16] G. Tzitzéica, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **25**:1 (1907), 180–187.
[17] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
[18] O. I. Bogoyavlensky, *Phys. Lett. A*, **134**:1 (1988), 34–38.
[19] Y. Itoh, *Proc. Japan Acad.*, **51** (1975), 374–379.
[20] K. Narita, *J. Phys. Soc. Japan*, **51**:5 (1982), 1682–1685.
[21] A. V. Mikhailov, "Formal diagonalisation of Darboux transformation and conservation laws of integrable PDEs, PDΔEs, and PΔEs", Доклад на Международном научном семинаре "Геометрические структуры в интегрируемых системах" (Москва, МГУ, 30 октября – 2 ноября 2012), 2012; http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=eng&presentid=5934.
[22] И. Т. Хабибуллин, М. В. Янгубаева, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 441–467.
[23] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.
[24] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, "Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза", Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Нов. достиж., **24**, ВИНИТИ, М., 1984, 81–180.
[25] А. В. Михайлов, Дж. П. Ванг, П. Ксенитидис, *ТМФ*, **167**:1 (2011), 23–49.
[26] Ф. Ханизаде, А. В. Михайлов, Дж. П. Ванг, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 387–440.
[27] Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **151**:1 (2007), 66–80.
[28] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Алгебра и анализ*, **2**:2 (1990), 183–208.

Поступила в редакцию 18.02.2014