

© 2000 г. В. Э. Адлер*, А. Б. Шабат†, Р. И. Ямилов*

СИММЕТРИЙНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ¹⁾

В обзоре приведены результаты двадцатилетней работы по классификации интегрируемых моделей математической физики на основе симметричного подхода. Центральное место в излагаемой теории занимают обобщенные цепочки Тоды, а также связанные с ними уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера, дискретные преобразования и гиперболические системы. Наряду с этим рассматриваются уравнения типа Пенлеве, мастер-симметрии и задача о критериях интегрируемости $(2 + 1)$ -мерных моделей. Приведены тщательно выверенные списки канонических форм $(1 + 1)$ -мерных интегрируемых систем. Сформулированы эффективные тесты интегрируемости и алгоритмы приведения к каноническому виду.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	356
2. Стационарные решения деформаций интегрируемых уравнений	358
3. Периодические замыкания интегрируемых цепочек	363
3.1. Общая схема	363
3.2. Оператор Шредингера	365
3.3. Оператор с квадратичным потенциалом	366
3.4. Спектральные свойства	373
4. Интегрируемые лагранжианы	378
4.1. Системы уравнений типа НШ	379
4.2. Обобщения цепочки Тоды	382
4.3. Гамильтонова форма записи	385
4.4. Цепочки с зависимостью от n	387
5. Дополнительные списки уравнений	388
5.1. Гиперболические уравнения	388

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

* Институт математики Уфимского центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: adler@imat.rb.ru

† Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

5.2. Цепочка Склянина и еще один класс интегрируемых уравнений на решетке	391
5.3. Цепочки типа уравнения Вольтерра	394
5.4. Другие интегрируемые уравнения на решетке	396
6. Локальные мастер-симметрии	398
6.1. Условия локальности	398
6.2. Локальные мастер-симметрии для класса интегрируемых уравнений	401
6.3. Эллиптический случай	403
7. Достаточное условие интегрируемости двумерных уравнений	405
7.1. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили	406
7.2. Уравнение Дэви–Стюартсона	409
7.3. Двумеризованное уравнение Буссинеска	412
7.4. Техника вычислений	413
Приложение	416
1. Канонические плотности	416
2. Условия интегрируемости и классификационные результаты для дифференциально-разностных уравнений	419

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи классификации интегрируемых уравнений приводят к ключевым уравнениям заданного вида, список которых представляет самостоятельный интерес. При обращении к спискам естественно возникает желание изменить определение интегрируемости на “более надежное” или “более элементарное”, но, как показывает практика, это приводит лишь к перепроверке, а не к изменению списков. Обсуждение этого эффекта на примерах ключевых солитонных уравнений является одной из тем нашего обзора.

Начнем с известного списка шести обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$y'' = a(x, y)y'^2 + b(x, y)y' + c(x, y),$$

удовлетворяющих тесту Пенлеве. Во-первых, мы обращаемся к этому списку в связи с теорией дискретных симметрий, развитой в работах [1–3] для спектральной задачи

$$\Psi_{xx} = U(x, \lambda)\Psi \tag{1.1}$$

с квадратичным по λ потенциалом U . Эта теория, которая в простейшем варианте приводит к цепочке Тоды, позволяет переформулировать уравнения (P₃)–(P₆) (см. ниже) как условия инвариантности спектральной задачи относительно цепочки преобразований Дарбу (раздел 3). Во-вторых, мы показываем, что уравнения (P₁)–(P₅) можно рассматривать как уравнения стационарности мастер-симметрий для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) и нелинейного уравнения Шредингера (НШ) (раздел 2). Напомним,

что уравнения, определяющие симметрии и мастер-симметрии эволюционного уравнения $u_t = G$, можно формально записать в виде

$$[D_{t'}, D_t] = 0, \quad [[D_\tau, D_t], D_t] = 0, \quad (1.2)$$

где эволюционное дифференцирование D_t связано с самим уравнением, а $D_{t'}$ и D_τ — с его симметрией и мастер-симметрией. Соответствующие инфинитезимальные симметрии спектральной задачи (1.1) задаются общей формулой

$$D_\tau(\Psi) = A(x, \lambda)\Psi_x + B(x, \lambda)\Psi,$$

где $D_\tau = \partial_\tau + \omega(\lambda)\partial_\lambda$ и $A(x, \lambda) = a_1(x)\lambda + a_0(x)$. Другими словами, при $\omega = 0$ (изо-спектральный случай) мы приходим к уравнениям КдФ и НШ, а при $\omega \neq 0$ — к их мастер-симметриям (ср. [4–7]).

Как известно, для многих уравнений мастер-симметрии нелокальны (например, для уравнений КдФ, НШ, цепочки Тоды). Однако модель Ландау–Лифшица, играющая роль универсального уравнения в классе НШ, обладает локальной мастер-симметрией [8]. В разделе 6 мы обсуждаем общие критерии локальности и находим локальные мастер-симметрии для универсальных уравнений из других классов.

Существенно новым является введенное в нашем обзоре понятие B -интегрируемых уравнений, для которых существует замена переменных, связывающая данное уравнение и его мастер-симметрию. В $(1+1)$ -мерном случае это понятие не слишком содержательно, так как приводит к уравнениям типа Бюргерса. Ситуация меняется при переходе к $(1+2)$ -мерным уравнениям, для которых мастер-симметрии часто являются тривиальными деформациями. Это наблюдение подтверждается в разделе 7 рядом примеров, связанных с уравнениями Кадомцева–Петвиашвили и Дэви–Стюартсона. Указанное свойство может оказаться полезным при классификации двумерных интегрируемых уравнений. Отметим, что определение (1.2) симметрий и мастер-симметрий не связано с наличием L - A -пары.

Наряду с инфинитезимальными симметриями, в качестве классификационного критерия полезными оказываются дискретные симметрии, или преобразования Дарбу–Беклунда. В разделах 4, 5 мы развиваем это направление при классификации интегрируемых обобщений цепочки Тоды. При этом становится очевидной их связь с уравнениями типа НШ, гиперболическими системами типа Полмейера–Лунда–Редже и аналогами цепочки Абловица–Ладижа. Цепочка Склянина также естественно возникает при таком подходе.

В результате двадцатилетней работы по классификации интегрируемых эволюционных уравнений с одной пространственной переменной были получены списки интегрируемых уравнений и сформулированы эффективные тесты интегрируемости и алгоритмы приведения уравнений к каноническому виду. Этой проблематике посвящены обзоры [9–14]. В приложении и разделах 4, 5 мы приводим основные списки интегрируемых уравнений из наиболее интересных с нашей точки зрения классов таких, как классы уравнений КдФ, НШ, Буссинеска, Тоды и Вольтерра, а также соответствующие

условия интегрируемости (необходимые условия существования высших симметрий и законов сохранения). В приложении также кратко обсуждается общая задача классификации скалярных эволюционных уравнений произвольного порядка.

Обозначения. Значительная часть текста посвящена уравнениям на решетке, поэтому имеет смысл заранее договориться о специфических для них обозначениях. Мы будем писать u, u_1, u_{-1} вместо u_n, u_{n+1}, u_{n-1} , для дважды дискретных уравнений — $u, u_{1,1}, u_{0,-1}$ вместо $u_{m,n}, u_{m+1,n+1}, u_{m,n-1}$ и т.д. Исключение будем делать в тех случаях, когда это может привести к недоразумению, например в формулах с явной зависимостью от дискретной переменной и в формулах суммирования. По аналогии с оператором полной производной D_x мы будем использовать оператор сдвига $T_n: u_n \mapsto u_{n+1}$.

При оформлении списков уравнений мы используем латинские буквы с индексом, например для уравнений Пенлеве: (P_i) , $i = 1, 2, \dots$, а при ссылке на весь список пишем просто (P) .

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе обсуждается связь деформаций²⁾ интегрируемых уравнений с уравнениями Пенлеве

$$y'' = 6y^2 + x, \quad (P_1)$$

$$y'' = 2y^3 + xy + \alpha, \quad (P_2)$$

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}, \quad (P_3)$$

$$y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \quad (P_4)$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) (y')^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{x} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1}, \quad (P_5)$$

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) (y')^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y' + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{x}{y^2} + \gamma \frac{x-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right). \quad (P_6)$$

Покажем, что стационарные решения деформаций уравнения НШ

$$\begin{aligned} u_t &= c_1(x(u_{xx} + 2u^2v) + 2u_x + 2uD_x^{-1}(uv)) + \\ &\quad + c_2(u_{xx} + 2u^2v) + c_3(xu_x + u) + c_4xu + c_5u_x, \\ v_t &= -c_1(x(v_{xx} + 2uv^2) + 2v_x + 2vD_x^{-1}(uv)) - \\ &\quad - c_2(v_{xx} + 2uv^2) + c_3(xv_x + v) - c_4xv + c_5v_x \end{aligned} \quad (2.1)$$

²⁾Терминология [5, 7].

и уравнения КдФ

$$q_t = c_1(x(q_{xxx} - 6qq_x) + 4q_{xx} - 8q^2 - 2q_x D_x^{-1}(q)) + c_2(q_{xxx} - 6qq_x) + c_3(xq_x + 2q) + c_4 \tag{2.2}$$

приводят при различных выборах коэффициентов c_i к уравнениям (P₁)–(P₅). В частном случае $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ данные деформации тривиальны в том смысле, что точечными преобразованиями (растяжение, сдвиг и преобразование Галилея) их можно привести к самим уравнениям НШ или КдФ. При этом их стационарные решения переходят в автомодельные решения уравнения НШ (описываемые уравнениями (P₂) и (P₄) [15]) и КдФ ((P₁) и (P₂) [16, 6]). Таким образом, в общем случае $c_1 \neq 0$ рассматриваемую задачу можно интерпретировать как обобщение хорошо известной задачи перечисления автомодельных редукций. При этом для уравнения НШ мы получаем дополнительно уравнения (P₃) и (P₅) общего положения, а для КдФ – те же уравнения с вырожденными параметрами.

В общем виде эти результаты можно сформулировать следующим образом. Условие совместности линейных задач

$$\Psi_{xx} = U(x, \lambda)\Psi, \quad D_t(\Psi) = A(x, \lambda)\Psi_x + B(x, \lambda)\Psi \tag{2.3}$$

приводит к соотношению $2B_x + A_{xx} = 0$ и уравнению

$$2D_t(U) = 4UA_x + 2U_xA - A_{xxx}. \tag{2.4}$$

Мы рассматриваем квадратичный по λ потенциал U , при этом случаю $U = q - \lambda$ отвечает спектральная задача Шредингера

$$\psi_{xx} = (q - \lambda)\psi \tag{2.5}$$

и иерархия КдФ, а случаю $U = q - 2\lambda z + \lambda^2$ – спектральная задача

$$\psi_{xx} + (z - \lambda)\psi_x + p\psi = 0, \tag{2.6}$$

калибровочно-эквивалентная спектральной задаче Захарова–Шабата, и иерархия, связанная с иерархией НШ дифференциальной подстановкой. Если спектральный параметр зависит от t , т.е.

$$D_t = \partial_t + \omega(\lambda)\partial_\lambda,$$

то уравнение (2.4) определяет деформации этих иерархий. Сюда входят классические симметрии преобразования Галилея и растяжения, а также мастер-симметрии. Вообще говоря, деформированные уравнения являются нелокальными, т.е. содержат интегрирование по x .

Стационарные решения деформаций (2.4) суть обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие представление вида

$$2\omega U_\lambda = 4UA_x + 2U_xA - A_{xxx}. \tag{2.7}$$

Хорошо известно, что стационарные уравнения для самих иерархий КдФ и НШ интегрируемы по Лиувиллю и определяют конечнозонные и солитонные решения [17–20]. Это объясняется тем, что при $\omega = 0$ имеется набор первых интегралов

$$4UA^2 + A_x^2 - 2AA_{xx} = \Lambda(\lambda), \quad (2.8)$$

что позволяет понизить порядок уравнения и в конечном счете получить решения в э́та-функциях. Некоторые из этих интегралов сохраняются и в случае $\omega \neq 0$, так как из соотношения

$$4\omega U_\lambda A = D_x(4UA^2 + A_x^2 - 2AA_{xx})$$

следует, что если λ_0 есть нуль кратности r функции $\omega(\lambda)$, то величины

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}(4UA^2 + A_x^2 - 2AA_{xx})|_{\lambda=\lambda_0}, \quad k = 0, \dots, r-1, \quad (2.9)$$

постоянны. Однако числа этих первых интегралов оказывается недостаточно, чтобы обеспечить интегрируемость по Лиувиллю.

В простейшем случае $A = a_1\lambda + a$ мы воспроизводим результат Гарнье, который можно представить в виде таблицы. В этой таблице и далее в тексте звездочка означает, что параметр может принимать произвольное значение, а единица – произвольное ненулевое значение (напомним, что в уравнениях (P₃) и (P₅) значения параметров можно менять при помощи растяжений). Сравнение первой и второй строк таблицы показывает, что квадратичный по λ потенциал приводит к уравнениям Пенлеве с набором параметров общего положения, а линейный – к вырожденным случаям.

Таким образом, спектральная задача (2.3) с квадратичным по λ потенциалом оказывается достаточной для построения почти всего списка уравнений Пенлеве. Представление (2.7) для уравнения (P₆), принадлежащее Фуксу, связано с рациональными по λ потенциалом U и функцией A .

Вспомогательные линейные задачи для уравнений Пенлеве

$U \backslash \omega(\lambda)$	1	λ	λ^2	$\lambda(\lambda - \lambda_0)$
$q - 2\lambda z + \lambda^2$	(P ₂)	(P ₄)	(P ₃ (* , *, 1, *))	(P ₃ (* , *, *, 1))
$q - \lambda$	(P ₁)	(P ₃₄)	(P ₃ (1, *, 0, *))	(P ₅ (* , *, 1, 0))

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = a_1\lambda + a$, $\omega = w_2\lambda^2 + w_1\lambda + w_0$, тогда уравнение (2.7) с квадратичным по λ потенциалом U приводит к уравнениям Пенлеве (P₁)–(P₅) согласно таблице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в прямом переборе восьми возможных случаев. Сначала рассмотрим потенциал вида $U = q - 2\lambda z + \lambda^2$, при этом уравнение (2.7) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} a'_1 &= w_2, & a' &= (za_1)' + w_1, \\ 4za' + 2z'a - 2qa'_1 - q'a_1 - 2w_1z + 2w_0 &= 0, \\ a''' &= 4qa' + 2q'a + 4w_0z \end{aligned} \tag{2.10}$$

(здесь и ниже штрих означает производную d/dx). Анализ ее решений приводит к следующим результатам. Выбор

$$\omega = 1, \quad U = \frac{3}{4}y^2 + \frac{x}{4} - \lambda y + \lambda^2, \quad A = 8\lambda + 4y$$

дает уравнение (P₂). В остальных случаях мы полагаем, не теряя общности, $w_0 = 0$, при этом потенциал U выражается через A по формулам

$$q = \frac{2aa'' - (a')^2 - c_1}{4a^2}, \quad z = \frac{1}{a_1}(a - w_1x + c_2).$$

Для понижения порядка уравнения на функцию a используется дополнительный первый интеграл вида (2.9). Выбор

$$\omega = -\lambda, \quad a_1 = 1, \quad a = \frac{y}{2}, \quad c_2 = 0$$

приводит к уравнению (P₄) с произвольными параметрами $\alpha, \beta = 2c_1$. Выбор

$$\omega = w_2\lambda^2, \quad a_1 = w_2x$$

и точечная замена $a(x) = \tilde{x}y(\tilde{x}), x = \tilde{x}^2$ приводят к уравнению (P₃) с произвольными параметрами $\alpha = 16c_2/w_2^2, \beta, \delta = 4c_1$ и ненулевым параметром $\gamma = 16/w_2^2$. Наконец, выбор

$$\omega = \lambda(\lambda - \lambda_0), \quad a_1 = x, \quad a = -\frac{\lambda_0 xy}{y - 1}$$

приводит к уравнению (P₅) с ненулевым параметром $\delta = -2\lambda_0^2$ и произвольными параметрами $\alpha, \beta = -c_1/\delta$ и $\gamma = 4\lambda_0 c_2$.

Таким образом, первая строка таблицы получена. Далее, в случае оператора Шредингера имеем $U = q - \lambda$, а уравнение (2.7) эквивалентно системе

$$2a'_1 = w_2, \quad 2a' = 2qa'_1 + q'a_1 + w_1, \quad a''' = 4qa' + 2q'a + 2w_0. \tag{2.11}$$

Уравнение (P₁) получается при $w_2 = w_1 = 0$:

$$\omega = 1, \quad U = 2y - \lambda, \quad A = 2(\lambda + y).$$

В остальных случаях, учитывая сдвиг λ , можно положить $w_0 = 0$, что позволяет проинтегрировать один раз последнее уравнение системы (2.11) и привести ее к виду

$$4a' = 2w_2q + (w_2x + c)q' + 2w_1, \quad 2aa'' - (a')^2 = 4qa^2 + c_1. \quad (2.12)$$

Если $w_2 = 0$, то первое уравнение интегрируется: $4a = cq + 2w_1x + c_2$, и, полагая с учетом линейных преобразований

$$\omega = \lambda, \quad U = u - \frac{x}{2} - \lambda, \quad A = 2\lambda + u,$$

мы приходим к уравнению

$$u'' = \frac{(u')^2 - k^2}{2u} + 2u^2 - xu. \quad (P_{34})$$

В случае $w_2 \neq 0$ положим, не теряя общности, $w_2 = 1$. Второе уравнение системы (2.12) позволяет выразить q через a , что приводит к формулам

$$U = \frac{2aa'' - (a')^2 - c_1}{4a^2} - \lambda, \quad A = \frac{x\lambda}{2} + a.$$

Порядок уравнения на функцию a удается понизить при помощи дополнительного первого интеграла вида (2.9). В случае кратного корня $\omega = \lambda^2$ эта функция удовлетворяет вырожденному уравнению $(P_3(1,*,0,*))$ со значениями параметров $\alpha = 4$, $\gamma = 0$ и произвольными β , $\delta = c_1$.

В наиболее сложном случае $\omega = \lambda(\lambda - 1)$, чтобы привести уравнение к каноническому виду, приходится делать точечную замену

$$2a(x) = x(y(x^2) - 1)^{-1}.$$

Определенная таким образом функция $y(x)$ удовлетворяет вырожденному уравнению $(P_5(*,*,1,0))$ с параметрами $\alpha = -c_1/2$, $\gamma = -1/2$, $\delta = 0$.

Напомним, что уравнение (P_{34}) связано с (P_2) дифференциальными подстановками

$$\begin{aligned} y &= \frac{u' \pm k}{2u}, & \alpha &= \mp k - \frac{1}{2}, \\ u &= y^2 \pm y' + \frac{x}{2}, & k &= \alpha \pm \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

и аналогично уравнение $(P_5(*,*,1,0))$ связано дифференциальной подстановкой с уравнением $(P_3(*,*,1,1))$ [21].

Чтобы связать полученные результаты с уравнениями НШ и КдФ, рассмотрим нестационарное уравнение (2.4). В более простом случае $U = q - \lambda$ оно эквивалентно системе

$$\begin{aligned} 2a_{1,x} &= w_2, & 2a_x &= 2qa_{1,x} + q_x a_1 + w_1, \\ 2q_t &= -a_{xxx} + 4qa_x + 2q_x a + 2w_0, \end{aligned}$$

и, выражая a , a_1 через q при помощи первых двух уравнений, мы получаем уравнение (2.2) с точностью до переобозначения коэффициентов.

В случае $U = q - 2\lambda z + \lambda^2$ уравнение (2.4) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} a_{1,x} &= w_2, & a_x &= (za_1)_x + w_1, \\ 2z_t &= 4za_x + 2z_x a - 2qa_{1,x} - q_x a_1 - 2w_1 z + 2w_0, \\ 2q_t &= -a_{xxx} + 4qa_x + 2q_x a + 4w_0 z, \end{aligned}$$

причем первые два уравнения интегрируются: $a_1 = w_2 x + 2k_2$, $a = za_1 + w_1 x + k_1 - w_2/2$, а последние два превращаются в некоторую эволюционную систему. Несложно показать, что она переходит в деформацию уравнения НШ (2.1) при замене

$$z = -\frac{v_x}{2v}, \quad q = -uv - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{xx}}{v} - \frac{3v_x^2}{2v^2} \right),$$

связывающей уравнение $\Psi_{xx} = U\Psi$ со спектральной задачей Захарова–Шабата

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} -\lambda & -v \\ u & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ \psi_1 &= v^{\frac{1}{2}}\Psi, \quad \psi_2 = -v^{-\frac{1}{2}}(\Psi_x + (\lambda - z)\Psi). \end{aligned}$$

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЗАМЫКАНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЦЕПОЧЕК

3.1. Общая схема. Преобразование Дарбу для спектральной задачи (2.3) задается формулой

$$\bar{\Psi} = A\Psi_x + B\Psi, \tag{3.1}$$

где A и B – многочлены от λ . Покажем, что условие инвариантности относительно комбинации преобразования Дарбу и сдвига спектрального параметра, т.е.

$$\bar{U}(\lambda) = U(\lambda + \varepsilon), \tag{3.2}$$

опять приводит к уравнениям Пенлеве и их высшим аналогам. Чтобы сделать изложение менее громоздким, в п. 3.2, 3.3 мы ограничимся чисто формальным выводом уравнений Пенлеве с привлечением аппарата цепочек, которые определяют разложение общего преобразования Дарбу в произведение элементарных (с линейными A и B). В п. 3.4 мы обсудим спектральные свойства полученных потенциалов на нескольких примерах.

Условие совместности (3.1) и (2.3) приводит к уравнениям

$$(\bar{U} - U)A = 2B_x + A_{xx}, \quad AB_x - A_x B + UA^2 - B^2 = \mu(\lambda), \tag{3.3}$$

где $\mu(\lambda)$ – постоянная интегрирования. В случае $\bar{U} = U$ мы вновь приходим к уравнению (2.8), т.е. класс решений, инвариантных относительно преобразования Дарбу, совпадает с классом стационарных решений [20, 1]. Условие (3.2) определяет разностный аналог стационарных решений деформаций (2.7). В зависимости от степени многочленов A и B мы получаем некоторые известные точнорешаемые модели квантовой механики и потенциалы, выражающиеся через трансценденты Пенлеве, которые, таким образом, можно считать обобщениями этих моделей.

ПРИМЕР 1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР. В случае

$$U = q - \lambda, \quad A = a_1 \lambda + a, \quad B = b_1 \lambda + b, \quad \mu = m_3 \lambda^3 + m_2 \lambda^2 + m_1 \lambda + m_0$$

уравнения (3.3), (3.2) приводят к системе

$$\begin{aligned} a_1^2 &= -m_3, & 2b_1' &= -\varepsilon a_1, & a'' + 2b' &= -\varepsilon a, \\ a_1 b_1' &= b_1^2 + 2a_1 a - a_1^2 q + m_2, \\ a_1 b' + ab_1' - a'b_1 &= 2b_1 b + a^2 - 2a_1 a q + m_1, \\ ab' - a'b &= b^2 - a^2 q + m_0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При $a_1 = m_3 = 0$, $a \neq 0$ система легко решается и с точностью до линейных замен x и λ приводит к ответу

$$\mu = -\lambda^2 + \lambda + m_0, \quad \varepsilon = -2, \quad A = -x, \quad B = \lambda - \frac{x^2}{2}, \quad q = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{m_0}{x^2}.$$

ПРИМЕР 2. ЧЕТВЕРТОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ. В случае $a_1 \neq 0$ положим, не теряя общности,

$$\varepsilon = -2, \quad \mu = -\lambda(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2), \quad a_1 = 1, \quad b_1 = x.$$

Тогда система (3.4) сводится к уравнению (P₄) на переменную $y = b/a - x$ с параметрами $\alpha = (\mu_1 + \mu_2)/2 - 1$, $\beta = -(\mu_1 - \mu_2)^2/2$. При этом получим

$$q = (y + x)^2 - y' - 1, \quad 2a = q + 1 - x^2 - \mu_1 - \mu_2.$$

ПРИМЕР 3. ПОТЕНЦИАЛ МОРСА. Рассмотрим теперь квадратичный по λ потенциал $U = q - 2\lambda z + \lambda^2$. В простейшем случае

$$A = a, \quad B = b_1 \lambda + b, \quad \mu = m_2 \lambda^2 + m_1 \lambda + m_0$$

мы получаем систему

$$\begin{aligned} a^2 - b_1^2 &= m_2, & b_1' &= \varepsilon a, & a'' + 2b' &= -2\varepsilon a z + \varepsilon^2 a, \\ ab_1' - a'b_1 &= 2a^2 z + 2bb_1 + m_1, & ab' - a'b &= b^2 - a^2 q + m_0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отсюда находим

$$q = \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{b}{a}\right)' + \frac{m_0}{a^2}, \quad z = -\frac{b'}{\varepsilon a},$$

где в случае $m_2 = 0$

$$a' = \sigma \varepsilon a, \quad b_1 = \sigma a, \quad b = ka - \frac{\sigma m_1}{4a}, \quad \sigma = \pm 1,$$

а в случае $m_2 = 1$

$$a' = \varepsilon b_1, \quad b_1' = \varepsilon a, \quad b_1^2 = a^2 - 1, \quad b = ka + \frac{1}{2}(m_1 - \varepsilon)b_1.$$

3.2. Оператор Шредингера. В рамках изложенной схемы удобнее раскладывать общее преобразование Дарбу в произведение элементарных, что приводит к представлениям уравнений Пенлеве в виде периодических замыканий интегрируемых цепочек. Для потенциала $U = q - \lambda$ можно показать, что произвольное преобразование Дарбу раскладывается в композицию элементарных преобразований, которые задаются формулами (3.1), (3.3) с $A = 1$, $B = f(x)$, что дает

$$\bar{q} = q + 2f', \quad f' - f^2 + q = \mu. \tag{3.6}$$

В результате N -кратного применения такого преобразования к потенциалу $q_1 = q$ мы получаем потенциал

$$q_{N+1} = q_1 + 2(f_1 + \dots + f_N)',$$

где $f_1' - f_1^2 + q_1 = \mu_1$ и функции f_n связаны цепочкой уравнений

$$f_{n+1}' + f_n' = f_{n+1}^2 - f_n^2 + \nu_n, \tag{3.7}$$

где $\nu_n = \mu_{n+1} - \mu_n$. Условие замыкания $q_{N+1} = q_1 + \varepsilon$ эквивалентно условию периодичности

$$f_{N+1} = f_1, \quad \nu_{N+1} = \nu_1, \quad \nu_1 + \dots + \nu_N = \varepsilon, \tag{3.8}$$

превращающему эту цепочку в конечномерную динамическую систему.

При $N = 2$ и $N = 3$ мы получаем соответственно потенциалы из примеров 1 и 2 (см. п. 3.1). При $N = 3$ имеет смысл повторить вычисления, так как в этом случае систему (3.7), (3.8) можно рассматривать, как удачную запись уравнения (P₄).

Для приведения системы к нормальному виду удобно перейти к переменным $g_n = f_{n+1} + f_n$. Тогда, очевидно, имеем

$$g_1' = g_1(g_2 - g_3) + \nu_1, \quad g_2' = g_2(g_3 - g_1) + \nu_2, \quad g_3' = g_3(g_1 - g_2) + \nu_3, \tag{3.9}$$

причем, не теряя общности, можно положить $\varepsilon = -2$, $g_1 + g_2 + g_3 = -2x$. Исключая g_2, g_3 , легко убедиться, что функция $y = g_1$ удовлетворяет уравнению (P₄), где $2\alpha = \nu_2 - \nu_3$, $2\beta = -\nu_1^2$.

Вывод пятого уравнения Пенлеве, отвечающего случаю $N = 4$, чуть сложнее. Следует отметить, что свойства системы (3.7), (3.8) сильно зависят от четности N . Это связано с тем, что при четном N она неразрешима относительно производных и ее решения могут даже содержать функциональный произвол, как показывает пример редукции $f_j = -f_{N+1-j}$, приводящий к незамкнутой цепочке длины $N/2$. Однако это обстоятельство связано со случайным совпадением параметров ν_j , в случае же общего положения учет связи

$$2(f_1^2 - f_2^2 + \dots - f_N^2) = \nu_1 - \nu_2 + \dots - \nu_N = K \tag{3.10}$$

позволяет получить замкнутую динамическую систему (в частности, при $\varepsilon \neq 0$ система всегда хорошо определена). Далее удобно ввести вспомогательную переменную

$p = f_N - f_1$. Очевидно, все переменные f_j линейно выражаются через g_j и p , в частности при $N = 4$ для g_1, g_2 мы получаем уравнения

$$g_1' = g_1 p + \nu_1, \quad g_2' = -g_2(g_2 - g_1 + p) + \nu_2,$$

а связь (3.10) (с учетом соотношения $\sum g = -\varepsilon x$) принимает вид

$$2\varepsilon x p + (2g_1 + \varepsilon x)(4g_2 + \varepsilon x) = 2K.$$

Исключив из этих трех уравнений p и g_2 , мы получим на переменную g_1 некоторое уравнение второго порядка. Точечная замена

$$2g_1(x) = \frac{\varepsilon x}{y(x^2) - 1}$$

сводит его к уравнению (P₅), параметры которого выражаются через параметры ν_j по формулам

$$\alpha = \frac{\nu_1^2}{2\varepsilon^2}, \quad \beta = -\frac{\nu_3^2}{2\varepsilon^2}, \quad \gamma = \frac{\nu_4 - \nu_2}{4}, \quad \delta = -\frac{\varepsilon^2}{32}$$

и подчиняются единственному ограничению $\delta \neq 0$.

3.3. Оператор с квадратичным потенциалом. В отличие от оператора Шредингера, оператор Дирака допускает пару существенно различных преобразований Дарбу, итерации которых порождают двумерную решетку, изображенную на рис. 1. При этом мы вводим нумерацию так, что сдвиги по осям m и n равноправны и эквивалентны сдвигу в релятивистской цепочке Тоды (RTL), а сдвиг по направлению $m+n = 0$ описывается обычной цепочкой Тоды (TL). Конечно, по сравнению с одевающей цепочкой, в двумерной решетке имеется больше различных вариантов замыкания. Мы покажем, что периодический обрыв, при котором один из узлов на стороне квадрата размера 4×4 на рис. 1 отождествляется с центральным узлом, приводит к уравнениям (P₃) (вырожденному и общего положения), (P₅) и (P₆).

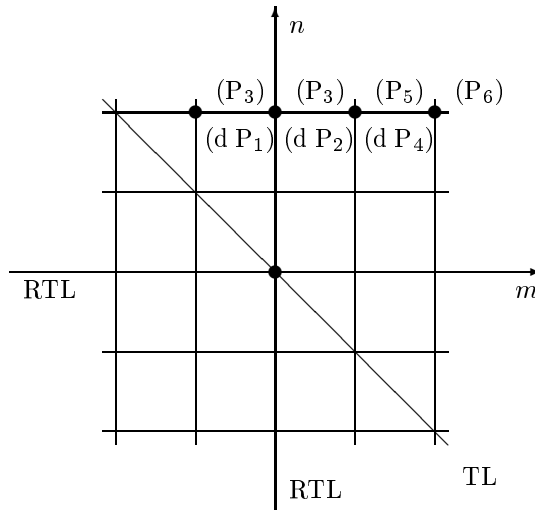


Рис. 1. Уравнения Пенлеве и периодические замыкания уравнений (3.14), (4.11).

Переменные на решетке связаны не только дифференциальными, но и чисто алгебраическими уравнениями, которые можно интерпретировать как принцип нелинейной суперпозиции двух преобразований Дарбу. Условие периодического замыкания превращает их в разностные аналоги уравнений Пенлеве, которые на рисунке обозначены (dP). Данная схема была частично реализована в работах [22, 23].

Из соображений удобства мы будем работать со спектральной задачей

$$\psi'' + (z - \lambda)\psi' + p\psi = 0,$$

или в матричном виде

$$\Psi' = U\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & \lambda - z \end{pmatrix}.$$

Можно доказать, что произвольное преобразование Дарбу раскладывается в композицию элементарных преобразований, определяемых формулами

$$\Psi_{-1,1} = W\Psi, \quad \Psi_{1,0} = M\Psi,$$

где матрицы W и M имеют вид

$$W = \begin{pmatrix} \lambda - z & -1 \\ p_{-1,1} & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{f} \\ -g & \frac{\lambda - \mu - g}{f} \end{pmatrix}.$$

Здесь мы обозначаем преобразованные волновые функции индексами для удобства дальнейшего построения двумерной решетки, в которой все переменные будут нумероваться парой целых чисел m, n . При этом мы обычно будем использовать сокращенные обозначения для сдвигов: $u = u_{m,n}$, $u_{i,j} = u_{m+i, n+j}$.

Условия совместности

$$W' = U_{-1,1}W - WU, \quad M' = U_{1,0}M - MU$$

эквивалентны соответственно соотношениям

$$z' = p - p_{-1,1}, \quad p'_{-1,1} = p_{-1,1}(z - z_{-1,1}), \tag{3.11}$$

$$f' = f^2 + (\mu - z)f + p, \quad g = \frac{p}{f}, \quad z_{1,0} = f + g + \mu, \quad p_{1,0} = g' + p. \tag{3.12}$$

Таким образом, первое преобразование задается явными формулами, его итерации порождают цепочку Тоды

$$q'' = e^{q_{1,-1}-q} - e^{q-q_{-1,1}}, \quad z = q', \quad p = e^{q_{1,-1}-q}. \tag{3.13}$$

Второе преобразование Дарбу сводится к решению уравнения Риккати на функцию $f = -(\psi'/\psi)|_{\lambda=\mu}$. Рассмотрение его итераций и исключение z, p из формул (3.12) приводят к цепочке

$$f' = f(f + g - f_{-1,0} - g_{-1,0} + \nu), \quad g' = f_{1,0}g_{1,0} - fg, \tag{3.14}$$

где $\nu = \mu - \mu_{-1,0}$, являющейся одной из форм записи релятивистской цепочки Голды.

Условие коммутативности введенных преобразований Дарбу

$$W_{1,0}M = M_{-1,1}W$$

приводит к связям

$$fg = f_{0,-1}g_{-1,0}, \quad f_{1,0} + g_{0,1} + \nu_1 = f + g, \quad \mu_{-1,1} = \mu, \quad (3.15)$$

учитывая которые нетрудно переписать цепочку (3.14) в симметричном виде

$$f' = fg - f_{0,1}g_{0,1}, \quad g' = g(f_{0,-1} + g_{0,-1} - f - g - \nu), \quad (3.16)$$

или в виде спаренной цепочки Вольтерра

$$f' = f(g - g_{-1,1}), \quad g' = g(f_{1,-1} - f). \quad (3.17)$$

Заметим, что цепочка (3.16) порождается преобразованием Дарбу

$$\Psi_{0,1} = N\Psi, \quad N = W_{1,0}M = \begin{pmatrix} \lambda - \mu - f & -1 \\ fg_{-1,1} & g_{-1,1} \end{pmatrix},$$

причем уравнение $N' = U_{0,1}N - NU$ эквивалентно соотношениям

$$\begin{aligned} f' &= f^2 + (\mu - z)f + p, & g_{-1,1} &= z - f - \mu, \\ p_{0,1} &= fg_{-1,1}, & z_{0,1} &= f + g_{-1,1} + \mu - g'_{-1,1}. \end{aligned}$$

Заметим также, что множество параметров μ является фактически одномерным, поэтому для их обозначения можно использовать один индекс: $\mu_{i,j} = \mu_{i+j}$, $\nu_{i,j} = \nu_{i+j}$.

Периодические замыкания $f_{m-i,n+i} = f$, $g_{m-i,n+i} = g$ в цепочке Вольтерра (3.17) приводят, как известно, к решениям, выражающимся через тэта-функции. Однако мы можем устроить квазипериодическое замыкание непосредственно в цепочке Голды (3.13), полагая $q_{m+i,n-i} = q + 2\epsilon x$, при этом возникают уравнения типа Пенлеве. В простейшем нетривиальном случае $i = 2$ на функцию $u = q_{1,-1} - q$ получаем уравнение

$$u'' = 2e^{2\epsilon x - u} - 2e^u,$$

которое заменой $e^u(x) = e^{\epsilon x} y(e^{\epsilon x})$ сводится к вырожденному уравнению (P₃) со значениями параметров

$$\alpha = -2\epsilon^{-2}, \quad \beta = 2\epsilon^{-2}, \quad \gamma = \delta = 0.$$

Перейдем теперь к рассмотрению периодических замыканий

$$f_{m+i,n+2} = f_{m,n}, \quad g_{m+i,n+2} = g_{m,n}, \quad \nu_{m+i+2} = \nu_m, \quad i = -1, 0, 1, 2 \quad (3.18)$$

(очевидно, в силу симметрии осей m и n можно ограничиться верхней стороной квадрата на рис. 1). Эти четыре случая были рассмотрены в различных обозначениях: $i = -1, 0$ – в [22], $i = 0, 1$ – в [23], $i = 0, 2$ – в [2], однако в работе [23] рассматривалась динамика только по дискретной переменной, а в [2, 22] – только по непрерывной.

Замыкания первого порядка. Имеет смысл в качестве предварительного упражнения рассмотреть простейшие замыкания, связанные с квадратом размера 2×2 :

$$f_{m+i,n+1} = f_{m,n}, \quad g_{m+i,n+1} = g_{m,n}, \quad \nu_{m+i+1} = \nu_m, \quad i = 0, 1.$$

При $i = 0$ из уравнений (3.16) следует $f' = 0$, $g' = -\nu g$, а из (3.15) получаем $g_{1,0} = g$, $f_{1,0} = f - \nu$.

Аналогично при $i = 1$ имеем, пользуясь одновременно уравнениями (3.14), (3.16),

$$f - g_{0,1} = c = \text{const}, \quad \frac{f}{g_{0,1}} = E, \quad E' = \varepsilon E, \quad \varepsilon = \nu + \nu_1,$$

а из (3.15) следуют равенства $T_n(E) = E$ и $T_n(c) = c + \nu$, откуда $c_{2k} = c_0 + k\varepsilon$, $c_{2k+1} = c_0 + k\varepsilon + \nu$.

Как мы увидим ниже, во всех случаях (3.18) рассматриваемые системы ОДУ допускают понижение порядка до второго. Как и в разобранных выше примерах, это осуществляется с помощью пары первых интегралов, один из которых не зависит от x , но линейно зависит от дискретной переменной, а второй, наоборот, экспоненциально зависит от x и не меняется при сдвигах.

Уравнение $(P_3(, 1, 1, 0))$.* В простейшем случае $i = -1$, пользуясь уравнениями (3.14), (3.16) и (3.17), получаем систему

$$\begin{aligned} f' &= fg - f_{0,1}g_{0,1}, & g' &= g(f_{0,1} - f), \\ f'_{0,1} &= f_{0,1}(g_{0,1} - g), & g'_{0,1} &= g_{0,1}(f + g - f_{0,1} - g_{0,1} - \nu). \end{aligned}$$

Она обладает двумя первыми интегралами

$$f + f_{0,1} + g = c = \text{const}, \quad gg_{0,1}f_{0,1} = E^2, \quad 2E' = -\nu E,$$

с помощью которых сводится к системе

$$f' = fg - \frac{E^2}{g}, \quad g' = g(c - g - 2f).$$

Исключение f и точечная замена $g(x) = Ey(E)$ приводят к уравнению (P_3) со значениями параметров

$$\alpha = -4c\nu^{-2}, \quad \beta = 8\nu^{-2}, \quad \gamma = 4\nu^{-2}, \quad \delta = 0.$$

Рассмотрим теперь эволюцию по дискретному времени n . Она задается системой

$$f_{0,2}g_{0,2} = f_{0,1}g, \quad f_{0,2} + g_{0,1} + \nu = f + g,$$

причем введенные величины c и E определяют первые интегралы и для нее:

$$T_n(c) = c - \nu, \quad T_n(E^2) = E^2.$$

Исключая при помощи этих первых интегралов переменные $f_{0,2}$ и f из второго уравнения системы, полагая $c_n = c_0 - \nu n$ и делая замену $g = E/u$, мы получаем разностное уравнение

$$u_{n+1} + u_{n-1} = \frac{c_0 - \nu n}{u_n} - \frac{x}{u_n^2}, \tag{3.19}$$

известное как дискретное уравнение (P_1) [24, 22].

Уравнения $(P_3(*,*,1,1))$ и $(P_5(*,*,1,0))$. Замыкание $f = f_{0,2}$, $g = g_{0,2}$ приводит к системе

$$\begin{aligned} f' &= fg - f_{0,1}g_{0,1}, & g' &= g(f_{0,1} + g_{0,1} - f - g - \nu), \\ f'_{0,1} &= f_{0,1}g_{0,1} - fg, & g'_{0,1} &= g_{0,1}(f + g - f_{0,1} - g_{0,1} - \nu_1), \end{aligned}$$

обладающей первыми интегралами

$$f + f_{0,1} = c, \quad gg_{0,1} = E^2, \quad 2E' = -\varepsilon E, \quad \varepsilon = \nu + \nu_1.$$

Исключая с их помощью переменные $f_{0,1}$ и $g_{0,1}$, получаем систему

$$f' = fg + \frac{E^2(f - c)}{g}, \quad g' = E^2 - (2f + \nu - c)g - g^2, \quad (3.20)$$

которая сводится к уравнению (P_3) в результате замены $g(x) = Ey(E)$, причем

$$\alpha = 4(\nu - c)\varepsilon^{-2}, \quad \beta = 4(c - \nu_1)\varepsilon^{-2}, \quad \gamma = 4\varepsilon^{-2}, \quad \delta = -4\varepsilon^{-2}.$$

Другая замена $f(x)g(x) = E^2/(1 - y(E^2))$ сводит систему (3.20) к вырожденному уравнению (P_5) со значениями параметров

$$\alpha = \frac{c^2}{2\varepsilon^2}, \quad \beta = -\frac{\nu_1^2}{2\varepsilon^2}, \quad \gamma = -\frac{2}{\varepsilon^2}, \quad \delta = 0.$$

То обстоятельство, что уравнения $(P_3(*,*,1,1))$ и $(P_5(*,*,1,0))$ связаны с одной и той же системой, позволяет получить известное преобразование, связывающее эти уравнения [21].

Эволюция по дискретному времени m задается системой

$$\begin{aligned} f_{1,0}g_{1,0} &= f_{1,1}g, & f_{1,0} + g_{0,1} + \nu_1 &= f + g, \\ f_{1,1}g_{1,1} &= f_{1,0}g_{0,1}, & f_{1,1} + g + \nu &= f_{0,1} + g_{0,1}, \end{aligned}$$

причем в силу этой системы

$$T_m(c) = c - \varepsilon, \quad T_m(E^2) = E^2.$$

Исключая переменные f при помощи первого уравнения системы и соотношения $f_{1,0} + f_{1,1} = c - \varepsilon$, после той же замены, что и в непрерывном случае, приходим к дискретному уравнению (P_2) [24, 22] в виде

$$\frac{c_{m+1}y_{m+1}}{y_{m+1} + y_m} + \frac{c_m y_m}{y_m + y_{m-1}} = x \left(\frac{1}{y_m} - y_m \right) + c_m - \nu, \quad c_m = c_0 - \varepsilon m. \quad (3.21)$$

Уравнение $(P_5(*,*,*,1))$. Замыкание $f = f_{1,2}$, $g = g_{1,2}$ приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} f' &= fg - f_{0,1}g_{0,1}, & g' &= g(f_{1,1} + g_{1,1} - f - g - \nu), \\ f'_{1,1} &= f_{1,1}g_{1,1} - fg, & g'_{0,1} &= g_{0,1}(f + g - f_{0,1} - g_{0,1} - \nu_1), \end{aligned}$$

где “лишние” переменные $f_{0,1}$, $g_{1,1}$, $f_{1,0}$, $g_{0,2}$ исключаются в силу связей (3.15)

$$\begin{aligned} f_{1,1}g_{1,1} &= f_{1,0}g_{0,1}, & f_{1,0} + g_{0,1} + \nu_1 &= f + g, \\ fg &= f_{1,1}g_{0,2}, & f_{1,1} + g_{0,2} + \nu_2 &= f_{0,1} + g_{0,1}. \end{aligned}$$

Переменные $f_{1,1}$, $g_{0,1}$ можно исключить при помощи первых интегралов

$$f + f_{1,1} - g_{0,1} = c, \quad gg_{0,1} = Ef_{1,1}, \quad E' = -\varepsilon E, \quad \varepsilon = \nu + \nu_1 + \nu_2,$$

что приводит к системе

$$\begin{aligned} f' &= (g - E)f - \frac{E}{g - E}(c - f)(c - f + \nu_2), \\ g' &= -2fg - g^2 + g(E + c - \nu) + (c - \nu_1)E. \end{aligned}$$

Исключая f и делая точечную замену $g(x) = Ey(E)/(y(E) - 1)$, мы приходим к уравнению (P_5) с параметрами

$$\alpha = \frac{\nu_2^2}{2\varepsilon^2}, \quad \beta = -\frac{(c - \nu_1)^2}{2\varepsilon^2}, \quad \gamma = \frac{c - \nu}{\varepsilon^2}, \quad \delta = -\frac{1}{2\varepsilon^2}.$$

Дискретная эволюция описывается системой

$$g_{0,2} = \frac{fg}{f_{1,1}}, \quad f_{0,1} = f_{1,1} + g_{0,2} - g_{0,1} + \nu_2,$$

причем

$$T_n(E) = E, \quad T_n(c) = c + \nu_2, \quad T_n^2(c) = c + \nu_2 + \nu, \quad T_n^3(c) = c + \varepsilon,$$

откуда

$$c_n = c_0 + \varepsilon k + \begin{cases} 0, & n = 3k, \\ \nu_2, & n = 3k + 1, \\ \nu + \nu_2, & n = 3k + 2. \end{cases}$$

Исключая переменные f при помощи первых интегралов, получаем из первого уравнения системы следующее уравнение (индекс m здесь можно опустить):

$$g_{n+1} + g_{n-1} = E \left(1 + \frac{c_{n-1}}{g_n} \right).$$

По форме это уравнение совпадает с одной из версий (dP_1) , но отличается от него тем, что множество параметров c_n состоит, вообще говоря, не из одной, а из трех арифметических прогрессий. Впервые это уравнение было получено в работе [23], где была также установлена его эквивалентность (dP_4) .

Уравнение (Р₆). В самом сложном случае $f = f_{2,2}$, $g = g_{2,2}$ удобно переписать композицию преобразований Дарбу (3.14) и (3.16) в виде

$$\begin{aligned} f' - g'_{0,1} &= fg - f_{1,1}g_{1,1}, & \frac{f'_{1,0}}{f_{1,0}} - \frac{g'_{1,1}}{g_{1,1}} &= f_{1,1} + g_{1,1} - f - g + \nu_1 + \nu_2, \\ f_{1,0} + g_{0,1} + \nu_1 &= f + g, & f_{1,1}g_{1,1} &= f_{1,0}g_{0,1}, \end{aligned}$$

который подсказывает введение новых переменных $u = f_{1,0}/g_{1,1}$, $v = f - g_{0,1}$. Используя первые интегралы

$$v + v_{1,1} = c, \quad uu_{1,1} = E, \quad E' = \varepsilon E, \quad \varepsilon = \nu + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$$

и исключая переменные f и g по формулам

$$f = \frac{1}{E-1}(u_{1,1}v_{1,1} + Ev), \quad g = \frac{1}{E-1}(u(v_{1,1} - \nu_3) + v - \nu_1),$$

получаем систему

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{E-1}((2v-c)(u-1)(u-E) + \nu_3 u^2 + (\nu_1 + \nu_2)Eu - (\nu_2 + \nu_3)u - \nu_1 E), \\ v' &= \frac{1}{E-1}uv(c - \nu_3 - v) + \frac{E}{u(E-1)}(v-c)(v-\nu_1). \end{aligned}$$

Она сводится к уравнению (Р₆) в результате замены $u(x) = y(E)$, причем значения параметров могут быть произвольными:

$$\alpha = \frac{(\nu_3 - c)^2}{2\varepsilon^2}, \quad \beta = -\frac{(\nu_1 - c)^2}{2\varepsilon^2}, \quad \gamma = \frac{\nu_2^2}{2\varepsilon^2}, \quad \delta = \frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{2\varepsilon^2}.$$

Эволюция по n описывается формулами

$$\begin{aligned} T_n(E) &= E, & T_n(c) &= c + \nu + \nu_2, & T_n^2(c) &= c + \varepsilon, \\ u_{0,1} &= \frac{uv + E(c-v)}{uv + c - v}, & v_{0,1} &= \nu_2 + \frac{u-1}{(E-1)u}(uv + E(c-v)). \end{aligned}$$

Исключая v и полагая $u = y + 1$, $E = X + 1$, мы получаем разностное уравнение

$$c_n \frac{X - y_{n+1}}{y_{n+1}y_n + X} + c_{n-1} \frac{X - y_{n-1}}{y_{n-1}y_n + X} = \nu_1 + c_{n-1},$$

где $c_{2k} = c_0 + \varepsilon k$, $c_{2k+1} = c_0 + \varepsilon k + \nu + \nu_2$.

3.4. Спектральные свойства.

Арифметическая прогрессия. Обсудим спектральные свойства потенциалов, связанных с трансцендентами Пенлеве [1, 25]. С алгебраической точки зрения все примеры, построенные в п. 3.3, устроены более или менее одинаково: квазипериодическое замыкание цепочки преобразований Дарбу приводит к некоторой алгебре операторов, обобщающей операторы рождения и уничтожения для гармонического осциллятора. Для соответствующих спектральных задач это означает, что мы можем явно построить (в терминах трансцендентов Пенлеве) волновые ψ -функции для дискретного набора значений λ_n , образующего несколько арифметических прогрессий

$$\mu_1 + m\varepsilon, \dots, \mu_N + m\varepsilon, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Например, в случае оператора Шредингера мы имеем последовательность операторов

$$L_n = u_n - D_x^2, \quad A_n = f_n - D_x, \quad A_n^+ = f_n + D_x,$$

связанных цепочкой преобразований Дарбу

$$L_n = A_n^+ A_n + \mu_n \quad \mapsto \quad L_{n+1} = A_n A_n^+ + \mu_n = A_{n+1}^+ A_{n+1} + \mu_{n+1}.$$

При этом функции f_n удовлетворяют цепочке (3.7), а волновые функции $\varphi_{n,k}$ потенциалов u_n , отвечающие значениям $\lambda = \beta_k$, строятся по рекуррентным формулам

$$\varphi_{k,k} = \exp\left(\int f_k dx\right), \quad \varphi_{n,k} = A_n^+ \varphi_{n+1,k}, \quad n < k. \quad (3.22)$$

При наложении условия периодичности применение операторов A_n^+ через N шагов приведет к решению уравнения с потенциалом, сдвинутым на ε . В результате мы и получаем спектр, состоящий из N арифметических прогрессий. Этот процесс для $N = 3$ схематически изображен на рис. 2. Таким образом, как и для гармонического осциллятора, отвечающего случаю $N = 1$, построение собственных функций оператора L_n осуществляется при помощи взаимно сопряженных операторов рождения и уничтожения, но только N -го порядка:

$$\hat{A}_n^+ = A_n^+ \dots A_{n+N-1}^+, \quad \hat{A}_n = A_{n+N-1} \dots A_n.$$

Нетрудно проверить, что аналогом алгебры гармонического осциллятора будут следующие операторные соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{A}_n^+ \hat{A}_n &= P(L_n), & \hat{A}_n \hat{A}_n^+ &= P(L_n + \varepsilon), & P(\lambda) &= (\lambda - \mu_n) \dots (\lambda - \mu_{n+N-1}), \\ [L_n, \hat{A}_n^+] &= \varepsilon \hat{A}_n^+, & [L_n, \hat{A}_n] &= -\varepsilon \hat{A}_n. \end{aligned}$$

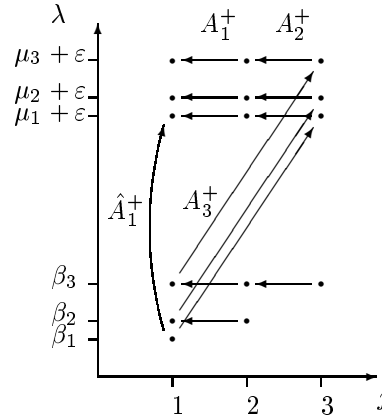


Рис. 2. Начало построения собственных функций.

Более сложным является вопрос о том, при каких условиях функции (3.22) будут собственными. Трудности, которые здесь возникают, носят чисто аналитический характер: нужно уметь отбирать решения уравнения Пенлеве, регулярные на рассматриваемом интервале и имеющие подходящую асимптотику. Например, выше было показано, что решения системы (3.7), (3.8) при $N = 3, 4$ выражаются через четвертый и пятый трансценденты Пенлеве, соответственно. При $N \geq 5$ о решениях мало что известно, хотя есть все основания предполагать, что они также обладают свойством Пенлеве, т.е. их общее решение не имеет подвижных существенно особых точек. Для спектральной теории более важна информация качественного характера о поведении решений на бесконечности и об особенностях на вещественной оси. Из соотношения $2 \sum f_n = \varepsilon x$ видно, что функции f_n “в среднем” линейно растут, что подсказывает следующую асимптотическую формулу:

$$f_n = -\frac{\varepsilon}{2N}x + O(1), \quad u_n = \frac{\varepsilon^2}{4N^2}x^2 + O(x), \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Если вдобавок функции f_n регулярны при вещественных x , то функции $\varphi_{n,k}$, построенные по формулам (3.22), будут собственными. Для обоснования всей конструкции следует убедиться в справедливости этих априорных предположений о характере решений. В этом отношении пока приходится полагаться в основном на численный счет, который показывает, что при нечетных N решения с требуемыми свойствами существуют для достаточно большой области в пространстве параметров и начальных условий системы. Что касается четных N , то для них потенциалы имеют особенность в нуле и правильной является постановка задачи на полуоси (см. рис. 3). Это приводит также к тому, что число составляющих спектр арифметических прогрессий меньше N .

Автомодельная редукция. Изложенные выше идеи впервые были применены в работе [26] к несколько другому варианту квазипериодического замыкания, в котором вместо спектрального сдвига $\lambda \rightarrow \lambda + \varepsilon$ используется растяжение, которое также допускается

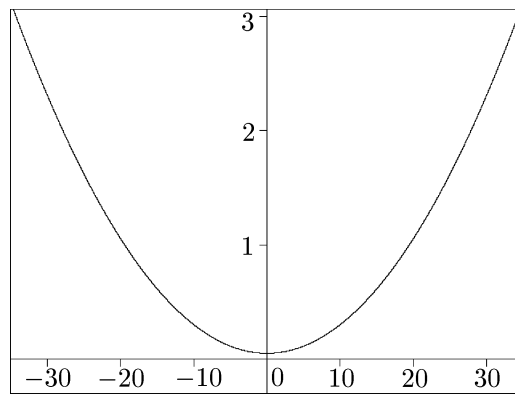
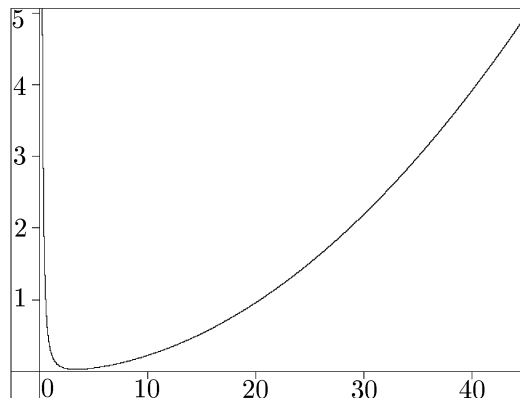
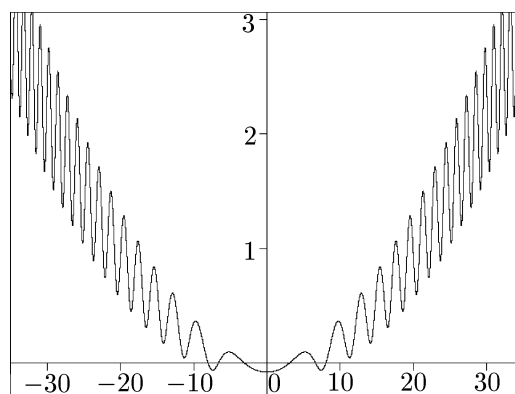
 $N = 1$  $N = 2$  $N = 3$

Рис. 3. Потенциалы u_1 . Для нечетных N в качестве начальных условий взяты $f_j(0) = 0$, что обеспечивает четность потенциала.

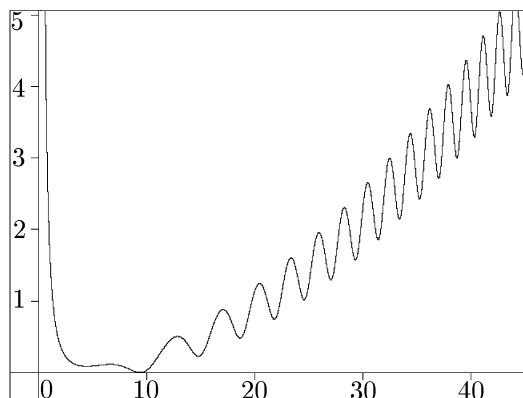
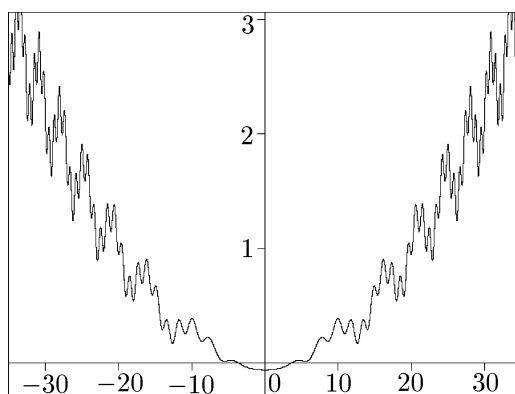
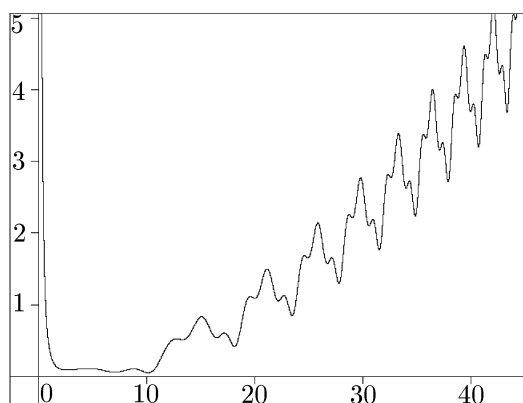
 $N = 4$  $N = 5$  $N = 6$

Рис. 3 (продолжение).

спектральной задачей (2.3):

$$\hat{\psi}(x, \lambda) = \psi(qx, q^k \lambda), \quad 0 < q < 1,$$

где $k = 1$ для квадратичного потенциала и $k = 2$ для линейного. Уже в простейшем случае цепочки (3.7), замкнутой на один шаг, мы получаем дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом:

$$f' + \hat{f}' = f^2 - \hat{f}^2 - 1 + q^2, \quad \hat{f}(x) = qf(qx).$$

По-видимому, общее решение этого уравнения не может быть выражено через элементарные или какие-либо известные специальные функции. Можно показать, что это уравнение обладает свойством Пенлеве [27–29] и счетным семейством рациональных решений [29]. В основе этих утверждений лежит следующий способ построения решения. Фиксируя начальное условие $f(0)$, легко убедиться, что коэффициенты ряда Тейлора находятся однозначно, а сам ряд сходится в некотором круге $|x| < a$. Тогда функция $\hat{f}(x) = qf(qx)$ определена в большем круге $|x| < a/q$, и, следовательно, в этом круге можно определить $f(x)$ как решение уравнения Риккати. Повторяя этот процесс, мы последовательно определяем функцию f во всей комплексной плоскости. При решении уравнений Риккати, конечно, могут накапливаться особенности, но удастся показать, что они могут быть только полюсами.

Численный эксперимент показывает также, что при $|f(0)| < 1$ вещественные решения определены на всей оси и имеют асимптотику

$$f'(x) = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad f(x) = \mp 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Характерные графики поведения $f(x)$ приведены на рис. 3. Следуя схеме предыдущего пункта, нетрудно показать, что потенциалы $u(x)$, отвечающие таким решениям, являются безотражательными и имеют бесконечный набор собственных значений $\lambda_j = -q^{2j}$, $j = 1, 2, \dots$, образующих сходящуюся геометрическую прогрессию. Заметим, что для оператора

$$L = u - D_x^2 = L_f - 1, \quad L_f = (f + D_x)(f - D_x),$$

имеет место неравенство

$$\langle L_f \varphi, \varphi \rangle = \int (f\varphi - \varphi')^2 dx \geq 0,$$

и основное состояние для L_f определяется функцией $\varphi = \exp\left(\int f dx\right)$.

Подводя итог разобранным примерам, сформулируем в качестве рабочей гипотезы следующее утверждение.

ПРИНЦИП КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ЗАМЫКАНИЯ. Дискретный спектр задачи (2.3), являющейся инвариантной относительно композиции преобразования Дарбу и некоторой классической симметрии, может быть найден явно.

4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ

Здесь мы обсудим широкий и интересный с точки зрения приложений (см. [10, 30]) класс систем уравнений

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u})\mathbf{u}_{xx} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x), \quad \det A \neq 0, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2), \quad (4.1)$$

обладающих локальными высшими законами сохранения

$$g_t = f_x. \quad (4.2)$$

Термин *локальный* означает, что плотность g и ток f закона сохранения (4.2) являются функциями конечного числа переменных $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \dots$. Необходимые условия существования локальных высших законов сохранения мы называем *условиями интегрируемости*. Первые два из этих условий заключаются в том, что $\text{tr } A = 0$ и функция $(\det A)^{-1/4}$ является плотностью закона сохранения. Эти условия позволяют доказать, что при помощи замены переменных

$$\begin{aligned} t' &= ct, & \mathbf{u}' &= \mathbf{u}'(\mathbf{u}) = (u'_1(u_1, u_2), u'_2(u_1, u_2)), \\ dx' &= g dx, & g &= (\det A)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

система (4.1) приводится к виду

$$iu_t = u_{xx} + F(u, v, u_x, v_x), \quad iv_t = -v_{xx} + G(u, v, u_x, v_x). \quad (4.3)$$

Простейшие условия интегрируемости для системы (4.3) сформулированы в приложении.

В частности, для нелинейной и нераспадающейся системы вида

$$iu_t = u_{xx} + F(u, v), \quad iv_t = -v_{xx} + G(u, v)$$

условия интегрируемости выполняются в двух случаях: для нелинейного уравнения Шредингера

$$iu_t = u_{xx} + 2u^2v, \quad -iv_t = v_{xx} + 2v^2u$$

и уравнения Буссинеска

$$iu_t = u_{xx} + (u + v)^2, \quad -iv_t = v_{xx} + (u + v)^2.$$

Вообще говоря, список уравнений (4.1), удовлетворяющих условиям интегрируемости, можно разделить на две части. Мы интересуемся частью, связанной со вспомогательной спектральной задачей (2.3) второго порядка (уравнения типа НШ). Вторая часть списка связана со спектральными задачами третьего порядка (класс уравнения Буссинеска), она содержит интересные примеры (см. приложение), но ее рассмотрение выходит за рамки развиваемой здесь теории, которая представляет собой более элементарный альтернативный подход, не использующий условий интегрируемости.

4.1. Системы уравнений типа НШ. Выпишем ключевые интегрируемые системы уравнений типа НШ, включающие собственно НШ, магнетики Гейзенберга и модель Ландау–Лифшица. Сначала обсудим дивергентные системы

$$ip_t = D_x(p_x + F(p, z)), \quad iz_t = D_x(-z_x + G(p, z)),$$

для которых имеет место третий закон сохранения с плотностью pz . В этом случае $F_p = G_z$ и система после переобозначения $z = q_x$ становится лагранжевой, с лагранжианом

$$L = L_0 + V(p, q_x), \quad L_0 = iqp_t + p_xq_x, \quad F = V_z, \quad G = V_p. \quad (4.4)$$

Оказывается, все интегрируемые дивергентные системы (см. [10]) отвечают полиному второй степени по p и z

$$V(p, z) = \varepsilon p^2 z^2 + \alpha p z^2 + \beta z^2 + \gamma p^2 z + \delta p^2 \quad (4.5)$$

(это произвольный полином с точностью до членов $pz, p, z, 1$, которыми можно пренебречь). Соответствующие системы имеют вид

$$ip_t = p_{xx} + (2P(p)z + \gamma p^2)_x, \quad iz_t = -z_{xx} + (2Q(z)p + \alpha z^2)_x, \quad (4.6)$$

$$P(p) = \varepsilon p^2 + \alpha p + \beta, \quad Q(z) = \varepsilon z^2 + \gamma z + \delta. \quad (4.7)$$

В частности, все они имеют локальные мастер-симметрии (см. п. 6.2). Легко показать, что с точностью до линейных преобразований p, z и преобразования Галилея имеется всего три случая:

$$V = \varepsilon p^2 z^2 + \beta z^2 + \delta p^2, \quad V = pz^2 + p^2 z, \quad V = pz^2 + p^2.$$

Наиболее известные системы типа НШ (включающие собственно уравнение НШ и магнетики Гейзенберга) получаются из системы (4.6) при помощи замены переменных вида

$$p = h(u - v), \quad z = v_x. \quad (4.8)$$

Требование, чтобы система на u, v имела вид (4.1) с $A = \text{diag}(-i, i)$, автоматически приводит к уравнению $h' = P(h)$. Это дает

$$iu_t = u_{xx} + 2Q(u_x)h(u - v) + \alpha u_x^2, \quad iv_t = -v_{xx} + 2Q(v_x)h(u - v) + \alpha v_x^2. \quad (4.9)$$

Модификации этих систем уравнений получаются из (4.6) при помощи дифференциальной подстановки

$$p = f(u - v)u_x + g(u - v), \quad z = v_x. \quad (4.10)$$

Вид функций f, g уточняется из того же условия, что и в случае (4.8), приводящего в данном случае к обыкновенным уравнениям

$$f' = 2\varepsilon fg + \alpha f - \gamma f^2, \quad g' = P(g) - \delta f^2. \quad (4.11)$$

Эти уравнения допускают первый интеграл

$$P(g) - \gamma fg + \delta f^2 = \text{const} \cdot f \quad (4.12)$$

и интегрируются в элементарных функциях.

Система в переменных u, v имеет вид

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} + 2Q(u_x)(f(u-v)v_x + g(u-v)) + \alpha u_x^2, \\ iv_t &= -v_{xx} + 2Q(v_x)(f(u-v)u_x + g(u-v)) + \alpha v_x^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Очевидно, что система (4.13) сводится к (4.9) преобразованием

$$\tilde{u} = v + h^{-1}(fu_x + g), \quad \tilde{v} = v.$$

При $f = 0$ это преобразование становится тривиальным, так как функция g удовлетворяет тому же уравнению, что и h , т.е. система (4.13) переходит в (4.9).

Заметим также, что система (4.13) выдерживает инволюцию

$$u \leftrightarrow -v, \quad x \leftrightarrow -x, \quad t \leftrightarrow -t,$$

и, следовательно, существует еще одно преобразование

$$p = f(u-v)v_x + g(u-v), \quad q = u,$$

связывающее (4.6) и (4.13).

Помимо (4.4), (4.5), мы рассмотрим лагранжиан

$$L = L_0 + p^2(q_x^2 - R(q)) + \frac{1}{2}pR'(q) - \frac{1}{12}R''(q), \quad R^V = 0, \quad (4.14)$$

играющий особую роль в нашей классификации. Как и в предыдущем случае, этот лагранжиан допускает две параметризации, приводящие соответствующую динамическую систему к виду (4.1) с $A = \text{diag}(-i, i)$.

Первая параметризация имеет вид $p = (v-u)^{-1}$, $q = v$ (ср. (4.8)) и приводит к системе

$$iu_t = u_{xx} + 2\frac{R(u) - u_x^2}{u-v} - \frac{1}{2}R'(u), \quad iv_t = -v_{xx} + 2\frac{R(v) - v_x^2}{u-v} + \frac{1}{2}R'(v), \quad (4.15)$$

где R — произвольный полином четвертой степени.

Вторая параметризация задается формулами $p = (r_v - u_x)/2r$, $q = v$, где $r = r(u, v)$ — симметрический многочлен, квадратичный по u и v , такой, что $R(u)$ является его дискриминантом:

$$R(u) = r_v^2 - 2rr_{vv}, \quad r(u, v) = r(v, u), \quad r_{uuu} = 0. \quad (4.16)$$

Она приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} + (R(u) - u_x^2) \frac{v_x + r_u}{r} - \frac{1}{2}R'(u), \\ iv_t &= -v_{xx} + (R(v) - v_x^2) \frac{u_x - r_v}{r} + \frac{1}{2}R'(v). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Преобразование, сводящее (4.17) к (4.15), задается формулами

$$\tilde{u} = v + \frac{2r}{u_x - r_v}, \quad \tilde{v} = v.$$

Рассмотрим несколько примеров. Система (4.9), соответствующая лагранжиану

$$L = L_0 + pq_x^2 \pm p^2,$$

после точечной замены $\tilde{u} = e^u$, $\tilde{v} = e^{-v}$ и редукции $\tilde{u} = \psi$, $\tilde{v} = \bar{\psi}$ превращается в уравнение НШ

$$i\psi_t = \psi_{xx} \pm 2|\psi|^2\psi.$$

Аналогично лагранжиан $L = L_0 + p^2 q_x^2$ приводит к системе уравнений

$$iu_t = u_{xx} - 2\frac{u_x^2}{u-v}, \quad iv_t = -v_{xx} - 2\frac{v_x^2}{u-v},$$

связанной с комплексификацией модели Гейзенберга

$$s_t = [s, s_{xx}], \quad s \in \mathbb{C}^3, \quad \langle s, s \rangle = 1$$

посредством замены

$$s = S(u, v) = \frac{1}{u-v}(1 - uv, i + iuv, u + v) \quad (4.18)$$

(при $v = -1/\bar{u}$ эта замена совпадает со стереографической проекцией). Эта же замена связывает систему (4.15) с уравнением Ландау–Лифшица

$$s_t = [s, s_{xx} + Js], \quad s \in \mathbb{C}^3, \quad \langle s, s \rangle = 1, \quad (4.19)$$

где J – симметричная матрица, вообще говоря, с комплексными коэффициентами. Многочлены R, r определяются матрицей J по формулам

$$R(u) = \frac{1}{4}(u-v)^4 \langle s_v, Js_v \rangle, \quad r(u, v) = \frac{i}{4}(u-v)^2 \langle s, Ks \rangle, \quad (4.20)$$

где $s = S(u, v)$, а матрицы J и K связаны соотношением

$$J = CI - \det(K)K^{-1}, \quad (4.21)$$

где C – произвольная постоянная. Мы будем называть (4.15) системой Ландау–Лифшица, а (4.17) – модифицированной системой Ландау–Лифшица. Эти системы уравнений являются наиболее общими среди систем типа НШ в том смысле, что остальные системы могут быть получены из них, подобно тому как все уравнения Пенлеве получаются из (P₆). Однако, в отличие от списка Пенлеве, здесь используются как предельные переходы, так и дифференциальные подстановки.

4.2. Обобщения цепочки Тоды. Обсудим списки интегрируемых цепочек, соответствующих вариационной задаче для функционала

$$\mathcal{L} = \int dx \sum_n L(z_n, q_{n+1}, q_n), \quad z_n \equiv q_{n,x}. \quad (4.22)$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$D_x(L_z) = L_q + T_n^{-1}(L_{q_1}), \quad (4.23)$$

где T_n – оператор сдвига $q_n \rightarrow q_{n+1}$. Мы будем рассматривать лагранжианы частного вида

$$L(z, q_1, q) = L_0(z, q) + zV(q_1, q) + U(q_1, q), \quad (4.24)$$

где первый и последний члены определяют кинетическую и потенциальную энергию, а средний – магнитное поле (или гироскопические силы). Случай $V = 0$ и $V \neq 0$ оказываются существенно различными и, как мы покажем ниже, соответствуют двум различным параметризациям (4.8) и (4.10).

В качестве критерия отбора интегрируемых случаев мы используем симметричный тест по вариационным симметриям вида

$$q_t = B(z_1, z, z_{-1}, q_1, q, q_{-1}). \quad (4.25)$$

В силу теоремы Нётер вариационная симметрия порождает закон сохранения согласно формулам

$$D_t(L) \in \text{Im } D_x + \text{Im}(T_n - 1) \Leftrightarrow B \frac{\delta L}{\delta u} \in \text{Im } D_x + \text{Im}(T_n - 1)$$

и является также высшей симметрией в обычном смысле, т.е. уравнением, совместным с цепочкой (4.23).

Например, экспоненциальная цепочка Тоды

$$q_{xx} = e^{q_1 - q} - e^{q - q_{-1}} \quad (4.26)$$

соответствует лагранжиану $L = z^2/2 - e^{q_1 - q}$ и обладает вариационной симметрией

$$q_t = e^{q_1 - q} + e^{q - q_{-1}} + q_x^2.$$

Имеется разбиение на два класса: сдвигово-инвариантные цепочки и цепочки эллиптического типа, связанные с моделью Ландау–Лифшица. Любой лагранжиан, обладающий классической симметрией $q_\tau = \psi(q)$, точечной заменой приводится к виду

$$L = L_0(z) + zV(y) + U(y), \quad y \equiv q_1 - q, \quad (4.27)$$

инвариантному относительно сдвига $q_\tau = 1$ (отвечающему закону сохранения импульса $\sum_n L_{z_n}$). Соответствующая цепочка (4.23) имеет вид

$$q_{xx} = Q(z)(z_1 f(y) - z_{-1} f(y_{-1}) + g(y) - g(y_{-1})), \quad (4.28)$$

где

$$Q(z) = \frac{1}{L_0''(z)}, \quad f(y) = -V'(y), \quad g(y) = -U'(y).$$

Прямое и несложное вычисление приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. *Лагранжианы (4.27) допускают вариационную симметрию вида*

$$q_t = Q(z)(z_1 f(y) + z_{-1} f(y_{-1}) + g(y) + g(y_{-1})) + s(z) \quad (4.29)$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} f' &= 2\varepsilon f g + \alpha f - \gamma f^2, & g' &= P(g) - \delta f^2, & s &= \alpha z^2, \\ P &= \varepsilon g^2 + \alpha g + \beta, & Q &= \varepsilon z^2 + \gamma z + \delta. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Заметим, что определение функций P, Q, f, g в точности совпадает с (4.7), (4.11).

В важном частном случае $f = 0$ (при этом удобно отождествить g с функцией h из (4.9)) мы приходим к классу интегрируемых цепочек

$$q_{xx} = Q(z)(h(y) - h(y_{-1})), \quad h' = P(h), \quad Q'' = P'' = 2\varepsilon, \quad (4.31)$$

содержащему цепочку Тоды (4.26). Общий случай (4.28), (4.30) с $f \neq 0$ мы будем называть классом релятивистской цепочки Тоды по названию наиболее известного представителя этого класса – цепочки (R_3) при $\nu = 0$ из списка, который приведен в конце настоящего пункта.

Как и в п. 4.1, особое место занимают два лагранжиана вида (4.24), не обладающие сдвиговой инвариантностью. Для них кинетическая энергия определяется слагаемым

$$L_0 = \frac{1}{2\sqrt{R}} [(\sqrt{R} + z) \ln(\sqrt{R} + z) + (\sqrt{R} - z) \ln(\sqrt{R} - z)],$$

а функции U и V задаются формулами

$$V = 0, \quad U = -\ln(q_1 - q), \quad (4.32)$$

$$V_{q_1} = -\frac{1}{2r(q_1, q)}, \quad U = \frac{1}{2} \ln r(q_1, q), \quad (4.33)$$

где в обоих случаях $R(z)$ есть многочлен не выше четвертой степени, $r(u, v)$ – симметрический полином степени не выше 2 по каждой переменной, причем R является его дискриминантом (см. (4.16)). Цепочки, отвечающие указанным лагранжианам, имеют соответственно вид

$$q_{xx} = (R(q) - z^2) \left(\frac{1}{q_1 - q} - \frac{1}{q - q_{-1}} \right) + \frac{1}{2} R'(q), \quad (4.34)$$

$$q_{xx} = (z^2 - R(q)) \left(\frac{z_1 + \partial_q r(q_1, q)}{2r(q_1, q)} - \frac{z_{-1} - \partial_q r(q, q_{-1})}{2r(q, q_{-1})} \right) + \frac{1}{2} R'(q). \quad (4.35)$$

Отметим, что замена $q = \varphi(\tilde{q})$, $(\varphi')^2 = R(\varphi)$ позволяет положить $R = 1$ в кинетическом члене L_0 . В случае кратных корней R (или, что эквивалентно, приводимости полинома r) эта замена и дробно-линейные преобразования позволяют привести лагранжиан к виду (4.27). Однако в общем случае она усложняет вид цепочек, вводя эллиптические функции. Например, цепочка (4.34) записывается в терминах дзета-функции Вейерштрасса следующим образом:

$$q_{xx} = (q_x^2 - 1)(\zeta(q + q_1) + \zeta(q - q_1) + \zeta(q + q_{-1}) + \zeta(q - q_{-1}) - 2\zeta(q)).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Уравнения

$$q_t = (R(q) - z^2) \left(\frac{1}{q_1 - q} + \frac{1}{q - q_{-1}} \right), \quad (4.36)$$

$$q_t = (z^2 - R(q)) \left(\frac{z_1 + \partial_q r(q_1, q)}{2r(q_1, q)} + \frac{z_{-1} - \partial_q r(q, q_{-1})}{2r(q, q_{-1})} \right) \quad (4.37)$$

задают вариационные симметрии лагранжиана (4.24) в случаях (4.32) и (4.33), соответственно.

Функции P, Q, f, g, h, R и r , определяющие системы типа НШ (4.9), (4.13), (4.15), (4.17) и соответственно цепочки (4.28), (4.31), (4.34), (4.35), совпадают. Эту связь легче всего объяснить следующим образом. Складывая и вычитая цепочку (4.28) и ее симметрию (4.29), мы получаем систему уравнений (4.13) на функции $u = q, u = q_{-1}$ (с точностью до замены $t \rightarrow it$). Аналогично из цепочки (4.31) получается система (4.9), а из цепочек (4.34) и (4.35) – системы (4.15) и (4.17), соответственно. Это кажется удивительным, но в соответствии с результатами [31] объясняется тем, что уравнения на решетке задают для систем типа НШ автопреобразования Беклунда.

В заключение, чтобы за общими формулами для цепочек и системами ОДУ для определяющих их функций не затерялись отдельные уравнения, мы приводим два списка интегрируемых цепочек. Отметим, что эти списки вместе с цепочками (4.34), (4.35) (R и r определены в (4.16)) полностью воспроизводят классификационные результаты работ [32–35]. Исключение составляет одна из модификаций цепочки Тоды, приведенная в приложении 2. Аналогичный подробный список систем уравнений типа НШ можно найти в [30]. Таким образом, используя идеи работы [31] о соответствии между цепочечными и непрерывными уравнениями и несколько лагранжианов вида (4.4) и (4.24), удалось объединить абсолютно различные на первый взгляд теории.

Списки (Т) и (R) получены из (4.31) и (4.28) (с определяющими функциями (4.30)) при помощи несложных точечных преобразований, в частности линейных замен с зависимостью от x и n : $\tilde{q}_n = q_n + ax + bn + c$. Напомним, что мы используем обозначения $z = q_x, y = q_1 - q$, а μ, ν – произвольные постоянные.

Класс цепочки Тоды:

$$z_x = e^y - e^{y-1}, \quad (T_1)$$

$$z_x = z(y - y_{-1}), \quad (T_2)$$

$$z_x = z(e^y - e^{y-1}), \quad (T_3)$$

$$z_x = (\mu - z^2) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_{-1}} \right), \quad (T_4)$$

$$z_x = (\mu - z^2)(\text{th } y - \text{th } y_{-1}). \quad (T_5)$$

Класс релятивистской цепочки Тоды:

$$z_x = z_1 e^y - z_{-1} e^{y-1} - e^{2y} + e^{2y-1}, \quad (R_1)$$

$$z_x = z \left(\frac{z_1}{y} - \frac{z_{-1}}{y_{-1}} + y - y_{-1} \right), \tag{R_2}$$

$$z_x = z \left(\frac{z_1}{1 + \mu e^{-y}} - \frac{z_{-1}}{1 + \mu e^{-y_{-1}}} + \nu(e^y - e^{y_{-1}}) \right), \tag{R_3}$$

$$z_x = z(z + 1) \left(\frac{z_1}{y} - \frac{z_{-1}}{y_{-1}} \right), \tag{R_4}$$

$$z_x = z(z - \mu) \left(\frac{z_1}{\mu + e^y} - \frac{z_{-1}}{\mu + e^{y_{-1}}} \right), \tag{R_5}$$

$$z_x = (z^2 + \mu) \left(\frac{z_1 - y}{\mu + y^2} - \frac{z_{-1} - y_{-1}}{\mu + y_{-1}^2} \right), \tag{R_6}$$

$$z_x = \frac{1}{2}(z^2 + 1 - \mu^2) \left(\frac{z_1 - \operatorname{sh} y}{\mu + \operatorname{ch} y} - \frac{z_{-1} - \operatorname{sh} y_{-1}}{\mu + \operatorname{ch} y_{-1}} \right). \tag{R_7}$$

4.3. Гамильтонова форма записи. Обсудим переход от лагранжевой формы записи для цепочек (4.23) к гамильтоновой. Преобразование Лежандра для функционала (4.22)

$$p = \frac{\partial L}{\partial q_x}, \quad H = pq_x - L$$

приводит к гамильтоновым системам вида

$$q_x = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad p_x = -\frac{\delta H}{\delta q}, \quad H = H(p, q, q_1), \tag{4.38}$$

где вариационная производная определяется формулой

$$\frac{\delta f}{\delta u} = \sum_k \frac{\partial}{\partial u} T_n^k(f).$$

В общем случае преобразование $q, q_x \rightarrow q, p$ задается формулой вида $p = \varphi(q_x, q, q_1)$, т.е. оказывается обратимой треугольной дифференциальной подстановкой.

Рассмотрим сначала лагранжианы вида (4.24) с $V \neq 0$. Можно показать, что в интегрируемых случаях происходит некое дополнительное сокращение, в результате гамильтониан представляется в виде $H = A(q_1, p) + B(q, p)$. На практике удобно подправлять каноническую скобку Дарбу треугольной точечной заменой и рассматривать вместо (4.38) системы чуть более общего вида:

$$u_x = r(u, v) \frac{\delta H}{\delta v}, \quad v_x = -r(u, v) \frac{\delta H}{\delta u}. \tag{4.39}$$

Например, релятивистскую цепочку Тоды (R₃) с $\mu = 1, \nu = 0$ удобно записывать в полиномиальном виде:

$$u_x = uv(u_1 + u), \quad v_x = -uv(v + v_{-1}), \tag{4.40}$$

что соответствует $r = uv$, $H = u_1v + uv$. Обратимая замена переменных $q, q_x \rightarrow u, v$ в данном случае имеет вид

$$u = e^q, \quad v = \frac{q_x}{e^{q_1} + e^q}.$$

Заметим, что обратный переход от систем вида

$$u_x = f(u_1, u, v), \quad v_x = g(v_{-1}, v, u) \quad (4.41)$$

с $f_v \neq 0$ к релятивистским цепочкам можно проводить, не используя гамильтоновости и даже когда ее нет вовсе. Вводя переменные $q = u$, $z = f(u_1, u, v)$, мы видим, что замена обратима: $u = q$, $v = \psi(q_1, q, z)$, и легко можем проверить, что q удовлетворяет цепочке вида $q_x = z$, $z_x = \Phi(z_1, z, z_{-1}, q_1, q, q_{-1})$.

Таким образом, используя список релятивистских цепочек Тоды (R), можно получить некоторый список интегрируемых гамильтоновых цепочек. Мы приводим их вместе с гамильтонианами и структурными функциями r , которые подбирались так, чтобы уравнения были полиномиальными или рациональными.

Список интегрируемых гамильтоновых цепочек (4.39):

$$u_x = u_1 + \alpha u + u^2 v, \quad -v_x = v_{-1} + \alpha v + v^2 u, \quad (H_1)$$

$$r = 1, \quad H = u_1 v + \alpha uv + \frac{1}{2} u^2 v^2;$$

$$u_x = r(u_1 - u + \alpha r_v) + \beta r_v, \quad -v_x = r(v_{-1} - v + \alpha r_u) + \beta r_u, \quad (H_2)$$

$$r = k_1 uv + k_2 u + k_3 v + k_4, \quad r_u r_v \neq 0,$$

$$H = (u_1 - u)v + \alpha r + \beta \ln r;$$

$$u_x = \frac{2r}{u_1 - v} + r_v + \alpha u + \beta, \quad -v_x = \frac{2r}{v_{-1} - u} + r_u - \alpha v - \beta. \quad (H_3)$$

Здесь многочлен r задается одной из трех формул:

$$r = k_1(u - v)^2 + k_2(u - v) + k_3, \quad \alpha = 0,$$

$$r = k_1 uv + k_2 u^2 + k_3 v^2, \quad \beta = 0,$$

$$r = k_1 u^2 v^2 + k_2 uv(u + v) + k_3(u^2 + v^2) + k_4 uv + k_5(u + v) + k_6, \quad \alpha = \beta = 0,$$

а гамильтонианы равны соответственно

$$H = \ln r - 2 \ln(u_1 - v) - s(u - v), \quad s' = \frac{\beta}{r},$$

$$H = \ln r - 2 \ln(u_1 - v) + s, \quad s_v = \frac{\alpha u}{r}, \quad s_u = -\frac{\alpha v}{r},$$

$$H = \ln r - 2 \ln(u_1 - v).$$

Этот список был получен в результате симметричной классификации [36], причем раньше, чем эквивалентный ему (как выяснилось совсем недавно) список релятивистских цепочек Тоды. Некоторые из уравнений этого списка обсуждались в работах

[31, 37] (в последней работе, например, для ряда цепочек получены представления нулевой кривизны и весьма специфические автопреобразования).

В нерелятивистском случае лагранжиан имеет вид (4.24) с $V = 0$ и замена $q, q_x \rightarrow q, p$ оказывается точечной: $p = \varphi(q_x, q)$. Поэтому в качестве гамильтоновых переменных можно принять

$$u = q, \quad v = q_x,$$

при этом для сдвигово-инвариантного случая (4.27) цепочка (4.39) определяется формулами

$$r = P(v), \quad H = G(u_1 - u) + F(v), \quad G' = g, \quad F'(v) = \frac{v}{P(v)},$$

а для эллиптической цепочки (4.34) имеем

$$r = v^2 - R(u), \quad H = \frac{1}{2} \ln r - \ln(u_1 - u).$$

4.4. Цепочки с зависимостью от n . Для некоторых из перечисленных выше цепочек существуют интегрируемые обобщения с зависимостью от n . Они возникают, если рассматривать цепочку как итерации преобразования Беклунда при различных значениях спектрального параметра. Например, в наиболее простом случае (Н₁), соответствующем уравнению НШ, следует просто считать параметр ε произвольной последовательностью от n . Для остальных гамильтоновых цепочек из списка (Н) такие обобщения были найдены в работе [37]. В лагранжевой форме записи мы приходим к релятивистским цепочкам Тоды с коэффициентными функциями, описываемыми той же системой (4.11), что и раньше, но с переменным значением первого интеграла (4.12) [38]:

$$\begin{aligned} f'_n &= 2\varepsilon f_n g_n + \alpha f_n - \gamma f_n^2, & g'_n &= P(g_n) - \delta f_n^2, \\ P(g_n) - \gamma f_n g_n + \delta f_n^2 &= c_n f_n. \end{aligned}$$

В качестве следующего примера рассмотрим цепочку вида (Н₃)

$$u_{n,x} = \frac{2r_n}{u_{n+1} - v_n} + r_{n,v_n}, \quad -v_{n,x} = \frac{2r_n}{v_{n-1} - u_n} + r_{n,u_n},$$

где $r_n = r_n(u_n, v_n)$, как и раньше, — многочлен не выше второй степени по каждой переменной, но с коэффициентами, зависящими от n , и не обязательно симметрический. Введем обозначения для дискриминантов $r_n(u, v)$:

$$R_n(u) = r_{n,v}^2 - 2r_n r_{n,vv}, \quad \tilde{R}_n(v) = r_{n,u}^2 - 2r_n r_{n,uu}.$$

Можно показать, что цепочка является интегрируемой, т.е. обладает высшими симметриями, если зависимость r от n такова, что

$$\tilde{R}_n(u) = R_{n+1}(u).$$

Алгебраическая задача об описании многочленов с таким свойством легко решается в предположении, что хотя бы один из дискриминантов R_n не имеет кратных корней, т.е. кривая

$$z^2 = R_n(u) = a_n u^4 + 4b_n u^3 + 6c_n u^2 + 4d_n u + e_n$$

является эллиптической. Прямое вычисление показывает, что относительные инварианты

$$g_{2,n} = a_n e_n - 4b_n d_n + 3c_n^2, \quad g_{3,n} = \det \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ b_n & c_n & d_n \\ c_n & d_n & e_n \end{pmatrix}$$

многочлена R_n совпадают с относительными инвариантами \tilde{R}_n . Так как $\tilde{R}_n = R_{n+1}$, то они не зависят от n , т.е. $g_{2,n} = g_2$, $g_{3,n} = g_3$. Заметим, что многочлен R_n меняется при дробно-линейной замене в цепочке точно так же, как указанная кривая. Отсюда следует (см. [39]), что дробно-линейными преобразованиями все многочлены R_n можно привести к одному и тому же виду, например к канонической форме Вейерштрасса. При этом многочлен r_n восстанавливается с точностью до одного произвольного параметра:

$$R_n(u) = R(u) = 4u^3 - g_2 u - g_3, \quad r_n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{R(\lambda_n)}} h(u, v, \lambda_n),$$

где

$$h(u, v, w) = \left(uv + uw + vw + \frac{g_2}{4} \right)^2 - (u + v + w)(4uvw - g_3). \quad (4.42)$$

В инвариантном виде ответ формулируется следующим образом: многочлены R и r_n определяются по формулам (4.20), где J и K – симметричные матрицы, причем J не зависит от n , а $K = K_n$ определяются по формуле (4.21) с произвольными постоянными C_n .

В вырожденном случае приведем два примера цепочки Гейзенберга с частичной анизотропией, для которых зависимость r от n задается формулами

$$r_n = -\beta_n (u_n - v_n)^2 - \frac{\varepsilon}{\beta_n}$$

и

$$r_n = \gamma_n (u_n^2 + v_n^2) + \beta_n u_n v_n, \quad \gamma_n^2 - \beta_n^2 = \delta.$$

5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СПИСКИ УРАВНЕНИЙ

5.1. Гиперболические уравнения. В настоящее время задача о классификации интегрируемых гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (5.1)$$

далека от своего решения. В частном случае $f = f(u)$ ответ известен [40] и состоит из уравнений Лиувилля, синус-Гордон и Цицейки:

$$u_{xy} = e^u, \quad u_{xy} = \sin u, \quad u_{xy} = e^u + e^{-2u}.$$

В общем случае известные списки труднообозримы и до сих пор продолжают пополняться. В качестве примера приведем уравнение

$$u_{xy} = \operatorname{sn}(u) \sqrt{(1 - u_x^2)(1 - u_y^2)},$$

недавно обнаруженное в работах [41, 42].

Имеет существенное продвижение задача об уравнениях с двумя псевдоконстантами, или x - и y -интегралами $D_x(A) = D_y(B) = 0$, где функция A зависит от y, u, u_y, u_{yy}, \dots , а B — от x, u, u_x, u_{xx}, \dots [43]. Для многокомпонентных экспоненциальных систем

$$u_{xy}^i = \exp\left(\sum_{j=1}^N a_j u^j\right), \quad i = 1, \dots, N,$$

удалось доказать, что требование существования $2N$ независимых псевдоконстант приводит к матрицам Картана полупростых алгебр Ли [44, 45].

Здесь мы покажем, что некоторый список двухкомпонентных интегрируемых систем гиперболических уравнений можно легко получить, используя симметрии цепочек из списков (R) или (H). Например, релятивистская цепочка Тоды

$$q_{xx} = \frac{q_{1,x} q_x}{1 + e^{q-q_1}} - \frac{q_{-1,x} q_x}{1 + e^{q-1-q}},$$

наряду с высшей симметрией, указанной в теореме 2,

$$q_t = \frac{q_{1,x} q_x}{1 + e^{q-q_1}} + \frac{q_{-1,x} q_x}{1 + e^{q-1-q}},$$

допускает симметрию

$$q_y = \frac{1}{q_x} (1 + e^{q_1-q})(1 + e^{q-q-1}).$$

Оказывается, что симметрии подобного типа имеются у любой цепочки из списка (R). Для гамильтоновых цепочек (4.41) эти симметрии записываются в виде

$$u_y = \tilde{f}(u_{-1}, u, v), \quad \tilde{v}_y = g(v_1, v, u). \tag{5.2}$$

Вычисляя смешанные производные u_{xy}, v_{xy} и исключая переменные u_1, v_1, u_{-1}, v_{-1} в силу (5.2), (4.41), мы можем выразить результат через u, v и их первые производные [31]. В результате получается список систем вида

$$u_{xy} = F(u_x, u_y, u, v), \quad v_{xy} = G(v_x, v_y, v, u).$$

Разумеется, этот список ни в коей мере не может претендовать на полноту и лишь доставляет примеры уравнений со специальной структурой преобразований Беклунда (см. ниже замечание после теоремы 3).

Примеры интегрируемых гиперболических систем:

$$u_{xy} = 2uvu_y - u, \quad v_{xy} = -2uvv_y - v; \quad (\text{h}_1)$$

$$u_{xy} = \frac{u_x u_y}{r} + r(1 - u_y), \quad v_{xy} = \frac{v_x v_y}{r} + r(1 + v_y), \quad r = u + v; \quad (\text{h}_2)$$

$$u_{xy} = \frac{u_x}{r}(vu_y - 1) + ru_y, \quad v_{xy} = \frac{v_x}{r}(uv_y + 1) - rv_y, \quad r = uv + \delta; \quad (\text{h}_3)$$

$$u_{xy} = \frac{vu_x u_y}{r} - ur, \quad v_{xy} = \frac{uv_x v_y}{r} - vr, \quad r = uv - 1; \quad (\text{h}_4)$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{1}{r}(r_u u_x u_y + \tilde{r}(u_x + u_y) + \tilde{r}_v r - \tilde{r} r_v), \\ v_{xy} &= \frac{1}{r}(r_v v_x v_y - \tilde{r}(v_x + v_y) + \tilde{r}_u r - \tilde{r} r_u), \end{aligned} \quad (\text{h}_5)$$

$$\tilde{r} = rr_{uv} - r_u r_v, \quad r(u, v) = r(v, u), \quad r_{uuu} = 0.$$

Система (h₄) – хорошо известная модель Полмейера–Лунда–Редже (см. [46, 47]), система (h₅) была получена в работе [48]. Все системы списка лагранжевы, например для (h₅)

$$L = \iint \frac{1}{r}(u_x v_y + r_u u_x - r_v v_y + \tilde{r}) dx dy,$$

и допускают комплексную редукцию, например (h₁) переходит в

$$u_{xy} = u - 2i|u|^2 u_y$$

после замены $\partial_x \rightarrow i\partial_x$, $\partial_y \rightarrow i\partial_y$ и при условии $v = \bar{u}$.

Отметим, что в системе (h₅) функция \tilde{r} , как и r , удовлетворяет условиям $\tilde{r}(u, v) = \tilde{r}(v, u)$, $\tilde{r}_{uuu} = 0$ и, кроме того, $\tilde{r}\tilde{r}_{uv} - \tilde{r}_u \tilde{r}_v = \text{const} \cdot r$. В частности, при условии $r = \text{const} \cdot (u - v)^2$ (отвечающем согласно (4.20) изотропному случаю) уравнения упрощаются:

$$u_{xy} = \frac{2u_x u_y}{u - v} - i(u_x + u_y), \quad v_{xy} = \frac{2v_x v_y}{v - u} + i(v_x + v_y). \quad (5.3)$$

В следующей теореме приводятся формулы, устанавливающие точное соответствие между гиперболическими системами (h) и гамильтоновыми цепочками (H). Все цепочки из этой теоремы сводятся к цепочкам из списка (H) при помощи простых точечных замен.

ТЕОРЕМА 3. *Гиперболические системы (h₁)–(h₅) получаются исключением сдвигов из следующих совместных пар цепочек соответственно:*

$$u_x = u_1 + u^2 v, \quad -v_x = v_{-1} + v^2 u, \quad (\text{X}_1)$$

$$u_y = \frac{u_{-1}}{vu_{-1} - 1}, \quad -v_y = \frac{v_1}{uv_1 - 1}; \quad (\text{Y}_1)$$

$$u_x = (u + v)(u_1 - u), \quad -v_x = (u + v)(v_{-1} - v), \quad (\text{X}_2)$$

$$u_y = \frac{u + v}{v + u_{-1}}, \quad -v_y = \frac{u + v}{u + v_1}; \quad (\text{Y}_2)$$

$$\begin{aligned}
 u_x &= (uv + \delta)(u_1 + u), & -v_x &= (uv + \delta)(v_{-1} + v), & (X_3) \\
 u_y &= \frac{u + u_{-1}}{vu_{-1} - \delta}, & -v_y &= \frac{v + v_1}{uv_1 - \delta}, & (Y_3) \\
 u_{x\pm} &= (uv - 1)u_{\pm 1}, & -v_{x\pm} &= (uv - 1)v_{\mp 1}, & (X_4^\pm) \\
 u_{x\pm} &= \frac{2r}{u_{\pm 1} - v} + r_v, & v_{x\pm} &= \frac{2r}{u - v_{\mp 1}} - r_u. & (X_5^\pm)
 \end{aligned}$$

В двух последних формулах для краткости обозначено $x = x_+, y = x_-$.

Приведенные цепочки определяют явные преобразования Беклунда для систем (h). Например, для системы (h₁) имеем преобразования $(u, v) \rightarrow (u, v)_{\pm 1}$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_x - u^2 v, & v_1 &= \frac{v_y}{uv_y + 1}, \\
 u_{-1} &= \frac{u_y}{vu_y - 1}, & v_{-1} &= -v_x - v^2 u,
 \end{aligned}$$

переводящие решения этой системы снова в решения. Эти преобразования обратны друг другу в силу (h₁).

В заключение отметим, что иерархия симметрий для систем из списка (X,Y), как и в случае уравнений вида (5.1), распадается на две части, каждая из которых содержит производные только по x или по y и состоит из систем типа НШ и их высших симметрий. Эта иерархия может быть получена путем исключения сдвигов из высших симметрий цепочек (4.41), (5.2). Например, для уравнения (h₁) простейшие представители этой иерархии имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_{t_1} &= u_{xx} - 2(u^2 v_x + u^3 v^2), & -v_{t_1} &= v_{xx} + 2(v^2 u_x - v^3 u^2), \\
 u_{t_{-1}} &= u_{yy} + 2u_y^2 v_y, & -v_{t_{-1}} &= v_{yy} - 2v_y^2 u_y.
 \end{aligned}$$

5.2. Цепочка Склянина и еще один класс интегрируемых уравнений на решетке. Так как пары цепочек из теоремы 3 принадлежат одной иерархии интегрируемых уравнений, то линейная комбинация соответствующих потоков $D_t = aD_x + bD_y$ также интегрируема. Очевидно, она является гамильтоновой с той же структурой (4.39) и гамильтонианом, равным сумме $aH_+ + bH_-$. Таким образом, возникают примеры систем типа

$$u_t = F(u_1, u_{-1}, u, v), \quad v_t = G(v_1, v_{-1}, v, u). \tag{5.4}$$

Эти цепочки имеют более симметричный по сдвигам вид и поэтому могут представлять интерес как интегрируемые аппроксимации для уравнений типа НШ.

В частности, к этому типу принадлежит цепочка Абловица–Ладика [49]

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_1 - 2u + u_{-1} - uv(u_1 + u_{-1}), \\
 -v_t &= v_1 - 2v + v_{-1} - uv(v_1 + v_{-1}),
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

возникающая как линейная комбинация $D_t = -D_x - D_y + 2D_z$ уравнений (X_4^\pm) и очевидной симметрии растяжения $u_z = u$, $v_z = -v$. Другая линейная комбинация $D_t = D_x - D_y$ приводит к цепочке

$$u_t = (uv - 1)(u_1 - u_{-1}), \quad v_t = (uv - 1)(v_1 - v_{-1}),$$

сводящейся в результате редукции $v = u$ к модифицированному уравнению Вольтерра

$$u_t = (u^2 - 1)(u_1 - u_{-1}).$$

Таким образом, из одной пары цепочек (X_4^\pm) возникают сразу три известных уравнения: уравнение Полмейера–Лунда–Редже (h4) и цепочки Абловица–Ладика и Вольтерра.

Разберем подробно пример, связанный с парой цепочек (X_5^\pm) , которые определяются скобкой Пуассона (здесь и далее приводятся только ненулевые скобки)

$$\{u_n, v_n\} = 2r(u_n, v_n) \quad (5.6)$$

и гамильтонианами в инволюции

$$H_\pm = \sum_n \left(\frac{1}{2} \ln r(u_n, v_n) - \ln(u_{n\pm 1} - v_n) \right).$$

Этот пример представляет особенный интерес, так как он тесно связан (см. [48]) с известной цепочкой Склянина [50]. Напомним, что эта цепочка определяется скобками Пуассона

$$\{\sigma_n^a, \sigma_n^0\} = (J_b - J_c)\sigma_n^b\sigma_n^c, \quad \{\sigma_n^a, \sigma_n^b\} = -\sigma_n^0\sigma_n^c \quad (5.7)$$

(здесь индексы a, b, c – циклическая перестановка 1, 2, 3) и гамильтонианом

$$H = \sum_n \ln \left(\sigma_n^0\sigma_{n+1}^0 + \sum_{a=1}^3 \left(\frac{c_1}{c_0} - J_a \right) \sigma_n^a\sigma_{n+1}^a \right),$$

где c_0, c_1 суть значения функций Казимира (одни и те же во всех узлах решетки):

$$c_0 = \sum_{a=1}^3 (\sigma_n^a)^2, \quad c_1 = (\sigma_n^0)^2 + \sum_{a=1}^3 J_a (\sigma_n^a)^2.$$

Уравнение Ландау–Лифшица (4.19) получается из уравнений $\sigma_{n,t}^a = (1/\varepsilon)\{H, \sigma_n^a\}$ в непрерывном пределе $\sigma_n^0 \rightarrow 1$, $\sigma_n^a \rightarrow (\varepsilon/2)s_n^a(x)$, $x = i\varepsilon n$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следующее утверждение устанавливает искомую замену между цепочкой Склянина и потоком $D_x + D_y$, где $x = x_+$ и $y = x_-$ – времена, отвечающие гамильтонианам H_+ и H_- , соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $s_n = S(u_n, v_n)$ есть вектор (4.18) и многочлен r связан с матрицей J формулами (4.20), (4.21):

$$r(u, v) = \frac{i}{4}(u - v)^2 \langle S(u, v), KS(u, v) \rangle, \quad J = CI - \det(K)K^{-1}$$

(т.е. $K = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)$, $J_a = C - K_b K_c$). Тогда переменные

$$\sigma_n^0 = \rho \sqrt{\det K} \langle s_n, K s_n \rangle^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_n = -\rho \langle s_n, K s_n \rangle^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} s_n$$

удовлетворяют скобкам (5.7), значения функций и гамильтониан имеют вид $c_0 = \rho^2$, $c_1 = C\rho^2$, $H = -H_+ - H_- + \text{const}$.

Отметим, что произвольный симметрический биквадратный многочлен r можно привести к указанному виду дробно-линейной заменой u и v , что отвечает ортогональному преобразованию, диагонализующему матрицы J и K .

Приведем также гамильтонову структуру непосредственно в терминах спиновых переменных s_n :

$$\{s_n^a, s_n^b\} = \langle s_n, K s_n \rangle s_n^c, \quad H = - \sum_n \ln \frac{\langle s_n, K s_n \rangle}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle}.$$

Цепочки, отвечающие H_{\pm} , можно записать компактно:

$$2is_{x_{\pm}} = \langle s, K s \rangle (S(u_{\pm 1}, v) - S(u, v_{\mp 1})) - 2i[s, K s],$$

если воспользоваться элементарным свойством отображения (4.18)

$$\frac{i[S(u, v), S(p, q)] + S(u, v) + S(p, q)}{1 + \langle S(u, v), S(p, q) \rangle} = S(p, v).$$

Очевидно, что порознь эти цепочки не согласованы с вещественностью вектора s . Однако линейные комбинации $D_x + D_y$ и $i(D_x - D_y)$ уже обладают этим свойством, и мы получаем цепочку на единичной сфере ($s \in \mathbb{R}^3$, $|s| = 1$)

$$s_t = a \langle s, K s \rangle \left(\frac{[s, s_1]}{1 + \langle s, s_1 \rangle} + \frac{[s, s_{-1}]}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right) - 2a[s, K s] + b \langle s, K s \rangle \left(\frac{s + s_1}{1 + \langle s, s_1 \rangle} - \frac{s + s_{-1}}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right), \quad (5.8)$$

где a и b – произвольные вещественные постоянные. Случай $b = 0$ отвечает модели Склянина, а цепочка, отвечающая случаю $a = 0$, является ее симметрией.

При $K = I$, $\rho = -1$ переменные σ и s совпадают и мы приходим к цепочке Гейзенберга

$$s_t = a \left(\frac{[s, s_1]}{1 + \langle s, s_1 \rangle} + \frac{[s, s_{-1}]}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right) + b \left(\frac{s + s_1}{1 + \langle s, s_1 \rangle} - \frac{s + s_{-1}}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right). \quad (5.9)$$

При любых a и b она была введена Рагниско и Сантини [51].

Конечно, можно переписать в спиновых переменных s и другие уравнения, связанные с цепочками (X_5^\pm) . Например, система (h_5) (где r задается формулами (4.20), (4.21)) принимает вид

$$s_{xy} = p[s, s_x + s_y] + \frac{\langle s, Ks \rangle}{2\langle s, [s_x, s_y] \rangle} (p_y[s, s_x] - p_x[s, s_y]) + \\ + \frac{\langle s_x, Ks \rangle \langle s_y, s_y \rangle [s, s_x] - \langle s_y, Ks \rangle \langle s_x, s_x \rangle [s, s_y]}{\langle s, Ks \rangle \langle s, [s_x, s_y] \rangle} - \langle s_x, s_y \rangle s,$$

где $p = i\tilde{r}/r = \langle Ks, Ks \rangle / \langle s, Ks \rangle - (\text{tr } K) / 2$. В частности, в изотропном случае $K = -2I$ система (5.3) приводится к виду

$$s_{xy} = [s, s_x + s_y] - \langle s_x, s_y \rangle s.$$

5.3. Цепочки типа уравнения Вольтерра. Имеется четыре списка интегрируемых цепочек, полученных при классификации в рамках симметричного подхода. Три из них укладываются в изложенную выше схему: класс цепочки Тоды (4.31) и (4.34), класс релятивистской цепочки Тоды (4.28), (4.30) и (4.35) и класс гамильтоновых релятивистских цепочек (см. список (H) из п. 4.3). Четвертый класс уравнения Вольтерра в эту схему укладывается лишь частично. Название этому классу дает простейшая цепочка

$$u_x = u(u_1 - u_{-1}). \quad (5.10)$$

Класс уравнения Вольтерра:

$$u_x = P(u)(u_1 - u_{-1}); \quad (V_1)$$

$$u_x = P(u^2) \left(\frac{1}{u_1 + u} - \frac{1}{u + u_{-1}} \right); \quad (V_2)$$

$$u_x = Q(u) \left(\frac{1}{u_1 - u} + \frac{1}{u - u_{-1}} \right); \quad (V_3)$$

$$u_x = \frac{F(u_1, u, u_{-1}) + \nu(F(u_1, u, u_1))^{\frac{1}{2}}(F(u_{-1}, u, u_{-1}))^{\frac{1}{2}}}{u_1 - u_{-1}}; \quad (V_4)$$

$$u_x = f(u_1 - u) + f(u - u_{-1}), \quad f' = P(f); \quad (V_5)$$

$$u_x = f(u_1 - u)f(u - u_{-1}) + \mu, \quad f' = \frac{P(f)}{f}; \quad (V_6)$$

$$u_x = (f(u_1 - u) + f(u - u_{-1}))^{-1} + \mu, \quad f' = P(f^2); \quad (V_7)$$

$$u_x = (f(u_1 + u) - f(u + u_{-1}))^{-1}, \quad f' = Q(f); \quad (V_8)$$

$$u_x = \frac{f(u_1 + u) - f(u + u_{-1})}{f(u_1 + u) + f(u + u_{-1})}, \quad f' = \frac{P(f^2)}{f}; \quad (V_9)$$

$$u_x = \frac{f(u_1 + u) + f(u + u_{-1})}{f(u_1 + u) - f(u + u_{-1})}, \quad f' = \frac{Q(f)}{f}; \quad (V_{10})$$

$$u_x = \frac{(1 - f(u_1 - u))(1 - f(u - u_{-1}))}{f(u_1 - u) + f(u - u_{-1})} + \mu, \quad f' = \frac{P(f^2)}{1 - f^2}. \quad (V_{11})$$

Здесь $\nu \in \{0, \pm 1\}$, $P''' = Q^V = 0$,

$$F(z_1, z_2, z_3) = (\alpha z_2^2 + 2\beta z_2 + \gamma)z_1 z_3 + (\beta z_2^2 + \lambda z_2 + \delta)(z_1 + z_3) + \gamma z_2^2 + 2\delta z_2 + \varepsilon,$$

μ и коэффициенты полиномов P , Q , F – произвольные постоянные. Полностью этот список можно найти только в диссертации [52] (см. также [53, 10]).

Все уравнения, кроме (V_4) с $\nu = 0$, интегрируемы хотя бы по той причине, что сводятся дискретными подстановками к уравнению Вольтерра (5.10) или к полиномиальной форме записи цепочки Тоды

$$u_x = u(v_1 - v), \quad v_x = u - u_{-1}. \quad (5.11)$$

Так, легко видеть, что одно из двух преобразований

$$\tilde{u} = f(u_1 + u), \quad \tilde{v} = f(u_1 - u)$$

сводит (V_5) , (V_6) к (V_1) , цепочки (V_7) , (V_9) , (V_{11}) к (V_2) , а (V_8) , (V_{10}) к (V_3) . Уравнения (V_1) , (V_2) , (V_3) и (V_4) с $\nu \neq 0$ являются более глубокими модификациями уравнений (5.10) и (5.11), связанными с ними преобразованиями типа Миуры (см. [52, 54]). Например, уравнение (V_2) с $P = (u^2 - 1)(a^2 - b^2 u^2)$ заменой

$$\tilde{u} = \frac{bu_1 u + \frac{(a-b)(u_1-u)}{2} + a}{u_1 + u}, \quad c = \frac{a+b}{2}$$

сводится к модифицированному уравнению Вольтерра (V_1) с $P = u^2 - c^2$, которое сводится к уравнению Вольтерра (5.10) заменой

$$\tilde{u} = (u + c)(u_1 - c).$$

Цепочка (V_4) с $\nu = 0$ переходит в непрерывном пределе в уравнение Кричевера–Новикова (см. ниже уравнение (П.4)) и занимает в списке особое место, поскольку не сводится дискретными подстановками к уравнениям (5.10) и (5.11). Тем не менее она обладает бесконечной иерархией высших симметрий и законов сохранения, так как имеет локальную мастер-симметрию

$$u_{n,y} = (c + n)u_{n,x}. \quad (5.12)$$

Зависимость от времени y коэффициентов полинома F вводится здесь также, как в п. 6.3 (см. ниже определяющее уравнение (6.16) и комментарии к нему), причем в качестве начальных данных используется симметричный и квадратичный по каждой переменной полином $h(z_1, z_2) = F(z_1, z_2, z_1)$.

Цепочка (V_4) с $\nu = 0$ допускает интегрируемое обобщение с непостоянными, но периодическими по n коэффициентами [55]. Полином F_n для такого обобщения имеет вид

$$F_n(z_1, z_2, z_3) = (\alpha z_2^2 + 2\beta_n z_2 + \gamma_n)z_1 z_3 + (\beta_{n+1} z_2^2 + \lambda z_2 + \delta_n)(z_1 + z_3) + \gamma_{n+1} z_2^2 + 2\delta_{n+1} z_2 + \varepsilon, \quad (5.13)$$

где зависящие от n коэффициенты двухпериодичны по n :

$$\beta_{n+2} = \beta_n, \quad \gamma_{n+2} = \gamma_n, \quad \delta_{n+2} = \delta_n.$$

Мастер-симметрия точно такая же, и зависимость от y вводится аналогично, только соответствующий полином $h_n(z_1, z_2) = F_n(z_1, z_2, z_1)$ зависит от n и несимметричен. Локальные мастер-симметрии для некоторых других уравнений списка (V) можно найти в работе [56].

Некоторые уравнения приведенного списка связаны с уравнениями из других разделов самым непосредственным образом. Так, цепочки (V₁), переписанные в терминах

$$\tilde{u}_n = u_{2n}, \quad \tilde{v}_n = u_{2n-1}, \quad (5.14)$$

становятся цепочками вида (6.8) (см. ниже), а значит связаны с обобщениями цепочки Тоды (4.31). Тот же самый переход (5.14) превращает уравнение (V₄) с $\nu = 0$ и с полиномом самого общего вида (5.13) в систему двух уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2r}{v_1 - v} + r_v, & v_x &= \frac{2r}{u - u_{-1}} - r_u, \\ r &= r(u, v), & r_{uuu} &= r_{vvv} = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

(полином r строится по h_n следующим образом: $r(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) = h_{2n-1}(u_{2n}, u_{2n-1})$). Дифференцируя первое уравнение по x , можно исключить переменные v_i и получить на $q = u$ уравнение (4.34) с полиномом R , который является дискриминантом r : $R(u) = r_v^2 - 2rr_{vv}$.

Таким образом, система (5.15), а значит, и цепочка (V₄) с $\nu = 0$ связаны с уравнением (4.34). Мастер-симметрию (5.12) нетрудно переписать как мастер-симметрию для системы (5.15):

$$u_{n,y} = (c + 2n)u_{n,x}, \quad v_{n,y} = (c + 2n - 1)v_{n,x}.$$

Зависимость коэффициентов полинома r от времени y вводится также при помощи уравнения (6.16) с начальным условием $\tilde{r}(0, u, v) = r(u, v)$.

5.4. Другие интегрируемые уравнения на решетке. Для полноты картины приведем еще несколько интересных с нашей точки зрения примеров интегрируемых уравнений на решетке (как одномерных, так и двумерных).

В работе [55] имеется любопытное обобщение цепочки Тоды (4.26) с переменными коэффициентами

$$\frac{q_{n,xx}}{c_{n+1}c_n} = \exp\left(\frac{q_{n+1} - q_n}{c_{n+1}}\right) - \exp\left(\frac{q_n - q_{n-1}}{c_n}\right), \quad c_n = an + b,$$

где a, b – произвольные постоянные. Это уравнение сводится к цепочке (П.13) с $\mu = 0$ (см. ниже), а значит, и к цепочке Тоды преобразованием

$$\frac{q_n}{c_{n+1}c_n} = (T_n - 1) \left(\frac{\tilde{q}_n}{c_n} + \lambda_n \right),$$

где \tilde{q}_n – решение (П.13), а λ_n определяется из уравнения

$$c_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) - c_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \ln c_n.$$

Хорошо известна цепочка Богоявленского

$$u_{n,x} = u_n \left(\sum_{i=1}^M u_{n+i} - \sum_{i=1}^M u_{n-i} \right),$$

которая обобщает уравнение Вольтерра (5.10) и является интегрируемым уравнением для любого $M \geq 1$. В [57] приведены некоторые модификации этой цепочки.

Обсудим вкратце гиперболические цепочки вида

$$F_n(u_{n,x}, u_{n+1,x}, u_n, u_{n+1}) = 0.$$

Наиболее изученным примером такого рода является преобразование Беклунда для уравнения синус-Гордон

$$u_{n,x} + u_{n+1,x} = \alpha_n \sin(u_{n+1} - u_n). \tag{5.16}$$

Эта цепочка связана преобразованием Миуры с одевающей цепочкой (3.7), которая рассматривалась в п. 3.2. К сожалению, общей классификации уравнений такого вида не проводилось, хотя имеется много примеров (см., например, [58]). Все известные нам примеры связаны с уравнением (5.16) последовательностью дифференциальных подстановок, кроме цепочки

$$u_{n,x} u_{n+1,x} = r(u_n, u_{n+1}), \quad r(u, v) = r(v, u), \quad r_{uuu} = 0.$$

В работе [59] было показано, что эта цепочка задает автопреобразование Беклунда для уравнения Кричевера–Новикова (П.4) (см. ниже), где R есть дискриминант r (4.16).

В заключение приведем список двумерных уравнений на решетке из работы [60], который содержит интегрируемые двумеризации для всех цепочек из списка (Т) (см. п. 4.2) и всех цепочек вида (6.8) (см. ниже п. 6.2) и, в частности, хорошо известные двумерные обобщения цепочки Тоды и уравнения Вольтерра.

Список двумерных цепочек:

$$q_{xy} = e^{q_1 - q} - e^{q - q_{-1}}; \tag{2D_1}$$

$$q_{xy} = q_x(q_1 - 2q + q_{-1}); \tag{2D_2}$$

$$q_{xy} = q_x(e^{q_1 - q} - e^{q - q_{-1}}); \tag{2D_3}$$

$$q_{xy} = (q_x + a)(q_y - a)(f(q_1 - q) - f(q - q_{-1})), \quad f' = f^2 - b^2; \tag{2D_4}$$

$$u_y = u(v_1 - v), \quad v_x = u - u_{-1}; \tag{2D_5}$$

$$u_y = u(v_1 - v), \quad v_x = v(u - u_{-1}); \tag{2D_6}$$

$$u_x = (u^2 - b^2)(v_1 - v), \quad u_y = (u^2 - b^2)(w_1 - w),$$

$$v_y = w_x = (v + a)(w - a)(u - u_{-1}). \tag{2D_7}$$

Здесь a и b – произвольные постоянные. Цепочки этого списка задают автопреобразования Беклунда для $(2 + 1)$ -мерных систем уравнений, аналогичных уравнению Дэви–Стюартсона. Все они связаны между собой и в конечном счете могут быть сведены к цепочке $(2D_5)$. Некоторые из замен переменных весьма просты, другие являются двумерными дискретными аналогами преобразования Миуры. Список преобразований выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} (2D_1) \rightarrow (2D_5): \quad u &= e^{q_1 - q}, & v &= q_y; \\ (2D_2) \rightarrow (2D_5): \quad u &= q_x, & v &= q - q_{-1}; \\ (2D_3) \rightarrow (2D_6): \quad u &= q_x, & v &= e^{q - q_{-1}}; \\ (2D_4) \rightarrow (2D_7): \quad u &= f(q_1 - q), & v &= q_x, \quad w = q_y; \\ (2D_7) \rightarrow (2D_6): \quad \tilde{u} &= (u + b)(v_1 + a), & \tilde{v} &= (u - b)(w - a); \\ (2D_6) \rightarrow (2D_5): \quad \tilde{u} &= uv_1, & \tilde{v} &= v + D_x^{-1}u_y. \end{aligned}$$

6. ЛОКАЛЬНЫЕ МАСТЕР-СИММЕТРИИ

Накладывая требование наличия у эволюционного уравнения из определенного класса высших локальных симметрий и законов сохранения, мы получаем так называемые условия интегрируемости. Эти условия, необходимые для существования высших симметрий и законов сохранения, удобно записывать в виде серии законов сохранения с плотностями ρ_j ($j = 1, 2, \dots$), которые вычисляются непосредственно по правой части уравнения

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{G}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \dots, \partial^n \mathbf{u} / \partial x^n), \quad n \geq 2 \quad (6.1)$$

(см. приложение). Ясно, что выполнение этих необходимых условий не гарантирует существования высших симметрий и законов сохранения. В ряде задач эту трудность можно преодолеть при помощи мастер-симметрий. Если $u_\tau = H$ – мастер-симметрия, то плотности высших законов сохранения строятся при помощи формулы $D_\tau^k(\rho)$ ($k = 1, 2, \dots$), где ρ – какая-нибудь нетривиальная плотность из необходимых условий.

Понятие мастер-симметрии было введено Фокасом и Фуксштайнером в 1981 году [61]. Для многих уравнений функция H , определяющая мастер-симметрию, содержит нелокальности (например, для уравнений КдФ, НШ, цепочки Тоды). Однако Фуксштайнеру [8] удалось найти локальную мастер-симметрию для модели Ландау–Лифшица, играющей, как известно, роль универсального уравнения в классификации уравнений типа НШ. В этом разделе мы приводим локальные мастер-симметрии (работать с которыми удобнее во многих отношениях) для универсальных уравнений из списков обобщений цепочки Тоды, а также для ряда других интересных примеров интегрируемых уравнений.

6.1. Условия локальности. Сначала обсудим общие необходимые условия локальности мастер-симметрий для эволюционных уравнений (6.1). Напомним кратко схему вывода условий интегрируемости на примере скалярных эволюционных уравнений (подробнее см., например, [9, 10]). Определяющее уравнение для высших симметрий $u_t = A$ скалярного уравнения (6.1) (функция A зависит от производных u по x до

порядка m) можно записать в коммутаторном виде: $[A, G] = 0$. Коммутатор двух функций F_1, F_2 определяется формулой

$$[F_1, F_2] = D_1(F_2) - D_2(F_1), \quad D_j(u) = F_j.$$

Линеаризация определяющего уравнения дает

$$[A_*, G_*] = D_{t'}(G_*) - D_t(A_*),$$

где A_* и G_* – дифференциальные операторы линеаризации порядков m и n , например

$$A_* = \sum_{k=0}^m \frac{\partial A}{\partial u_k} D_x^k, \quad u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}.$$

Учитывая, что $m \gg n$, мы приходим к уравнению

$$L_t = [G_*, L], \tag{6.2}$$

где L – псевдодифференциальный оператор первого порядка $L = a_1 D_x + a_0 + a_{-1} D_x^{-1} + \dots$. Вычетом такого оператора в скалярном случае называется коэффициент a_{-1} (в общем случае он заменяется на $\text{tr } a_{-1}$). Условия интегрируемости формулируются в терминах вычетов степеней оператора L

$$\rho_j = \text{res } L^j, \quad j = -1, 0, 1, 2, \dots,$$

и имеют вид локальных законов сохранения

$$(\rho_j)_t = (\sigma_j)_x$$

(так называемые канонические законы сохранения).

Мастер-симметрия $u_\tau = H$ находится из уравнения, аналогичного симметричному определяющему уравнению, а именно

$$[[H, G], G] = 0.$$

Известна следующая формула для высших симметрий $u_{t_k} = A_k$:

$$A_k = \text{ad}_H^k(G), \quad \text{ad}_H(G) = [H, G]. \tag{6.3}$$

Линеаризация соотношения $[H, A_k] = A_{k+1}$ дает

$$[H_*, (A_k)_*] = D_\tau((A_k)_*) - D_{t_k}(H_*) + (A_{k+1})_*,$$

и мы получаем, таким образом, вместо (6.2) операторное уравнение

$$L_\tau = [H_*, L] + \tilde{L}, \tag{6.4}$$

где \tilde{L} – некоторое другое решение уравнения (6.2).

Покажем, как из операторного уравнения (6.4) можно вывести рекуррентную формулу для канонических плотностей $\rho_j = \text{res } L^j$. Рассмотрим с этой целью оператор

$$\tilde{L} = b_1 L^{r+1} + b_0 L^r + b_{-1} L^{r-1} + \dots, \quad r \geq 1. \quad (6.5)$$

Этот случай при $b_1 \neq 0$ соответствует нетривиальной мастер-симметрии веса r (т.е. такой, что по формуле (6.3) строятся высшие симметрии порядков $n + kr$). Переписав операторное уравнение (6.4) в виде

$$L_\tau^j = [H_*, L^j] + j L^{j-1} \tilde{L} \quad (6.6)$$

и переходя к вычетам, находим для любого целого j , что

$$(\rho_j)_\tau \sim j(b_1 \rho_{j+r} + b_0 \rho_{j+r-1} + b_{-1} \rho_{j+r-2} + \dots) \quad (6.7)$$

(эквивалентность понимается как равенство с точностью до прибавления полных производных по x).

Подставляя в (6.7) $j = -r - 1$, мы получаем первое условие существования локальной мастер-симметрии:

$$\rho_{-1} \sim 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{-1} \in \text{Im } D_x$$

для любого порядка $n \geq 2$ уравнения и любого веса $r \geq 1$ мастер-симметрии. Это условие означает, что каноническая плотность ρ_{-1} должна быть тривиальной. Например, для уравнений типа Бюргера (B_2), (B_3) (см. приложение) мы видим, что $\partial G / \partial u_{xx} = 1/u^2$, т.е. $\rho_{-1} = cu$ ($c \neq 0$). Значит, эти уравнения не имеют локальных мастер-симметрий положительного веса. Само уравнение Бюргера (B_1) с $a = 0$ этому условию удовлетворяет, что не удивительно, так как оно имеет локальную мастер-симметрию $u_\tau = xu_t + u^2$.

Из общей теории симметричного подхода следует (ср. [9]), что порядки самого уравнения и его высших симметрий нечетны для уравнения с высшими законами сохранения достаточно большого порядка. Это означает, что вес локальной мастер-симметрии такого уравнения больше или равен 2. Используя соотношение (6.7) с $j = 1 - r$, можно показать (при $r \geq 2$), что

$$\rho_1 \in \text{Im } D_x.$$

Для рассматриваемых в приложении уравнений вида (П.2) находим

$$\rho_1 = c_1 \frac{\partial F}{\partial u_{n-2}} + c_2, \quad c_1 \neq 0.$$

Отсюда следует, в частности, что (нелинейные) уравнения третьего и пятого порядков из приведенных в приложении списков (К) и (K^5) локальных мастер-симметрий иметь не могут.

Для систем уравнений вида (П.5) (см. приложение) можно доказать аналогичным образом, что если система имеет локальную мастер-симметрию и каноническая плотность ρ_1 из (П.6) тривиальна, то тривиальными должны быть и плотности ρ_2, ρ_3 . Для уравнения НШ (П.5) с $F = 2u^2v, G = -2v^2u$ мы видим, что $\rho_1 = 0$, поэтому $\rho_2 = 8uv + \text{const}$ – нетривиальная плотность, т.е. все мастер-симметрии этой системы уравнений также нелокальны.

Используя более тонкие соображения, можно показать, что скалярные эволюционные уравнения (6.1) могут иметь нетривиальную локальную мастер-симметрию только тогда, когда они являются уравнениями типа Бюргера (линеаризуемыми уравнениями). Для систем типа НШ и уравнений на решетке типа цепочек Тоды и Вольтерра это далеко не так, что мы и демонстрируем в п. 6.2, 6.3.

6.2. Локальные мастер-симметрии для класса интегрируемых уравнений. Здесь мы выпишем локальные мастер-симметрии для дивергентных систем уравнений (4.6), (4.7) и (в подходящей калибровке) для соответствующих им обобщений цепочки Тоды (4.28), (4.31), (4.30) (или, что то же самое, для цепочек из списков (Т) и (R), см. п. 4.2).

Цепочки (4.28), (4.31) удобно записывать в калибровке, связанной с дивергентными системами (4.6) (переписанные таким образом цепочки задают автопреобразования Беклунда для дивергентных систем [31]). Цепочка (4.31) при помощи замены

$$u_n = h(q_{n+1} - q_n), \quad v_n = q_{n,x}$$

(ср. с калибровкой (4.8)) приводится к виду

$$\begin{aligned} u_{n,x} &= P(u_n)(v_{n+1} - v_n), \\ v_{n,x} &= Q(v_n)(u_n - u_{n-1}), \\ P(w) &= \varepsilon w^2 + \alpha w + \beta, \quad Q(w) = \varepsilon w^2 + \gamma w + \delta. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Используя линейные преобразования u, v, x , нетрудно выделить три случая, в которых локальные мастер-симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} u_{n,y} &= P(u_n)[(2n + k + c)v_{n+1} - (2n + c)v_n] + \gamma u_n^2, \\ v_{n,y} &= Q(v_n)[(2n - 1 + k + c)u_n - (2n - 1 + c)u_{n-1}] + \alpha v_n^2, \end{aligned}$$

где c – произвольная постоянная (отвечающая за добавление $u_{n,x}$ и $v_{n,x}$), а число k задается в каждом из трех случаев по-разному:

$$\begin{aligned} P = w, \quad Q = 1, \quad k = 4; \\ P = w, \quad Q = w, \quad k = 3; \\ P = w^2 + \beta, \quad Q = w^2 + \delta, \quad k = 2. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Эти мастер-симметрии были найдены в работах [62, 63].

Мастер-симметрии дивергентных систем (4.6) получаются при исключении сдвигов в силу (6.8) (предполагается, что $p = u_n$, $z = v_n$) из цепочки, соответствующей дифференцированию $D_\tau = xiD_t + D_y$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} p_\tau &= xip_t + (k + c)p_x + kP(p)z + \gamma p^2, \\ z_\tau &= xiz_t + (c - 1)z_x + kQ(z)p + \alpha z^2. \end{aligned}$$

Здесь имеются в виду те же три случая для P и Q , которые выделяются при помощи линейных замен, и k находится из (6.9). Мастер-симметрия системы, соответствующей $P = Q = w^2$, была получена в [64].

В цепочке (4.28) делаем замену

$$u_n = q_{n,x}, \quad v_n = q_{n,x}f(q_{n+1} - q_n) + g(q_{n+1} - q_n),$$

приводящую к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} u_{n,x} &= A_n(u_n, v_n)(u_{n+1} - u_n) + P(u_n)(v_n - v_{n-1}), \\ v_{n,x} &= A_n(u_n, v_n)(v_n - v_{n-1}) + Q(v_n)(u_{n+1} - u_n). \end{aligned} \quad (6.10)$$

В новых обозначениях интегрируемые цепочки выделяются формулами (6.8) и следующим уравнением на A_n :

$$A_n^2(u, v) - (\lambda_n + \gamma u + \beta v + 2\varepsilon uv)A_n(u, v) + P(u)Q(v) = 0 \quad (6.11)$$

(предполагается, что $f \neq 0$). Заметим, что цепочки (4.28) переходят в (6.10) с λ_n (а значит, и A_n), не имеющими явной зависимости от n . Мы же ввели в рассмотрение цепочки чуть более общего вида. Пример, соответствующий $P = Q = w$, приведен в работе [22], а весь класс рассматривался в [38].

Локальные мастер-симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} u_{n,y} &= (2n + k + c)A_n(u_n, v_n)(u_{n+1} - u_n) + \\ &\quad + P(u_n)((2n + k + c)v_n - (2n - k + c)v_{n-1}), \\ v_{n,y} &= (2n - k + c)A_n(u_n, v_n)(v_n - v_{n-1}) + \\ &\quad + Q(v_n)((2n + k + c)u_{n+1} - (2n - k + c)u_n), \end{aligned} \quad (6.12)$$

где P , Q и k задаются в (6.9), а параметр λ_n следует считать зависящим от y в силу уравнения $\lambda_{n,y} = -\lambda_n^2$ в первых двух случаях и в силу уравнения $\lambda_{n,y} = 4\beta\delta - \lambda_n^2$ в последнем случае. Отметим, что локальная мастер-симметрия для собственно релятивистской цепочки Годы была найдена в работе [65], но в другой калибровке.

6.3. Эллиптический случай. Приведем локальные мастер-симметрии для цепочек (4.34), (4.35) (r и R определены в (4.16)) и цепочки (H₃) (см. п. 4.3). Мы называем эти цепочки уравнениями эллиптического типа, так как они тесно связаны с системами (4.15), (4.17), а значит, с уравнением Ландау–Лифшица (4.19), имеющим эллиптическую зависимость от спектрального параметра в линейной задаче.

Как известно, мастер-симметрия для уравнения (4.19) имеет вид [8]

$$s_\tau = [s, x(s_{xx} + Js) + s_x] = xs_t + [s, s_x].$$

Мы покажем, что цепочечные мастер-симметрии, указанные здесь, приводят к этой же формуле. Менять калибровку на этот раз не понадобится. Например, мастер-симметрии для цепочек (4.34) и (4.35) будут записаны в переменных q_n , $z_n = q_{n,x}$. Однако нам придется иметь дело с довольно сложной зависимостью мастер-симметрии от времени.

В более простом нерелятивистском случае (4.34) мастер-симметрия задается формулами

$$z_{n,y} = (\lambda + 2n)z_{n,x} + q_{n,t}, \quad q_{n,y} = (\lambda + 2n)q_{n,x}, \quad (6.13)$$

где t – время высшей симметрии (4.36), λ – произвольная постоянная. Все мастер-симметрии дают примеры интегрируемых в специальном смысле уравнений, которые, вообще говоря, зависят от времени (здесь это y в дискретном случае и τ в непрерывном) и всегда от пространственной переменной (n и x , соответственно). Например, в мастер-симметрии (6.13) можно исключить переменную z_n и получить следующее красивое интегрируемое уравнение с явной (нелинейной) зависимостью от n :

$$q_{n,yy} = \left((\lambda + 2n)R(q_n) - \frac{q_{n,y}^2}{\lambda + 2n} \right) \left(\frac{\lambda + 2n + 1}{q_{n+1} - q_n} - \frac{\lambda + 2n - 1}{q_n - q_{n-1}} \right) + \frac{(\lambda + 2n)^2}{2} R'(q_n).$$

В релятивистском случае формула для мастер-симметрии в сущности столь же проста. Для цепочки (4.35) она имеет вид

$$z_{n,y} = (\lambda + n)z_{n,x} + q_{n,t}, \quad q_{n,y} = (\lambda + n)q_{n,x} \quad (6.14)$$

(t – время высшей симметрии (4.37)), а для цепочки (H₃), которая содержит и гамильтонову форму записи для (4.35), выглядит следующим образом:

$$u_{n,y} = (\lambda + n)u_{n,x}, \quad v_{n,y} = (\lambda + n - 1)v_{n,x}. \quad (6.15)$$

Существенным отличием от нерелятивистского случая является то, что в коэффициенты полинома r , определяющего цепочки (4.35) и (H₃), вводится зависимость мастер-симметрии от времени y . Эта зависимость определяется следующим уравнением в частных производных на $\tilde{r} = \tilde{r}(y, u, v)$:

$$\tilde{r}_y = \tilde{r}\tilde{r}_{uv} - \tilde{r}_u\tilde{r}_v \quad (6.16)$$

(\tilde{r} получается из полинома r заменой его коэффициентов на функции, зависящие от y). Полином в правой части этого уравнения имеет точно такой же вид, как и полином \tilde{r} ,

только с другими коэффициентами. Поэтому уравнение (6.16) эквивалентно замкнутой системе ОДУ на коэффициенты полинома \tilde{r} , которая имеет решение при любом выборе начальных данных $\tilde{r}(0, u, v) = r(u, v)$.

Например, если мы хотим построить мастер-симметрию для цепочки (H_3) с $r = u + v$, то, решая уравнение (6.16) с этим начальным условием, находим полином $\tilde{r} = u + v - y$. Для уравнения (H_3) с найденным полиномом \tilde{r} вместо r мы имеем мастер-симметрию, позволяющую строить высшие симметрии и плотности законов сохранения. Эти симметрии и плотности являются таковыми при любом значении параметра y . При $y = 0$ мы получаем набор высших симметрий и сохраняющихся плотностей для исходной цепочки (H_3) с $r = u + v$. Таким образом, мастер-симметрии строятся не для самого уравнения, а для его обобщения, зависящего от дополнительного параметра y . Такие мастер-симметрии генерируют высшие симметрии и законы сохранения как для этого обобщения, так и для исходного уравнения.

Отметим, что та же самая схема построения мастер-симметрий (как и формулы (6.15), (6.16)) годится как для несимметричного полинома r с не зависящими от n коэффициентами, так и для самого общего случая полинома r_n с зависимостью от n (см. п. 4.4). Например, для полинома (4.42) уравнение (6.16) приводит к зависимости от y параметра λ_n , и зависимость эта задается уравнением

$$\lambda_{n,y} = \sqrt{R(\lambda_n)}.$$

Так же как в п. 6.2, цепочечные мастер-симметрии (6.13)–(6.15) могут быть переписаны в виде мастер-симметрий систем (4.15) и (4.17):

$$\begin{aligned} u_\tau &= xiu_t + u_x, & v_\tau &= xiv_t - v_x, \\ u_\tau &= xiu_t + u_x, & v_\tau &= xiv_t. \end{aligned}$$

Во втором случае зависимость от времени τ в коэффициенты полинома r вводится также при помощи уравнения (6.16), в котором переменная y заменена на τ . Используя формулы перехода (4.18), (4.20), (4.21), можно проверить, что в первом случае мастер-симметрия совпадает с мастер-симметрией уравнения Ландау–Лифшица (4.19).

Мы полагаем, что цепочка Складина, которая обсуждалась в п. 5.2, также должна обладать локальной мастер-симметрией, будучи уравнением эллиптического типа. Однако в настоящее время мы знаем такую мастер-симметрию только для частного случая, соответствующего магнетику Гейзенберга, а именно для цепочки (5.9) с $b = 0$, $a = 1$:

$$s_{n,y} = \left[s_n, \frac{(\varepsilon + n)s_{n+1}}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} + \frac{(\varepsilon + n - 1)s_{n-1}}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} \right].$$

7. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнения, которые после подходящей обратимой замены переменных переходят в свою нетривиальную мастер-симметрию. По аналогии с S - и C -интегрируемыми уравнениями Калоджеро условимся называть такие уравнения B -интегрируемыми. В одномерном случае примером B -интегрируемого уравнения может служить уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x.$$

После точечной замены переменных

$$u \rightarrow x^{\frac{1}{2}}u, \quad x \rightarrow 2x^{\frac{1}{2}}, \quad t \rightarrow \tau$$

оно переходит в уравнение

$$u_\tau = xu_t + u^2 + \frac{3}{2}u_x,$$

которое является его мастер-симметрией. Таким образом, для B -интегрируемых уравнений должны выполняться условия

$$[[D_\tau, D_t], D_t] = 0, \quad D_\tau \sim D_t, \tag{7.1}$$

где D_t и D_τ – эволюционные дифференцирования, соответствующие уравнению и его мастер-симметрии, эквивалентность понимается как эквивалентность с точностью до обратимых преобразований. Кроме того, мастер-симметрия должна повышать порядок симметрий так, чтобы последовательность рекуррентно определяемых высших симметрий,

$$[D_\tau, D_t] = D_{t_1}, \quad [D_\tau, D_{t_k}] = D_{t_{k+1}}$$

(D_{t_k} соответствует k -й высшей симметрии), была бесконечной.

Понятно, что принадлежность к классу B -интегрируемых уравнений является достаточным условием интегрируемости. Если в $(1 + 1)$ -мерном случае к B -интегрируемым уравнениям относятся, по-видимому, только линеаризуемые уравнения, то в случае $(2 + 1)$ -мерных уравнений ситуация совершенно иная. Класс двумерных B -интегрируемых уравнений, которые являются также S -интегрируемыми (т.е. интегрируемыми при помощи метода обратной задачи), весьма широк. Мы продемонстрируем это на ряде примеров, связанных с уравнениями Кадомцева–Петвиашвили (КП) и Дэви–Стюартсона (ДС). Определение B -интегрируемости конструктивно, и это позволяет надеяться на использование его в дальнейшем для классификации интегрируемых случаев и отработки теста на интегрируемость. Аналогичный пример (точечная связь между уравнениями КП и цилиндрическим КП) приведен в работе [66].

7.1. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили. Обсудим примеры, связанные так или иначе с уравнением КП. В работе [67] для уравнения КП

$$u_{t_3} = u_{xxx} - 6uu_x + 3v_{yy}, \quad v_x = u \quad (7.2)$$

была найдена мастер-симметрия

$$u_{\tau_1} = yu_{t_3} - 2u_x + 2xu_y + 4v_y. \quad (7.3)$$

Оказывается, она может быть получена из самого уравнения точечным преобразованием вида

$$\tilde{x} = \xi(x, y), \quad \tilde{y} = \eta(y), \quad \tilde{u} = \alpha(x, y)u + \beta(x, y).$$

В дальнейшем мы будем для краткости записывать такие замены переменных в виде

$$x \rightarrow \xi(x, y), \quad y \rightarrow \eta(y), \quad u \rightarrow \alpha(x, y)u + \beta(x, y), \quad (7.4)$$

предполагая, что переменные \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{u} соответствуют исходному уравнению, а переменные x , y , u – его мастер-симметрии. Часто мы будем также заменять формулы для преобразования x и y на формулы для D_x и D_y , которые более удобны для вычислений.

В рассматриваемом примере уравнения КП замена задается формулами

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow y^{\frac{1}{3}}D_x, & D_y &\rightarrow \frac{1}{3}xy^{-\frac{1}{3}}D_x + y^{\frac{2}{3}}D_y, \\ u &\rightarrow y^{\frac{2}{3}}(u + a_x), & v &\rightarrow y^{\frac{1}{3}}(v + a), & a &= \frac{x^3}{54y^2} + \frac{x}{3y} \end{aligned} \quad (7.5)$$

(ясно, что переменные x и y в данном случае преобразуются так: $x \rightarrow xy^{-1/3}$, $y \rightarrow 3y^{1/3}$).

Модифицированное уравнение КП и его мастер-симметрия

$$u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + 6u_xv_y + 3v_{yy}, \quad v_x = u, \quad (7.6)$$

$$u_\tau = yu_t - u_x + 2xu_y - u^2 + 3v_y \quad (7.7)$$

связаны с (7.2) и (7.3) преобразованием Миуры

$$\tilde{u} = u_x + u^2 - v_y \quad (7.8)$$

(\tilde{u} удовлетворяет уравнению КП). Сопряжение замены (7.5) преобразованием Миуры представляет собой связь существенно более сложную, чем точечное преобразование. Тем не менее имеется и точечная замена переменных вида (7.4) между (7.6) и (7.7). Переменные x и y меняются так же, как в (7.5), а зависимые переменные u и v преобразуются по формулам

$$u \rightarrow y^{\frac{1}{3}}(u + a_x), \quad v \rightarrow v + a, \quad a = \frac{x^2}{12y} - \frac{1}{6} \ln y. \quad (7.9)$$

Высшая симметрия уравнения КП имеет вид

$$u_{t_4} = u_{xxy} - 4uu_y - 2u_xv_y + w_{yy}, \quad w_x = v. \quad (7.10)$$

Рассмотрим интегрируемое уравнение

$$u_t = u_{t_4} + \varepsilon u_{t_3} \quad (7.11)$$

с произвольным параметром ε и покажем на этом примере, что может быть несколько замен, приводящих к разным нетривиальным мастер-симметриям.

Первая замена переменных имеет вид

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow y^{\frac{1}{4}}D_x, & D_y &\rightarrow \left(\frac{1}{4}xy^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon y^{\frac{1}{4}}\right)D_x + y^{\frac{1}{2}}D_y, \\ u &\rightarrow y^{\frac{1}{2}}(u + a_{xx}), & v &\rightarrow y^{\frac{1}{4}}(v + a_x), & w &\rightarrow w + a, \\ a &= \frac{x^4}{256y^2} + \left(\frac{3}{16}y^{-1} - \frac{3\varepsilon^2}{8}y^{-\frac{1}{2}}\right)x^2 + 2\varepsilon^3y^{\frac{1}{4}}x - \frac{3}{8}\ln y \end{aligned}$$

и переводит уравнение (7.11) в его мастер-симметрию

$$u_{\tau_2} = yu_{t_4} + \frac{x}{4}u_{t_3} + u_{xx} - \frac{3}{2}u_y + \frac{3}{2}w_{yy} - \frac{1}{2}vu_x - 2u^2. \quad (7.12)$$

Вторая, более простая, замена переводит (7.11) в линейную комбинацию $u_\tau = u_{t_4} + ku_{\tau_1}$ уравнения (7.10) и младшей мастер-симметрии (7.3), которая, очевидно, также является его нетривиальной мастер-симметрией:

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow D_x, & D_y &\rightarrow (ky - \varepsilon)D_x + D_y, \\ u &\rightarrow u + a_{xx}, & v &\rightarrow v + a_x, & w &\rightarrow w + a, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a &= -\frac{k}{12}x^3 + \frac{3}{8}(k^2y^2 - \varepsilon^2)x^2 - \left(\frac{7}{16}k^3y^3 - \frac{3}{8}\varepsilon^2ky - k - \varepsilon^3\right)yx + \\ &+ \frac{k}{96}(15k^3y^3 - 9k\varepsilon^2y - 64k - 48\varepsilon^3)y^3. \end{aligned}$$

Приведенная замена аналогична более простому преобразованию

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow D_x, & D_y &\rightarrow 2cyD_x + D_y, \\ u &\rightarrow u + a_x, & v &\rightarrow v + a, & a &= 2c^2xy^2 - \frac{5}{3}c^3y^4 - \frac{1}{2}cx^2, \end{aligned}$$

связывающему уравнение КП и его деформацию

$$u_\tau = u_{t_3} + 6c(xu_x + 2(yu)_y).$$

Заметим, что уравнение

$$u_{\tau_0} = xu_x + 2(yu)_y \quad (7.13)$$

является на этот раз тривиальной мастер-симметрией. Действительно, если переменным x , y и u приписать соответственно веса -1 , -2 и 2 (т.е. D_x и D_y получают веса 1 и 2), а дифференцированиям D_{t_n} и D_{τ_n} – веса n , то уравнения (7.2) и (7.10) становятся однородными со степенями однородности 5 и 6 , а мастер-симметрии (7.3), (7.12), (7.13) – со степенями 3 , 4 , 2 . Мастер-симметрии D_{τ_n} повышают степени высших симметрий на n .

Напомним, что в разделе 2 мы показали, что уравнения Пенлеве (P_1) – (P_5) описывают стационарные решения деформаций уравнений КдФ и НШ. Двумерным аналогом уравнения (2.2) служит линейная комбинация

$$u_t = c_2 u_{\tau_2} + c_1 u_{\tau_1} + c_0 u_{\tau_0}, \quad (7.14)$$

но она сводится к уравнению (7.10) (если $c_2 \neq 0$) или к (7.2) (в частном случае $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$) точечной заменой, не затрагивающей переменной времени, и поэтому условие стационарности теперь не приводит к “двумерным” уравнениям Пенлеве. Например, при $c_2 = 0$ стационарное уравнение точно-эквивалентно уравнению Буссинеска

$$(u_{xxx} - 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0.$$

С другой стороны, уравнения (7.14) задают двумеризации уравнений Пенлеве, таким образом, мы видим, что имеется связь уравнений Пенлеве не только с уравнением Буссинеска (см., например, [68]), но и с его высшей симметрией.

Все перечисленные выше замены переменных принадлежат группе калибровочных преобразований вспомогательной линейной задачи уравнения КП

$$\psi_y = \psi_{xx} - u\psi, \quad (7.15)$$

которая является двумерным аналогом одномерной спектральной задачи Шредингера (2.5). Преобразования калибровочной группы определяются формулами

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow aD_x, & D_y &\rightarrow 2a^2\sigma_x D_x + a^2 D_y, & \psi &\rightarrow e^\sigma \psi, \\ u &\rightarrow a^2(u + \sigma_{xx} - \sigma_x^2 - \sigma_y), & \sigma &= \frac{a'}{4a}x^2 + bx + c, \end{aligned}$$

где a , b , c – произвольные функции от y . В частности, замена (7.5), дополненная формулой $\psi \rightarrow y^{-1/6} \exp(x^2/12y)\psi$, преобразует симметрию линейной задачи (7.15)

$$\psi_t = A(y)\psi_{xxx} + \frac{1}{2}xA'\psi_{xx} - \frac{3}{2}Au\psi_x - \frac{1}{4}(3A(u_x + v_y) + A'(2xu + v))\psi$$

с $A = 1$, отвечающую уравнению КП, в симметрию с $A = y$, отвечающую его мастер-симметрии (7.3). Заметим, что функция ψ_x/ψ удовлетворяет модифицированному уравнению КП (7.6) и его мастер-симметрии (7.7). Эта формула задает обращение преобразования Миуры (7.8).

В заключение упомянем хорошо известное матричное уравнение КП, которое также относится к B -интегрируемым уравнениям. Легко проверить, что уравнение

$$u_t = u_{xxx} - 3(uu_x + u_xu - v_{yy} + v_yu - uv_y), \quad v_x = u,$$

где $u \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, и его мастер-симметрия

$$u_\tau = yu_t - 2u_x + 2xu_y + 4v_y + uv - vu$$

связаны между собой той же заменой переменных (7.5), что и в скалярном случае.

7.2. Уравнение Дэви–Стюартсона. Класс уравнений, обсуждаемый здесь, отличается от предыдущего чуть более простыми формулами преобразования независимых переменных x, y . Рассматриваемые замены принадлежат группе калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow a(x)D_x, & D_y &\rightarrow b(y)D_y, & \psi &\rightarrow c(x)\psi, \\ u &\rightarrow a\left(u + \frac{c'}{c}\right), & v &\rightarrow abv \end{aligned} \tag{7.16}$$

спектральной задачи

$$\psi_{xy} = u\psi_y + v\psi. \tag{7.17}$$

Отметим, что (7.17) является двумерным аналогом спектральной задачи (2.6) общего положения, в то время как (7.15) служит аналогом редуцированной задачи (2.5). Мы рассмотрим основные примеры уравнений, интегрируемых при помощи (7.17), а значит, близких уравнению ДС.

ПРИМЕР 1. Начиная с линейного уравнения

$$\psi_t = A(x)\psi_{xx} - (2Aw_x + A_xw)\psi$$

мы приходим к системам

$$u_t = (u_x + u^2 - 2w_x)_x, \quad v_t = (-v_x + 2uv)_x, \quad w_y = v, \tag{7.18}$$

$$u_\tau = (x(u_x + u^2 - 2w_x) - w)_x, \quad v_\tau = (x(-v_x + 2uv) - v)_x, \tag{7.19}$$

отвечающим $A = 1$ и $A = x$, соответственно. Вторая из этих систем является мастер-симметрией первой. В частности, $[D_\tau, D_t] = 2D_{t'}$, где дифференцирование по t' определяет следующую высшую симметрию системы (7.18):

$$\begin{aligned} u_{t'} &= (u_{xx} + 3uu_x + u^3 - 3uw_x - 3w_{1,x})_x, \\ v_{t'} &= (v_{xx} - 3uv_x + 3u^2v - 3vw_x)_x, \quad w_{1,y} = uv. \end{aligned}$$

Системы (7.18) и (7.19) связаны точечной заменой

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow x^{\frac{1}{2}}D_x, & D_y &\rightarrow D_y, \\ u &\rightarrow x^{\frac{1}{2}}u - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}, & v &\rightarrow x^{\frac{1}{2}}v, & w &\rightarrow x^{\frac{1}{2}}w - \frac{3}{16}x^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{7.20}$$

т.е. система (7.18) является B -интегрируемой.

Следующие три примера демонстрируют, как и пример с модифицированным уравнением КП, что точечная эквивалентность между уравнением и его мастер-симметрией может сохраняться несмотря на необратимые преобразования и редукции.

ПРИМЕР 2. Следующие формулы определяют систему и ее мастер-симметрию:

$$u_t = u_{xx} + 2uw_x, \quad -v_t = v_{xx} + 2vw_x, \quad w_y = uv, \quad (7.21)$$

$$u_\tau = xu_t + uw + (2k + 1)u_x, \quad v_\tau = xv_t - vw + (2k - 1)v_x, \quad (7.22)$$

они связаны с (7.18) и (7.19) преобразованием

$$\tilde{u} = \frac{u_x}{u}, \quad \tilde{v} = -uv$$

(буквы с тильдой относятся к системам (7.18), (7.19)). Точнее, эта замена согласована с мастер-симметрией (7.22) при $k = -1/2$, но, вообще говоря, параметр k может быть произвольным, так как он отвечает за добавление классической симметрии. При $k = \pm 1/4$ уравнения (7.21) и (7.22) связаны точечной заменой, которая задается формулами (7.20) и

$$u \rightarrow x^{\frac{1}{4}+k}u, \quad v \rightarrow x^{\frac{1}{4}-k}v, \quad w \rightarrow x^{\frac{1}{2}}w. \quad (7.23)$$

Чтобы перейти к уравнению ДС, переобозначим эволюционные дифференцирования D_t и D_τ , соответствующие (7.21) и (7.22), через D_{t_+} и D_{τ_+} . Инволюция

$$x \leftrightarrow y, \quad D_{t_+} \leftrightarrow D_{t_-}, \quad D_{\tau_+} \leftrightarrow D_{\tau_-}, \quad w \leftrightarrow \hat{w} \quad (7.24)$$

приводит к двойственным к (7.21)–(7.23) системе, мастер-симметрии и связывающему их точечному преобразованию. Двойственная к (7.21) система уравнений, например, имеет вид

$$u_{t_-} = u_{yy} + 2u\hat{w}_y, \quad -v_{t_-} = v_{yy} + 2v\hat{w}_y, \quad \hat{w}_x = uv. \quad (7.25)$$

Дифференцирования D_{t_+} и D_{t_-} коммутируют, поэтому их линейная комбинация приводит к интегрируемой системе уравнений (ср. п. 5.2)

$$u_t = \alpha u_{t_+} + \beta u_{t_-}, \quad v_t = \alpha v_{t_+} + \beta v_{t_-}. \quad (7.26)$$

В частности, условие $\beta = \pm\alpha$ соответствует уравнению ДС. Применяя композицию замены (7.20), (7.23) и двойственной к ней, мы получаем из системы (7.26) мастер-симметрию, отвечающую дифференцированию $D_\tau = \alpha D_{\tau_+} + \beta D_{\tau_-}$. Таким образом, система (7.26) с любыми α и β , а значит, и уравнение ДС являются B -интегрируемыми. Заметим, что дифференцирование D_{τ_+} коммутирует с D_{t_-} . Это следует из того, что замена (7.20), (7.23) не затрагивает переменную y и оставляет систему (7.25) неизменной. По такой же причине коммутируют дифференцирования D_{τ_-} , D_{t_+} .

ПРИМЕР 3. Высшая симметрия системы (7.21), построенная при помощи (7.22), имеет вид

$$\begin{aligned} u_{t_3} &= u_{xxx} + 3u_x D_y^{-1}(uv)_x + 3u D_y^{-1}(u_x v)_x, \\ v_{t_3} &= v_{xxx} + 3v_x D_y^{-1}(uv)_x + 3v D_y^{-1}(uv_x)_x. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Она допускает редукцию $v = 1$, что приводит к уравнению

$$u_t = (u_{xx} + 3uw_x)_x, \quad w_y = u. \quad (7.28)$$

Мастер-симметрия и замена, позволяющая построить эту мастер-симметрию, имеют вид

$$u_\tau = (x(u_{xx} + 3uw_x) + u_x + uw)_x, \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow x^{\frac{1}{3}} D_x, & D_y &\rightarrow D_y, \\ u &\rightarrow x^{\frac{1}{3}} u, & w &\rightarrow x^{\frac{1}{3}} w - \frac{1}{18} x^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Эта мастер-симметрия порождает, например, такую высшую симметрию: $[D_\tau, D_t] = 3D_{t_5}$,

$$u_{t_5} = (u_{xxxx} + 5(u_x w_x)_x + 5u(w_{xxx} + w_x^2 + w_{1,x}))_x,$$

где w_1 — еще одна нелокальность такая, что $w_{1,y} = uw_x$.

Уравнения (7.28) и (7.29) возникают из условия совместности линейных задач

$$\psi_{xy} + u\psi = 0, \quad \psi_t = A(x)\psi_{xxx} + A'\psi_{xx} + C\psi_x, \quad C = 3Aw_x + A'w$$

при выборе $A = 1$ и $A = x$, соответственно. Вид линейной задачи подсказывает, что мы имеем дело с иерархией Веселова–Новикова [69–71]. Используя, как в примере 2, инволюцию (7.24), можно получить уравнение

$$u_{t'} = (u_{yy} + 3u\hat{w}_y)_y, \quad \hat{w}_x = u \quad (7.31)$$

и показать, что уравнения, соответствующие дифференцированиям вида $D_{\hat{t}} = \alpha D_t + \beta D_{t'}$, а значит, и уравнение Веселова–Новикова B -интегрируемы.

ПРИМЕР 4. Еще одна редукция $v = u$ системы (7.27) приводит к уравнению

$$u_t = u_{xxx} + 3u_x w_x + \frac{3}{2} u w_{xx}, \quad w_y = u^2.$$

Эта редукция обладает всеми свойствами, перечисленными в двух предыдущих примерах. В частности, мастер-симметрию

$$u_\tau = x u_t + \frac{3}{2} u_{xx} + 3u_x w + 2u w_x$$

можно получить при помощи точечного преобразования

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow x^{\frac{1}{3}} D_x, & D_y &\rightarrow D_y, \\ u &\rightarrow x^{\frac{1}{6}} u, & w &\rightarrow x^{\frac{1}{3}} w - \frac{7}{72} x^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Используя инволюцию (7.24), можно показать B -интегрируемость произвольной линейной комбинации.

7.3. Двумеризованное уравнение Буссинеска. Обсудим иерархию системы уравнений

$$u_t = u_{xx} + 2v_x, \quad -v_t = v_{xx} - 2uu_x + 2u_y, \quad (7.32)$$

которая несколько отличается от рассмотренных выше с точки зрения B -интегрируемости и дает отрицательный, в некотором роде, пример. Система (7.32) обобщает (Bq1) из списка систем типа уравнения Буссинеска в приложении 1. От переменной v легко избавиться, дифференцируя первое уравнение по t , это дает уравнение

$$u_{tt} = D_x(u_{xxx} + 4uu_x - 4u_y). \quad (7.33)$$

Очевидно, что с точностью до переобозначения $y \leftrightarrow t$ и растяжений это уравнение КП (7.2). Более точно, независимые переменные t_3 и y уравнения КП переходят в переменные y и t уравнения (7.33). Мы без труда можем переписать высшие симметрии в новых переменных и получить, в частности, из (7.10) следующую высшую симметрию системы (7.32):

$$\begin{aligned} u_{t_4} &= D_x(u_{xxx} + 2u_y + 2v_{xx} + 2uu_x + 4uv) + 4v_y, \\ -v_{t_4} &= D_x\left(v_{xxx} + 2v_y + 2u_{xy} - 2uu_x - u_x^2 + 2uv_x - 2v^2 - \frac{4}{3}u^3\right) + 4w_{yy}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

где $w_x = u$.

С одной стороны, мастер-симметрия для системы (7.32) не может быть связана с самим уравнением точечной заменой, как это было в предыдущих примерах. Действительно, если бы такая замена существовала, то мастер-симметрия была бы локальной и порождала бы локальные высшие симметрии, в то время как высшие симметрии (7.32) нелокальны. С другой стороны, точечное преобразование в (7.34)

$$\begin{aligned} D_x &\rightarrow y^{\frac{1}{4}}D_x, & D_y &\rightarrow y^{\frac{3}{4}}D_y + \frac{1}{4}xy^{-\frac{1}{4}}D_x, \\ u &\rightarrow y^{\frac{1}{2}}u + \frac{1}{4}xy^{-\frac{1}{2}}, & v &\rightarrow y^{\frac{3}{4}}v, & w &\rightarrow y^{\frac{1}{4}}w + \frac{1}{8}x^2y^{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

позволяет построить следующую мастер-симметрию:

$$\begin{aligned} u_\tau &= yu_{t_4} + xu_t + \frac{5}{2}u_x + 4v, \\ v_\tau &= yv_{t_4} + xv_t - u_{xx} - \frac{5}{2}v_x - 5w_y + u^2. \end{aligned}$$

В частности, обозначая дифференцирования, соответствующие уравнениям $u_{t_1} = u_x$ и $u_{t_3} = u_y$, через D_{t_1} и D_{t_3} , мы видим, что

$$\text{ad}_{D_\tau}: D_{t_1} \rightarrow D_t \rightarrow D_{t_3} \rightarrow D_{t_4}.$$

Таким образом, мы имеем сбой на первом шаге, все прочие члены иерархии, по-видимому, остаются B -интегрируемыми.

Похожие примеры имеются в случае $(1 + 1)$ -мерных уравнений, где симметричный подход использует в качестве определения интегрируемости весьма естественное для таких уравнений свойство – наличие бесконечных иерархий локальных высших симметрий и законов сохранения. Интегрируемость в этом смысле иногда удается нарушить при помощи простого преобразования, аналогичного $\tilde{u} = u_x$. Однако такие примеры не меняют существа дела и не мешают использовать определение для классификации и тестирования. Один из примеров связан с системой уравнений (Bq_1) из приложения 1, двумерным обобщением которой и является система (7.32). Преобразование $\tilde{u} = u$, $\tilde{v} = v_x - u^2/2$ приводит к системе

$$u_t = u_{xx} + p, \quad v_t = -v_{xx} + u_x^2 - up, \quad p = 2v + u^2. \quad (7.35)$$

Легко видеть из (П.6), что $\rho_2 = 4u + \text{const}$, но эта функция не является сохраняющейся плотностью. Значит, система (7.35), в отличие от (Bq_1) , не может иметь локальных законов сохранения и симметрий высокого порядка.

7.4. Техника вычислений. На самом деле проверка условий (7.1) вовсе не требует обращения к вспомогательной линейной задаче, и мы попробуем описать эту процедуру на примере уравнения

$$u_{yt} + \alpha u_x u_{xy} + \beta u_y u_{xx} + u_{xxx} = 0, \quad \alpha\beta \neq 0. \quad (7.36)$$

Известные тесты показывают, что оно интегрируемо только при $\alpha = \beta$ (см. [72, 73]).

Первая проблема, с которой приходится сталкиваться, – это выбор общего вида искомой замены переменных. Вообще говоря, в случае скалярных уравнений мы должны априори допускать произвольные контактные преобразования (для систем они исчерпываются точечными согласно классическому результату Беклунда, зато появляются обратимые дифференциальные подстановки). Тем не менее в большинстве содержательных примеров достаточно ограничиться точечными заменами вида

$$x \rightarrow \xi(x, y), \quad y \rightarrow \eta(x, y), \quad u \rightarrow \varphi(u, x, y). \quad (7.37)$$

Грубо говоря, это соответствует уравнениям с постоянными коэффициентами в линейной главной части. Дальнейшее уточнение вида замены можно получить из анализа нелокальных членов уравнения. Действительно, практика показывает, что уравнение и мастер-симметрия содержат одинаковые нелокальности. Так как при замене (7.37) операторы D_x и D_y изменяются по правилу

$$D_x \rightarrow \frac{1}{\Delta}(\eta_y D_x - \eta_x D_y), \quad D_y \rightarrow \frac{1}{\Delta}(\xi_x D_y - \xi_y D_x), \quad (7.38)$$

где $\Delta = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$, то отсюда следует, что если, например, в уравнении имеется оператор D_y^{-1} (как в случае уравнения (7.28)), то $\xi_y = 0$. Действительно, в противном случае оператор D_y^{-1} переходит в оператор, обратный к тому, который находится в правой части (7.38), что выводит мастер-симметрию за пределы рассматриваемого класса. Аналогично, если уравнение содержит оператор D_x^{-1} (как в случае уравнения КП (7.2)), то

$\eta_x = 0$. Наконец, для уравнений, у которых в правой части есть нелокальности обоих видов, мы находим $\xi_y = \eta_x = 0$ и имеем дело с наиболее простой заменой переменных. Такую структуру имеет уравнение Веселова–Новикова, являющееся линейной комбинацией уравнений (7.28) и (7.31).

Заметим, наконец, что во всех разобранных выше примерах замена была линейной по u . Это связано с условием, что нелокальность типа $D_x^{-1}(u)$ должна выражаться при замене через нелокальность этого же вида. Разумеется, если уравнение, содержащее такую нелокальность, предварительно “испортить” преобразованием $u = f(\tilde{u})$, то линейность замены нарушается.

Конечно, приведенные рассуждения являются весьма нестрогими и призваны лишь пояснить, как вид уравнения определяет вид замены. Однако для конкретного уравнения все это несложно доказать непосредственно из анализа определяющего соотношения (7.1).

Вторая проблема – это проблема нелокальностей, общая для всей теории двумерных интегрируемых уравнений. Подчеркнем, что здесь мы не предлагаем каких-либо новых способов ее решения и лишь вкратце обсудим специфику нашей задачи.

В наиболее простых случаях можно работать с локальными уравнениями за счет отказа от эволюционности. Например, уравнение вида (к которому принадлежит и (7.36))

$$u_{y,t} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots)$$

заменой (7.37) при $\xi_y = 0$ переводится в уравнение того же вида

$$u_{y,\tau} = G(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots).$$

Определив

$$u_{y,t'} = H = D_\tau(F) - D_t(G),$$

мы можем, в принципе, проверить равенство $R = D_t(H) - D_{t'}(F) = 0$. Трудность заключается в том, что это равенство содержит производные не только по x и y , но также и по t , t' и τ . Тем не менее многократное дифференцирование по y позволяет избавиться от них и получить условия совместности уравнения $R = 0$ с исходным уравнением.

Как правило, удобнее работать с эволюционной формой уравнений. После замены $t \rightarrow -t$, $\alpha u_y \rightarrow 3u$ уравнение (7.36) приводится к виду

$$u_t = u_{xxx} + 3uD_y^{-1}u_{xx} + 3\lambda u_x D_y^{-1}u_x, \quad (7.39)$$

совпадающему с (7.28) при $\lambda = 1$ (что соответствует $\alpha = \beta$). При проверке определяющего соотношения (7.1) мы сталкиваемся с необходимостью продолжения замен на нелокальности. При этом следует учитывать константы интегрирования, например нелокальность $D_y^{-1}u$ преобразуется следующим образом:

$$D_y^{-1}u \rightarrow D_y^{-1}(\eta_y \varphi(u, x, y)) + \mu(x).$$

Если имеется несколько различных нелокальностей, то следует вводить несколько функций μ .

В заключение отметим, что при проведении вычислений удобно использовать операторный язык, заменяя равенство функций равенством соответствующих формальных псевдодифференциальных операторов вида

$$\sum_{i,j < \infty} a_{ij} D_x^i D_y^j = \sum_{i < \infty} A_i D_x^i,$$

полученных линеаризацией. При этом определяющее уравнение (7.1) заменяется соотношениями

$$[F_*, H_*] + D_{t'}(F_*) - D_t(H_*) = 0, \quad H_* = [F_*, G_*] + D_\tau(F_*) - D_t(G_*), \quad (7.40)$$

где F_* , G_* , H_* обозначают операторы линеаризации правых частей уравнения, его мастер-симметрии и их коммутатора, т. е.

$$u_t = F, \quad u_\tau = G, \quad u_{t'} = H = D_\tau(F) - D_t(G).$$

Анализ соотношений (7.40) проводится поэтапно с последовательным уточнением вида замены. Например, чтобы проверить линейность замены, достаточно проследить за двумя первыми членами в F_* и G_* . Имеем

$$F_* = D_x^3 + u D_y^{-1} D_x^2 + \dots$$

Так как нелокальность связана с D_y^{-1} , то $\xi = \xi(x)$ и

$$D_x \rightarrow A = a(x)D_x + b(x, y)D_y, \quad D_y \rightarrow c(x, y)D_y, \quad ac \neq 0.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$u_\tau = G = \frac{1}{\varphi_u} (A^3(\varphi) + 3\varphi A^2(\psi) + 3A(\varphi)A(\psi)), \quad \psi = D_y^{-1} \left(\frac{\varphi}{c} \right) + \mu(x).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} G_* &= g_3 D_x^3 + 3g_2 D_x^2 + \dots, \\ g_3 &= a^2 b, \quad g_2 = g_{2,1} D_y + g_{2,0} + \dots, \\ g_{2,1} &= a^2 b, \quad g_{2,0} = \frac{\varphi_{uu}}{\varphi_u} a^2 (a u_x + b u_y) + d(u, x, y). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (7.40) и приравнявая нулю коэффициенты при D_x^7 и D_x^6 , получаем

$$D_x^2(g_3) = D_x^2(g_{2,1}) = D_x^2(g_{2,0}) = 0.$$

Это и доказывает линейность замены: $\varphi_{uu} = 0$. Дальнейшее уточнение ее вида и анализ условий (7.40) через несколько шагов приводит к противоречию, если $\lambda \neq 1$, и к формуле (7.30) при $\lambda = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Канонические плотности

Здесь мы кратко обсудим условия интегрируемости и списки интегрируемых уравнений для классов уравнений КдФ, Бюргера, НШ и Буссинеска (см., например, обзоры [10, 12]). Сначала рассмотрим скалярные эволюционные уравнения

$$u_t = G(x, u, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad n \geq 2, \quad (\text{П.1})$$

где $u_1 = u_x$, $u_2 = u_{xx}$ и т.д. Для краткости в дальнейшем используются обозначения $G_0 = \partial G / \partial u$, $G_k = \partial G / \partial u_k$.

Для любого порядка n уравнения (П.1) можно выписать простейшие условия интегрируемости (необходимые условия существования высших симметрий и законов сохранения), которые имеют вид локальных законов сохранения $\rho_t = \sigma_x$, где ρ – построенная по правой части уравнения специальная плотность (так называемая каноническая плотность). Условие заключается в том, что найдется функция σ конечного числа переменных x, u, u_1, u_2, \dots , и условие это без труда может быть проверено для любого наперед заданного уравнения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если уравнение (П.1) имеет симметрию порядка выше n , то функция $\rho = G_n^{-1/n}$ является канонической плотностью. Если уравнение

$$u_t = u_n + F(x, u, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad F_m \neq 0, \quad m \leq n - 2, \quad (\text{П.2})$$

имеет симметрию порядка выше $n + m$, то функция $\rho = F_m$ также является канонической плотностью.

Как было показано в п. 6.1, канонические плотности для уравнения (П.1) определяются как вычеты степеней решения первого порядка уравнения (6.2): $\rho_k = \text{res } L^k$. В случае интегрируемого уравнения оператор L в главном совпадает с $G_*^{1/n}$, т.е. первая из указанных нами канонических плотностей есть ρ_{-1} . Подобные соображения позволяют показать, что еще n плотностей ρ_k определяются следующим образом:

$$\rho_k = \text{res}(G_*^{\frac{k}{n}}), \quad k = 1, \dots, n - 1, \quad \rho_n = \sigma_1,$$

где σ_1 находится из соотношения $(\rho_1)_t = (\sigma_1)_x$. Для уравнений вида (П.2) укажем явные формулы для первых четырех из этих канонических плотностей:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= F_{n-2}, & \rho_2 &= F_{n-3}, \\ \rho_3 &= F_{n-4} + \frac{3-n}{2n} F_{n-2}^2, & \rho_4 &= F_{n-5} + \frac{4-n}{n} F_{n-3} F_{n-2}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Например, для уравнений третьего порядка

$$u_t = u_3 + F(x, u, u_1)$$

канонические плотности имеют вид

$$\rho_1 = F_1, \quad \rho_2 = F_0, \quad \rho_3 = \sigma_1.$$

С точностью до точечных преобразований (включающих преобразование Галилея) и потенцирования $u \rightarrow u_x$ уравнения, обладающие высшими симметриями и законами сохранения, составляют следующий список.

Список уравнений типа КдФ:

$$u_t = u_3 + P(u)u_1, \quad P''' = 0; \tag{K_1}$$

$$u_t = u_3 - \frac{1}{2}u_1^3 + (\alpha e^{2u} + \beta e^{-2u})u_1. \tag{K_2}$$

В обзоре [12] приведен более полный список интегрируемых уравнений третьего порядка, среди которых следует выделить уравнение Кричевера–Новикова [74]

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2u_1}(u_2^2 + R(u)), \tag{П.4}$$

где R – произвольный полином четвертой степени. Это уравнение, как модель Ландау–Лифшица и уравнение (P₆), может рассматриваться как универсальное в соответствующем классе.

Для уравнения пятого порядка

$$u_t = u_5 + F(x, u, u_1, u_2, u_3)$$

канонические плотности имеют вид

$$\rho_1 = F_3, \quad \rho_2 = F_2, \quad \rho_3 = F_1 - \frac{1}{5}F_3^2, \quad \rho_4 = F_0 - \frac{1}{5}F_2F_3, \quad \rho_5 = \sigma_1.$$

Список интегрируемых уравнений в этом случае (с точностью до тех же преобразований, что в предыдущем примере) состоит из пяти уравнений. Высшие симметрии уравнений третьего порядка сюда не включены.

Список уравнений пятого порядка:

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 5u_1u_2 + 5u^2u_1, \tag{K_1^5}$$

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + \frac{25}{2}u_1u_2 + 5u^2u_1, \tag{K_2^5}$$

$$u_t = u_5 + 5(u_1 - u^2)u_3 + 5u_2^2 - 20uu_1u_2 - 5u_1^3 + 5u^4u_1, \tag{K_3^5}$$

$$u_t = u_5 + 5(u_2 - u_1^2 + ae^{2u} - be^{-4u})u_3 + 15(ae^{2u} + 4be^{-4u})u_1u_2 - 5u_1u_2^2 + u_1^5 - 90be^{-4u}u_1^3 + 5(ae^{2u} - be^{-4u})^2u_1, \tag{K_4^5}$$

$$u_t = u_5 + 5(u_2 - u_1^2 - ae^{2u} + be^{-u})u_3 - 5u_1u_2^2 - 15ae^{2u}u_1u_2 + u_1^5 + 5(ae^{2u} - be^{-u})^2u_1. \tag{K_5^5}$$

Имеется гипотеза, что начиная с шестого порядка все нелинейные интегрируемые уравнения вида (П.2) исчерпываются высшими симметриями уравнений порядков 2, 3, 4, 5.

Для уравнений второго порядка классификационную задачу удалось полностью решить в общем виде (П.1). С точностью до контактных преобразований список нелинейных уравнений выглядит следующим образом.

Список уравнений типа Бюргерса:

$$u_t = D_x(u_1 + u^2 + a), \quad (\text{B}_1)$$

$$u_t = D_x\left(\frac{u_1}{u^2} + \alpha xu + \beta u\right), \quad (\text{B}_2)$$

$$u_t = D_x\left(\frac{u_1}{u^2} - 2x\right). \quad (\text{B}_3)$$

Здесь α, β – произвольные постоянные, $a(x)$ – произвольная функция. Этот классификационный результат получен в работе [75].

Наконец, для систем уравнений

$$u_t = u_2 + F(u, v, u_1, v_1), \quad v_t = -v_2 + G(u, v, u_1, v_1) \quad (\text{П.5})$$

(по сравнению с (4.3) мы сделали растяжение времени, что не меняет симметричных свойств уравнений) простейшие три канонические плотности имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2}(F_{u_1} + G_{v_1}), \\ \rho_2 &= \sigma_1 - \frac{1}{4}(F_{u_1}^2 + G_{v_1}^2) + F_{v_1}G_{u_1} + F_u - G_v, \\ \rho_3 &= \sigma_2, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где σ_i нужно находить из соотношений $(\rho_i)_t = (\sigma_i)_x$. В п.4.1 мы приводили системы типа НШ, имеющие законы сохранения с такими плотностями (полные списки интегрируемых систем получены в [10, 30]). Здесь мы приведем только системы из класса уравнения Буссинеска, связанные со спектральными задачами третьего порядка.

Список систем типа Буссинеска:

$$u_t = u_2 + 2v_1, \quad v_t = -v_2 + 2uu_1; \quad (\text{Bq}_1)$$

$$u_t = u_2 + v_1, \quad v_t = -v_2 + u_1^2 + \left(v + \frac{u^2}{2}\right)u_1; \quad (\text{Bq}_2)$$

$$u_t = u_2 + (u + v)^2, \quad -v_t = v_2 + (u + v)^2; \quad (\text{Bq}_3)$$

$$u_t = u_2 + (u + v)v_1 - \frac{(u + v)^3}{6}, \quad v_t = -v_2 + (u + v)u_1 + \frac{(u + v)^3}{6}; \quad (\text{Bq}_4)$$

$$u_t = u_2 + v_1^2 + W_u v_1 + Z_v, \quad -v_t = v_2 + u_1^2 - W_v u_1 + Z_u. \quad (\text{Bq}_5)$$

Здесь

$$W = \sum_{k=1}^3 \alpha_k e^{-w_k}, \quad Z = \sum_{k=1}^3 (\beta_k e^{w_k} + \gamma_k e^{-2w_k}), \quad w_k = \varepsilon^k u + \varepsilon^{-k} v,$$

и $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$ – кубический корень из единицы: $\varepsilon^3 = 1$.

**2. Условия интегрируемости
и классификационные результаты
для дифференциально-разностных уравнений**

Здесь мы более подробно обсудим классификационные результаты и условия интегрируемости для уравнений на решетке, которые не так хорошо, как для непрерывных уравнений, представлены в литературе. Имеется четыре классификационных результата, полученных для уравнений на решетке с одной дискретной и одной непрерывной переменной в рамках симметричного подхода. Результаты эти относятся к следующим классам уравнений:

$$u_x = f(u_1, u, u_{-1}), \quad f_{u_1} f_{u_{-1}} \neq 0, \tag{П.7}$$

$$q_{xx} = f(q_x, q_1, q, q_{-1}), \quad f_{q_1} f_{q_{-1}} \neq 0, \tag{П.8}$$

$$q_{xx} = f(q_1, q, q_{1,x}, q_x) - g(q, q_{-1}, q_x, q_{-1,x}), \quad f_{q_{1,x}} g_{q_{-1,x}} \neq 0, \tag{П.9}$$

$$u_x = f(u_1, u, v), \quad v_x = g(v_{-1}, v, u), \quad f_{u_1} f_v g_{v_{-1}} g_u \neq 0. \tag{П.10}$$

Простейшими представителями классов являются соответственно уравнение Вольтерра (5.10), цепочка Тоды (4.26), релятивистская цепочка Тоды (R₃) с $\mu = 1$ и $\nu = 0$ (см. п. 4.2) и ее гамильтонова форма записи (4.40). Классификационные результаты объяснят, в частности, в каком смысле в разделе 4, используя несколько лагранжианов, мы выписали не просто три списка, а три полных списка интегрируемых цепочек. Подробно вывод условий интегрируемости и схема симметричного подхода применительно к уравнениям на решетке излагается в работе [55] и обзоре [9].

Для уравнений (П.7) (см. [53, 52]) несколько простейших условий интегрируемости выглядят следующим образом:

$$\rho_x^i = (T - 1)\sigma^i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{П.11}$$

$$\rho^1 = \ln f_{u_1}, \quad \rho^2 = \sigma^1 + f_u, \quad \rho^3 = \sigma^2 + \frac{1}{2}(\rho^2)^2 + f_{u_1} T f_{u_{-1}};$$

$$\omega^i = (T - 1)s^i, \quad i = 1, 2,$$

$$\omega^1 = \ln \left(-\frac{f_{u_1}}{f_{u_{-1}}} \right), \quad \omega^2 = s_x^1 + 2f_u. \tag{П.12}$$

ТЕОРЕМА 4. *Если уравнение вида (П.7) имеет два локальных закона сохранения с порядками $N_1 > N_2 > 4$, то оно удовлетворяет условиям (П.11), (П.12).*

Напомним, что функции ρ и σ , определяющие локальный закон сохранения $\rho_x = (T - 1)\sigma$, зависят в случае цепочек (П.7) от конечного числа переменных $u, u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \dots$. Формальная вариационная производная $\delta\rho/\delta u$ имеет вид

$$\frac{\delta\rho}{\delta u} = \sum_k \frac{\partial}{\partial u} T^k \rho = \hat{\rho}(u_N, u_{N-1}, \dots, u_{-N}),$$

и число N называется порядком закона сохранения.

Приведенные условия интегрируемости не зависят (как и положено в классической схеме симметричного подхода) от формы и порядков законов сохранения. При проверке условий можно использовать формальную вариационную производную, так как

$$\frac{\delta h}{\delta u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h \in \text{const} + \text{Im}(T - 1).$$

Условия интегрируемости (П.11), (П.12) достаточно эффективны, чтобы получить полный список уравнений, удовлетворяющих этим условиям. Дополнительная работа с уравнениями полученного списка показывает, что условия эти оказываются также и достаточными условиями существования симметрий и законов сохранения сколь угодно высокого порядка. Условия интегрируемости, которые мы приводим ниже для других классов цепочек, также являются не только необходимыми, но и достаточными. Список уравнений, удовлетворяющих условиям (П.11) и (П.12), совпадает (с точностью до преобразований $\tilde{u}_n = \nu(u_n)$, $\tilde{x} = cx$) со списком (V) из п. 5.3.

Заметим еще, что условия первого типа (П.11) дают возможность строить для уравнений списка (V) простейшие локальные законы сохранения. Как условия (П.11), так и условия (П.12) без труда проверяются для любого наперед заданного уравнения, т.е. обеспечивают удобный тест на интегрируемость.

Перейдем к обсуждению цепочек вида (П.8). Условия интегрируемости в этом случае задаются функциями (см. [32])

$$\begin{aligned} \rho^1 &= \ln f_{q_1}, & \rho^2 &= 2\sigma^1 + f_{q_x}, & \rho^3 &= 2\sigma^2 - \frac{1}{2}(f_{q_x})_x + \frac{1}{4}(f_{q_x}^2 + (\rho^2)^2) + f_q, \\ \omega^1 &= \ln \left(\frac{f_{q_1}}{f_{q_{-1}}} \right), & \omega^2 &= s_x^1 + f_{q_x}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5. *Условия с указанными функциями ρ^i , ω^i выполняются, если имеются по крайней мере два закона сохранения с порядками $N_1 \geq 8$, $N_2 > 2N_1 - 3$.*

Функции ρ и σ , определяющие локальный закон сохранения, на этот раз зависят от переменных $q, q_x, q_{\pm 1}, q_{\pm 1, x}, \dots$. Вариационные производные $\delta\rho/\delta q$, $\delta\rho/\delta q_x$ имеют вид

$$\frac{\delta\rho}{\delta q} = \hat{\rho}(q_N, q_{N, x}, \dots, q_{-N}, q_{-N, x}), \quad \frac{\delta\rho}{\delta q_x} = \tilde{\rho}(q_N, q_{N, x}, \dots, q_{-N}, q_{-N, x})$$

(предполагается, что $\hat{\rho}$ или $\tilde{\rho}$ зависит хотя бы от одной из переменных $q_N, q_{N, x}, q_{-N}, q_{-N, x}$), и номер N старших переменных называется порядком закона сохранения. При проверке условий интегрируемости следует использовать две вариационные производные, так как

$$\frac{\delta h}{\delta q} = \frac{\delta h}{\delta q_x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h \in \text{const} + \text{Im}(T - 1).$$

Список уравнений, удовлетворяющих условиям интегрируемости, состоит (с точностью до преобразований $\tilde{q}_n = \nu(q_n)$, $\tilde{x} = cx$ и $\tilde{q}_n = (-1)^n q_n$) из цепочек (4.31), (4.34) и

$$q_{xx} = \exp(q_1 - 2q + q_{-1}) + \mu. \quad (\text{П.13})$$

Цепочка (П.13) является очевидной модификацией цепочки Тоды (4.26), преобразование имеет вид $\tilde{q} = q_1 - q$ (\tilde{q} – решение (4.26)). Условия интегрируемости позволяют строить для цепочек (4.31) и (4.34) не только простейшие законы сохранения, но и высшие симметрии, так как эти цепочки гамильтоновы.

Класс цепочек (П.10), в отличие от (П.7) и (П.8), является менее удобным с точки зрения симметричного подхода. Имеющаяся здесь трудность связана с наличием “нестандартных” высших симметрий и условий интегрируемости. Список условий интегрируемости и классификационный результат, которые мы приводим ниже, содержатся в [36].

Рассматриваются системы, заведомо обладающие гамильтоновой структурой (4.39). В этом случае (т.е. в случае гамильтоновых цепочек) можно требовать только наличия высших симметрий. Привлекать локальные законы сохранения не имеет смысла, так как дополнительных условий интегрируемости, аналогичных (П.12), получить невозможно (см., например, [36, 55]). Высшие симметрии цепочек (П.10) делятся на два совершенно различных по своей природе вида.

Если рассмотреть симметрию порядка N

$$u_t = F(u_N, v_N, u_{N-1}, v_{N-1}, \dots), \quad v_t = G(u_N, v_N, u_{N-1}, v_{N-1}, \dots) \quad (\text{П.14})$$

и исследовать условие совместности (П.14) и (П.10), нетрудно показать, что $F_{v_N} = G_{u_N} = 0$, и вывести первое условие интегрируемости. В случае $F_{u_N} \neq 0$ мы приходим к условию

$$(\ln f_{u_1})_x = (T - 1)\sigma. \quad (\text{П.15})$$

Это стандартное условие интегрируемости, аналогичное (П.11). Отработана техника работы с подобными условиями, они оказываются достаточно эффективными, чтобы проводить классификацию интегрируемых уравнений.

В случае, когда $G_{v_N} \neq 0$, имеет место условие другого типа:

$$\rho_x = (T^N - 1)g_v. \quad (\text{П.16})$$

Оно также имеет вид локального закона сохранения, так как

$$T^N - 1 = (T - 1)(T^{N-1} + T^{N-2} + \dots + T + 1),$$

однако зависит от порядка N симметрии и имеет неопределенную плотность ρ . До сих пор неясно, как работать с такими условиями. Для классификации в рассмотрение вводятся так называемые специальные симметрии, позволяющие избегать нестандартных условий (П.16).

Специальная симметрия порядка N имеет вид

$$u_t = F(u_N, u_{N-1}, v_{N-1}, \dots), \quad v_t = G(u_{N-1}, u_{N-2}, v_{N-2}, \dots), \quad F_{u_N} \neq 0.$$

Таким образом, мы рассматриваем цепочки вида (П.10) с гамильтоновой структурой (4.39), обладающие специальными симметриями достаточно высокого порядка. Классификация проводится по модулю точечных преобразований вида

$$\tilde{u}_n = \nu(u_n), \quad \tilde{v}_n = \eta(v_n), \quad \tilde{x} = cx, \quad (\text{П.17})$$

сохраняющих заданную структуру цепочек и их симметрий.

ТЕОРЕМА 6. Если система (П.10) имеет специальную симметрию порядка $N \geq 4$, то она удовлетворяет условиям вида (П.11) с функциями

$$\rho^1 = \ln f_{u_1}, \quad \rho^2 = \sigma^1 + f_u, \quad \rho^3 = \sigma^2 + \frac{1}{2}(\rho^2)^2 + f_v g_u.$$

Цепочка вида (П.10) с гамильтоновой структурой (4.39) удовлетворяет указанным условиям интегрируемости тогда и только тогда, когда заменой переменных (П.17) сводится к одной из цепочек списка (Н) из п. 4.3. Системы списка (Н) гамильтоновы, поэтому условия интегрируемости обеспечивают для них как простейшие законы сохранения, так и высшие симметрии. При проверке условий для заданной системы удобно использовать утверждение

$$\frac{\delta h}{\delta u} = \frac{\delta h}{\delta v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h \in \text{const} + \text{Im}(T - 1).$$

Таким образом, мы видим, что последний классификационный результат является менее полноценным с теоретической точки зрения по сравнению с двумя предыдущими, но обеспечивает тем не менее целый список интегрируемых цепочек, имеющих многочисленные приложения.

С точки зрения общей теории симметричного подхода класс цепочек (П.9) аналогичен (П.10). Здесь также имеется два типа высших симметрий, приводящих к двум различным по природе типам условий интегрируемости. В работе [33], в которой получен соответствующий классификационный результат, условия интегрируемости не выписывались и использовалась упрощенная схема симметричного подхода. В [33] рассматривались цепочки (П.9), имеющие симметрию вида

$$q_t = f(q_1, q, q_{1,x}, q_x) + g(q, q_{-1}, q_x, q_{-1,x}). \quad (\text{П.18})$$

Очевидно, что в терминах $u = q_{n+1}$, $v = q_n$ такая симметрия может быть записана как система типа НШ (речь идет о переписывании симметрии в силу (П.9)):

$$u_t = u_{xx} + 2g(u, v, u_x, v_x), \quad v_t = -v_{xx} + 2f(u, v, u_x, v_x). \quad (\text{П.19})$$

Как известно (см., например, [10]), система вида (П.19), имеющая закон сохранения достаточно большого порядка, обязана удовлетворять условию $g_{u_x} - f_{v_x} \in \text{Im } D_x$. Условие это дает соотношение вида

$$g_{u_x} - f_{v_x} = (s(u, v))_x = s_u u_x + s_v v_x.$$

Возвращаясь к переменным q_i , мы получаем представление

$$T(g_{q_x}) - f_{q_x} = s_{q_1} q_{1,x} + s_q q_x \quad (\text{П.20})$$

в терминах правой части цепочки и некой функции двух переменных $s(q_1, q)$. Соотношение (П.20) используется в качестве второго условия (требуется, чтобы нашлась функция s , удовлетворяющая (П.20)).

С точностью до преобразований вида $\tilde{q}_n = \nu(q_n)$ цепочки (П.9), обладающие симметрией вида (П.18) и удовлетворяющие условию (П.20), исчерпываются списком уравнений, состоящим из (4.28), (4.30) и (4.35).

Благодарности. Работа поддержана грантами РФФИ № 99-01-00431, 98-01-01161, 96-15-96093 и INTAS-99-1782.

Список литературы

- [1] А. П. Весе́лов, А. Б. Ша́бат. Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.
- [2] V. E. Adler. Physica D. 1994. V. 73. P. 335–351.
- [3] А. Б. Ша́бат. ТМФ. 1999. Т. 121. № 1. С. 165–176.
- [4] Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Ша́бат. ДАН СССР. 1979. Т. 244. № 1. С. 57–61.
- [5] F. Calogero, A. Degasperis. Spectral Transforms and Solitons. Amsterdam: North-Holland, 1982.
- [6] Д. Леви, О. Рагниско, М. А. Родригес. ТМФ. 1992. Т. 93. № 3. С. 473–480.
- [7] С. П. Бурцев, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов. ТМФ. 1987. Т. 70. № 3. С. 323–341.
- [8] B. Fuchssteiner. Physica D. 1984. V. 13. P. 387–394.
- [9] A. B. Shabat, V. V. Sokolov. Sov. Sci. Rev. Sec. C. 1984. V. 4. P. 221–280.
- [10] А. В. Михайлов, А. Б. Ша́бат, Р. И. Ямилов. УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 3–53.
- [11] А. Б. Ша́бат. Каноническая серия законов сохранения. В кн.: П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. С. 366–369.
- [12] A. V. Mikhailov, V. V. Sokolov, A. B. Shabat. The symmetry approach to classification of integrable equations. In: What is Integrability? Ed. V. E. Zakharov. Berlin: Springer, 1991. P. 115–184.
- [13] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat. Symmetries – test of integrability. In: Important Developments in Soliton Theory. Eds. A. Fokas, V. Zakharov. Berlin: Springer, 1993. P. 355–372.
- [14] I. T. Habibullin, V. V. Sokolov, R. I. Yamilov. Multi-component integrable systems and nonassociative structures. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. Nature, Structure and Properties of Nonlinear Phenomena. Proc. of the Workshop (Lecce, Italy, June 29 – July 7, 1995). Eds. E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. World Scientific, 1996. P. 139–168.
- [15] А. Ю. Орлов, Е. И. Шульман. ТМФ. 1985. Т. 64. № 3. С. 323–328.
- [16] А. Б. Ша́бат. ДАН СССР. 1973. Т. 211. № 6. С. 1310–1313.
- [17] С. П. Новиков. Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 54–66.
- [18] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55–136.
- [19] Б. А. Дубровин. УМН. 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.
- [20] J. Weiss. J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 11. P. 2647–2656; 1987. V. 28. № 9. P. 2025–2039.
- [21] В. И. Громов. Дифф. уравнения. 1973. Т. 9. № 11. С. 2082–2083.
- [22] В. Э. Адлер, И. Т. Хабибуллин. Функц. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 2. С. 1–14.
- [23] B. Grammaticos, V. Papageorgiou, A. Ramani. Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 475–479.
- [24] F. Nijhoff, J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, A. Ramani. Inverse Problems. 1996. V. 12. P. 697–716.
- [25] С. Ю. Дубов, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин. ЖЭТФ. 1992. Т. 102. № 3. С. 814–826.
- [26] А. Б. Ша́бат. Inverse Problems. 1992. V. 6. P. 303–308.
- [27] A. Degasperis, A. B. Shabat. Construction of reflectionless potentials with infinitely many discrete eigenvalues. In: Proc. of NATO Advanced Research Workshop (Exeter, United Kingdom, July 14–19, 1992). NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci. 413. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 115–123.
- [28] A. Degasperis, A. B. Shabat. ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 230–247.
- [29] V. E. Adler. On the rational solutions of the Shabat equation. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. Nature, Structure and Properties of Nonlinear Phenomena. Proc. of the Workshop (Lecce, Italy, June 29 – July 7, 1995). Eds. E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. World Scientific, 1996. P. 53–61.
- [30] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov. Commun. Math. Phys. 1988. V. 115. P. 1–19.
- [31] А. Б. Ша́бат, Р. И. Ямилов. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 183–208.
- [32] R. I. Yamilov. Classification of Toda type scalar lattices. In: Proc. of 8th Int. Workshop NEEDS'92 (Dubna, Russia, July 6–17, 1992). Eds. V. Makhankov, I. Puzynin, O. Pashaev. Singapore: World Scientific, 1993. P. 423–431.
- [33] В. Э. Адлер, А. Б. Ша́бат. ТМФ. 1997. Т. 111. № 3. С. 323–334.

- [34] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат. ТМФ. 1997. Т. 112. № 2. С. 179–194.
- [35] В. Г. Маричин, А. Б. Шабат. ТМФ. 1999. Т. 118. № 2. С. 217–228.
- [36] Р. И. Ямилов. Симметричный подход к классификации с точки зрения интегрируемых дифференциально-разностных уравнений. Теория преобразований. Дисс. докт. ф.-м.н. Уфа: Ин-т математики Уфимского центра РАН, 2000.
- [37] V. E. Adler, R. I. Yamilov. J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 477–492.
- [38] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат. ТМФ. 1998. Т. 115. № 3. С. 349–358.
- [39] Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
- [40] А. В. Жибер, А. Б. Шабат. ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1103–1107.
- [41] А. Б. Борисов, С. А. Зыков. ТМФ. 1998. Т. 115. № 2. С. 199–214.
- [42] А. В. Жибер, В. В. Соколов. ТМФ. 1999. Т. 120. № 1. С. 20–26.
- [43] V. V. Sokolov, A. V. Zhiber. Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 303–308.
- [44] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт Башкирского филиала АН СССР. Уфа: Изд-во Башкирского филиала АН СССР, 1981.
- [45] A. N. Leznov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov. Phys. Lett. A. 1993. V. 174. P. 397–402.
- [46] K. Pohlmeyer. Commun. Math. Phys. 1976. V. 46. P. 207–218.
- [47] F. Lund, T. Regge. Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 1524–1538.
- [48] В. Э. Адлер. ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 48–61.
- [49] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik. J. Math. Phys. 1976. V. 17. № 6. P. 1011–1018.
- [50] Е. К. Склянин. Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 27–34.
- [51] O. Ragnisco, P. M. Santini. Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 441–452.
- [52] Р. И. Ямилов. Дискретные уравнения вида $du_n/dt = F(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$ ($n \in \mathbb{Z}$) с бесконечным набором локальных законов сохранения. Дисс. канд. ф.-м.н. Уфа: Ин-т математики Уфимского центра РАН, 1984.
- [53] Р. И. Ямилов. УМН. 1983. Т. 38. № 6. С. 155–156.
- [54] R. I. Yamilov. J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 6839–6851.
- [55] D. Levi, R. Yamilov. J. Math. Phys. 1997. V. 38. № 12. P. 6648–6674.
- [56] I. Yu. Cherdantsev, R. I. Yamilov. Physica D. 1995. V. 87. P. 140–144.
- [57] О. И. Боголюбский. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991.
- [58] Р. И. Ямилов. ТМФ. 1990. Т. 85. № 3. С. 368–375.
- [59] V. E. Adler. Int. Math. Res. Notices. 1998. № 1. P. 1–4.
- [60] А. В. Шабат, Р. И. Ямилов. Phys. Lett. A. 1997. V. 227. P. 15–23.
- [61] A. S. Fokas, B. Fuchssteiner. Phys. Lett. A. 1981. V. 86. P. 341.
- [62] D. Levi, O. Ragnisco. J. Phys. A. 1979. V. 12. P. 157–167.
- [63] W. Oevel, H. Zhang, B. Fuchssteiner. Progr. Theor. Phys. 1989. V. 81. № 2. P. 294–308.
- [64] W. Strampp, W. Oevel. Progr. Theor. Phys. 1985. V. 74. № 4. P. 922–925.
- [65] W. Oevel, B. Fuchssteiner, H. Zhang, O. Ragnisco. J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2664–2670.
- [66] D. Levi, P. Winternitz. Phys. Lett. A. 1988. V. 129. № 3. P. 165–167.
- [67] W. Oevel, B. Fuchssteiner. Phys. Lett. A. 1982. V. 88. P. 323–327.
- [68] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское, 1990.
- [69] А. П. Веселов, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1984. Т. 279. С. 20–24.
- [70] Л. П. Ниженник. ДАН СССР. 1980. Т. 254. С. 332–335.
- [71] M. Boiti, J. J.-P. Leon, M. Manna, F. Pempinelli. Inverse Problems. 1986. V. 2. P. 271–279.
- [72] E. L. Mansfield, P. A. Clarkson. Math. Comput. Simul. 1997. V. 43. P. 39–55.
- [73] A. V. Mikhailov, R. I. Yamilov. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 6707–6715.
- [74] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. УМН. 1980. Т. 35. С. 47–68.
- [75] С. И. Свинолугов. УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 263–264.

Поступила в редакцию 19.VII.2000 г.