Хабибуллин Булат Нурмиевич – математик, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии Башкирского государственного университета. Родился в 1958 г. в селе Байряка Бавлинского района Республики Татарстан. После обучения в восьмилетней школе поселка Уруссу, а затем в средней школе № 9 города Октябрьского Республики Башкортостан поступил на математический факультет Башкирского государственного университета.

После окончания БашГУ в 1980 г. и обучения в аспирантуре с 1983 г. работает на кафедре высшей алгебры и геометрии БашГУ. В 1985 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 1993 г. – докторскую диссертацию "Распределение нулей целых функций и выметание". Основные научные математические интересы: теория функций, комплексный анализ, функциональный анализ, гармонический анализ, теория потенциала, выпуклый анализ, упорядоченные векторные пространства, алгебраические структуры в функциональных пространствах, геометрия областей и кривых. Имеет более 130 публикаций, из которых более 100 в центральных российских и зарубежных изданиях. Руководитель многих научных проектов-грантов Российского фонда фундаментальных исследований, Федерального центра научно-технических программ и др. В частности, в течении более 10 лет руководитель проектов по организации и проведению Всероссийских и Международных научных школ-конференций «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» для студентов, аспирантов и молодых ученых (Уфа, октябрь).

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Б. Н. Хабибуллин

ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ
И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Уфа – 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Б. Н. Хабибуллин

ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Уфа
РИЦ БашГУ
2012

УДК 517.5 + 517.982
ББК В161.5, В162
Х12

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор,
чл.-корр. РАН **В. В. Напалков** (ИМ с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа);
доктор физико-математических наук, профессор
И. Ф. Красичков-Терновский (ИМ с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа)

Хабибуллин Б. Н.
Х12 Полнота систем экспонент и множества единственности: Монография (переиздание). — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — xvi, 176 с.; 2 рис. — Библиогр.: 413 назв.
ISBN 978-5-7477-2540-9

Настоящее издание — существенно расширенный цикл лекций, прочитанных на Международных уфимских школах-конференциях для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», проходивших в октябре 2006–11 гг. в БашГУ при поддержке РФФИ, ФЦНТП, а также при софинансировании БашГУ.

Дан обзор проблем полноты, минимальности, их устойчивости и т. п. для экспоненциальных систем в функциональных пространствах. Книга предназначена специалистам по теории функций — преподавателям вузов и научным работникам, а также аспирантам, магистрантам, студентам.

УДК 517.5 + 517.982
ББК В161.5, В162

ISBN 978-5-7477-2540-9

Посвящается светлой памяти
моих родителей
— отца, Хабибуллина
Нурмөхәмәта
Хабибулловича (1922–2001),
и мамы, Хабибуллиной
(Хасановой) Дании
Габдрахмановны (1929–2002)

MSC 2000 : 30E10, 30H05, 32A60, 30D15, 31A05, 31A10, 32U05,
32A70, 32A10, 32A15, 32A36, 46E05, 46E10, 46E15, 46E20

Reviewers:
Doctor of physico-mathematical Science, Professor,
Corresponding Member of RAS **V. V. Napalkov**;
Doctor of physico-mathematical Science,
Professor **I. F. Krasichkov-Ternovskiĭ**

Khabibullin B. N.

COMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS AND UNIQUENESS SETS. — Russia, Ufa: Bashkir State University Press, 2012 (the fourth stereotyped edition). — xvi+176=192 pp., 2 figures. — The bibliography contains 413 entries.

This publication is essentially enlarged series of lectures given on International conferences "Fundamental Mathematics and its applications in Natural Science" for students, postgraduates and young scientists which took place in Bashkir State University on October in 2006–2011.

We consider problems of completeness, minimality, stability etc. for exponential systems $\{e^{\lambda_k z}\}$, $z \in X$, with a sequence of complex exponents $\Lambda = \{\lambda_k\}$ in spaces of functions on X where X is either a domain (convex usually) or a closed set (a segment, or rectifiable Jordan arc, or the closure of simply connected domain) and functions are holomorphic in the interior of X, if its interior is nonempty. As a rule, the topologies of these function spaces are generated routine sup- or L^p-norms. In view of well-known interconnection between the completeness and the uniqueness sets, we lead a parallel fractional survey on the description of (non-)uniqueness sets Λ for weighted spaces of holomorphic and entire functions. In this direction a general non-constructive method is described. This method use the classic and absract balayage (the sweeping out) of measures, functionals, and functions.

We touch on relatively infrequent multidimensional results on the completeness of exponential systems $\{e^{<\lambda,z>}\}$, $\lambda \in \Lambda$, and on (non-)uniqueness sets Λ.

ISBN 978-5-7477-2540-9

Оглавление

4 Многомерные результаты **109**

Предисловие

Исследование возможности приближения в той или иной форме объектов из некоторого класса простейшими в определенном смысле элементами того же класса — неотъемлемая часть идеологии математики. Одно из проявлений ее — аппроксимативные свойства различных систем элементов в топологическом векторном пространстве, в частности, систем функций в функциональных пространствах или, еще у́же, экспоненциальных систем.

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел, $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots,$ — пустая, конечная или счетная последовательность точек (чисел) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Последовательность Λ порождает *экспоненциальную систему*, или *систему* (кратных) *экспонент*

$$\operatorname{Exp}_\Lambda := \{z^{p-1}e^{\lambda z} \colon \lambda \in \Lambda,\ 1 \leqslant p \leqslant \Lambda(\lambda),\ p \in \mathbb{N}\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\Lambda(\lambda)$ — число вхождений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательность Λ. Можно рассматривать и более общие системы функций вида $\mathcal{F}_\Lambda := \{f(\lambda z) : \lambda \in \Lambda\}$, где f — фиксированная целая функция, а точки последовательности Λ попарно различны. При этом последовательность Λ по отношению к системе $\operatorname{Exp}_\Lambda$ или $\mathcal{F}_\Lambda$ именуется далее *последовательностью показателей.*

Одними из важнейших аппроксимативных свойств систем $\operatorname{Exp}_\Lambda$ являются полнота, минимальность, их устойчивость относительно малых “шевелений” последовательности показателей Λ или удалений (добавлений) определенного числа точек из Λ, избыток полноты и другие связанные с ними понятия — далее часто для краткости просто “*полнота экспонент*”. При этом важно́ выявление не только условий выполнения конкретного аппроксимативного свойства, а ра́вно и условий его нарушения со стыковкой в идеале тех и других в форме критерия.

Интерес к аппроксимативным свойствам именно систем Exp_Λ или, более общó, систем вида $\mathcal{F}_\Lambda$ возник как следующий логичный шаг после начала подобных исследований для многочленов. Естественным образом он вызван и потребностями таких областей анализа, как (не)гармонический анализ Фурье, спектральный синтез, теория уравнений свертки, интерполяция, аналитическое продолжение, (не)квазианалитичность, исследование систем собственных функций дифференциальных операторов, начально-краевые задачи для уравнений в частных производных и др. Известны приложения полноты экспонент или двойственной и зачастую более общей задачи описания множеств (не)единственности в пространствах голоморфных или целых функций в теориях сигналов, связи, антенн (см. монографию Я. И. Хургина и В. П. Яковлева [ХЯ62], обзоры Х. Бруны, Х. Массанеды и Х. Ортеги-Черды [BMO03], Дж. Дж. Бенедетто и Х.-Ч. Ву [BW00], и, например, статью Л. Кнокерта и Д. Де Зуттера [KnZ02]), к управляемости систем с распределёнными параметрами (см. монографию С. А. Авдонина и С. А. Иванова [АИ95]), в теории когерентных состояний из математической физики (см. монографию А. М. Переломова [Пе87], статью А. Вурдаса [Vou97]) и т. д.

Круг известных достаточных или необходимых условий полноты систем вида Exp_Λ и $\mathcal{F}_\Lambda$ в различных функциональных пространствах поистине необозрим. Поэтому по задаче полноты в нашем обзоре в полном объеме формулируются только классические теоремы, достижения последних лет, а также результаты переломного характера, использующие новые для своего времени понятия и характеристики или новаторские методы и подходы в доказательствах. При этом мы стремились не пропустить редких результатов законченного характера для различных пространств, в которых не накладывается каких-либо дополнительных априорных условий на распределение точек из последовательности показателей Λ. Критерии полноты, которые формулируются как условие существования некоторой гипотетической целой или голоморфной функции, обращающейся в нуль на Λ и обладающей определенными свойствами, рассматриваются нами лишь как первый шаг к решению задачи полноты и не включаются в категорию законченных результатов. В то же время критерии, сформулированные в виде условий на какую-либо голоморфную *порождающую функцию* F_Λ с последовательностью нулей, совпадающей с Λ, воспринимаются как вариант окончательных утверждений. Конечно же, не последнюю, если не одну из главных ролей в отборе полных формулировок сыграли и субъективные факторы.

Мы лишь слегка коснемся базисности систем экспонент и не затрагиваем представления функций рядами экспонент, поскольку эти вопросы требуют отдельного глубокого и подробного освещения. По тем же причинам полнота экспонент, как правило, рассматривается в топологии, порожденной обычными sup- или L^p-нормами, т. е. исследования по задаче полноты в весовых функциональных пространствах упоминаются лишь эпизодически. Не освещается и наиболее близкая к рассматриваемой тематике проблема спектрального синтеза для инвариантных относительно дифференцирования подпространств в пространствах функций, голоморфных в области или определенных на интервале, которую можно рассматривать как вопрос о полноте в инвариантном подпространстве максимальной системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$, содержащейся в это подпространстве. Включение в обзор исследований по последней проблеме представлялось нам естественным и даже необходимым. Но основным препятствием для этого послужило обширное число работ и результатов по спектральному синтезу, увеличивающее объем обзора при условии их включения чуть ли не вдвое.

Исследования полноты экспонент и смежных вопросов в различных пространствах функций на интервале (открытом, замкнутом, ограниченном или неограниченном) вещественной оси $\mathbb{R}$ уже достаточно полно освещены в ряде обзоров и монографий многих авторов, в частности, у Н. Винера и Р. Пэли [WP34], Н. Левинсона [Le40], Р. Ф. Боаса [Boa54], Б. Я. Левина [Лев56], [Лев96], Л. Шварца [Sch43], М. М. Джрбашяна [Дж66], Р. М. Редхеффера [Red74], У. А. Дж. Люксембурга [Lux76], Р. М. Янга [You80], Н. К. Никольского, Б. С. Павлова и С. В. Хрущева [Ни80], [ХНП81], П. Кусиса [Koo88], [Koo92], [Koo96], В. П. Хавина и Б. Ёрикке [XJ94], П. Боруайна и Т. Эрдели [BE95], А. М. Седлецкого [Сед00], [Сед01′], [Сед03], [Сед03′], [Сед03″], [Сед05], Е. И. Моисеева, А. П. Прудникова и А. М. Седлецкого [МПС04], и охватывают материал вплоть до последних лет. В связи с этим изложение вопросов полноты экспонент в функциональных пространствах на интервале в данной монографии-обзоре имеет много лакун и сконцентрировано либо на этапных моментах, модельных для исследования полноты экспонент в других пространствах, либо отражает результаты, не отмеченные в перечисленных выше источниках.

Совершенно иначе обстоит дело с вопросами полноты экспонент в пространствах функций с областью определения $X \subset \mathbb{C}$, когда множество X по существу отлично от интервала, а также в многомерной ситуации. Из основных источников общего характера можно упомянуть, наряду с книгами Б. Я. Левина [Лев56] и М. А. Евграфова [Ев79] с первоначальными классическими результатами, лишь монографии И. И. Ибрагимова [Иб71] и А. Ф. Леонтьева [Лео80]. И даже в них не охвачен, к примеру, такой достаточно глубокий совместный результат П. Мальявена и Л. А. Рубела [MR61] как *критерий* полноты системы экспонент с положительными показателями в горизонтальной полосе. Справедливости ради следует отметить, что ссылка на [MR61] без формулировки основных результатов имеется в книге Б. Я. Левина [Лев96], а сам результат вошел в книгу Л. А. Рубела [Ru96] как один из основных. С другой стороны, в последней книге мало освещены работы советских и российских математиков. Так, не нашли отражения в ней полученные еще в 1989–91 гг. в работах Б. Н. Хабибуллина гораздо более общие окончательные критерии полноты системы экспонент с произвольными комплексными показателями в пространствах функций, голоморфных в неограниченной области. Имеется обзор Б. Н. Хабибуллина [Хаб00′], но очень краткий и малодоступный (его еще более лаконичный вариант — [Хаб00″]). По полноте на множествах в $\mathbb{R}^n$ можно обратиться по избранным результатам к обзору Я. Кореваара [Kor83], посвященному прежде всего полноте на дуге или кривой в $\mathbb{C}$, к обзору Х. Бруны [Bru01], а также к обзору Л. И. Ронкина по целым функциям многих переменных [Рон86] и его же монографии [Рон92], в которых приведены некоторые результаты о множествах единственности, допускающие эквивалентную трактовку в виде достаточных условий полноты систем экспонент в функциональных пространствах в шаре и в параллелепипеде из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. В то же время при исследовании аппроксимативных свойств систем экспонент в функциональных пространствах на множествах, отличных от интервала, часто на первый план выдвигается именно полнота. К примеру, в пространствах голоморфных функций в области нет базисов из экспонент или вида $\mathcal{F}_\Lambda$ (см. Ю. Ф. Коробейник [Кор94, Теорема 9]), а "жесткие" банаховы пространства функций на компактах с непустой внутренностью нередко обеднены отсутствием базисов из экспонент или невозможностью представить функции из них (абсолютно) сходящимися рядами экспонент. Все это позволяет сделать вывод об актуальности и в то же время о явной недостаточности информации по полноте экспонент как в отечественной, так и в зарубежной математической литературе, что и послужило одним из основных мотивов для написания данной книги-путеводителя по вопросам полноты систем экспонент и более общих систем функций в функциональных пространствах на подмножествах из $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. В связи с теми же обстоятельствами в вопросах полноты систем экспонент в функциональных пространствах на множествах, отличных от интервала, и в многомерном случае мы стремились к существенно более подробному изложению доступных нам материалов.

Принципиальная схема исследования полноты систем функций в функциональных пространствах очень часто (но далеко не всегда) сводится через теорему Хана–Банаха и описание сопряженного пространства путем соответствующего преобразования функционалов (Фурье, Лапласа, Меллина, Коши, Бореля, Гильберта и т. п.) к двойственной задаче о множествах (не)единственности для какого-либо пространства голоморфных функций. В случае системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ это, как правило, некоторое пространство, состоящее из целых функций экспоненциального типа или голоморфных функций в угле (чаще в полуплоскости). Такой подход, следуя А. М. Седлецкому, мы называем *аналитическим*, и относительно методов именно он в центре нашего внимания. В связи с этим мы рассматриваем и зачастую более широкие, чем задача полноты, вопросы описания множеств (не)единственности для различных пространств целых и голоморфных функций. Результаты о множествах (не)единственности при их изложении, как правило, не выделяются в отдельные подразделы, а сопровождают, дополняют или предваряют соответствующие результаты по полноте экспонент. При этом уделяется существенное внимание разработанному автором общему подходу к описанию множеств (не)единственности, основанному на классическом и абстрактном выметании. Этот метод позволяет в едином ключе получить как ряд ранее известных утверждений о множествах (не)единственности для различных пространств голоморфных функций и, как следствие, условий (не)полноты систем экспонент — часто короче, чем в оригинальных работах, — так и прийти к новым результатам, иногда законченного характера.

Поддержка

Значительная часть работы выполнена в рамках проекта “Аналитические обзоры” Российского фонда фундаментальных исследований № 02–01–07027 при частичной поддержке гранта РФФИ № 03–01–00033 и государственной программы “Поддержка ведущих научных школ”, грант НШ–1528.2003.1, а также при финансовой поддержке ФЦНТП Федерального агентства по науке и инновациям в рамках госконтракта № 02.453.11.7025 (НИР по лоту № 2005-РИ-27/019 “Проведение международной школы-конференции по приоритетным направлениям развития науки и техники с участием молодых ученых, аспирантов и студентов”).

При подготовке второго, третьего и четвертого изданий важную роль сыграла финансовая поддержка грантов РФФИ, проекты №№ 07-01-06113-г, 09-01-06820-моб_г, 11-01-06831-моб_г по организации и проведению Всероссийских и Международных школ-конференций для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», состоявшихся в октябре 2006–2011 гг. в Уфе, а также грантов РФФИ, проекты №№ 06-01-00067а, 09-01-00046а.

Благодарности

Автор глубоко признателен за предоставленные в различное время ценную информацию и полезные материалы, нередко до их публикации, А. В. Абанину, А. С. Авдонину, Л. Д. Абреу, В. С. Азарину, С. В. Бочкареву, А. Буавену, Б. В. Винницкому, А. М. Гайсину, Г. Т. Денгу, Р. Зайнстру, Э. Зиккосу, С. И. Иванову,

К. С. Казаряну, Ж.-П. Кахану, С. В. Кислякову, Ю. Ф. Коробейнику, И. Ф. Красичкову-Терновскому, П. Кусису, Р. Лионсу, В. Н. Логвиненко, Ю. И. Любарскому, Л. С. Маергойзу, В. А. Мазунову, В. В. Напалкову, Е. А. Полецкому, А. Ю. Попову, Т. Дж. Рансфорду, Л. И. Ронкину, М. Л. Содину, А. М. Седлецкому, С. Ю. Фаворову, В. П. Хавину, Х. Хеденмальму, А. И. Хейфицу, В. Б. Шерстюкову, оставшимся incognito рецензентам статей автора и др.

Пояснения к тексту

Книга состоит, наряду с введением, из четырех глав, разбитых на разделы $\supset$ подразделы $\supset$ ненумерованные пункты. Нумерации теорем и теоремоподобных структур, определений и формул производится с помощью тройки чисел, первое из которых указывает на номер главы, второе — на номер раздела, и, наконец, третье — на порядковый номер объекта в этом разделе.

Конец доказательства обозначается символом $\bullet$. Ссылка на номер формулы или утверждения над знаками (не)равенства, включения, или, более общó, бинарного отношения, означает, что при переходе к правой части этого отношения применялись, в частности, и отмеченная формула или утверждение.

В предметном указателе подчеркнутый номер страницы у терминов и понятий указывает, что именно на этой странице дано либо определение термина, либо его обозначение, или же содержится основная информация о понятии.

Подстраховка

Вряд ли какой-либо материал обзорного характера по достаточно обширной тематике может претендовать на абсолютную полноту и широту охвата всего объема сведений, относящихся к рассматриваемому предмету или касающихся его. Во всяком случае автор уверен, что это утверждение, как минимум, в полной мере применимо к предлагаемому обзору, претендующему на роль путеводителя в вопросах полноты систем экспонент в классических пространствах. Тем более, что освещаемая здесь тематика динамично развивается и отставание в информированности неизбежно. Конечно же, в нашем изложении есть как неточности в вопросах приоритета, так и опечатки и описки, а также спорные расстановки акцентов в суждениях по различным вопросам, поскольку элементы субъективности — неотъемлемая часть любого авторского труда. Что поделать — *“errare humanum est”*. Очень надеюсь, что удельный объем отмеченных погрешностей в обзоре меньше удельного объема ложки дегтя в бочке меда и не может перечеркнуть содержательную часть обзора. Заранее выражаю свое сожаление всем тем, кого могут коснуться какие-либо просчеты, упущения, ложные выводы, недоразумения, допущенные в обзоре. Автор будет глубоко признателен каждому, кто сообщит об обнаруженных в издании огрехах и недочетах.

По-видимому, была бы полезна и дальнейшая доработка настоящего обзора. Но “момент остановки” необходим — *“Le mieux est l'ennemi du bien”*. Поэтому представляется уместным завершить предисловие словами Эрнеста Хемингуэя[1]: *“Если бы я медлил достаточно долго, то, скорее всего, вообще никогда ничего не написал бы, поскольку существует закономерность: когда ты действительно начинаешь что-то узнавать о явлении, не желая писать о нем, а желая, скорее, постоянно изучать его, то никогда не наступит такой момент (если, конечно, ты не достаточно честолюбив, а честолюбие во многих случаях и является причиной написания книг), когда бы ты мог сказать: теперь я знаю об этом явлении все и готов о нем написать. Безусловно, я не говорю так и теперь, с каждым годом я понимаю, что можно еще что-то узнать, но я имею достаточное понятие о некоторых явлениях, которые могут быть интересными в данный момент.”*

Январь, 2002 – Май, 2012; Уфа, Башкортостан, Россия
Булат Н. Хабибуллин; E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru
http://math.bsunet.ru/khb
https://www.researchgate.net/profile/Bulat_Khabibullin
www.mathnet.ru/php/person.phtml?personid=8650
http://scholar.google.ru/citations?user=IFOAyU4AAAAJ&hl

---

[1] Из книги «Смерть после полудня». Death in the Afternoon. ©1932 Charles Scribner's Sons; copiright renewed ©1960 Ernest Hemingway, pp. 3–4.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Введение

Далее всюду векторные (линейные) пространства рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, а функции предполагаются комплекснозначными, если только какое-либо ограничение не оговорено или не продиктовано контекстом.

Система элементов топологического векторного пространства E называется *полной* в E, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с E.

Пусть непустое открытое или замкнутое подмножество X в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, выступает как область определения функций из некоторого функционального пространства. В предлагаемой книге-обзоре основной *модельный*[2] тип пространства на X — это пространство функций, непрерывных на X и одновременно голоморфных во внутренности (если она не пуста) множества X, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах из X. Говорим, что система функций *полна на* X, или *в* X, если она полна именно в таком пространстве. Это не исключает рассмотрение и других типов пространств, особенно если методы, разработанные для модельных пространств, экстраполируются на них.

Для простоты дальнейшее обсуждение вопросов полноты до конца введения, как правило, ведется для одномерного случая, т. е. для пространств функций на подмножествах в $\mathbb{C}$ или на $\mathbb{R}$.

Задача полноты на $X \subset \mathbb{C}$, или *в* X, для систем вида $\operatorname{Exp}_\Lambda$ или $\mathcal{F}_\Lambda$ (см. предисловие) — исключительно в терминах последовательности Λ и множества X, а также функции f в случае $\mathcal{F}_\Lambda$ выявить условия, при которых полна или неполна эта система на X. В свете известных результатов задачу полноты на X естественно решать в терминах специальных плотностей распре-

---

[2] Этот термин используется только в контексте рассматриваемой тематики и, конечно же, отличается от понятия модельного пространства, общепринятого в теории пространств Харди и ее приложениях [Ни80], [МП05, 0.2].

деления точек из Λ и в их взаимосвязи с геометрическими характеристиками множества X. По специфике задачи полноты и доступности ее исследования на современном этапе, а также по жесткости топологии модельного пространства на $X \subset \mathbb{C}$ само множество X можно естественным образом отнести к одному из следующих семи типов:

1) X — *компактное подмножество* в $\mathbb{R}$, в основном $X = [a, b]$ — *отрезок* на $\mathbb{R}$, $C(X)$ — банахово пространство непрерывных функций на X с sup-нормой $\|f\|_X := \sup_{x\in X} |f(x)|$, $C[a, b] := C([a, b])$. К этому же пункту отнесем и случай, когда $X = [a, +\infty]$ или $X = [-\infty, b]$, $-\infty < a, b < +\infty$,— отрезки на *расширенной вещественной оси* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. При этом полнота системы Exp_Λ на $[a, +\infty]$ или на $[-\infty, b]$ будет означать соотв.[3] полноту в пространстве $C_0[a, +\infty]$ или $C_0[-\infty, b]$ непрерывных соотв. на $[a, +\infty]$ или $[-\infty, b]$ функций, равных нулю в соотв. $+\infty$ или $-\infty$, с sup-нормой соотв. на $[a, +\infty]$ или $[-\infty, b]$;

2) $X = (a, b)$ — *открытый интервал*, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, либо $X = [a, +\infty)$ или $X = (-\infty, b]$, $a, b \neq \pm\infty$; $C(a, b)$ и соотв. $C[a, +\infty)$ или $C(-\infty, b]$ — пространство функций, непрерывных на X, наделенное топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах (на компактах) из X;

3) $X = \ell$ — *ограниченная жорданова спрямляемая дуга* или *неограниченная жорданова локально спрямляемая кривая* в $\mathbb{C}$. В первом случае $C(\ell)$ — пространство функций, непрерывных на ℓ, с sup-нормой на ℓ, а во втором $C_0(\ell)$ — пространство функций из $C(\ell)$, стремящихся к 0 на бесконечности, с sup-нормой;

4) $X = G$ — *неограниченная область* в $\mathbb{C}$; пространство $H(G)$ состоит из всех голоморфных в G функций и снабжено топологией равномерной сходимости на компактах из G;

5) $X = \operatorname{clos} G$, где $\operatorname{clos} G$ — *замыкание неограниченной области* G в $\mathbb{C}$; $A(G)$ — пространство функций, непрерывных на $\operatorname{clos} G$ и одновременно голоморфных в G, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из $\operatorname{clos} G$;

---

[3] Всюду далее это сокращение для “соответственно”.

6) $X = G$ — *ограниченная область* в $\mathbb{C}$, а пространство $H(G)$ и топология в нем такие же, как в п. 4);

7) $X = K$ — *компакт* в $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью, $A(K)$ — банахово пространство функций, непрерывных на K и одновременно голоморфных во внутренности $\operatorname{int} K$, с sup-нормой.

Далее, когда речь идет о полноте системы на X, или в X, ее следует воспринимать как полноту в соответствующем модельном пространстве из 1)–7). Результаты, касающиеся полноты систем экспонент в пространствах иного типа (пространства $L^p(a,b)$ и Смирнова, пространства функций, голоморфных на компакте, и др.), будут формулироваться как полнота в пространстве.

По-видимому, к первым результатам о полноте системы экспонент можно отнести прежде всего теорему К. Вейерштрасса [W885] о полноте системы $\{x^n\}$, $n = 0, 1, \dots$, на отрезке $[a, b]$, переходящей при $a > 0$ после замены $x = e^z$ в утверждение о полноте экспоненциальной системы e^{nz}, $n = 0, 1, \dots$ на отрезке $[\log a, \log b]$, а при $a = 0$ — системы $\operatorname{Exp}_{\mathbb{N}}$, на отрезке $[-\infty, \log b]$ расширенной вещественной оси. К истокам тематики можно отнести и "тригонометрический" вариант теоремы Вейерштрасса о полноте тригонометрических многочленов, или системы $\{e^{inz}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в пространстве 2π-периодических непрерывных функций с sup-нормой на $\mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$. Этот вариант можно рассматривать и как первый, после *алгебраического* результата Л. Эйлера [E743] о решении однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, нетривиальный *топологический* факт допустимости спектрального синтеза для пространства решений конкретного (разностного) однородного уравнения свертки $f(x) - f(2\pi + x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, в пространстве непрерывных ограниченных функций на $X = \mathbb{R}$ с sup-нормой на $\mathbb{R}$.

С. Н. Бернштейн в 1912 г. обратил внимание на проблему полноты системы степеней $\{x^{\lambda_k}\}$ на отрезке $[0, 1]$ с последовательностью произвольных положительных показателей λ_k и получил частные результаты в этом направлении [B12, гл. V, пп. 50–51], [B13].

Первыми в определенной степени законченными результатами о полноте системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ с последовательностью показателей, по существу отличной от подмножеств $\mathbb{Z}$, по-видимому, являются теоремы К. Х. Мюнтца [Mü14] и О. Саса [Sz16] об условиях (не)полноты системы степеней $\{x^{\lambda_k}\}$ на отрезке $[0,1]$ и в $L^2(0,1)$ (после замены $x=e^z$). В аналогичной роли для задачи полноты в области из $\mathbb{C}$ выступает теорема Т. Карлемана [C22] о достаточном условии полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ с положительной последовательностью показателей Λ в горизонтальной полосе $\{z\in\mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z|<b\}$.

Дальнейшие сведения об эволюции исследований полноты систем экспонент содержатся в последующих главах в соответствии с систематикой 1)–7) и оглавлением.

0.1 Общие определения, обозначения и соглашения

К этому подразделу можно обращаться по мере необходимости.

0.1.1 Множества, числа, функции, меры

Одним и тем же символом 0 обозначаем, по контексту, число нуль, нулевой вектор, нулевую функцию, нулевую меру и т. п. Пустое множество обозначаем символом $\varnothing$.

Кроме уже введенных обозначений $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ для множеств соотв. натуральных и целых чисел, а также для вещественной оси $\mathbb{R}$ и комплексной плоскости $\mathbb{C}$ используются обозначения $[-\infty,+\infty) := \{-\infty\}\cup\mathbb{R}$, $(-\infty,+\infty] := \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $[-\infty,+\infty] := \{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ для различных расширений вещественной оси $\mathbb{R}$. Эти расширения рассматриваются с очевидной упорядоченностью и алгебраическими операциями при неопределенности для выражений $(+\infty)-(+\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, но при специальном соглашении $0\cdot(\pm\infty)=0$. Каждое $X\subset[-\infty,+\infty]$ имеет точную нижнюю грань $\inf X$ и точную верхнюю грань $\sup X$; $\inf\varnothing := +\infty$, $\sup\varnothing := -\infty$.

Через $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ обозначаем *расширенную комплексную плоскость*, т. е. *сферу Римана.*

Топологию в множествах, рассматриваемых как подмножества в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, определяет стандартное евклидово расстояние $|a-b|$ между точками a и b, в подмножествах из $[-\infty,+\infty]$ — расстояние $d(a,b)=|a-b|/(1+|a-b|)$ с договоренностью $d(+\infty,+\infty) :=$

$d(-\infty, -\infty) := 0$, а в подмножествах из $\mathbb{C}_\infty$ — сферическое, или хордальное, расстояние .

Кроме того, $\mathbb{Z}^+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \colon a \geqslant 0\}$ — *положительная полуось*, а $[0, +\infty] := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ — *расширенная положительная полуось*; $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ и $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z < 0\}$ — соотв. (открытые) *правая* и *левая полуплоскости*; $i\mathbb{R}$ — *мнимая ось* в $\mathbb{C}$.

Через const. обозначаем постоянные из $\mathbb{R}^+$.

$\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, — n-мерные соотв. вещественное и комплексное евклидовы пространства; $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ — *вещественное пространство*, $i\mathbb{R}^n := (i\mathbb{R})^n$ — *мнимое пространство* в $\mathbb{C}^n$; $(\mathbb{R}^+)^n$ — *положительный конус* в $\mathbb{C}^n$.

Для подмножества X топологического пространства T через $\operatorname{clos} X$, $\operatorname{int} X$, ∂X обозначаем соотв. *замыкание*, *внутренность* и *границу* множества X в T. Если замыкание $\operatorname{clos} X$ — компакт в T, то X *предкомпактно в* T и пишем $X \Subset T$.

Открытый круг в $\mathbb{C}$ радиуса t с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ обозначаем через $D(z, t)$; при $t \leqslant 0$ это пустое множество; $D(t) := D(0, t)$ и $\mathbb{D} := D(1)$. *Угол* $\{z \in \mathbb{C} \colon \alpha < \arg z < \beta\}$ обозначаем как $\angle(\alpha, \beta)$.

Через $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$ чаще всего обозначаем функцию евклидова расстояния между точками или подмножествами в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{C}^n$, но это может означать далее и функцию расстояния в нормированных или метрических пространствах.

Положительность числа, функции, меры и т. п. при соответствующем отношении порядка $\geqslant$ понимаем как $\geqslant 0$, а выполнение неравенства > 0 (для функций — всюду в области определения) — *строгая положительность*; аналогичные соглашения предлагаются и для отрицательности и строгой отрицательности. В частности, число $0 \in \mathbb{R}$ и положительное, и отрицательное. Как обычно, для элемента $a \in [-\infty, +\infty]$ его *положительная* (соотв. *отрицательная*) *часть* обозначается как $a^+ := \max\{a, 0\}$ (соотв. $a^- := \max\{a, 0\}$), а для $z \in \mathbb{C}$ его *вещественная* (соотв. *мнимая*) *часть* — это $\operatorname{Re} z$ (соотв. $\operatorname{Im} z$).

Пусть $f : X \to B$ — функция (отображение). Класс всех таких функций обозначаем B^X. Для подмножества $Y \subset X$ через $f \big|_Y$ обозначаем *сужение* f *на* Y. Аналогично для системы функций $\mathcal{F}$ на X совокупность сужений этих функций на $Y \subset X$ обозначается как $\mathcal{F}\,\big|_Y$. Если функция f тождественно равна значению b на X, то пишем "$f \equiv b$ *на* X"; в противном случае — "$f \not\equiv b$ *на* X".

Функция f *числовая*, если B — подмножество в $[-\infty, +\infty]$ или в $\mathbb{C}_\infty$. Ее *вещественная часть* $\operatorname{Re} f$ и *мнимая часть* $\operatorname{Im} f$ определяются поточечно, а в случае $B \subset [-\infty, +\infty]$ *положительная часть* f^+ и *отрицательная часть* f^- определяются равенствами $f^+(x) := \max\{0, f(x)\}$, $x \in X$, и $f^- := (-f)^+$. Носитель числовой функции f обозначаем через $\operatorname{supp} f$. Функция f на $X \subset [-\infty, +\infty]$ со значениями в $[-\infty, +\infty]$ *возрастающая* (соотв. *убывающая*), если для любых $a_1 \leqslant a_2$ из X справедливо неравенство $f(a_1) \leqslant f(a_2)$ (соотв. $f(a_1) \geqslant f(a_2)$), и *строго возрастающая* (соотв. *строго убывающая*), если для любых $a_1 < a_2$ из X справедливо строгое неравенство $f(a_1) < f(a_2)$ (соотв. $f(a_1) > f(a_2)$). Отношения $f \leqslant g$ и $g \geqslant f$ для числовых функций f, g с единой областью определения X понимаются поточечно, т. е. как $f(x) \leqslant g(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Для сумм и произведений чисел по определению

$$\sum_{\varnothing} \dots := 0, \quad \prod_{\varnothing} \dots := 1;$$
$$\sum_{k=m}^{n} \dots := 0, \quad \prod_{k=m}^{n} \dots := 1 \text{ при } m > n.$$

Пусть X — открытое или замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$. Через m обозначаем меру Лебега на $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, а также ее сужение на X, но на $\mathbb{R}$ используем и традиционные обозначения вида $\mathrm{d}x = \mathrm{d}m$. Кроме того, $m^{(r)}$ — сужение меры Лебега m на круг или шар радиуса r с центром в нуле, нормированное так, что $m^{(r)}$ — вероятностная мера. С такой же нормировкой рассматривается мера длины дуги или площади сферы $s^{(r)}$ соответственно на окружности или на сфере радиуса r с центром в нуле.

В отсутствие дополнительных ограничений меры на X предполагаются комплекснозначными и борелевскими регулярными. Класс всех таких мер обозначаем $\mathcal{M}(X)$; $\mathcal{M}_c(X)$ — класс мер с компактным носителем $\operatorname{supp} \mu$ в X, рассматриваемый и как пространство мер Радона, т. е. линейных непрерывных функционалов на $C(X)$, снабженное $*$-слабой топологией; $\mathcal{M}_{\mathrm{ac}}(X)$ — класс мер, абсолютно непрерывных относительно m. Добавление верхнего индекса $+$ к $\mathcal{M}$ каждый такой класс сужает на класс положительных мер $\mathcal{M}^+(X)$. Наряду с обозначением меры одним символом μ используем для той же меры обозначение вида $\mathrm{d}\mu$, т. е. через ее формальную плотность $\mathrm{d}\mu$.

0.1.2 Последовательности точек в области

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — не более чем счетная последовательность точек области $G \subset \mathbb{C}$, проиндексированная некоторым набором индексов k. В Λ допускаются совпадения нескольких точек с различными индексам. Однако всегда предполагаем, что последовательность Λ включает в себя каждую точку из G конечное число раз, а также не имеет точек сгущения в G, если не оговорено противное. Возможно, что $\Lambda = \varnothing$.

Когда Λ выступает в роли последовательности показателей систем $\operatorname{Exp}_\Lambda$ и $\mathcal{F}_\Lambda$ или как перенумерованная с учетом кратности (под)последовательность нулей голоморфной функции, естественнее воспринимать ее как целочисленную положительную функцию (*положительный дивизор*) $\Lambda\colon G \to \mathbb{Z}^+$, равную в каждой точке $\lambda \in G$ числу вхождений точки λ в последовательность Λ. При такой трактовке *две последовательности* Λ и $\Gamma = \{\gamma_{k'}\}$ из G *равны* (пишем $\Lambda = \Gamma$), если для соответствующих им дивизоров $\Lambda(\lambda) \equiv \Gamma(\lambda)$ при всех $\lambda \in G$. Иначе говоря, каждая *последовательность точек* рассматривается как представитель некоторого класса эквивалентности, состоящего из последовательностей в G с одинаковыми дивизорами. При этом носитель $\operatorname{supp}\Lambda$ для последовательности точек Λ — это носитель соответствующего ей дивизора. Запись $\lambda \in \Lambda$ (соотв. $\lambda \notin \Lambda$) означает, что $\lambda \in \operatorname{supp}\Lambda$ (соотв. $\lambda \notin \operatorname{supp}\Lambda$). Для подмножества $B \subset \mathbb{C}$ запись $\Lambda \subset B$ означает, что $\operatorname{supp}\Lambda \subset B$; $\Lambda \cap B$ — сужение последовательности на B с дивизором $\Lambda \big|_B$. Последовательность точек $\Gamma \subset G$ включена в Λ, если $\Gamma(\lambda) \leqslant \Lambda(\lambda)$ в терминах дивизоров при всех $\lambda \in G$, и при этом пишем $\Gamma \subset \Lambda$, а Γ — *подпоследовательность* последовательности Λ; *объединение* $\Lambda \cup \Gamma$ через дивизоры задается тождеством $(\Lambda \cup \Gamma)(\lambda) \equiv \Lambda(\lambda) + \Gamma(\lambda)$; для $\Gamma \subset \Lambda$ и только в этом случае *разность* последовательностей $\Lambda \setminus \Gamma$ определяет дивизор $(\Lambda \setminus \Gamma)(\lambda) \equiv \Lambda(\lambda) - \Gamma(\lambda)$, $\lambda \in G$. На последовательностях точек операции и отношения, отличные от приведенных выше, понимаются поэлементно. Например, $z\Lambda := \{z\lambda_k\}$, $\operatorname{Re}\Lambda := \{\operatorname{Re}\lambda_k\}$; $\Lambda > 0$, если $\lambda_k > 0$ для всех k, и т. п.

Чтобы отличать такой подход от стандартного взгляда на последовательность как на функцию натурального или целого аргумента, каждую последовательность точек, для которой важна нумерация ее членов, будем называть *занумерованной последовательностью* , а точки занумерованных последовательностей Λ изображаем в круглых скобках, т. е. в виде $\Lambda = (\lambda_k)$. Естественным образом с функций на занумерованные последовательности точек из $\mathbb{R}$ переносятся понятия (*строгого*) *возрастания* и *убывания*. Таким образом, если речь идет о возрастающей или убывающей последовательности точек из $\mathbb{R}$, то подразумевается занумерованная последовательность.

В дальнейшем, не умаляя общности, удобно считать, что **последовательности точек в областях не содержат точки** 0.

Каждой последовательности точек Λ в G сопоставляем *считающую меру* n_Λ, определенную по правилу

$$n_\Lambda(B) := \sum_{z\in B} \Lambda(z), \quad B \subset G.$$

В частности, $n_\Lambda\bigl(\{\lambda\}\bigr) = \Lambda(\lambda)$ при всех $\lambda \in G$. Для последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ положим

$$n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t) := \sum_{|\lambda|<t} \Lambda(\lambda) = n_\Lambda\bigl(D(t)\bigr)\,, \quad N_\Lambda(r) := \int_0^r n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t)\,\frac{dt}{t}$$

— соотв. *считающая* (радиальная) и *усредненная*, или проинтегрированная, *считающая функции* последовательности Λ.

Через $n_\Lambda(z,t) := n_\Lambda\bigl(D(z,t)\bigr)$ обозначаем число точек из последовательности $\Lambda \subset G$ в открытом круге $D(z,t) \subset G$.

Для *вещественных последовательностей* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ часто используется и другая, уже знакопеременная, считающая *функция распределения последовательности* Λ *на* $\mathbb{R}$, обозначаемая далее как

$$n_\Lambda^{\mathbb{R}}(t) := \begin{cases} -\sum\limits_{t\leqslant\lambda<0} \Lambda(\lambda) = -n_\Lambda\bigl([t,0)\bigr), & \text{при } t<0; \\ \sum\limits_{0\leqslant\lambda<t} \Lambda(\lambda) = \quad n_\Lambda\bigl([0,t)\bigr), & \text{при } t\geqslant 0. \end{cases}$$

0.1.3 Последовательности нулей голоморфных функций

Для ненулевой голоморфной функции F в области $G \subset \mathbb{C}$, т. е. $F \in H(G)$, через Zero_F обозначаем последовательность точек в G, дивизор которой в каждой точке $z \in G$ равен кратности нуля функции F в этой точке. Последовательность Zero_F называем *последовательностью нулей функции* $F \in H(G)$. Часто в нестрогой форме Zero_F называют последовательностью нулей (корней) функции F, перенумерованной с учетом кратности . Для нулевой функции в G по определению ее дивизор Zero_0 — функция, тождественно равная $+\infty$ на G. Для любой последовательности точек Λ в G по определению $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_0$. Функция $F \in H(G)$ *обращается в нуль на* Λ (пишем $F(\Lambda) = 0$), если $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_F$.

Пусть $H \subset H(G)$. Последовательность $\Lambda \subset G$ — *последовательность нулей для* H, если существует $F \in H$ с $\mathrm{Zero}_F = \Lambda$; Λ — *подпоследовательность нулей для* H, если существует функция $F \not\equiv 0$ из H, для которой $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_F$. Если H — векторное подпространство, то подпоследовательность нулей для H называем еще и *множеством,* или *последовательностью, неединственности для* H; Λ — *множество,* или *последовательность, единственности для* H, если из $F \in H$ и $F(\Lambda) = 0$ следует, что $F \equiv 0$ на G.

0.1.4 Функциональные пространства

Наряду с пространствами из пп. 1)–7) выше, определим также часть рассматриваемых далее функциональных пространств.

Для компактного пространства X, как обычно, $C(X)$ — банахово пространство непрерывных функций с sup-нормой на X; для локально компактного счетного в бесконечности пространства X пространство $C(X)$ — полное метрическое пространство (пространство Фреше) функций, непрерывных на каждом $K \Subset X$ с топологией по sup-полунормам $\|f\|_K$, т. е. с топологией равномерной сходимости на компактах из X.

Для измеримого по мере Лебега m множества $X \subset \mathbb{R}^n$ или $X \subset \mathbb{C}^n$ через $L^p(X)$ обозначаем фактор-множество по отношению эквивалентности “равны почти всюду по m” всех функций, с интегрируемым в p-ой степени модулем. Как всегда, элементы

$f \in L^p(X)$ по-прежнему называем функциями, а при $1 \leqslant p < +\infty$ вводим на $L^p(X)$ норму $\|f\|_{p,X} := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}m\right)^{1/p}$, с которой $L^p(X)$ — банахово пространство (далее такую норму называем L^p-нормой на X). Аналогично вводится банахово пространство $L^\infty(X)$ с нормой вида sup-нормы на X, но вместо супремума берется *существенная верхняя грань относительно* m [DS62], которую также обозначаем как sup. Всюду далее при рассмотрении пространств типа L^p предполагаем, что $1 \leqslant p < +\infty$, если не оговорено противное. Если X представимо в виде счетного объединения компактов $X_k \subset X_{k+1} \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, то можно ввести пространство Фреше $L^p_{\mathrm{loc}}(X)$, состоящее из функций (классов эквивалентности) на X с локально интегрируемыми в p-ой степени модулями, с топологией, определяемой системой L^p-норм на X_k.

$C^\infty(a,b)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на открытом интервале $(a,b) \subset [-\infty,+\infty]$ со стандартной локально выпуклой топологией проективного предела. Ее можно задать, к примеру, через любую последовательность отрезков $[a_k,b_k] \Subset (a_{k+1},b_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, $(a,b) = \bigcup_k [a_k,b_k]$, и систему полунорм $\|f\|_k^\infty := \max\limits_{0 \leqslant p \leqslant k} \sup_{x \in (a_k,b_k)} |f^{(p)}(x)|$.

Для открытого $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ через $H(\Omega)$ обозначаем пространство голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах, и для компакта K в $\mathbb{C}^n$, как и в 7), $A(K)$ — банахово пространство функций, непрерывных на K и одновременно голоморфных в $\operatorname{int} K$, с sup-нормой на K.

Пусть $\rho \in \mathbb{R}^+$. Для $\sigma \in \mathbb{R}^+$ (соотв. $\sigma \in (0,+\infty]$)

$$E[\rho,\sigma] := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \colon \limsup_{z \to \infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|^\rho} \leqslant \sigma \right\}$$

$$\left(\text{соотв. } E[\rho,\sigma) := \bigcup_{\sigma' < \sigma} E[\rho,\sigma'] \right)$$

— классы целых функций типа не выше (соотв. меньше) σ при порядке ρ. В частности, $E[1,+\infty)$ — пространство *целых функций экспоненциального типа* (далее используем сокращение “ц.ф.э.т.”) [Boa54], или целых функций конечной степени [Лев56]. Подкласс функций $f \in E[1,\sigma]$ с сужениями $f\big|_{\mathbb{R}} \in L^p(\mathbb{R})$ обозначаем[4] как

---

[4] Иначе это пространство обозначают как PW^p_σ и называют его пространством Пэли–Винера (см., например, [Se98]).

B^p_σ. Класс B^∞_σ ц.ф.э.т. $\leqslant \sigma$ с ограниченным модулем на $\mathbb{R}$ часто называют пространством С. Н. Бернштейна . Его структурные свойства детально исследованы Б. М. Шумяцким [Шу99].

Пусть $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — ρ-тригонометрически выпуклая 2π-периодическая функция [Лев96]. *Всюду далее ρ-тригонометрически выпуклые функции,* не оговаривая специально, *предполагаем 2π-периодическими.* Важные подпространства в $E[\rho, +\infty)$ — это

$$\begin{aligned} E[\rho, h] &:= \{f \in E[\rho, +\infty)\colon h_f \leqslant h\}, \\ E[\rho, h) &:= \{f \in E[\rho, +\infty)\colon h_f < h\}, \end{aligned}$$

где $h_f(\theta) := \limsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\log|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad \theta \in \mathbb{R},$ — *индикатор роста при порядке* ρ целой функции f из пространства $E[\rho, +\infty)$.

Для компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ через $H(K)$ обозначаем пространство ростков голоморфных на K функций с естественной топологией индуктивного предела. Точнее, пусть $K = \bigcap_{j=1}^\infty G_j$ — пересечение убывающей последовательности областей $G_{j+1} \Subset G_j \Subset \mathbb{C}^n$, B_j — открытые единичные шары в $A(\operatorname{clos} G_j)$. Базой окрестностей нуля в $H(K)$ служат абсолютно выпуклые оболочки всевозможных объединений $\bigcup_{j=1}^\infty \varepsilon_j B_j$, где $\varepsilon_j > 0$ — произвольные числа.

Через $\mathbb{C}[z] \subset H(\mathbb{C}^n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, обозначаем пространство всех полиномов (многочленов) с комплексными коэффициентами от n комплексных переменных.

Глава 1

Полнота и двойственные схемы

В этом разделе остановимся на некоторых общих схемах исследования задач полноты систем экспонент и двойственных им проблем описания множеств (не)единственности. Обсуждение направлено на вопросы полноты систем типа $\operatorname{Exp}_\Lambda$ и $\mathcal{F}_\Lambda$ (см. предисловие), хотя предварительно затрагиваются и случаи более общих параметрических систем вида

$$\{e_\lambda\}, \tag{1.0.1}$$

где параметры λ пробегают некоторое множество.

1.1 Полнота и теорема Хана–Банаха

1.1.1 Полнота

Пусть E — *локально выпуклое пространство*, E' — *пространство линейных непрерывных функционалов на* E, т. е. (топологически) *сопряженное пространство* к E. Действие функционала $S \in E'$ на элемент $e \in E$ обозначаем как $\bigl\langle S, e \bigr\rangle$. Для системы $\mathcal{E} \subset E$ через $\overline{\operatorname{span}}\, \mathcal{E}$ обозначаем замыкание ее линейной оболочки в E. Наряду с исходной топологией в E рассматриваем и *ослабленную топологию* на E, определяемую базой окрестностей нуля $\bigl\{e \in E \colon \bigl|\bigl\langle S, e\bigr\rangle\bigr| < \varepsilon\bigr\}$, $S \in E'$, $\varepsilon > 0$. В частности, система $\mathcal{E}$ *слабо полна в* E, если она полна в пространстве E относительно ослабленной топологии. Функционал $S \in E'$ *аннулирует* $\mathcal{E}$, если $\bigl\langle S, e \bigr\rangle = 0$ для любого $e \in \mathcal{E}$. Одно из многочисленных следствий теоремы Хана–Банаха (см.[1] [Ed69, Теоремы 2.3.1(a), 8.2.1]) —

---

[1] Полная система в [Ed69] называется фундаментальной.

Теорема 1.1.1. *Пусть E — локально выпуклое пространство и $\mathcal{E} \subset E$. Тогда эквивалентны утверждения*

1) *система $\mathcal{E}$ полна в E;*

2) *только нулевой функционал из E' аннулирует $\mathcal{E}$;*

3) *система $\mathcal{E}$ слабо полна в E.*

Эта теорема применима к подавляющему большинству классических функциональных пространств. Тем не менее, ряд пространств, таких, например, как $L^p[a,b]$ и пространства Харди $H^p(\mathbb{D})$ со стандартной метрикой при $0<p<1$, вне ареала теоремы 1.1.1, поскольку не являются локально выпуклыми [Ed69].

Очевидно, постановка задачи полноты для параметрической системы функций вида (1.0.1) содержательна только если

(a) *множество показателей $\{\lambda\colon e_\lambda \in E\}$ не пусто.*

Например, для пространств $L^p(\mathbb{R})$ условие (a) для системы экспонент вида $\operatorname{Exp}_\Lambda$ не выполнено. Проверка условия (a) в случае системы экспонент, когда E — некоторое нетривиальное подпространство в $H(G)$, $G \subset \mathbb{C}$, или в $C^\infty(a,b)$, инвариантное относительно дифференцирования, например, пространство решений однородного уравнения свертки, — это вариант так называемой задачи *спектрального анализа* (см., к примеру, [Kp72]).

При условии (a) каждому функционалу $S \in E'$ можно сопоставить *характеристическую функцию $\widehat{S}$ функционала S относительно семейства*

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{L}} := \{e_\lambda\colon \lambda \in \mathfrak{L}\}, \quad \mathfrak{L} \subset \{\lambda\colon e_\lambda \in E\}, \tag{1.1.1}$$

с областью определения $\mathfrak{L}$ со значениями в $\mathbb{C}$ по правилу $\widehat{S}(\lambda) := \bigl\langle S, e_\lambda \bigr\rangle$, где λ пробегает $\mathfrak{L}$. Соответственно через $\widehat{E'}$ обозначим образ сопряженного пространства E' в пространстве числовых функций $\mathbb{C}^{\mathfrak{L}}$ при линейном отображении

$$\mathcal{F}\colon E' \to \widehat{E'} \subset \mathbb{C}^{\mathfrak{L}}, \quad \mathcal{F}(S) := \widehat{S}, \quad S \in E'. \tag{1.1.2}$$

Конечно же, пространство $\widehat{E'}$ зависит от выбора подмножества $\mathfrak{L}$ в (1.1.1). В терминах пространства $\widehat{E'}$ теорема 1.1.1 допускает следующую переформулировку.

Теорема 1.1.2. *Пусть* E *— локально выпуклое пространство и* $\Lambda \subset \mathfrak{L} \neq \varnothing$ *в обозначениях* (1.1.1). *Если существует такая функция* $f \in \widehat{E'}$, *что* $f \not\equiv 0$ *на* $\mathfrak{L}$ *и* $f \equiv 0$ *на* Λ, *то система* $\mathcal{E}_\Lambda := \{e_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ *неполна в* E. *При инъективности отображения* $\mathcal{F}$ *из* (1.1.2) *справедливо и обратное утверждение: если из условий* $f \in \widehat{E'}$ *и* $f \equiv 0$ *на* Λ *следует, что* $f \equiv 0$ *на* $\mathfrak{L}$, *то система* $\mathcal{E}_\Lambda$ *полна в* E. *При этом отображение* $\mathcal{F}$ *инъективно, если и только если система* $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ *(слабо) полна в* E.

Подход к вопросам полноты, основанный на теореме 1.1.2, будем выделять как *двойственный*. Начальный этап применения двойственного подхода сочетает в себе две задачи. Первая из них — внутреннее описание пространства $\widehat{E'}$ в той мере, насколько это возможно. Для получения частных результатов при доказательстве неполноты достаточно выделять те классы функций на $\mathfrak{L}$, которые содержаться в $\widehat{E'}$, а при доказательстве полноты — те, которые содержат $\widehat{E'}$, но уже вкупе с инъективностью отображения $\mathcal{F}$ из (1.1.2). Таким образом, в свете заключительного утверждения теоремы 1.1.2 вторая задача — доказательство инъективности отображения $\mathcal{F}$ или слабой полноты системы $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$. Во многих случаях отображение $\mathcal{F}$ реализуется как некоторое интегральное преобразование и его инъективность — составная часть формул обращения для этого преобразования. Но ко второй задаче возможен подход и через слабую полноту.

Пусть для подмножества показателей $\mathfrak{L}$ из (1.1.1) условие (a) выполнено в более сильной форме

$$\operatorname{int} \mathfrak{L} \neq \varnothing, \quad \mathfrak{L} \subset \mathbb{C}^n. \tag{1.1.3}$$

Тогда при некоторых не очень ограничительных условиях на топологию пространства E при двойственном подходе уже применим мощный аппарат комплексного анализа. Такой вариант исследования квалифицируем как *аналитический подход* к задаче полноты. Доказательство (слабой) полноты системы $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ при аналитическом подходе часто удается свести к конструктивной аппроксимации элементами $\overline{\operatorname{span}}\, \mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ некоторой системы, полнота которой в E известна из каких-либо иных соображений. Приведем пример такого рассуждения (общую схему см. у В. П. Громова [Гр03, Теорема 1 (критерий)]).

Пример 1.1.1. Пусть $E = E(X)$ — локально выпуклое функциональное пространство на подмножестве $X \subset \mathbb{C}^n$, система (1.0.1) — экспоненциальная, т. е.

$$\begin{gathered} e_\lambda = \exp{<}\lambda, z{>}, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \in \mathbb{C}^n \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n, \quad {<}\lambda, z{>} := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j, \end{gathered} \tag{1.1.4}$$

и в обозначениях из (1.1.1) выполнено (1.1.3), $0 \in \operatorname{int} \mathfrak{L}$. В данном случае $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}} = \operatorname{Exp}_{\mathfrak{L}} := \{\exp{<}\lambda, z{>} \colon \lambda \in \mathfrak{L}\}$. Предположим, что *система полиномов* $\mathbb{C}[z]$ *содержится и (слабо) полна в* $E(X)$, а также выполнено условие

(b) *топология равномерной сходимости на компактах в* $\mathbb{C}^n$, *индуцированная на* $E(X) \bigcap H(\mathbb{C}^n)$, *мажорирует индуцированную с* $E(X)$ *на* $E(X) \cap H(\mathbb{C}^n)$ *(ослабленную) топологию пространства* $E(X)$.

Тогда система $\operatorname{Exp}_{\mathfrak{L}}$ *полна в* $E(X)$. Действительно, из условия $0 \in \operatorname{int} \mathfrak{L}$ следует, что при любых $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $p \in \mathbb{Z}^+$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функции $\left(\dfrac{\exp(\varepsilon{<}\lambda, z{>}) - 1}{\varepsilon}\right)^p$ принадлежат $E(X)$. Тогда их пределы при $\varepsilon \to 0$ дают многочлены ${<}\lambda, z{>}^p$ от $z \in \mathbb{C}^n$, которые по условию образуют полную систему в $E(X)$.

Система $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ из локально выпуклого пространства E с открытым множеством показателей $\mathfrak{L} \subset \mathbb{C}^n$ *слабо голоморфна на* $\mathfrak{L}$ *в* E, если для любого функционала $S \in E'$ функция $S(e_\lambda)$ голоморфна по переменной $\lambda \in \mathfrak{L}$.

Далее всюду в разделе 1.1 предполагаем выполненным условие

(c) *множество показателей* $\mathfrak{L} \subset \mathbb{C}$ *некоторой системы* $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ *из локально выпуклого пространства* E *— область в* $\mathbb{C}$, *а сама система* $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ *слабо голоморфна на* $\mathfrak{L}$ *и (слабо) полна в* E.

Приведем простейший вариант применения аналитического подхода, основанный на элементарной теореме единственности для голоморфных функций. При этом всюду далее в текущем подразделе 1.1, во избежание дополнительных осложнений, последовательности точек $\Lambda \subset \mathfrak{L}$ состоят из **попарно различных точек**.

Предложение 1.1.1. *Если в условиях* (c) *последовательность* $\Lambda \subset \mathfrak{L}$ *имеет предельную точку в* $\mathfrak{L}$, *то и система* $\mathcal{E}_\Lambda$ *полна в* E. *В частности, если* $E = E(X)$ *— локально выпуклое функциональное пространство на* $X \subset \mathbb{C}$, *удовлетворяющее условию* (b), *множество показателей* $\mathfrak{L}$ (*слабо*) *полной в* $E(X)$ *системы* $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}} = \mathrm{Exp}_{\mathfrak{L}} \subset E(X)$ *— область в* $\mathbb{C}$, *а у* $\Lambda \subset \mathfrak{L}$ *есть предельная точка в* $\mathfrak{L}$, *то и система* Exp_Λ *полна в* $E(X)$.

В качестве тривиального замечания отметим, что вести речь о полноте системы $\mathcal{E}_\Lambda$ с *последовательностью* показателей Λ в топологическом векторном пространстве E можно лишь в случае его сепарабельности. К примеру, когда X — открытое непустое множество в $\mathbb{R}^n$, пространство функций $C_b(X)$ ограниченных непрерывных функций на X с sup-нормой на X и пространство $L^\infty(X)$ не сепарабельны. Следовательно, и постановка задачи полноты для не более чем счетной системы функций в этих пространствах бессодержательна.

Достаточно общие принципы исследования полноты параметризованных систем функций в пространствах голоморфных функций одной переменной на основе двойственного аналитического подхода изложены в статьях И. Ф. Красичкова-Терновского [Кр62]–[Кр65] и в монографии И. И. Ибрагимова [Иб71], для многих переменных — в статье В. П. Громова [Гр03].

Остановимся теперь на двойственной аналитической трактовке других аппроксимационных свойств систем (1.0.1).

1.1.2 Минимальность и равномерная минимальность

Система векторов (1.0.1) из локально выпуклого пространства E *минимальна*, если ни один элемент этой системы не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных. Еще одно следствие теоремы Хана–Банаха [Ed69, Теоремы 2.3.1(a), 2.3.2] —

Теорема 1.1.3. *Пусть* $\Lambda \subset \mathfrak{L}$ *— последовательность точек в условиях* (c). *Система* $\mathcal{E}_\Lambda = \{e_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ *минимальна в* E, *если и только если для любой точки* $\lambda \in \Lambda$ *найдется функция* $F \in \widehat{E'}$ (*см.* (1.1.2)) *такая, что* $F \not\equiv 0$ *на* $\mathfrak{L}$, $F(\lambda) \neq 0$ *и* $F(\Lambda \setminus \{\lambda\}) = 0$.

Устойчивость относительно деления на двучлены в $\widehat{E'}$ позволяет сделать ряд дополнительных выводов (ср. с [Red74, 3]).

Определение 1.1.1. Пусть $\mathfrak{L}$ — область в $\mathbb{C}$, z — переменная в $\mathfrak{L}$. Класс функций $A \subset H(\mathfrak{L})$ *устойчив в точке* $\lambda \in \mathbb{C}$, если из условий $f \in A$ и $f(\lambda) = 0$ следует, что $f(z)/(z-\lambda) \in A$. Класс A *внутренне устойчив*, если он устойчив в каждой точке $\lambda \in \mathfrak{L}$.

Теорема 1.1.4. *Пусть $\Lambda \subset \mathfrak{L}$ — последовательность точек в условиях* (c)*, а пространство функций $\widehat{E'}$ на $\mathfrak{L}$ внутренне устойчиво. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *неполная в E система $\mathcal{E}_\Lambda = \{e_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ минимальна;*

2) *если $e_\lambda \in \overline{\operatorname{span}}\, \mathcal{E}_\Lambda$ для какой-либо точки $\lambda \in \mathfrak{L} \setminus \Lambda$, то система $\mathcal{E}_\Lambda$ полна в E;*

3) *для $\lambda \in \Lambda$ и $\lambda' \in \mathfrak{L} \setminus \Lambda$ из полноты (соотв. минимальности) системы $\mathcal{E}_\Lambda$ в E следует полнота (соотв. минимальность) системы $\mathcal{E}_{(\Lambda\setminus\{\lambda\})\cup\{\lambda'\}}$ в E.*

Доказательство. Первое свойство — очевидное следствие теорем 1.1.2 и 1.1.3.

В условиях утверждения 2) допустим, что система $\mathcal{E}_\Lambda$ неполна. Если при этом элемент e_λ с показателем $\lambda \in \mathfrak{L} \setminus \Lambda$ аппроксимируется линейными комбинациями элементов из $\mathcal{E}_\Lambda$, то система $\mathcal{E}_{\Lambda\cup\{\lambda\}}$ также неполна, а по свойству 1 и минимальна. Это противоречит условию $e_\lambda \in \overline{\operatorname{span}}\, \mathcal{E}_\Lambda$, что доказывает 2).

Допустим, что в условиях и обозначениях свойства 3) система $\mathcal{E}_{(\Lambda\setminus\{\lambda\})\cup\{\lambda'\}}$ неполна в E. По теореме 1.1.2 найдется ненулевая функция $f \in \widehat{E'}$, обращающаяся в нуль на $(\Lambda \setminus \{\lambda\}) \cup \{\lambda'\}$. Ввиду внутренней устойчивости пространства $\widehat{E'}$ ненулевая функция

$$\frac{z-\lambda}{z-\lambda'} f(z) = f(z) + \frac{\lambda'-\lambda}{z-\lambda'} f(z), \quad z \in \mathfrak{L},$$

принадлежит $\widehat{E'}$, а по построению обращается в нуль на Λ. Следовательно, по теореме 1.1.2 система $\mathcal{E}_\Lambda$ неполна. Аналогично, с помощью теоремы 1.1.3, рассматривается и минимальность. •

Следуя Л. Шварцу, систему векторов $\mathcal{E}_\Lambda$ пространства E (в обозначениях теоремы 1.1.4) назовем *свободной*, если ни один вектор из $\mathcal{E}_\Lambda$ не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных векторов из $\mathcal{E}_\Lambda$, и *связанной*, если каждый вектор из $\mathcal{E}_\Lambda$ принадлежит замыканию линейной оболочки остальных. Прямое следствие теоремы 1.1.4 — *если пространство функций* $\widehat{E'}$ *на* $\mathfrak{L}$ *внутренне устойчиво, то система* $\mathcal{E}_\Lambda$ *либо свободная, либо связанная.*

В силу пункта 1) теоремы 1.1.4 и по ряду других более весомых причин наибольший интерес представляют системы $\mathcal{E}_\Lambda$ *одновременно полные и минимальные*, которые иначе, вместе с соответствующими им последовательностями Λ, называются *точными*.

Пусть E — *банахово пространство* с нормой $\|\cdot\|$ (далее используются сведения из [Мил70], [ФА72], [Ни80, Лекция VI]). Для того чтобы система $\mathcal{E}_\Lambda$ была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы существовала система линейных функционалов, образующая по отношению к системе$\mathcal{E}_\Lambda$ *биортогональную систему*, т. е. такая система $\{S_\lambda\} \subset E'$, $\lambda \in \Lambda$, что

$$\langle S_{\lambda'}, e_\lambda \rangle = \delta_{\lambda',\lambda} := \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda' = \lambda, \\ 0 & \text{при } \lambda' \neq \lambda, \end{cases}$$

— символ Кронекера, $\lambda', \lambda \in \Lambda$. Биортогональная система $\{S_\lambda\}$ для минимальной системы $\mathcal{E}_\Lambda$ однозначно определяется семейством $\mathcal{E}_\Lambda$ тогда и только тогда, когда система $\mathcal{E}_\Lambda$ полна в E. Из приведенных фактов легко следует

Теорема 1.1.5. *В условиях теоремы* 1.1.4 *система* $\mathcal{E}_\Lambda$ *точна в* E, *если и только если существует функция* $F \in H(\mathfrak{L}) \setminus \widehat{E'}$ *с* $\operatorname{Zero}_F = \Lambda$ *такая, что для каждой точки* $\lambda \in \Lambda$ *функция*

$$f_\lambda(z) := \frac{F(z)}{(z-\lambda)F'(\lambda)}, \quad z \in \mathfrak{L}, \tag{1.1.5}$$

уже принадлежит пространству $\widehat{E'}$.

Система $\mathcal{E}_\Lambda$ *равномерно минимальна*, если

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{dist}\big(e_\lambda / \|e_\lambda\|,\ \overline{\operatorname{span}}\, \mathcal{E}_{\Lambda \setminus \{\lambda\}}\big) > 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно существованию постоянной $\varepsilon > 0$ такой, что при любом $\lambda \in \Lambda$ неравенство

$$\Big\| e_\lambda - \sum_{\lambda' \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} a_{\lambda'} e_{\lambda'} \Big\| \geqslant \varepsilon \|e_\lambda\|$$

справедливо для всех конечных линейных комбинаций

$$\sum_{\lambda'\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} a_{\lambda'}e_{\lambda'}, \quad a_{\lambda'}\in\mathbb{C}.$$

Полная минимальная, т. е. точная, система $\mathcal{E}_\Lambda$ равномерно минимальна тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|e_\lambda\|\cdot\|S_\lambda\|' < +\infty \tag{1.1.6}$$

(здесь по-прежнему $\{S_\lambda\}$ — биортогональная система к $\{e_\lambda\}$, $\lambda\in\Lambda$, а $\|\cdot\|'$ — норма в E'). При условии (c) в силу биективности отображения $\mathcal{F}$ из (1.1.2) норма $\|\cdot\|'$ в E' индуцирует норму $\|\cdot\|^\wedge$ на пространство $\widehat{E'}$ голоморфных в $\mathfrak{L}$ функций по естественному правилу[2] $\|\widehat{S}\,\|^\wedge := \|S\|'$. В обозначении (1.1.5), к примеру, $\|S_\lambda\|' = \|f_\lambda\,\|^\wedge$. Таким образом, для полной минимальной системы $\mathcal{E}_\Lambda$ с функцией F из теоремы 1.1.5 критерий (1.1.6) равномерной минимальности можно переписать в виде

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|e_\lambda\|\cdot\|f_\lambda\|^\wedge = \sup_{\lambda\in\Lambda}\frac{\|e_\lambda\|\cdot\big\|F(z)/(z-\lambda)\big\|^\wedge}{|F'(\lambda)|} < +\infty.$$

1.1.3 Избыток

Следуя Н. Винеру и Р. Пэли (см. [WP34], [AR67], [Red74]), в обозначениях предыдущего подраздела 1.1.2, говорим, что система $\mathcal{E}_\Lambda$, или последовательность Λ (для системы $\mathcal{E}_\Lambda$), имеет *избыток* $\operatorname{exc}\mathcal{E}_\Lambda := \operatorname{exc}\Lambda = q\in\mathbb{Z}$ в пространстве E, или для E, если мы придем от системы $\mathcal{E}_\Lambda$ к точной в E системе

- при $q\geqslant 0$ — после удаления q попарно различных элементов из системы $\mathcal{E}_\Lambda$, т. е. q чисел из последовательности Λ;
- при $q<0$ — после добавления $|q|$ новых элементов к системе $\mathcal{E}_\Lambda$ из системы $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$, т. е. добавления $|q|$ попарно различных новых чисел к последовательности Λ.

---

[2] Внутреннее описание нормы $\|\cdot\|^\wedge$ — это, конечно, отдельный вопрос для каждого конкретного пространства E и каждой системы $\{e_\lambda\}$ — и часто очень непростой. Для получения только достаточных (соотв. необходимых) условий равномерной минимальности можно обойтись лишь верхними (соотв. нижними) оценками нормы $\|\cdot\|^\wedge$.

Если полнота не нарушается (не возникает) после удаления (соотв. добавления) любого конечного набора попарно различных чисел, то $\operatorname{exc}\mathcal{E}_\Lambda := \operatorname{exc}\Lambda := +\infty$ (соотв. $\operatorname{exc}\mathcal{E}_\Lambda := \operatorname{exc}\Lambda := -\infty$). Корректность этих определений обеспечивают, к примеру, условие (c) вместе с внутренней устойчивостью $\widehat{E'}$ на $\mathfrak{L}$ по п. 3) теоремы 1.1.4.

Очевидно, по определениям система $\mathcal{E}_\Lambda$ *полна* тогда и только тогда, когда $\operatorname{exc}\Lambda \geqslant 0$, *минимальна*, если и только если $\operatorname{exc}\Lambda \leqslant 0$, и, наконец, *точна* в том и только том случае, когда $\operatorname{exc}\Lambda = 0$.

Двойственные аналитические постановки условий, при которых избыток принимает заданное значение, легко следуют из теорем 1.1.2, 1.1.3, 1.1.5:

Теорема 1.1.6. *В условиях теоремы 1.1.4 избыток системы $\mathcal{E}_\Lambda$ равен $q \geqslant 0$ (соотв. равен $q < 0$) тогда и только тогда, когда существуют голоморфная на $\mathfrak{L}$ функция F с $\operatorname{Zero}_F = \Lambda$ и конечная последовательность $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q\} \subset \Lambda$ (соотв. $\subset \mathfrak{L}$), для которой в обозначении $\operatorname{sign} q := q/|q|$ при $q \neq 0$ и $\operatorname{sign} 0 := 0$ одновременно выполнено следующие два условия:*

$$F(z)\prod_{k=1}^{|q|}(z-\lambda_k)^{-\operatorname{sign} q} \notin \widehat{E'} \quad (\textit{ соотв. } \in \widehat{E'}), \tag{1.1.7}$$

$$F(z)\prod_{k=0}^{|q|}(z-\lambda_k)^{-\operatorname{sign} q} \in \widehat{E'} \quad (\textit{ соотв. } \notin \widehat{E'}).$$

Далее, $\operatorname{exc}\mathcal{E}_\Lambda = +\infty$ (соотв. $\operatorname{exc}\mathcal{E}_\Lambda = -\infty$), если для любой (соотв. некоторой) голоморфной на $\mathfrak{L}$ функции F с $\operatorname{Zero}_F \geqslant \Lambda$ при каждом $q \in \mathbb{N}$ (соотв. $q \in -\mathbb{N}$) для некоторой последовательности $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\} \subset \Lambda$ (соотв. $\subset \mathfrak{L}$) имеет место (1.1.7).

Как показал В. Д. Мильман [Мил70, Лемма 1.1], при условии $\operatorname{exc}\Lambda = +\infty$ на самом деле из системы $\mathcal{E}_\Lambda$ всегда можно удалить даже *бесконечное число* элементов, сохраняя полноту. Но в отношении условия $\operatorname{exc}\Lambda = -\infty$ возможность добавления к $\mathcal{E}_\Lambda$ бесконечного числа элементов из $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ с сохранением неполноты требует уже учета специфики пространства E и(или) системы $\mathcal{E}_\Lambda$.

1.1.4 Абсолютная полнота и родственные понятия

С конца 1950-х годов в работах Ф. Дэвиса и Ки Фана [DF57], [Fa59] было положено начало исследованию полноты систем функций с учетом ограничений на коэффициенты аппроксимирующих линейных комбинаций функций из этой системы. Варианты такой аппроксимации — абсолютная полнота и $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$-полнота. Система элементов $\mathcal{E}_\Lambda$ банахова пространства E *абсолютно полна в* E (соотв. $\{m_\lambda\}$*-полна*, $m_\lambda \geqslant 0$, $\lambda\in\Lambda$), если любой элемент $e\in E$ аппроксимируется в E конечными линейными комбинациями $\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda e_\lambda$, где $\sum_{\lambda\in\Lambda}|c_\lambda|\leqslant C_e$ (соотв. $|c_\lambda|\leqslant C_e m_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$) и постоянная C_e зависит только от e.

Двойственные критерии абсолютной полноты, а также критерии $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$-полноты в терминах сопряженного пространства E' к E изложены в работах С. Я. Хавинсона [Хав71], Ф. Дэвиса и Ки Фана [DF57], [Fa59], И. Ф. Красичкова-Терновского [Кр86]. Зачастую эти два понятия эквивалентны (см. [Кр86]), поэтому здесь ограничимся обсуждением только абсолютной полноты. Двойственный критерий абсолютной полноты в трактовке И. Ф. Красичкова-Терновского, являющийся частным случаем значительно более общих результатов С. Я. Хавинсона [Хав71]–[Хав02], состоит в следующем: *система* $\mathcal{E}_\Lambda$ *абсолютно полна в* E *в том и только том случае, когда выполнено соотношение*

$$\sup\left\{\|S\|' \colon S\in E',\ \left|\left\langle S, e_\lambda\right\rangle\right|\leqslant 1,\ \lambda\in\Lambda\right\} < +\infty.$$

Двойственная аналитическая версия этого критерия при условии (c) и в обозначениях п. 1.1.2 — *система* $\mathcal{E}_\Lambda$ *абсолютно полна в* E *только и только лишь при условии*

$$\sup\left\{\|F\|^\wedge \colon F\in \widehat{E'},\ |F(\lambda)|\leqslant 1,\ \lambda\in\Lambda\right\} < +\infty. \tag{1.1.8}$$

Варианты определения абсолютной полноты в локально выпуклых пространствах давались в работах В. Б. Шерстюкова [Ше95]–[Ше00′], Ю. Ф. Коробейника и В. Б. Шерстюкова [КШ98] (см. также [Кр86, § 2, Замечание 1]).

Система $\mathcal{E}_\Lambda$ *абсолютно полна в локально выпуклом пространстве* E с набором полунорм P, определяющим топологию в E, если для всякого $e\in E$ при некотором $C_e>0$ для любой полунормы

$p \in P$ при каждом $\varepsilon > 0$ найдется конечная линейная комбинация $\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda e_\lambda$, для которой одновременно выполнены неравенства

$$p\left(e - \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda e_\lambda\right) < \varepsilon, \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} |c_\lambda| \leqslant C_e.$$

Та же система *ослабленно абсолютно полна в* E, если для любой полунормы $p \in P$ система $\mathcal{E}_\Lambda$ абсолютно полна в (E, p), т. е. в пространстве с тем же множеством элементов, что и в E, но топологией, задаваемой одной полунормой p. Очевидно, для нормированного пространства E эти два понятия совпадают. Двойственный критерий — *система* $\mathcal{E}_\Lambda$ *абсолютно полна в отделимом локально выпуклом пространстве* E *тогда и только тогда, когда поляра* $\bigl\{S \in E' \colon \bigl|\langle S, e_\lambda\rangle\bigr| \leqslant 1,\ \lambda \in \Lambda\bigr\}$ *слабо ограничена в* E'. Если E' реализуется как локально выпуклое пространство $\widehat{E'}$ голоморфных функций в области, то можно дать и двойственную аналитическая версию этого критерия в виде, близком к (1.1.8), но с заменой нормы на полунормы.

Дальнейшие обобщения этих понятий и их исследование см. в [Ше95] и [Ше00′], где рассмотрены так называемые (ослабленно) $\mathfrak{T}$-полные системы, охватывающие как частный случай предыдущие понятия полноты с ограничениями на коэффициенты, включая $O(p)$-полноту в смысле С. Я. Хавинсона [Хав71].

1.2 Множества (не)единственности и выметание

Согласно предыдущему разделу и в свете теоремы 1.1.2 при двойственном аналитическом подходе к полноте в пространстве E ключевую роль играет возможность распознавания множеств (не)единственности в функциональном пространстве $\widehat{E'}$ из (1.1.2). В этом разделе предлагается двойственный метод такого распознавания для случая, когда функции из $\widehat{E'}$ голоморфны в некоторой области из $\mathbb{C}$ и в той или иной степени характеризуются поточечными ограничениями сверху системой функций-мажорант, или *весовых функций* (кратко — *весов*).

В основе метода лежит абстрактное выметание меры или положительного функционала, поэтому здесь мы закрепляем за ним наименование “*метод выметания*” [3]. Этот метод разрабатывался и применялся в работах Б. Н. Хабибуллина [Хаб91″], [Хаб92]–Khab94, [Хаб96]–[Хаб01″], [Хаб97], [Хаб04′], [Хаб04″], [Хаб05] (см. также его отдельные элементы в [Koo96, гл. III], [Ra00]).

Спектр применений метода выметания в теории функций довольно широк (подробности в [Хаб01″]) и описание множеств (не)единственности в весовых пространствах голоморфных функций одной и многих переменных — лишь один из вариантов его использования. Само понятие выметания (balayage) впервые возникло в теории потенциала у А. Пуанкаре. Возможна и абстрактная его трактовка [Mei73], [AK78], [Хаб01′]–[Хаб01″].

Пусть $K \subset Y$ — множества, а $T, S \colon Y \to [-\infty, +\infty]$ — два функционала на множестве Y. *Функционал S — выметание функционала T относительно K в Y*, если $T(k) \leqslant S(k)$ для любого элемента $k \in K$.

Если K — подпространство в векторном пространстве Y над полем $\mathbb{C}$, то можно рассматривать и функционалы $T, S \colon Y \to \mathbb{C}_\infty$. При этом S — выметание T относительно K в Y, если $T(k) = S(k)$ для любого $k \in K$ (см. [Be66]).

Всюду в этом разделе Ω — область в $\mathbb{C}$, $0 \in \Omega$. Конус субгармонических функций в области Ω обозначаем $SH(\Omega)$, включая в него и функцию $\equiv -\infty$.

1.2.1 Меры Йенсена и их применение

Здесь мы оперируем частным случаем выметания, когда в роли Y выступает пространство $C(\Omega)$, K — это выпуклый конус $SH(\Omega) \cap C(\Omega)$, а $T = \delta_0$ — мера Дирака, т. е. единичная масса в точке 0. В этом случае выметания меры Дирака δ_0 реализуются как специальный класс мер на Ω, который полностью описывает

Определение 1.2.1. Мера $\mu \in \mathcal{M}_c^+(\Omega)$ называется *мерой Йенсена* (для точки 0 в области Ω) если для любой функции $u \in SH(\Omega)$ справедливо неравенство

$$u(0) = \int_\Omega u \,\mathrm{d}\delta_0 \leqslant \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu.$$

---

[3] В зависимости от акцентов его можно назвать также методом огибающей или методом наибольшей миноранты (наименьшей мажоранты).

Класс всех таких мер Йенсена обозначаем через $\mathcal{J}_0(\Omega)$.

Тривиальными примерами мер Йенсена из $\mathcal{J}_0(\Omega)$ служат сама мера Дирака δ_0, нормированные единицей мера Лебега $m^{(r)}$ в круге $D(r) \Subset \Omega$ и мера длины дуги $s^{(r)}$ на окружности $\partial D(r)$.

По-видимому, впервые меры Йенсена возникли в теории равномерных алгебр [FA66], [Ga78]. Ряд их свойств отражен, например, в [Koo83], [Koo92], [Koo96], [CR01], [Ra00], [Хаб91″], [Хаб92*], [Хаб03], а также в других работах, связанных с теорией функций в круге, с теорией (плюри)потенциала и пр.

В определенном смысле класс $\mathcal{J}_0(\Omega)$ двойственен к конусу $SH(\Omega)$. Одно из проявлений этого — двойственное описание наибольшей субгармонической миноранты (или наименьшей супергармонической мажоранты) функции в Ω через меры Йенсена, являющееся следствием теоремы Хана–Банаха, но в усовершенствованной форме берущее начало в результате Д. А. Эдвардса [Edw66]. В дальнейшем эту важную двойственность по разнообразным поводам развивали С. Бу и В. Шахермайер [BSc92], Б. Коул и Т. Рансфорд [CR97, Следствие 1.7], [Ra00], П. Кусис [Koo83], [Koo92], [Koo96], Ф. Ларуссон и Р. Сигурдссон [LS98, Теорема 2.1], Е. А. Полецкий [Пол91]–[Пол99], [Пол01], Б. Н. Хабибуллин [Хаб92′], [Хаб93], [Хаб93′], [Хаб97], [Хаб01′]–[Хаб01″]. Другое проявление двойственности — полная характеризация субгармонических функций в терминах произвольных мер Йенсена [Хаб03, Первый критерий субгармоничности].

Функция $M\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ задает векторное пространство

$$H(\Omega; M) := \{f \in H(\Omega)\colon\ \log|f| \leqslant M + \text{const.}\ \text{ на } \Omega\}.$$

Всюду ниже в этом разделе для простоты предполагаем, что $M(\Omega) \subset \mathbb{R}$ и функция M *непрерывна* на Ω.

Роль мер Йенсена в описании множеств (не)единственности определяется теоремой 1.2.1, сформулированной здесь в терминах произвольной *порождающей функции* f_Λ последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$ с с последовательностью нулей $\operatorname{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$.

Теорема 1.2.1. *Если Λ — множество неединственности для пространства $H(\Omega; M)$, то справедливо соотношение*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{J}_0(\Omega)} \Bigl(\int \log|f_\Lambda|\,\mathrm{d}\mu - \int M\,\mathrm{d}\mu\Bigr) < +\infty. \tag{1.2.1}$$

Обратно, если выполнено (1.2.1)*, то для любого числа* $\varepsilon \in (0,1)$ *последовательность* Λ *— множество неединственности для класса* $H(\Omega; M^{(\varepsilon)})$*, где в обозначении* $d_\Omega(z) := \min\{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega), 1\}$

$$M^{(\varepsilon)}(z) := \sup_{|z-w|\leqslant \varepsilon d_\Omega(z)} M(w) + \text{const.} \log \frac{1}{d_\Omega(z)}, \quad z \in \Omega. \quad (1.2.2)$$

Для $\Omega = \mathbb{C}$ — это результат из [Хаб91″] (см. также [Ra00]). Для односвязных областей Ω эта теорема установлена в [Хаб97, Теорема 1.2]. Чуть более общая версия теоремы 1.2.1, включая и многомерный ее вариант, доказана в [Хаб01″, Теорема 11.1]. Отличие этих результатов лишь в том, что в случае неограниченной области $\Omega \neq \mathbb{C}$ в определении (1.2.2) функции $M^{(\varepsilon)}$ требовалось добавить еще и слагаемое $\text{const.} \log(1+|z|)$. К сожалению, нами не было в свое время замечено, что при произвольном выборе фиксированной точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ предварительное домножение функции f_Λ на множитель $1/(z-z_0)^m$, где степень $m \in \mathbb{N}$ достаточно велика, позволяет ликвидировать это слагаемое. В [Хаб96′] анонсирована, а в [Хаб01′, Введение]–[Хаб01″] описана и реализована общая схема использования двойственного представления наибольшей субгармонической миноранты (или, более общó, суперлинейного функционала на проективном пределе векторных решеток) к описанию множеств (не)единственности и к ряду других проблем. В частности, используя, как и в [Хаб01″, Теорема 7.1], сглаживания с помощью свертки, можно получить

Дополнение 1.2.1. *В теореме* 1.2.1 *в* (1.2.1) *можно заменить класс* $\mathcal{J}_0(\Omega)$ *на подкласс абсолютно непрерывных мер Йенсена* $\mathcal{J}_0(\Omega) \cap \mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ *и даже на подкласс мер Йенсена с бесконечно дифференцируемыми плотностями с носителями, не пересекающимися с произвольным наперед заданным компактом из* Ω.

Важное подмножество класса $\mathcal{J}_0(\Omega)$ — класс $\mathcal{H}_0(\Omega)$ гармонических мер $\omega_D(0, \cdot)$ для подобластей $D \Subset \Omega$ в точке 0 и его подкласс $\mathcal{H}_0^{\mathrm{reg}}(\Omega) \subset \mathcal{H}_0(\Omega)$ для регулярных (для задачи Дирихле) подобластей $D \Subset \Omega$, содержащих 0. Использование совместных результатов Б. Коула и Т. Рансфорда [CR01, Теорема 4.2] дает возможность (см. [Хаб04″, раздел 3]) получить еще одно

Дополнение 1.2.2. *Для любого компакта* $K \subset \Omega$ *в теореме* 1.2.1 *в* (1.2.1) *можно заменить класс* $\mathcal{J}_0(\Omega)$ *на* $\mathcal{H}_0^{\mathrm{reg}}(\Omega) \cap \mathcal{M}(\Omega \setminus K)$.

Другой важный подкласс в $\mathcal{J}_0(\Omega)$ порождают аналитические диски в Ω. *Аналитическим диском в области* Ω *с центром в* $0 \in \Omega$ называется функция $g\colon \overline{\mathbb{D}} \to \Omega$, непрерывная на $\overline{\mathbb{D}}$ и голоморфная в $\mathbb{D}$, для которой $f(0) = 0$ (см. [Пол91]–[Пол99], [CR01])[4]. Если аналитический диск g в Ω с центром $0 \in \Omega$ — *многочлен* комплексной переменной, т. е. $g \in \mathbb{C}[z]$, то естественно называть его *полиномиальным диском в* Ω *с центром в точке* $0 \in \Omega$.

Каждый аналитический диск g в области $\Omega \ni 0$ с центром в нуле порождает меру $\mu = g^* s^{(1)} \in \mathcal{M}_c^+$ по правилу

$$\int f\,d\mu := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(g(e^{i\theta}))\,\mathrm{d}\theta, \quad f \in C(\Omega). \tag{1.2.3}$$

Другими словами, мера $g^* s^{(1)}$ — образ нормированной единицей меры длины дуги $s^{(1)}$ на окружности $\partial\mathbb{D}$ при отображении g. Класс $\mathcal{AD}_0(\Omega) \subset \mathcal{J}_0(\Omega)$ всех таких мер называют *голоморфными мерами* или *аналитическими диск-мерами* [CR01, § 7] (для точки 0 в области Ω). Меры из подкласса $\mathcal{PD}_0(\Omega)$ в $\mathcal{AD}_0(\Omega)$, порожденные полиномиальными дисками, будем называть *полиномиальными диск-мерами*. Как показали С. Бу и В. Шахермайер [BSc92, Теорема B], замыкание $\operatorname{clos}\mathcal{PD}_0(\Omega)$ этого подкласса в $*$-слабой топологии на $\mathcal{M}_c(\Omega)$ совпадает с $\mathcal{J}_0(\Omega)$, откуда можно получить

Дополнение 1.2.3. *В теореме 1.2.1 в (1.2.1) можно заменить класс* $\mathcal{J}_0(\Omega)$ *на подкласс* $\mathcal{AD}_0(\Omega)$ *или* $\mathcal{PD}_0(\Omega)$. *Иначе говоря, ввиду (1.2.3) теорема 1.2.1 верна, если (1.2.1) заменить на условие*

$$\sup_g \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\bigl|f_\Lambda\bigl(g(e^{i\theta})\bigr)\bigr|\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(g(e^{i\theta}))\,\mathrm{d}\theta\right) < +\infty,$$

где $\sup\limits_g$ *взят по всем аналитическим дискам* $g \in \mathcal{AD}_0(\Omega)$ *или по всем полиномиальным дискам* $g \in \mathcal{PD}_0(\Omega)$.

1.2.2 Функции Йенсена и их применение

Полезным оказался и следующий этап двойственности, заключающийся в рассмотрении потенциалов мер Йенсена. Двойственные к мерам Йенсена объекты в виде обычного логарифмического

---

[4] Если используются различные виды аналитических дисков, то рассматриваемые здесь аналитические диски выделяют как замкнутые [Пол99].

потенциала $\int \log|z-\zeta|\,\mathrm{d}\mu(z)$ возникали уже в книге Т. Гамелина [Ga78]. Однако в связи с применениями к описанию множеств единственности более полезным оказалось [Хаб91″] рассмотрение *логарифмического потенциала рода* 0

$$V_\mu(\zeta) := \int_\Omega \log|z-\zeta|\,\mathrm{d}\mu(z) - \log|\zeta| \\ = \int_\Omega \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|\mathrm{d}\mu(z)\,, \quad \zeta\in\Omega\setminus\{0\}, \quad (1.2.4)$$

мер Йенсена μ, поскольку эти меры вероятностные, а потенциал V_μ оказывается *положительным*. Внутреннее описание всех таких потенциалов дает (см. [Ga78], [Хаб91″], [Хаб92*], [Koo96] и наиболее детально в [Хаб03])

Определение 1.2.2. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $0\in\Omega$. Субгармоническую в $\Omega\setminus\{0\}$ функцию V называем *функцией Йенсена* (для точки 0 в области Ω), если выполнены следующие три условия:

1) $V(\zeta)\geqslant 0$ *при* $\zeta\in\Omega\setminus\{0\}$ (положительность);

2) *существует* $K\Subset\Omega$ *такое, что* $V\equiv 0$ *на* $\Omega\setminus K$ (финитность);

3) $\limsup\limits_{\zeta\to 0}\dfrac{V(\zeta)}{-\log|\zeta|}\leqslant 1$ (нормировка в нуле).

Класс всех функций Йенсена обозначаем через $\mathcal{P}_{J_0}(\Omega)$.

Функции Йенсена V в $\Omega\ni 0$ и потенциалы мер Йенсена из (1.2.4) всегда *доопределяем нулевыми значениями на дополнении* $\mathbb{C}_\infty\setminus\Omega$. Тогда они становятся *субгармоническими* в $\mathbb{C}_\infty\setminus\{0\}$.

Функции Йенсена изучались также В. И. Мацаевым, И. В. Островским и М. Л. Содиным [МОС02] в случае плоскости $\Omega=\mathbb{C}$ и применялись К. Сандбергом [Su02] в единичном круге $\Omega=\mathbb{D}$.

Пусть M — субгармоническая функция в Ω с мерой Рисса $\nu_M=\frac{1}{2\pi}\Delta M$ (здесь Δ — оператор Лапласа, а равенство — в смысле теории распределений). В этом случае справедлива (для $\Omega=\mathbb{C}$ см. [Хаб91″, Основная Теорема и Предложение 4.2], для односвязных областей Ω — [Хаб97, Теорема 1.3], [Хаб01″, Теорема 11.2])

Теорема 1.2.2. *Пусть $M \in SH(\Omega)\bigcap C(\Omega)$. Теорема 1.2.1 справедлива, если вместо (1.2.1) использовать соотношение*

$$\sup_{V\in\mathcal{P}_{J_0}(\Omega)}\Bigl(\sum_k V(\lambda_k)-\int V\,\mathrm{d}\nu_M\Bigr)<+\infty. \tag{1.2.5}$$

Переход от теоремы 1.2.1 к теореме 1.2.2 осуществляется на основе следующего обобщения классической формулы Пуассона–Йенсена для субгармонических функций.

Теорема 1.2.3. *Пусть $u_\nu \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν и при этом $u_\nu(0)\neq-\infty$. Тогда для каждой меры Йенсена μ в Ω с потенциалом V_μ справедливо равенство*

$$\int_\Omega u_\nu\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega V_\mu\,\mathrm{d}\nu+u_\nu(0)\,. \tag{1.2.6}$$

Распространение в [Хаб03] обобщенной формулы Пуассона–Йенсена (1.2.6) на произвольные области Ω позволяет обойтись *без требования односвязности области* Ω и в теореме 1.2.2.

Каждая отдельная функция Йенсена V уже несет в себе достаточное условие для множеств единственности в весовом пространстве, если вместе с V рассматривать некоторые ее преобразования, оставляющие эту функцию в классе функций Йенсена. Особенно просто такие условия выглядят, когда область $\Omega=\mathbb{C}$, поскольку если $V\in\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$, то $V(\cdot/z)\in\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$ для любого $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Следствие 1.2.1. *Если $\Omega=\mathbb{C}$ и для функции $V\in\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$ в условиях теоремы 1.2.2 имеет место соотношение*

$$\limsup_{z\to\infty}\Bigl(\sum_k V(\lambda_k/z)-\int V(\zeta/z)\,\mathrm{d}\nu_M(\zeta)\Bigr)=+\infty, \tag{1.2.7}$$

то Λ — множество единственности для $H(\mathbb{C};M)$.

Теорема 1.2.2 и особенно следствие 1.2.1 делают актуальной задачу построения функций Йенсена. Укажем один такой способ построения (здесь — только для одной переменной), в частном виде реализованный в статьях Б. Н. Хабибуллина (для одной переменной — в [Хаб91″, § 5, п. 4], для нескольких переменных и в неявной форме — в [Хаб91′, Лемма 2.2], в явном виде — в [Хаб92*], [Хаб99], а наиболее общо — в [Хаб05, § 4]). За исходный объект такого построения можно взять *произвольную субгармоническую функцию* $v \not\equiv -\infty$ *в* $\mathbb{C}$. При этом для простоты будем считать функцию v непрерывно дифференцируемой. Дальнейшие возможные шаги:

i) $v_1 := (v - \text{const.})^+$, где const. столь велика, что $v_1 \equiv 0$ в некоторой открытой окрестности U точки 0;

ii) $v_1^\star(\zeta) := v_1\bigl(1/\bar{\zeta}\,\bigr)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, — инверсия v_1 относительно $\partial\mathbb{D}$;

iii) используя инверсию $v_1^\star$ относительно $\partial D(r)$, $r > 0$, полагаем

$$V_r(\zeta) := \begin{cases} v_1^\star(\zeta) & \text{при } |\zeta| > r; \\ v_1^\star(r^2/\bar{\zeta}\,) & \text{при } |\zeta| \leqslant r; \end{cases}$$

iv) положим $A_r = \sup_{\theta\in[0,2\pi)} a_r(\theta)$, где

$$a_r(\theta) := \frac{\partial V_r(te^{i\theta})}{\partial t}\Bigr|_{t=r-0} - \frac{\partial V_r(te^{i\theta})}{\partial t}\Bigr|_{t=r+0} = -2\frac{\partial v_1^\star(te^{i\theta})}{\partial t}\Bigr|_{t=r}$$

— сумма производных от V_r по внешней нормали соотв. на границах круга $D(r)$ и его дополнения $\mathbb{C} \setminus D(r)$;

v) $V(\zeta) := \dfrac{1}{rA_r}\,V_r(\zeta) + \log^+\dfrac{r}{|\zeta|}$, где при $A_r = 0$ первое слагаемое справа отбрасывается, — функция Йенсена в нуле для всякой области $\Omega \Supset (\mathbb{C} \setminus U^\star) \cup \{0\}$, где $U^\star := \{\zeta \in \mathbb{C} \colon 1/\bar{\zeta} \in U\}$ — инверсия U (субгармоничность V в окрестности $\partial D(r)$ следует по построению из [Хаб93, Лемма 3.8.1], [Хаб99, Лемма 4.1] или общих теорем П. Бланше [Bl95, Теоремы 3.1–3.3]).

Возможно и обобщение конструкции i)–v) на пути замены круга $D(r)$ некоторой односвязной областью $D \ni 0$, а инверсии $v_1^\star(r^2/\bar{\zeta}\,)$ в iii) — заменой переменной, основанной на конформном отображении D на ее внешность $\mathbb{C}_\infty \setminus D$.

На альтернативный способ построения функций Йенсена указал нам в свое время В. С. Азарин в отзыве о диссертации [Хаб93]. Например, для области $\Omega \ni 0$ и вероятностной меры $\mu \in \mathcal{M}_c^+(\Omega)$ следующие две функции от $\zeta \neq 0$

$$\zeta \longmapsto \left(\int_\Omega \log\Bigl|1 - \frac{z}{\zeta}\Bigr|\,\mathrm{d}\mu(z) - \text{const.}\right)^+,$$

$$\zeta \longmapsto \left(\int_\Omega \log^+\Bigl|1 - \frac{z}{\zeta}\Bigr|\,\mathrm{d}\mu(z) - \text{const.}\right)^+$$

будут функциями Йенсена для 0 в Ω (ср. с (1.2.4)), если постоянная const. столь велика, что $V \equiv 0$ вне некоторого $K \Subset \Omega$. Но при таком построении бывает трудно проследить изменения исходного потенциала $V_\mu(\zeta) = \int_\Omega \log|1 - z/\zeta|\,\mathrm{d}\mu(z)$, $\zeta \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$.

Если для получения максимального набора достаточных условий для множеств единственности выгодно использовать все функции Йенсена, то для, как правило, значительно более трудной задачи установления достаточных условий для множеств неединственности в целях облегчения проверки (1.2.5) важно максимально сузить класс тестирующих (1.2.5) функций Йенсена.

Отображение $\mathcal{P}\colon \mu \to V_\mu$ класса $\mathcal{J}_0(\Omega)$ на класс $\mathcal{P}_{J_0}(\Omega)$, где V_μ — потенциал меры Йенсена из (1.2.4), является биекцией (см. [Хаб97, Предложение 3.4], [Хаб01″, Лемма 11.1], [Хаб03, Теорема двойственности]), а мера Йенсена $\mu = \mathcal{P}^{-1}(V)$ для $V \in \mathcal{J}_0(\Omega)$ однозначно восстанавливается по правилу

$$\mathcal{P}^{-1}(V) = \frac{1}{2\pi}\Delta V + \left(1 + \liminf_{\zeta \to 0} \frac{V(\zeta)}{\log|\zeta|}\right)\delta_0 \in \mathcal{J}_0(\Omega) \tag{1.2.8}$$

(см. [Хаб03, Предложение 1.4]). Кроме того,

(J1) сужение отображения $\mathcal{P}$ на подкласс мер с бесконечно дифференцируемой плотностью дает в качестве образа подкласс функций Йенсена из $C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$;

(J2) образ сужения отображения $\mathcal{P}$ на $\mathcal{H}_0^{\mathrm{reg}}(\Omega)$ образует подкласс $\mathcal{G}_0^{\mathrm{reg}}(\Omega) \subset \mathcal{P}_{J_0}(\Omega)$ всех продолженных нулем на $\Omega \setminus D$ функций Грина $g_D(\zeta, 0)$, $\zeta \in \Omega$, с полюсом в нуле для регулярных областей $D \Subset \Omega$, содержащих $0 \in \Omega$;

(J3) образ сужения $\mathcal{P}$ на подкласс аналитических диск-мер или полиномиальных диск-мер совпадает с подклассом функций Йенсена, допускающих представление вида

$$V(\zeta) = \int_0^{2\pi} \log\left|1 - \frac{g(e^{i\theta})}{\zeta}\right| \mathrm{d}\theta\,, \quad \zeta \in \Omega \setminus \{0\}, \tag{1.2.9}$$

где g пробегают множество всех аналитических или соотв. полиномиальных дисков в Ω с центром в 0.

Дополнения 1.2.1–1.2.3 при этом перейдут в

Дополнение 1.2.4. *В теореме* 1.2.2 *в* (1.2.5) *можно заменить класс* $\mathcal{P}_{J_0}(\Omega)$ *на любой подкласс функций Йенсена из* (J1)–(J3).

Если последовательность $\Lambda \subset \Omega$ — множество неединственности для пространства $H(\Omega, M)$ с субгармоническим весом M, то в каком-то смысле считающая мера n_Λ должна мажорироваться мерой Рисса ν_M. Теорема 1.2.2 и дополнение 1.2.4 придают этому эвристическому наблюдению вполне определенный смысл. При этом класс функций Йенсена и некоторые его подклассы играют в рассматриваемых вопросах роль тестовых классов функций, аналогичную роли положительных финитных основных функций при проверке стандартного отношения порядка $\leqslant$ между мерами или распределениями (обобщенными функциями).

Отметим, что условие непрерывности функции M может быть значительно ослаблено, а ее преобразования $M^{(\varepsilon)}$ из (1.2.2) в формулировке теоремы 1.2.1, а значит, и во всех других утверждениях этого раздела допускают гораздо более широкое варьирование в зависимости от конкретной ситуации и потребностей.

Замечание. Многие классические формулы, такие, как формулы Неванлинны, Карлемана, Б. Я. Левина, а также и новые можно получить в едином ключе из обобщенной формулы Пуассона–Йенсена (1.2.6) теоремы 1.2.3 путем построения различных функций Йенсена по схеме i)–v), а по ним — и мер Йенсена (посредством $\mathcal{P}^{-1}$ из (1.2.8)). Вариации на эту тему в несколько завуалированной форме присутствуют в [Хаб91′], [Хаб91″, § 7, п. 4], [Хаб99, п. 4].

Глава 2

Пространства функций вещественной переменной

2.1 Системы экспонент на замкнутых подмножествах

Всюду в этом разделе рассматриваются вопросы полноты систем функций в пространствах функций, определенных на каком-либо типе замкнутого подмножества из $\mathbb{R}$ или из $[-\infty, +\infty]$.

2.1.1 Полнота на отрезке или компактном подмножестве в $\mathbb{R}$

В основе аналитического подхода к полноте системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на отрезке лежит следующая версия теоремы 1.1.2 (см. [Le40], [Sch43], [Сед00, 4.2, лемма 1]):

Теорема 2.1.1. *Система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *неполна на отрезке* $[a, b]$ *при* $-\infty < a < b < +\infty$, (*соотв. в* $L^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$) *тогда и только тогда, когда существует целая функция* $F \not\equiv 0$, *обращающаяся в нуль на* Λ *и представимая в виде*

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda x}\,\mathrm{d}\sigma(x)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.1.1}$$

где σ — *функция ограниченной вариации на* $[a, b]$

$$\left(\text{соотв. } F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad f \in L^q(a, b), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right). \tag{2.1.2}$$

По теореме 2.1.1 и даже без нее легко видеть, что задача полноты системы Exp_Λ на отрезке и в $L^p(a,b)$ не "чувствует" сдвига отрезка, а всякая гомотетия отрезка $[a,b]$ с коэффициентом k или поворот отрезка вокруг нуля на угол θ переводит утверждения о (не)полноте системы Exp_Λ в такое же утверждение соотв. для системы $\mathrm{Exp}_{\frac{1}{k}\Lambda}$ или $\mathrm{Exp}_{e^{i\theta}\Lambda}$. Поэтому некоторые результаты и проблемы, сформулированные для конкретного отрезка, например, $[-\pi,\pi]$, или для последовательности $i\Lambda=\{i\lambda_k\}$ носят, тем не менее, общий характер.

Целые функции вида (2.1.1) (соотв. (2.1.2)) — это ц.ф.э.т. вполне регулярного роста ([Лев56], [Лев96]) с индикатором роста $h_F(\theta)\leqslant b\cos^+\theta-a\cos^-\theta=:K_{[a,b]}(\theta)$ — опорная функция отрезка $[a,b]$, $\theta\in\mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенству

$$|F(re^{i\theta})|\leqslant \mathrm{const.}\exp\bigl(K_{[a,b]}(\theta)r\bigr),\quad r\geqslant 0. \tag{2.1.3}$$

(соотв. наряду с (2.1.3) и условию $\lim_{y\to\pm\infty}F(iy)=0$). В частности, функция $e^{i\lambda(a+b)/2}F(-i\lambda)$ попадает в пространство Бернштейна B^∞_σ при значении $\sigma=(b-a)/2$.

Для последовательности $\Lambda\subset\mathbb{C}$ (см. соглашение $0\notin\Lambda$ из подраздела 0.1.2 введения)

$$\overline{\Delta}(\Lambda):=\limsup_{t\to\infty}\frac{n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t)}{t},\quad \overline{D}(\Lambda):=\limsup_{r\to\infty}\frac{N_\Lambda(r)}{r} \tag{2.1.4}$$

— соотв. *верхняя плотность* и *усредненная верхняя плотность последовательности* Λ. Если вместо верхних пределов в (2.1.4) поставить нижние, то получаем *нижние плотности* $\underline{\Delta}(\Lambda)$ и $\underline{D}(\Lambda)$. Если $\overline{\Delta}(\Lambda)=\underline{\Delta}(\Lambda)=:\Delta(\Lambda)$, то $\Delta(\Lambda)$ — обычная *плотность последовательности* Λ. Аналогично определяется обычная *усредненная плотность* $D(\Lambda):=\overline{D}(\Lambda)=\underline{D}(\Lambda)$. *Максимальная плотность Пойа последовательности* Λ и ее *усредненная максимальная плотность Пойа* задается соотв. как [Koo88, VI E]

$$\Delta_{\max}(\Lambda):=\lim_{\varepsilon\to+0}\limsup_{t\to\infty}\frac{n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t+\varepsilon t)-n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t)}{\varepsilon t}, \tag{2.1.5n}$$

$$D_{\max}(\Lambda):=\lim_{\varepsilon\to+0}\limsup_{r\to\infty}\frac{N_\Lambda(r+\varepsilon r)-N_\Lambda(r)}{\varepsilon r}. \tag{2.1.5N}$$

Для последовательностей нулей Zero_F ненулевой ц.ф.э.т. вида (2.1.1) и (2.1.2) все плотности из (2.1.4) и (2.1.5) совпадают ввиду определенной регулярности роста таких функций и распределения их нулей [Лев56], [Лев96], [Boa54].

На основе вытекающего из формулы Йенсена

$$\log|F(0)| + N_{\mathrm{Zero}_F}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \qquad (2.1.6)$$

неравенства Йенсена

$$\overline{D}(\mathrm{Zero}_F) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_F(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,, \qquad (2.1.7)$$

где h_F — индикатор роста ц.ф.э.т. F, для функции F вида (2.1.1) и (2.1.2) последний интеграл в (2.1.7) не превышает $(b-a)/\pi$. По теореме 2.1.1 наилучший возможный результат о полноте в терминах плотностей (2.1.4) и (2.1.5) —

Теорема 2.1.2. *Если хотя бы одна из плотностей из* (2.1.4) *или* (2.1.5) *больше, чем* $(b-a)/\pi$, *то система* Exp_Λ *полна на* $[a,b]$ *и в* $L^p(a,b)$. *Если* $\overline{D}(\Lambda) > (b-a)/\pi$, *то система* Exp_Λ *полна и в пространстве* $H[a,b] := H([a,b])$ *ростков голоморфных на отрезке* $[a,b]$ *функций.*

Теорема 2.1.2 еще очень "грубая" и мало учитывает специфику пространств $C[a,b]$ и $L^p(a,b)$. К первым утверждениям, в некоторой степени лишенным отмеченного недостатка, можно отнести следующий результат М. Картрайт [Car30] и Н. Левинсона [Le40] (см. также [Лев56, Приложение III], [Лев96, 17, Теорема 1; 18, Теорема 2]), который сильнее теоремы 2.1.2 "в 2^2 раз" (оценки плотностей снизу меньше в два раза и рассматривается "верхняя или нижняя половина" точек из последовательности Λ).

Теорема 2.1.3. *Если при* $0 \leqslant \alpha < \pi$ *одна из плотностей из* (2.1.4) *или* (2.1.5) *последовательностей* $\Lambda\cap\angle(-\pi/2+\alpha, 3\pi/2-\alpha)$ *или* $\Lambda\cap\angle(-3\pi/2+\alpha, \pi/2-\alpha)$ *больше, чем* $(b-a)/2\pi$, *то система* Exp_Λ *полна на* $[a,b]$ *и в* $L^p(a,b)$.

В то же время почти через 20 лет после поставленного Н. Левинсоном [Le40] вопроса Ж.-П. Кахан [Kah59] указал последовательность $\Lambda \subset i\mathbb{R}$ *нулевой верхней плотности*, для которых система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ полна на любом отрезке из $\mathbb{R}$. Уже через год П. Кусис [Koo60] (см. также [Koo92, с. 294]) построил последовательность $\Lambda \subset i\mathbb{N}$ попарно различных чисел *нулевой верхней плотности*, для которой система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ полна на любом отрезке длины $< 2\pi$. Развитие этих примеров, показавших, что теорема 2.1.3 все еще недостаточно учитывает особенности пространств $C[a,b]$ и $L^p(a,b)$, можно найти в обзоре Р. М. Редхеффера [Red74, Теорема 37], где указана также нерешенная на момент его публикации

Проблема 2.1.1. *Для всякой ли возрастающей функции* $b \geqslant 0$ *на* $[1,+\infty)$ *при* $\int_1^\infty b(t)t^{-2}\,\mathrm{d}t = \infty$ *найдется последовательность* $\Lambda \subset i\mathbb{N}$ *попарно различных чисел, для которой* $n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant b(t)$ *при* $t \geqslant 1$, *но система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна на любом отрезке в* $\mathbb{R}$ *длины* $< 2\pi$*?*

Дальнейшая судьба этой проблемы нам неизвестна.

Другой вариант условий и даже критерия полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$, навеянный теоремами Мюнтца–Саса о полноте систем степеней (см. ниже), был предложен Дж. А. Кларксоном и П. Эрдешем [CE43] для *положительных* и Л. Шварцем [Sch43] для *вещественных* последовательностей показателей Λ.

Говорим, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ *отделена от мнимой оси* (*от* $i\mathbb{R}$), если имеет место соотношение

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|\operatorname{Re}\lambda_k|}{|\lambda_k|} > 0\,. \tag{2.1.8}$$

Распространение критерия Кларксона–Эрдеша–Шварца на комплексные показатели в различной степени реализовали Б. Я. Левин [Лев56], У. Люксембург и Я. Кореваар [LK71] (для последовательностей Λ, отделенных от $i\mathbb{R}$), Р. М. Редхеффер [Red68], [Red74, Теорема 41] (для произвольных $\Lambda \subset \mathbb{C}$):

Теорема 2.1.4. *Для полноты системы* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *на* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *или в* $L^p(a,b)$ *необходимо, чтобы расходился ряд* (условие расходимости Бляшке–Мюнтца)

$$\sum_k \frac{1}{1+|\lambda_k|}\,, \tag{2.1.9}$$

и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_k \frac{|\operatorname{Re}\lambda_k|}{1+|\lambda_k|^2}\,. \tag{2.1.10}$$

Перечень условий, эквивалентных расходимости или сходимости ряда (2.1.10), можно найти у Л. Кнокерта [Kn02].

При отделенности Λ от мнимой оси условия расходимости рядов (2.1.9) и (2.1.10) эквивалентны, а теорема 2.1.4 приобретает форму критерия, содержащего, как частный случай, критерий Кларксона–Эрдеша–Шварца для $\Lambda\subset\mathbb{R}$:

Теорема 2.1.5. *Для последовательности $\Lambda\subset\mathbb{C}$, отделенной от мнимой оси, система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ полна на $[a,b]\subset\mathbb{R}$ (в $L^p(a,b)$) тогда и только тогда, когда расходится ряд* (2.1.9).

Некоторую версию теоремы 2.1.5 можно извлечь из препринта Л. К. Л. Ботелхо [Bo99]. Специфическое развитие теоремы 2.1.5 для систем функций $\{f(\lambda_k z)\}$ на отрезке, где f голоморфна в выпуклой области, содержащей отрезок, относительно недавно предложено С. В. Злобиной [Зл99, Теорема]. Некоторые особые условия полноты систем подобного вида с целой функцией f в пространствах $L^p_{\mathrm{d}\mu}(0,1)$ функций с модулем, интегрируемым в p-ой степени по положительной мере μ на интервале $(0,1)$, даны Л. Д. Абреу в [Abr06], но опубликованы им еще в препринте в 2004 г. Сформулируем их здесь вместе.

Пусть заданы две целые функции f и g, представимые в виде

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^{2n},\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n z^{2n},\quad a_n,b_n\in\mathbb{R}^+,$$

с вещественными нулями, а последовательности $\operatorname{Zero}_f\cap\mathbb{R}^+=(\gamma_k)$ и $\operatorname{Zero}_g\cap\mathbb{R}^+=(\lambda_k)$ перенумерованы по возрастанию, $k=1,2,\dots$.

Теорема 2.1.6 ([Abr06, Теоремы 1, 2]). *Если $\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=0$, а функция f порядка <1, или же порядка <2, но дополнительно $\lambda_k\leqslant\gamma_k$ при всех k, то система $\{f(\lambda_k z)\}$ полна в $L^p_{\mathrm{d}\mu}(0,1)$.*

В [Abr06] эта теорема применяется и к вопросам полноты систем специальных функций. Последнее составляет одну из основных тематик монографии Дж. Р. Хиггинса [Hi77].

Для последовательности *вещественных* показателей Λ П. Боруайн и Т. Эрдели [BE98] получили критерии полноты систем степеней $\{x^{\lambda_k}\}$ в пространствах функций на предкомпактных подмножествах из $(0,+\infty)$. Они использовали прямые методы, отличные от двойственных и основанные на тонких неравенствах для конечных комбинаций степеней. Подробнее с этими методами, их истоками и многими дополнительными глубокими результатами, связанными с условием (бес)конечности суммы (2.1.9), можно ознакомиться по их монографии [BE95] и обзору Т. Эрдели [Er05]. Сформулируем два их критерия как утверждения о полноте систем экспонент $\operatorname{Exp}_\Lambda$. В обоих критериях предполагается, что $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — *последовательность попарно различных вещественных чисел*, а *лебегова мера* $X \Subset \mathbb{R}$ *строго положительна.*

Теорема 2.1.7 ([BE98, Теорема 3.4]). *Пусть* $X = \operatorname{clos} X$. *Система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна на* X, *если и только если расходится ряд* (2.1.9).

Измеримая функция $w \geqslant 0$ на $X \Subset \mathbb{R}$, *измеримом по* m, при $p \in (0,+\infty)$ порождает пространство $L^p_w(X)$ с L^p-нормой на X, но с мерой $w\,\mathrm{d}x$ вместо $\mathrm{d}m$ (см. п. 0.1.4 введения).

Теорема 2.1.8 ([BE98, Теорема 3.7]). *Пусть* $w \geqslant 0$ *на* X *и* $\int_X w(x)\,\mathrm{d}x > 0$. *Система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна в* $L^p_w(X)$, $0 < p < +\infty$, *тогда и только тогда, когда расходится ряд* (2.1.9).

По-видимому, открытой остается

Проблема 2.1.2. *Распространить критерии Боруайна–Эрдели, т. е. теоремы* 2.1.7–2.1.8, *на отделенные от мнимой оси последовательности показателей* Λ.

Решение части проблемы 2.1.7 возможно сразу на основе предыдущих результатов. Например, условие расходимости ряда (2.1.10) достаточно для полноты $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на любом компакте в $\mathbb{R}$. Проблема — в доказательстве необходимости.

Отклонение линейных комбинаций системы экспонент (степеней) от аппроксимируемой функции на отрезке исследовали, к примеру, М. фон Голичек [Go75] и Г. Стилл [Sti85].

Серъезный недостаток теорем 2.1.2 и 2.1.3, а также достаточного условия (2.1.10) в теореме 2.1.4 — это бесконечный избыток полноты. Другими словами, из системы экспонент всегда можно удалить бесконечное число функций, не нарушая полноты. К тому же условие расходимости (2.1.10) в теореме 2.1.4 не “чувствует” и длины отрезка $[a, b]$. Исходным пунктом еще одного типа условий полноты на $[a, b]$, в некоторой мере лишенных этих недостатков, является ряд результатов Н. Левинсона [Le40]. Иллюстрирует их здесь только одна

Теорема 2.1.9. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$ *и для* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *характеристика*

$$\limsup_{r\to\infty}\Bigl(N_\Lambda(r) - \frac{d}{\pi}r + \frac{\log r}{p}\Bigr) \tag{2.1.11}$$

$= +\infty$ *при* $p = 1, +\infty$ *или* $\neq -\infty$ *при* $1 < p < +\infty$. *Если* $b-a \leqslant d$, *то система* $\operatorname{Exp}\Lambda$ *полна в* $L^p(a, b)$ *при* $p \in [1, +\infty)$ *и на* $[a, b]$ *при* $p = +\infty$. *В* (2.1.11) *заменить число* p *на меньшее нельзя.*

Подробные комментарии и многочисленные результаты, связанные с теоремами 2.1.4 и 2.1.9 и их вариациями, можно найти в обзоре А. М. Седлецкого [Сед01′, § 1], [Сед03″, § 1] (см. также [Red74], [Сед00], [Сед03]–[Сед03′], [Сед05], [You80], [МПС04]), где проведен и анализ точности теоремы 2.1.9 (см. также статью А. И. Хейфица [Хе68]). В вариациях этих теорем накладываются дополнительные условия на последовательность показателей Λ. Мы же отметим только, что условия теоремы 2.1.9, вообще говоря, “чувствуют” удаление даже одной экспоненты из $\operatorname{Exp}_\Lambda$. Наиболее существенное продвижение по обобщению теоремы Левинсона 2.1.9 осуществлено недавно в совместной работе Н. Г. Макарова и А. Г. Полторацкого [МП05, 2.11].

Теоремы Берлинга–Мальявена

Кульминацией исследований по задаче полноты для систем экспонент на ограниченном интервале (замкнутом или открытом) до сих пор остается знаменитая *теорема Берлинга–Мальявена о радиусе полноты* [BM67]. Приведем ее здесь в интерпретации Р. М. Редхеффера [Red72]. *Плотность Редхеффера* $R_e(\Lambda)$ занумерованной последовательности $\Lambda = (\lambda_k)$ определяем как точную нижнюю грань чисел $c > 0$, для которых существует такая последовательность (m_k) *попарно различных целых чисел*, что

$$\sum_k \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{c}{m_k} \right| < +\infty\,. \tag{2.1.12}$$

Теорема 2.1.10. *При $b-a > 2\pi R_e(\Lambda)$ (соотв. $< 2\pi R_e(\Lambda)$) система $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ полна (соотв. неполна) на $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и в $L^p(a,b)$.*

Другими словами, точная верхняя грань $\rho(\Lambda)$ радиусов отрезков, на которых полна система $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$, равна $\pi R_e(\Lambda)$. Отсюда легко следуют теоремы 2.1.2–2.1.5. Традиционно величина $\rho(\Lambda)$ называется *радиусом полноты* последовательности Λ.

Отметим другие плотности распределения последовательностей Λ, совпадающие с $R_e(\Lambda)$. Они в различном терминологическом обрамлении возникали у авторов, причастных к данной тематике. В основном мы пользуемся терминологией и обозначениями Ж.-П. Кахана из [Kah62], Я. Кореваара из [Kor80] и И. Ф. Красичкова-Терновского из [Кр89].

Пусть пока $\Lambda \subset \mathbb{R}$. *Плотность,* или характеристика, *Кахана* $K_e(\Lambda)$ определяется как точная нижняя грань чисел $a > 0$, для которых найдется возрастающая функция $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $|k(x_2) - k(x_1)| \leqslant a|x_2 - x_1|$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и одновременно ограничению $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{|n_\Lambda^{\mathbb{R}}(t) - k(t)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Плотность, или характеристика, $D_e(\Lambda)$, называемая *эффективной плотностью Берлинга–Мальявена*, имеет более геометрический характер. *Разбиение* вещественной оси на непересекающиеся интервалы $\omega_j \Subset \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$, $\mathbb{R} = \cup_j \omega_j$ называется *тонким*[1], если $d_j = \operatorname{dist}(0, \omega_j) \to +\infty$ при $j \to \infty$ и $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{|\omega_j|^2}{1 + d_j^2} < +\infty$, где $|\omega_j|$ — длина интевала ω_j. *Характеристика* $D_e(\Lambda)$ определяется как точная нижняя грань чисел d, для которых существуют тонкие разбиения $\{\omega_j\}$ со свойством $n_\Lambda(\omega_j) \leqslant d|\omega_j|$, $j = 1, 2, \dots$.

Две последние плотности сразу переносятся на произвольные меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ как плотности $K_e(\nu)$ и $D_e(\nu)$, если в их определениях заменить считающую меру n_Λ на меру ν.

Для переноса определений характеристик $K_e(\Lambda)$ и $D_e(\Lambda)$ на произвольные последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ конечной верхней плот-

---

[1] В [МП05] тонкое разбиение называется коротким или кратким (short).

ности, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\lambda_k\neq 0}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_k}\right| < +\infty, \tag{2.1.13}$$

достаточно по известному приему [BM67] каждой точке λ_k при $\operatorname{Re}\lambda_k \neq 0$ сопоставить вещественное число λ_k^* по правилу

$$\frac{1}{\lambda_k^*} = \operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_k}\,. \tag{2.1.14}$$

Так возникает последовательность $\Lambda^* = \{\lambda_k^*\} \subset \mathbb{R}$. После этого полагаем $K_e(\Lambda) := K_e(\Lambda^*)$ и $D_e(\Lambda) := D_e(\Lambda^*)$. Справедливы равенства $R_e(\Lambda) = K_e(\Lambda) = D_e(\Lambda)$ и эта цепочка может быть продолжена другими плотностями. Доказательства этих равенств включались как составная часть в доказательства самой теоремы о радиусе полноты, в связи с чем Я. Кореваaром в [Kor80, 6, Вопрос 1] была сформулирована задача непосредственного доказательства совпадения этих и других плотностей. Окончательно она была решена И. Ф. Красичковым-Терновским [Кр89] для семи различных плотностей, включая приведенные.

Доказательства теоремы 2.1.10, в большей или меньшей степени являющиеся вариациями оригинального из [BM67], можно найти у Ж.-П. Кахана [Kah62], Я. Корevaара [Kor80], Р. М. Редхеффера [Red72], [Red74], И. Ф. Красичкова-Терновского [Кр89], В. П. Хавина и Б. Ёрикке [ХJ94]. Несколько различных новых доказательств дал П. Кусис [Koo83], [Koo88]–[Koo92], [Koo96]. Методом выметания теорема 2.1.10 доказана в работе Б. Н. Хабибуллина [Хаб94] (см. также [Koo96, гл. III]). В фундаментальной работе Н. Г. Макарова и А. Г. Полторацкого [МП05, 4.4–5] дан принципиально новый подход к доказательству теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты, основанный на исследовании ядер специальных операторов Теплица. Все эти доказательства используют другую глубокую и не менее блестящую *теорему Берлинга–Мальявена о мультипликаторе* [BM62], многократно передоказывавшуюся различными способами (см. статью П. Мальявена [Mal79], книги Л. де Бранжа [Br68], П. Кусиса [Koo88]–[Koo92], [Koo96], [Koo98], В. П. Хавина и Б. Ёрикке [ХJ94] и, возможно, наиболее естественное и относительно краткое вещественное доказательство из совместной обзорной статьи Дж. Машреги, Ф. Л. Назарова и В. П. Хавина [MHX04]). Один из ее вариантов —

Теорема 2.1.11. *Пусть* f *— ц.ф.э.т. в* $\mathbb{C}$*. Для существования при любом* $\sigma > 0$ *ц.ф.э.т.* $\varphi \not\equiv 0$ *из пространства Бернштейна* B_σ^∞*, с которой модуль произведения* $f\varphi$ *ограничен на* $\mathbb{R}$*, необходимо и достаточно, чтобы функция* f *принадлежала классу Картрайт, т. е. выполнялось условие* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < +\infty$*.*

Отсюда сразу следует условие полноты в терминах ц.ф.э.т.:

Теорема 2.1.12. *Пусть* f *— ц.ф.э.т. класса Картрайт с индикатором роста* h_f*. Если* $\mathrm{Zero}_f \subset \Lambda$*, то система* $\mathrm{Exp}_{i\Lambda}$ *полна на отрезке* $[a,b]$ *и в* $L^p(a,b)$ *при условии* $b-a < h_f(\pi/2) - h_f(-\pi/2)$*. Обратно, если* $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_f$*, то система* $\mathrm{Exp}_{i\Lambda}$ *неполна на* $[a,b]$ *и в* $L^p(a,b)$ *при* $b-a > h_f(\pi/2) - h_f(-\pi/2)$*.*

Обзор ряда других условий полноты на отрезке в терминах порождающей функции содержится в [Red74], [Сед01′, § 1, 1.2], [Сед03″, § 1, 1.2], [Сед05].

Отметим, что теоремы Берлинга–Мальявена 2.1.10 и 2.1.11 эквивалентны в том смысле, что пока нет доказательств теоремы о радиусе полноты без привлечения теоремы о мультипликаторе, а теорема о мультипликаторе сама может быть выведена с некоторыми сокращениями из теоремы о радиусе полноты.

В свое время Р. М. Редхеффер [Red72], [Red74] выдвинул задачу элементарного (в разумном смысле) прямого доказательства теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты без использования теоремы 2.1.11 о мультипликаторе. При этом доказательство необходимости в теореме 2.1.10 в варианте, предложенном П. Кусисом [Koo92], [Koo96, IIC1] и основанном на формуле Йенсена для эллипсов, можно уже признать элементарным. Основные трудности — в доказательстве достаточности. По-видимому, доказательство достаточности в теореме 2.1.10 можно рассматривать как элементарное, если даже в нем будет использована “начальная” теорема о мультипликаторе, восходящая к Р. Пэли и Н. Винеру, а также к А. Е. Ингаму, 1934 г. (см. [Red74, Теорема 38]): *если для возрас-*

тающей функции $M\colon \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty)$ *выполнено условие*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log M(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty, \qquad (2.1.15)$$

то для любого $\sigma > 0$ *найдется такая ненулевая ц.ф.э.т.* $\varphi \in B_\sigma^\infty$, *что произведение* $M\bigl(|x|\bigr)|\varphi(x)|$ *также ограничено на* $\mathbb{R}$.

Аналог теоремы 2.1.10 для случайных последовательностей показателей Ξ системы Exp_Ξ в вероятностном обрамлении — основной результат работы К. Сейпа и А. М. Улановского:

Теорема 2.1.13 ([SU97, Теорема]). *Пусть* $\Xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *— последовательность независимых случайных величин на* $\mathbb{R}$ *и* $\nu_\Xi := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu_n$ *— мера на* $\mathbb{R}$, *где меры* ν_n *определены через функцию распределения* $\nu^{\mathbb{R}}(x) := \mathbf{P}(\xi_n < x)$ *случайной величины* ξ_n. *Тогда почти наверное* $\rho(\Xi) = \pi D_e(\nu)$.

Взаимосвязи теорем Берлинга–Мальявена с другими вопросами анализа можно проследить по обзору Ж.-П. Кахана [Kah62, Теоремы II, IV, Проблема 3°], по монографии П. Кусиса [Koo92], по краткому обзору П. Мальявена [Mal97], по обзору Дж. Машреги, Ф. Л. Назарова и В. П. Хавина [MHX04]), по работе Н. Г. Макарова и А. Г. Полторацкого [МП05].

В отличие от теорем 2.1.10 и 2.1.12 в отношении полноты системы экспонент с показателями из $i\mathbb{R}$ на несвязном компакте (объединении отрезков) рассмотренные выше плотности, вообще говоря, неинформативны. Этот несколько неожиданный факт следует из результатов Х. Дж. Ландау:

Теорема 2.1.14 ([La64]–[La72]). *Для любого числа* $\delta > 0$ *найдется последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, *удовлетворяющая условию* $|\lambda_k - k| < \delta$, *для которой система* $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ *при любом* $\varepsilon > 0$ *полна на каждом конечном объединении отрезков* $[(2m-1)\pi + \varepsilon, (2m+1)\pi - \varepsilon]$, $m \in \mathbb{Z}$.

Если f *— сужение на интервал* $(-\pi, \pi)$ *некоторой голоморфной в окрестности* $\mathbb{R}$ *функции с сужением на* $\mathbb{R}$ *из класса* $L^1(\mathbb{R})$, *а* Λ *— последовательность нулей функции* F, *полученной из функции* f *как в* (2.1.2) *при* $a = -\pi$ *и* $b = \pi$, *то система* $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ *при любом* $\varepsilon > 0$ *полна на объединении* $[-2\pi + \varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

Заметим, что все рассматривавшиеся плотности для последовательностей Λ из теоремы 2.1.14 не больше единицы. При этом суммарная длина объединения отрезков в первом утверждении теоремы 2.1.14 может быть сколь угодно большой, а во втором — сколь угодно близкой к 4π, что в два раза превышает критическое значение, диктуемое теоремой 2.1.12 для отрезка.

В то же время для произвольных измеримых по мере Лебега подмножеств $A \subset [-\pi, \pi]$ в определенном смысле возможно достижение критического значения.

Теорема 2.1.15 (Р. Лионс [Ly03, Следствие 7.14]). *Для любого измеримого подмножества $A \subset [-\pi, \pi]$ лебеговой меры $m(A)$ найдется подпоследовательность $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, для которой имеет место равенство $2\pi R_e(\Lambda) = m(A)$ и система $\mathrm{Exp}_{i\Lambda}$ полна в $L^2(A)$.*

На самом деле Р. Лионс в [Ly03, Следствие 7.14] методами теории вероятности доказывает, что таких Λ много в том смысле, что для специальной детерминантной вероятностной меры $\mathbf{P}^A$ на подпоследовательностях из $\mathbb{Z}$, заданной через некоторую матрицу Теплица, построенную по A, свойством, описанным в теореме, каждая последовательность $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ обладает $\mathbf{P}^A$-почти наверное.

Основные проблемы

И все же остается нерешенной ключевая

Проблема 2.1.3. *Найти критерий полноты системы Exp_Λ в пространствах $C[a, b]$ или $L^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$ (в каждом отдельно или во всех одновременно), в терминах распределения последовательности Λ и длины интервала $b - a$.*

Получения критерия полноты системы Exp_Λ на отрезке или в $L^p(a, b)$, как не раз отмечалось (см. [Кр86], [ХНП81], [Koo92, с. 167], [МНХ04, 3.3], [МП05, 0.1, стр. 2]), представляется исключительно трудной задачей даже при *условии разделенности*

$$\inf_{k \neq k'} |\lambda_k - \lambda_{k'}| > 0 \tag{2.1.16}$$

и(или) расположении Λ только на мнимой оси $i\mathbb{R}$. Часть этой проблемы (необходимые условия неполноты) была сформулирована Я. Кореваaром в [Kor80, 6, Вопрос 2] фактически как задача поиска более тонких характеристик распределения нулей ц.ф.э.т. вида (2.1.1) и (2.1.2), чем поставляемые вариантами плотностей, связанными с теоремой Берлинга–Мальявена о радиусе полноты. Даже эта проблема во многом terra incognita.

С проблемой 2.1.3 при аналитическом подходе тесно связана и

Проблема 2.1.4. *Дать внутреннее описание классов ц.ф.э.т., задаваемых в виде* (2.1.1) *и* (2.1.2).

Если в случае $p = 2$ и $[a, b] = [-\sigma, \sigma]$ такое полное описание как класса всех ц.ф.э.т. $F \in B^2_\sigma$ обеспечивает теорема Пэли–Винера, то при других значениях p и для случая (2.1.1) какое-либо удовлетворительное описание неизвестно. Например, условия принадлежности классу Бернштейна B^∞_σ недостаточно. Некоторая общая схема построения контрпримеров по последнему поводу изложена в работе А. М. Седлецкого [Сед97]. Для случая $1 < p < 2$ полное решение в определенном смысле обратной задачи об описании всех ц.ф.э.т. F класса B^p_σ в терминах коэффициентов Фурье, представляющих их в виде (2.1.2) функций $f \in L^q(-\sigma, \sigma)$, дано Л. С. Маергойзом в [Mae05, Теорема 1].

В очередной раз подчеркивают сложность проблем 2.1.3 и 2.1.4 статьи У. Уолкера [Wa91], Р. Эстрады [Es92], А. А. Кондратюка и Ю. Ф. Коробейника [KK92] и Дж. Клуни, К. И. Рахмана и У. Уолкера [CRW00, Теорема 3] вместе с библиографией из них, устанавливающие специфические свойства распределения нулей функций (2.1.1) и (2.1.2). Некоторые из них допускают переформулировку в виде условий полноты систем экспонент на отрезке:

Теорема 2.1.16 ([KK92, Теорема 4]). *Пусть для последовательности* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *выполнены условия* $0 \notin \operatorname{Re} \Lambda$, $\sup\limits_k \operatorname{Re} \lambda_k = +\infty$, $\inf\limits_k \operatorname{Re} \lambda_k = -\infty$, *а последовательность* $\{\lambda^*_k\}$ *построена по правилу* (2.1.14). *Тогда если расстояние между каждой парой соседних точек* λ^*_k *меньше* (*соотв. не превосходит*) 1, *то система* $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ *полна на отрезке* $[-\pi, \pi]$ (*соотв. в* $L^p(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p < +\infty$, *а после дополнения одной функцией* $e^{i\lambda x}$, $\lambda \notin \Lambda$, *и на* $[-\pi, \pi]$).

В контрасте с множествами неединственности неожиданно простое полное описание нулевых множеств для B^∞_σ и для класса Картрайт получено в 2005 году элементарными методами.

Теорема 2.1.17 (С. Ю. Фаворов [Фа08, Теоремы 1 и 2])**.** *Последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$, *совпадает с последовательностью нулей* Zero_f *некоторой функции* $f \in B^\infty_\sigma$, *если и только если выполнены следующие условия:*

$$\text{существует } \lim_{r\to+\infty} \sum_{0<|\lambda_k|<r} \frac{1}{\lambda_k} \in \mathbb{C}, \tag{2.1.17l}$$

$$n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t) = O(t), \quad t \to +\infty, \tag{2.1.17d}$$

$$n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t+1) - n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t) = o(t), \quad t \to +\infty, \tag{2.1.17n}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \frac{n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t) - n_\Lambda(x,t)}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty, \tag{2.1.17b}$$

$$\limsup_{y\to\pm\infty} \int_0^{\infty} \frac{n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t) - n_\Lambda(iy,t)}{t|y|}\,\mathrm{d}t \leqslant \sigma. \tag{2.1.17t}$$

Если здесь вместо (2.1.17b) *подставить*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t) - n_\Lambda(x,t)}{t}\,\mathrm{d}t \right)^{+} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} < +\infty,$$

оставив условия (2.1.17l), (2.1.17d), (2.1.17n) *и* (2.1.17t) *неизменными, то это критерий совпадения* Λ *с последовательностью* Zero_f *некоторой функции* f *из класса Картрайт типа* $\leqslant \sigma$.

Доказательство следует из представления С. Ю. Фаворова

$$\log|f(z)| = \int_0^{\infty} \frac{n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t) - n_\Lambda(z,t)}{t}\,\mathrm{d}t \pm \mathrm{const}.\operatorname{Im} z\,, \quad z \in \mathbb{C},$$

для функций f из класса Картрайт.

Теорема Фаворова 2.1.17 применительно к описанию множеств единственности утверждает лишь, что последовательность Λ — множество единственности (соотв. неединственности) для B^∞_σ в том и только том случае, когда нельзя (соотв. можно) подобрать последовательность, включающую в себя Λ и удовлетворяющую условиям (2.1.17). Однако она не дает "рецепта" проверки этой возможности, который формулировался бы исключительно в терминах самой последовательности Λ. Это еще раз подчеркивает, что проблема описания нулевых множеств и описания множеств (не)единственности для одного и того же класса функций — это, вообще говоря, разные, хотя и родственные задачи. Теорему 2.1.17

можно рассматривать как определенное продвижение по задаче Я. Кореваара [Kor80, 6, Вопрос 2], обсуждавшейся выше перед проблемой 2.1.4. Для класса Картрайт известна также

Теорема 2.1.18 ([МП05, 3.3, Пример]). *Последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *— последовательность нулей некоторой ц.ф.э.т.* f *класса Картрайт с индикатором роста* $h_f(\pi/2) - h_f(-\pi/2) = 2\pi\sigma$, *если и только если для некоторой функции* $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *с ограничением* $\int_{-\infty}^{+\infty} |q(t)|(1+t^2)^{-1}\,\mathrm{d}t < \infty$ *имеем* $n_\Lambda^{\mathbb{R}}(x) = \sigma x + \tilde{q}(x)$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$, *где* $\tilde{q}$ *— преобразование Гильберта вида*

$$\tilde{q}(x) := \frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2}\right) q(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Применение метода выметания

Тем не менее определенная форма достаточных условий полноты системы Exp_Λ на отрезке, которые стыкуются с необходимыми с точностью до одной экспоненты, возможна [Хаб91″]. Предварим ее законченным описанием множеств единственности для пространства Бернштейна B_σ^∞ (о классах (J1)–(J3) см. п. 1.2.2).

Теорема 2.1.19 ([Хаб91″]). $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *— множество единственности для* B_σ^∞ *тогда и только тогда, когда величина*

$$\sup_{V \in \mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})} \Bigl(\sum_k V(\lambda_k) - \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V(iy)\,\mathrm{d}y\Bigr) \tag{2.1.18}$$

равна $+\infty$. *Класс всех функций Йенсена* $\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$ *в* (2.1.18) *можно заменить на любой из* (J1)–(J3), *к примеру, на класс функций Грина* $\mathcal{G}_0^{\mathrm{reg}}(\Omega)$ *или на класс функций вида* (1.2.9) *по аналитическим дискам* g *или по полиномиальным дискам* g.

Из теоремы 2.1.19 по теореме 2.1.1 следует

Теорема 2.1.20 (Хабибуллин Б. Н. [Хаб91″, Теорема 7]). *Если величина* (2.1.18) $= +\infty$, *то система* Exp_Λ *полна на* $[-\sigma, \sigma]$ *и в* $L^p(-\sigma, \sigma)$ *при* $1 \leqslant p < +\infty$. *Если эта величина* $< +\infty$, *то для* $\{\lambda', \lambda''\} \subset \Lambda$ *система* $\mathrm{Exp}_{\Lambda\setminus\{\lambda'\}}$ *неполна на* $[-\sigma, \sigma]$ *и в* $L^p(-\sigma, \sigma)$ *при* $2 \leqslant p < +\infty$, *а система* $\mathrm{Exp}_{\Lambda\setminus\{\lambda',\lambda''\}}$ *неполна в* $L^p(-\sigma, \sigma)$ *при* $1 \leqslant p < 2$. *Последнее предложение теоремы* 2.1.19 *о возможностях сужения класса* $\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$ *в* (2.1.18) *остается в силе.*

Совсем недавно в 2010 г. нам удалось удалить функции Йенсена или их подклассы в критерии 2.1.19. Для этого будут использованы преобразования Пуассона и, прежде всего, Гильберта.

Для новой формулировки полного описания последовательностей (не)единственности для B_σ^∞ потребуется специальный *класс тестовых* (основных) *функций* $\mathcal{P}_0^\infty$, состоящий из всех *положительных бесконечно дифференцируемых функций*

$$p\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to[0,+\infty)$$

с *условием финитности*

$$p(x)\equiv 0 \text{ при } |x|\geqslant \mathrm{const.}>0, \tag{2.1.19}$$

где const. зависит от p, и обладающих ещё и следующими двумя свойствами:

1) имеет место *условие нормировки*

$$\limsup_{t\to 0}\frac{p(t)}{-\log|t|}=1; \tag{2.1.20}$$

2) выполнено *сопряженное условие положительности*

$$⨍_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\frac{p(t)-p(x)}{(t-x)^2}\,\mathrm{d}t\geqslant 0 \text{ для всех } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{2.1.21}$$

где“перечеркнутый” интеграл используется здесь и далее для обозначения главного значения интеграла в смысле Коши.

Будут использованы значения в точках λ_k *интеграла Пуассона* $\mathrm{P}_{\pm\mathbb{C}}\,p$ от функции $p\in\mathcal{P}_0^\infty$

$$(\mathrm{P}_{\pm\mathbb{C}}p)(\lambda):=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\mathrm{Im}\,\lambda|}{(t-\mathrm{Re}\,\lambda)^2+(\mathrm{Im}\,\lambda)^2}\,p(t)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}\,\lambda\neq 0, \tag{2.1.22}$$

в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbb{C}^+:=\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Im}\,z>0\}$ и $\mathbb{C}^-:=\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Im}\,z<0\}$, который для $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ полагаем равным значению в точке λ функции $p\in\mathcal{P}_0^\infty$, т. е.

$$(\mathrm{P}_{\pm\mathbb{C}}p)(\lambda):=p(\lambda) \text{ при } \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Теорема 2.1.21. (анонс в печати „Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум." Т. 4. 2010). *Последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \not\ni 0$ *— последовательность единственности для пространства* B^∞_σ*, если и только если*

$$\sup_{p\in\mathcal{P}^\infty_0}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{P}_{\pm\mathbb{C}}p)(\lambda_k) - \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,\mathrm{d}t\right) = +\infty. \tag{2.1.23}$$

Вследствие условия нормировки (2.1.20) никаких проблем со сходимостью интеграла Пуассона (2.1.22) в нуле не возникает. Кроме того, ограничение $0 \notin \Lambda$ не умаляет общности критерия, поскольку любые сдвиги любого конечного числа точек из Λ не меняют его свойства быть или не быть последовательностью (не)единственности (см. выше).

В случае вещественной последовательности $\Lambda \not\ni 0$ имеем

Следствие 2.1.1. *Последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $0 \notin \Lambda$, *— последовательность единственности для* B^∞_σ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{p\in\mathcal{P}^\infty_0}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}p(\lambda) - \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,\mathrm{d}t\right) = +\infty. \tag{2.1.24}$$

Обсуждавшиеся выше условия полноты систем экспонент в терминах последовательностей (не)единственности для пространства B^∞_σ дают

Следствие 2.1.2. *Если для последовательности точек* $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$, *выполнено условие* (2.1.23) *или при ограничении* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *условие* (2.1.24), *то система* $\mathrm{Exp}_{i\Lambda}$ *полна на любом отрезке* $I_{2\sigma}$ *длины* 2σ *и в любом пространстве* $L^p(I_{2\sigma})$. *Обратно, если левая часть в* (2.1.23) *или при дополнительном ограничении* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *в* (2.1.24) *конечна, то для любой пары точек* $\{\lambda', \lambda''\} \subset \Lambda$ *система* $\mathrm{Exp}^{i\Lambda\setminus\{i\lambda'\}}$ *не полна на отрезке* $I_{2\sigma}$ *и в пространствах* $L^p(I_{2\sigma})$ *при* $p \geqslant 2$, *а система* $\mathrm{Exp}_{i\Lambda\setminus\{i\lambda', i\lambda''\}}$ *— в пространствах* $L^p(I_{2\sigma})$ *при* $1 \leqslant p < 2$.

Из формулировок теоремы 2.1.21 и ее следствий видно, что любая замена класса тестовых функций $\mathcal{P}^\infty_0$ на бóльший класс при условии сохранения формулировок теоремы 2.1.21 и ее следствия позволяет расширить множество достаточных условий для последовательностей единственности и для полноты систем экспонент, а его уменьшение сужает множество достаточных условий для последовательностей неединственности или облегчает проверку того, что система экспонент имеет избыток $\leqslant 0$ или $\leqslant 1$ (см. выше). Расширение класса тестовых функций $\mathcal{P}_0^\infty$ не составляет особого труда, чего нельзя сказать об его сужении.

Для расширения класса $\mathcal{P}_0^\infty$ пользуемся классическим *преобразованием Гильберта* H_0, действующим на произвольные функции $p \in L^1(\mathbb{R})$ по правилу

$$(\mathrm{H}_0 p)(x) := \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{p(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t.$$

Класс $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0^\infty$ – это все *положительные непрерывные функции*

$$p\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to [0,+\infty), \quad p \in L^1(\mathbb{R}),$$

с *условием нормировки* (2.1.20), удовлетворяющие *сопряженному условию монотонности:* преобразование Гильберта $\mathrm{H}_0 p$ определено и конечно всюду на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и является *убывающей функцией на* $(0,+\infty)$ *и на* $(-\infty,0)$. Теорема 2.1.21 и следствия из неё остаются в силе и после замены в их формулировках класса $\mathcal{P}_0^\infty$ на более широкий класс $\mathcal{P}$.

Задача уменьшения тестового класса $\mathcal{P}_0^\infty$ гораздо более деликатная. Здесь возможно комбинирование двух близких подходов: описание экстремальных элементов для классов $\mathcal{P}_0^\infty$ и(или) $\mathcal{P}$, а также подбор подклассов в этих классах, выпуклые комбинации функций из которых плотны в $\mathcal{P}_0^\infty$ или $\mathcal{P}$ в подходящей топологии.

Доказательства приведенной теоремы 2.1.21 и следствий существенно опираются на теоремы 2.1.19 и 2.1.20.

Теорема 2.1.20, наряду с новым доказательством в [Хаб94] теоремы Берлинга–Мальявена 2.1.10 о радиусе полноты, также позволяет дать новое краткое

Доказательство теоремы 2.1.5. Из неполноты системы Exp_Λ на основе теоремы 2.1.1 и формулы Карлемана[2] для правой и левой полуплоскостей (см. [Лев56], [Хаб88, Теорема 1]) легко следует

---

[2] В свете замечания в конце подраздела 1.2 эта формула вполне вписывается в метод выметания.

сходимость ряда (2.1.10), а в силу условия (2.1.8) и ряда (2.1.9), что дает элементарное доказательство достаточности.

Докажем необходимость от противного. Предположим, что ряд (2.1.9) сходится. Тогда ввиду отделенности от $i\mathbb{R}$ при некотором $\delta > 0$ для заданного $\varepsilon > 0$, отбрасывая конечное число членов из Λ, можно считать, что

$$|\operatorname{Re}\lambda_k| \geqslant \delta|\lambda_k|, \qquad \sum_k \frac{1}{|\ \lambda_k\ |} \leqslant \varepsilon\delta. \tag{2.1.25}$$

Из субгармоничности функций Йенсена V вне нуля и “слабой” логарифмической особенности в нуле (см. определение 1.2.2) следует оценка сверху функций V через гармоническое продолжение с $i\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$, т.е. через интеграл Пуассона, а именно:

$$V(\lambda_k) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_k - iy}\right| V(iy)\,\mathrm{d}y. \tag{2.1.26}$$

Из первого условия в (2.1.25) следует $|\lambda_k - iy| \geqslant \delta|\lambda_k|$, $y \in \mathbb{R}$, откуда согласно (2.1.26) и ограничению сверху на сумму в (2.1.25)

$$\begin{aligned}\sum V(\lambda_k) &\leqslant \sum \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|\lambda_k - iy|}V(iy)\,\mathrm{d}y\\ &\leqslant \left(\frac{1}{\pi\delta}\sum\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}V(iy)\,dy \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}V(iy)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 2.1.20 система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ неполна на отрезке $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$, так как присоединение или удаление конечного числа экспонент не влияет на радиус полноты. ●

На основе оценок Мацаева–Островского–Содина из [MOC02] метод выметания позволяет дать новое доказательство начальной теоремы Пэли–Винера–Ингама о мультипликаторе (см. формулировку при (2.1.15)), а также обобщить ее (см. [Ха604′]) на целые функции порядка $\rho \in (1, 2]$. Впрочем, эти обобщения для произвольного $\rho \geqslant 1$, полученные конструктивными методами, содержались в гораздо более ранних работах Р. М. Редхеффера [Red57], [Red74, Теорема 39], С. Мандельбройта [Man63], И. Кацнельсона и С. Мандельбройта [KM63], [KM65] (см. также обзоры [Red74, Теорема 40] и [ГЛО91, § 2]).

2.1.2 Полнота на замкнутом луче и его подмножествах

Задача полноты системы экспонент на лучах вида $[a, +\infty]$ и $[-\infty, b]$ или в $L^p(a, +\infty)$ и $L^p(-\infty, b)$ простой заменой сводится к проблеме полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на расширенной положительной полуоси $[0, +\infty]$ или в $L^p(0, +\infty)$. При этом очевидно требование включения последовательности Λ в открытую левую полуплоскость $\mathbb{C}_-$ (пишем $\operatorname{Re}\Lambda < 0$), а аналогом теоремы 2.1.1 является

Теорема 2.1.22. *Система экспонент* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *неполна на* $[0, +\infty]$ *(в* $L^p(0, +\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$*), если и только если найдется ненулевая функция* $F \in H(\mathbb{C}_-)$ *вида* (2.1.1) *(соотв. вида* (2.1.2)*) с* $a = 0$ *и* $b = +\infty$*, обращающаяся в нуль на* Λ.

Вещественные показатели

Отправной пункт исследования полноты систем экспонент на $[0, +\infty]$ — знаменитая теорема Мюнтца [Mü14, Satz, с. 304], дающая для строго *возрастающей* последовательностью попарно различных показателей $\Lambda = (\lambda_k) > 0$ критерий полноты системы степеней $\{x^{\lambda_k}\}$ на $[0, 1]$. Спустя два года аналогичный критерий был отмечен О. Сасом [Sz16] для пространства $L^2(0, 1)$. После замены $z = -\log x$ эти результаты допускают эквивалентную “экспоненциальную” трактовку.

В экспоненциальном варианте теорема Мюнтца–Саса утверждает, что *для последовательности* $\Lambda = \{\lambda_k\} < 0$ *при условии* $\sup \Lambda < 0$ *система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна на* $[0, +\infty]$ *(в* $L^2(0, +\infty)$*) тогда и только тогда, когда расходится ряд* (2.1.9).

Окончательный вариант теоремы Мюнтца–Саса для последовательности показателей $\Lambda < 0$ впервые в полном объеме доказан М. Грамом [Gr56], [Gr57] аналитическими методами, но сформулирован он был еще в 1943 году Л. Шварцем в [Sch43] с неполным доказательством (см. также комментарии в [Сед03′, Примечания и дополнения к гл. 9], [Сед05], [Сед03″], [МПС04, § 3]).

Теорема 2.1.23 (М. Грам [Gr56]). *Пусть*[3] $\Lambda = \{\lambda_k\} < 0$. *Система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна на* $[0, +\infty]$ *(в* $L^p(0, +\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$*), если*

---

[3] Для последовательности Λ *допускается предельная точка* 0.

и только если расходится ряд (2.1.10).

Теоремы типа Мюнтца–Саса многократно передоказывалась разнообразными вещественными, аналитическими и др. методами. Обширный и достаточно полный список работ и авторов, причастных к этому, может быть составлен на основе библиографии из монографий А. М. Седлецкого [Сед00], [Сед01′], [Сед03″], [Сед03′], [Сед05], трудов П. Боруайна и Т. Эрдели [BE95], [BE96], [BE98], [Er05], обзора А. Пинкуса [Pin04]. Отметим здесь доказательства В. Форста [Fo70], У. Рудина [Rud70, Теорема 15.26] (функционально-аналитический метод), Р. П. Фейнермана и Д. Дж. Ньюмена [FN75, гл. X], Ф. Дж. Дэвиса [Dav75], М. фон Голичека [Go83] (очень краткое конструктивное доказательство достаточного условия полноты), Л. К. Дж. Роджерса [Rog81] (теоретико-вероятностный подход), Р. Б. Беркела и С. Сейки [BS83]. Различные специальные версии и обобщения теоремы Мюнтца–Саса рассматривали Л. Б. О. Фергюсон и М. фон Голичек [FG75, Теорема 2], Л. Б. О. Фергюсон [Fer80] (аппроксимация линейными комбинациями с *целыми коэффициентами* — диофантова аппроксимация), Дж. С. Хванг, К. С. Пан и Л. С. Ву [HPW78], С. Такахаси [Tak80], Дж. С. Хванг и Г. Д. Лин [HwL78] (полнота систем вида $\{f^{n_k}\}$, $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, на отрезке и в $L^1(a, b)$), Г. В. Харутунян [Har00] (аппроксимация на отрезке линейными комбинациями экспонент, коэффициенты которых — из заданной возрастающей последовательности положительных чисел), Х. М. Алмира и У. Лутер [AL02], Х. М. Алмира, Н. Дель Торо и Х. Ходар [ADJ02], Х. М. Алмира, Н. Дель Торо и А. Х. Лопес-Морено [ADL04] и др. (аппроксимация “урезанными” линейными комбинациями экспонент, диофантова аппроксимация такими комбинациями, а также аппроксимация функций на отрезке одновременно вместе с ее несколькими производными в естественных топологиях).

Имеется немало работ по приложениям теорем типа Мюнтца–Саса и их взаимосвязям с разнообразными вопросами анализа: В. Феллер [Fel68], Б. Дж. К. Бекстер и А. Изерлес [BI97] (связь с вполне монотонными функциями), Дж. С. Хванг [Hw78, 4,5] (приложения к порядковой статистике), Э. Хлавка [Hl86] (применения в теории чисел), А. Дж. Дюран [Dur97, Теорема 4.1] (связь с проблемой моментов и обобщение на пространство распределений), П. С. Бурдон [Bou97], а также Г. А. Чакон, Г. Р. Чакон и Х. Хименес [CCG05] (ортогональность последовательности степеней ограниченной голоморфной функции в пространствах функций в круге), М. Дж. Крабб, Дж. Дункан, К. М. МакГрегор и Т. Дж. Рансфорд [CDGR01] (применения в теории банаховых алгебр), М. Гилленберг, А. Осипов и Л. Пеиверинта [GOP02] (демография: динамика популяций) и др.

По-видимому, существенное различие в методах и подходах иногда приводило исследователей к недостаточной информированности о достижениях других математиков. Так, частные случаи теоремы Грама 2.1.23 о полноте на $[0,+\infty]$ и в $L^p(0,+\infty)$, $p=1,2$, передоказывались П. Боруайном и Т. Эрдели [BE95, 4.2], [BE96, Теоремы 2.1–2.3] в “степенной” трактовке как новые результаты почти через 40 лет после их доказательства аналитическим методом, а случай произвольного $p \geqslant 1$ формулировался П. Боруайном и Т. Эрдели [BE96, Гипотеза 2.4] как гипотеза, которая доказывалась В. Оперштейном [Op96] также как новая теорема. В основу их методов были положены более или менее прямые конструктивные подходы (большей частью вещественной природы), основанные на специальных тонких оценках полиномов. Эти методы в конце концов позволили получить наиболее полные и законченные в определенной степени обобщения теоремы 2.1.23 для *вещественных* показателей Λ в случае пространств $L^p(0,+\infty)$.

Теорема 2.1.24 (Т. Эрдели, У. Джонсон [ErJ01], [Er05], [Er05′]). *Пусть* $\Lambda < 0$ *— последовательность попарно различных чисел. Теорема Грама* 2.1.23 *справедлива в* $L^p(0,+\infty)$ *при всех значениях* $p > 0$. *Более того, при условиях* $A = \operatorname{clos} A \subset [0,+\infty]$ *и* $\liminf\limits_{T\to+\infty} e^T \int_{A\cap[T,+\infty)} e^{-x}\,dx > 0$ *полнота системы* Exp_Λ *в* $L^p(A)$, $0 < p < +\infty$, *эквивалентна расходимости ряда* (2.1.10).

Здесь не обсуждается аналитическая продолжаемость функций из $\overline{\operatorname{span}}\,\mathrm{Exp}_\Lambda$ для неполных систем Exp_Λ (см. [BE96], [Er03]–[Er05′]).

Отмеченная выше неинформированность также ярко проявилась и в исследованиях по проблематике

Теорема Мюнтца на счетном множестве

Пусть здесь Λ — последовательность *попарно различных вещественных* чисел. Если $X \subset \mathbb{R}$ — *конечное* множество, то аналог теоремы Мюнтца[4] на X тривиально следует из решения специальной системы линейных уравнений по правилу Крамера: (*каждая функция на* X *совпадает с сужением на* X *некоторой линейной комбинации функций из* Exp_Λ)$\Longleftrightarrow$(*система* $\mathrm{Exp}\,\Lambda$ *полна на* X)$\Longleftrightarrow$(*число точек в* Λ *не меньше числа точек в* X). Вызывает некоторое недоразумение, что в работе Дж. В. Петерса [Pet83, Теорема 1] этот факт подавался как теорема.

Случай *счетного* (бесконечного) X не столь тривиален. Как и во введении, если подпоследовательность точек из X стремиться к $+\infty$, то далее полнота на X означает полноту в пространстве непрерывных на X функций, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$, $x \in X$. По-видимому, впервые аналог теоремы Мюнтца для таких X рассмотрел А. А. Вагаршакян:

Теорема 2.1.25 ([Ваг77, Теоремы 1 и 2]). *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^+$ — *счетное замкнутое множество, не содержащее строго убывающей последовательности. При* $\inf \Lambda > 0$ *система* $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ *полна на* X*, если и только если* Λ — *бесконечная последовательность.*

Напротив, если в счетном замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^+$ *можно выделить строго убывающую последовательность точек, то всегда возможно построение такой последовательности* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}^+$*, что* $\lambda_k \to +\infty$ *и система* $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ *неполна на* X*.*

Однако через семь лет после опубликования статьи А. А. Вагаршакяна в работе Дж. В. Петерса [Pet83, Теорема 2] предпринята попытка доказать (без ссылок на [Ваг77, Теоремы 1 и 2] и с легко обнаруживаемым дефектом в доказательстве) результат о справедливости первой части теоремы 2.1.25 без каких-либо дополнительных условий на X, что противоречит ее второй части.

Отметим попутно, что в [Ваг77, Теоремы 3 и 4] содержатся также точные результаты-критерии типа теоремы Мюнтца–Саса для систем $\{e^{-\lambda_k x}/(1+x)^\alpha\}$, $k = 1, 2, \dots$, $\mathrm{Re}\,\lambda_k > 0$, в пространствах

---

[4] Здесь используется не степенная (полиномиальная), а только эквивалентная ей экспоненциальная трактовка.

$C_0[0,+\infty]$ и $L^p(0,+\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$, при $\alpha \geqslant 1$ для $C_0[0,+\infty]$ и $\alpha > 1 + 1/p$ для $L^p(0,+\infty)$.

Относительно недавно некоторые результаты по теореме Мюнтца на счетном множестве обсуждались в тезисах Х. М. Алмиры [Alm03], где, в частности, анонсировано первое утверждение теоремы 2.1.25 без условия $\inf \Lambda > 0$ (кстати, тоже без упоминания работы А. А. Вагаршакяна), а также приведены некоторые дополнительные результаты. К сожалению, нам не удалось обнаружить информации об опубликовании какой-либо работы Х. М. Алмиры на эту тему с полными доказательствами.

Комплексные показатели

О. Сас в [Sz16] впервые целенаправленно исследовал условия полноты системы $\{x^{\lambda_k}\}$ с показателями $\lambda_k \in \mathbb{C}$, но не аналитическими методами. Результат завершенного характера был им получен лишь для пространства $L^2(0,+\infty)$ наряду с некоторыми необходимыми или достаточными условиями для других пространств. Приведем наиболее сильное из известных нам обобщений теоремы Саса в виде объединения результатов А. М. Седлецкого [Сед75] и В. И. Ладыгина [Ла78] (подробнее см. [Сед00], [Сед01′], [Сед03″], [Сед03′], [Сед05], [МПС04]), доказанных аналитическим методом.

Теорема 2.1.26. *Пусть* $\operatorname{Re}\Lambda < 0$. *Расходимость ряда* (2.1.10) *достаточна для полноты системы* Exp_Λ *на* $[0,+\infty]$, *а также в* $L^p(0,+\infty)$ *при* $2 \leqslant p < \infty$, *но если выполнено условие Седлецкого–Ладыгина*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(iy,\Lambda)}{1+y^2}\, \mathrm{d}y > -\infty\,, \tag{2.1.27}$$

то и в пространствах $L^p(0,+\infty)$ *при* $1 \leqslant p < 2$. *Обратно, расходимость ряда* (2.1.10) *необходима для полноты системы* Exp_Λ *в* $L^p(0,+\infty)$ *при* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *а если выполнено* (2.1.27), *то и на* $[0,+\infty]$, *и в* $L^p(0,+\infty)$ *при* $p > 2$.

Теорема 2.1.26 при $p = 2$ есть в точности теорема Саса и полностью решает задачу полноты системы экспонент в $L^2(0,+\infty)$, а при условии (2.1.27) — на $[0,+\infty]$ и в пространстве $L^p[0,+\infty]$ при каждом $p \geqslant 1$. Но в отсутствии условия Седлецкого–Ладыгина

(2.1.27) известные необходимые условия полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на $[0,+\infty]$ и в $L^p(0,+\infty)$ при $p>2$ несколько слабее, чем условие расходимости ряда (2.1.10).

Теорема 2.1.27 (Н. Левинсон [Le74]). *Если* $\operatorname{Re}\Lambda<0$ *и система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна на* $[0,+\infty]$ *или в* $L^p(0,+\infty)$ *при* $p>2$, *то для любой возрастающей функции* $b>0$ *на* $[0,+\infty)$ *при условии*

$$\int_0^{+\infty}\frac{b(x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x<+\infty$$

для последовательности $\Lambda=\{\lambda_k\}$ *имеем равенство*

$$\sum_k\frac{|\operatorname{Re}\lambda_k|+e^{-b(|\lambda_k|)}}{1+|\lambda_k|^2}=+\infty. \tag{2.1.28}$$

Некоторое усиление (2.1.28) см. в [Сед03′, Теорема 9.2.4].

Для последовательностей показателей с предельными точками на $i\mathbb{R}$ справедливы следующие результаты А. Р. Зигеля [Sie72] (п. 2 теоремы 2.1.28, случай $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$), М. Грама [Gr56], [Gr57] (частный случай п. 3 теоремы 2.1.28), А. М. Седлецкого [Сед75], [Сед00] и В. И. Ладыгина [Ла78] (пп. 2, 3 теоремы 2.1.28), показывающие, что, вообще говоря, расходимости ряда (2.1.10) для полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на $[0,+\infty]$ не требуется, а для полноты этой системы в $L^p[0,+\infty]$ при $1\leqslant p<2$ расходимости ряда (2.1.10) еще недостаточно.

Теорема 2.1.28. 1) *Если (линейная) мера множества предельных точек для* Λ, $\operatorname{Re}\Lambda<0$, *на* $i\mathbb{R}$ *строго положительна, то система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна на* $[0,+\infty]$.

2) *При любых* $-\infty\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant+\infty$ *найдется последовательность* $\Lambda\subset\mathbb{C}_-$ *с множеством предельных точек* $[i\alpha,i\beta]$, *для которой ряд* (2.1.10) *сходится, но тем не менее система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна на* $[0,+\infty]$.

3) *Для любой функции* $d>0$ *на* $\mathbb{R}$ *класса* $\operatorname{Lip}1$, *удовлетворяющей условию расходимости*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log d(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=-\infty,$$

найдется некоторая последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}_-$ *с ограничением* $\operatorname{dist}(iy, \Lambda) \geqslant d(y)$, $y \in \mathbb{R}$, *для которой ряд* (2.1.10) *расходится, но система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *неполна в* $L^p(0, +\infty)$ *при* $1 \leqslant p < 2$.

Таким образом, все еще открытой остается

Проблема 2.1.5. *Найти критерий полноты системы экспонент* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *на* $[0, +\infty]$ *и в* $L^p(0, +\infty)$ *при* $p \neq 2$ *в терминах распределения точек из* Λ.

Решение этой проблемы представляется более доступным, чем проблемы 2.1.3, поскольку в отличие от случая полноты на отрезке $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, присоединение (соотв. удаление) конечного числа точек к (соотв. из) Λ не влияет на неполноту (соотв. полноту) системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на $[0, +\infty]$ и в $L^p(0, +\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$ [Сед03′, Следствие 9.1.2]. Это означает (см. п. 1.1.3), что в последних пространствах для системы экспонент $\operatorname{Exp}_\Lambda$ для избытков возможны лишь две ситуации: $\operatorname{exc} \Lambda = \pm\infty$. Отсюда, в частности, всякая минимальная система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в этих пространствах неполна и в них нет одновременно полных и минимальных систем [Сед03′, Следствие 9.1.3]. Аналитический метод решения этой проблемы, допустимый для исследования полноты на $[0, +\infty]$ и в $L^p[0, +\infty]$ при $1 \leqslant p < +\infty$, тесно завязан на следующем аналоге проблемы 2.1.4:

Проблема 2.1.6. *Дать внутреннее описание голоморфных в* $\mathbb{C}_-$ *функций, представимых с* $a = 0$, $b = +\infty$ *в виде* (2.1.1) *и* (2.1.2).

В связи с п. 3) теоремы 2.1.28 возникают проблемы поиска новых достаточных условий для полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в $L^p(0, +\infty)$ при $1 \leqslant p < 2$, усиливающих условие расходимости ряда (2.1.10) (этот ряд или его модификации должны расходиться в некотором смысле достаточно быстро). Наметим здесь одну такую возможность, ранее, по-видимому, не отмечавшуюся (подробнее см. [Хаб09, Теорема и Следствие]).

Пример 2.1.1. Как и при оригинальном доказательстве теоремы 2.1.26 будем исходить из того, что неполнота системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в $L^p(0, +\infty)$ влечет за собой существование голоморфной в левой полуплоскости функции $F \not\equiv 0$ вида (2.1.2) с $a = 0$ и $b = +\infty$, $F(\Lambda) = 0$, удовлетворяющей по неравенству Гельдера оценке

$$|F(z)| \leqslant \frac{\text{const.}}{|\operatorname{Re} z|^{1/p}}, \quad \operatorname{Re} z < 0. \tag{2.1.29}$$

Замена $G(z) := F\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$, $z \in \mathbb{D}$, определяет голоморфную в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию $G \not\equiv 0$, которая обращается в нуль на последовательности точек $A = \{a_k\} \subset \mathbb{D}$, где $a_k := \frac{1+\lambda_k}{1-\lambda_k}$, а (2.1.29) дает $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |G(z)|(1-|z|)^{1/p} < \infty$. Другими словами, функция G принадлежит классическому пространству $\mathcal{A}^{-1/p}$ (см. монографию Х. Хеденмальма, Б. Коренблюма и К. Жу [HKZ00]). Известны тонкие необходимые условия для (под)последовательностей нулей функций из таких пространств, полученные К. Сейпом [Se95, Теорема 1], которые мы используем в модификации [HKZ00, Теорема 4.24]. Не вдаваясь в детали обратного перехода от круга $\mathbb{D}$ к $\mathbb{C}_-$, сразу сформулируем одно из таких условий для подпоследовательности нулей Λ функции F из (2.1.29), согласовывая обозначения и терминологию с [HKZ00, гл. 4].

Пусть S — конечная последовательность точек на расширенной мнимой оси $i[-\infty, +\infty]$, а $\{I_n\}$ — система дополнительных к этой последовательности интервалов на $i[-\infty, +\infty]$. Величину $|I_n|$ определим[5] как раствор угла, под которым виден интервал I_n из точки -1, деленный на π. Через нее определяется *характеристика Берлинга–Карлесона* последовательности S (относительно левой полуплоскости), а именно: $\widehat{\varkappa}(S) := \sum_n |I_n| \log\bigl(e/|I_n|\bigr)$, где e — основание натуральных логарифмов.

С каждой точкой iy, $y \in [-\infty, +\infty]$, свяжем[6] дугу $\mathfrak{r}_{iy}$ окружности с центром на мнимой оси, соединяющую точки -1 и iy. К примеру, в крайних ситуациях $\mathfrak{r}_{i\cdot 0} = [-1, 0]$, $\mathfrak{r}_{i\cdot(\pm\infty)} = [-\infty, -1]$. Затем положим $\mathfrak{r}_S = \cup\{\mathfrak{r}_{iy} \colon iy \in S\}$ и

$$\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \left(1 - \left|\frac{1+\lambda_k}{1-\lambda_k}\right|^2\right) = 2 \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \frac{-\operatorname{Re}\lambda_k}{|1-\lambda_k|^2}\,.$$

Оценки (2.1.29) влекут за собой неравенства [HKZ00, Теорема 4.24]

$$\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) \leqslant \frac{1}{p}\,\widehat{\varkappa}(S) + \frac{2}{p}\,\log\widehat{\varkappa}(S) + \mathrm{const.},$$

где const. не зависит от выбора множества S. Отсюда *условие*

$$\sup_S \Bigl(\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) - \frac{1}{p}\,\widehat{\varkappa}(S) - \frac{2}{p}\,\log\widehat{\varkappa}(S)\Bigr) = +\infty, \tag{2.1.30}$$

---

[5] Это гармоническая мера интервала I_n для $\mathbb{C}_-$ в точке -1.

[6] Это образы радиусов, исходящих из центра единичного круга $\mathbb{D}$, при переходе от $\mathbb{D}$ к левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$.

где sup *берется по всем конечным подмножествам* S *расширенной мнимой оси, — достаточное условие полноты системы* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *в* $L^p(0,+\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Возможны и другие версии этого результата (см. [HKZ00, Теорема 4.25], [Se95, Теорема 1]). В отличие от условия расходимости ряда (2.1.10) условие полноты (2.1.30) уже тесно связано со значением показателя p.

Другие многочисленные условия (не)полноты на замкнутом луче $[0,+\infty]$, в пространствах $L^p(0,+\infty)$ и в их весовых вариантах можно найти в [Сед03′, гл. 9] и в [Сед05].

Для систем вида $\mathcal{F}_\Lambda$, когда f — функция типа Миттаг–Леффлера, результаты о полноте в пространствах функций на отрезке, луче или их системе с общим началом в нуле получены М. М. Джрбашяном [Дж66], [Дж88] и его учениками и последователями А. Е. Аветисяном, С. А. Акопяном, И. О. Хачатряном, Н. В. Григоряном [ААХ78], [Аве90], [ДжГ88] и др. По поводу многочисленных исследований полноты систем экспонент в весовых пространствах функций на $[-\infty,+\infty]$ и его подмножествах можно обратиться к работам М. М. Джрбашяна, приведенным в [Дж88], к теоремам единственности из фундаментальной работы П. Мальявена [Mal55] (см. также статью В. Г. И. Фукса [Fu67]) и их развития в статьях Г. Т. Денга [De86]–[De04], к статье Дж. А. Андерсона и К. Г. Бинмора [AB71], к монографиям и обзорам А. М. Седлецкого [Сед00], [Сед01′], [Сед03″], [Сед03]–[Сед03′], [Сед05], где исследованы и вопросы полноты систем функций вида $\{g(t)\cdot\operatorname{Exp}_\Lambda\}$. Приведем формулировку одного из недавних результатов по полноте систем экспонент в банаховом пространстве

$$\{f \in C(\mathbb{R})\colon \|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)e^{-b(x)}| < \infty\}, \tag{2.1.31}$$

где положительная выпуклая функция $b \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию $\lim_{|x|\to\infty} b(x)/|x| = +\infty$, а норма $\|\cdot\|$ — из (2.1.31).

Теорема 2.1.29 (Г. Т. Денг [De03]). *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}_+$ *удовлетворяет условию* (2.1.8) *отделенности от* $i\mathbb{R}$, *а последовательность из модулей* $|\Lambda| = \{|\lambda_k|\}$ *— условию разделенности* (2.1.16). *Система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна в простран-*

стве (2.1.31)*, если и только если для любой постоянной* $a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{b\bigl(2\, l_\Lambda^+(0,t) - a\bigr)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = +\infty, \ l_\Lambda^+(0,t) \overset{(3.2.1)}{:=} \sum_{|\lambda_k|<t} \operatorname{Re} \frac{1}{\lambda_k}. \qquad (2.1.32)$$

По-видимому, в теореме Денга 2.1.29 условие $\Lambda \subset \mathbb{C}_+$ можно снять, если вместо l_Λ^+ в (2.1.32) воспользоваться логарифмической мерой l_Λ из (3.2.2). Условие разделенности последовательности $|\Lambda|$ также представляется связанным только с методом доказательства, а вот отделенность Λ от $i\mathbb{R}$ в рассматриваемых терминах — по существу (ср. с ситуацией из п. 3.2.2). Развития теоремы 2.1.29 можно найти в последующих статьях Г. Т. Денга [De03′]–[De04].

2.1.3 Минимальность и равномерная минимальность

Если в обозначениях п. 1.1.2 в качестве E рассматривать пространства $C[a,b]$ (соотв. $L^p(a,b)$, $1 \leqslant p < +\infty$), где $[a,b]$ — отрезок на $\mathbb{R}$, а в роли системы $\mathcal{E}_\Lambda$ — систему экспонент Exp_Λ, то соответствующее пространство $\widehat{E'}$ описывается как пространство ц.ф.э.т. вида (2.1.1) (соотв. (2.1.2)) из теоремы 2.1.1, и в силу известного тождества Левинсона [Red74, 3, формула (2)] оно внутренне устойчиво на всем $\mathbb{C}$. Таким образом, все общие факты из п. 1.1.2 справедливы и для этих случаев.

Наиболее полно изучена минимальность систем экспонент в гильбертовом пространстве $L^2(-a,a)$, $0 < a < \infty$. Критерий одновременной полноты и минимальности системы Exp_Λ в этом пространстве в терминах порождающей ц.ф.э.т., восходящий к Н. Винеру и Р. Пэли [WP34], приведен в книгах Б. Я. Левина [Лев56], [Лев96]. Иногда условия одновременной полноты и минимальности из теоремы 1.1.5 несколько упрощаются. Сформулируем, к примеру, достаточное условие минимальности для пространств $L^p(-a,a)$ [WP34], [Сед82, Теорема 1.1.1], [Сед00, 6.1, Теорема 1] без части информации о биортогональной системе.

Теорема 2.1.30. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$ *и* $\lambda_0 \in \Lambda = \mathrm{Zero}_F$*, где* F *— ц.ф.э.т.* $\leqslant \sigma$*, для которой* $F(z)/(z-\lambda_0)\bigr|_{\mathbb{R}} \in L^p(\mathbb{R})$*. Тогда система экспонент* $\mathrm{Exp}_{i\Lambda}$ *минимальна в* $L^p(-\sigma,\sigma)$*.*

Новый подход к критериям полноты и минимальности в $L^2(a, b)$ систем экспонент и более общих систем функций недавно разработан М. Г. Макаровым и А. Г. Полторацким [МП05, 3.1–2].

Различные виды необходимых или достаточных условий минимальности в $L^p(a, b)$ и на $[a, b]$ содержатся в уже не раз упоминавшихся монографиях и обзорах А. М. Седлецкого последних лет. Отметим также очень наглядные геометрические условия минимальности в $L^p(-\pi, \pi)$ В. С. Юркина [Ю95].

Бóльшая часть условий одновременной полноты и (равномерной) минимальности содержится в результатах двух типов. Первый — условия равенства избытков полноты систем экспонент, к которым обратимся чуть позже. Второй — условия базисности, так как каждый базис в банаховом пространстве — это полная равномерно минимальная система. Условия базисности чаще всего формулируются в терминах порождающей функции последовательности показателей или в терминах близости к нулям функций типа синуса, введенным Б. Я. Левиным [Лев61], [Лев96].

Коснемся некоторых из них без формулировок, поскольку вопросы базисности в пространствах функций более чем достойны отдельного обзора, но в изложении авторов, непосредственно работавших над этой проблематикой.

Критерий для базиса Рисса вида $\mathrm{Exp}_{i\Lambda}$ в $L^2(0, +\infty)$ был опубликован в совместных работах Н. К. Никольского и Б. С. Павлова (см. [НиП70]). Он состоит в выполнении знаменитого условия Л. Карлесона. Для пространства $L^2(0, a)$ и для замыкания линейной оболочки системы $\mathrm{Exp}\, i\Lambda$ аналогичный критерий безусловной базисности, где одну из основных ролей играют классические условие Макенхаупта или условие Хелсона–Сеге, был дан в работах Б. С. Павлова, С. В. Хрущева, Н. К. Никольского (см. [ХНП81]) в предположении, что $\mathrm{Im}\, i\Lambda > a$. Это ограничение снято в работе А. М. Минкина [Мин91].

По исследованиям базисности систем экспонент в $L^2(0, a)$ в терминах близости последовательности Λ к нулям функций типа синуса или подобных им отметим здесь результаты С. А. Авдонина [Ав74] и совместную работу С. А. Авдонина и И. Йоо [AJ88], перекрывающие предшествующие результаты Н. Винера и Р. Пэли, Р. Даффина и Дж. Икэса, А. Е. Ингама, Н. Левинсона, М. И. Кадеца, Б. Я. Левина, В. Д. Головина, В. Э. Кацнельсона (см. историю вопроса в [AJ88], [Мин91]). В обзоре Ю. И. Любарского [Лю89′], во многом основанном на его собственных работах, развернута детальная картина по полноте, минимальности, базисности и т. п. в $L^p(a,b)$ систем *линейных комбинаций экспонент* и более общих функций в увязке с рядом вопросов теории дифференциальных и интегральных уравнений (операторов). Близки к ним и недавние результаты Б. Т. Билалова [Би04].

Тонкие результаты по описанию классов разделенных последовательностей показателей, при которых соответствующая система экспонент полна и минимальна на отрезке $[-\pi,\pi]$ или в $L^p(-\pi,\pi)$ получены А. М. Седлецким [Сед95]. В его же работе [Сед95′], продолжившей исследования В. А. Ильина [Ил83], изучены взаимосвязи полноты и равномерной минимальности систем экспонент в $L^p(-\pi,\pi)$ с так называемой равносходимостью негармонических рядов Фурье. Исследования базисности в пространствах $L^p(-\pi,\pi)$, $p\neq 2$, продолжены в работе А. М. Седлецкого [Сед99]. В терминах близости к нулям функций типа синуса результаты по базисности систем экспонент были перенесены на пространства Соболева в совместной статье С. А. Авдонина и С. А. Иванова [АИ00], где для таких пространств приведены и условия (не)полноты и(или) (не)минимальности систем экспонент. Окончательный критерий получен Ю. И. Любарским и К. Сейпом в [ЛюS97] (см. также обзор К. Сейпа [Se98]). Аппроксимативные свойства систем экспонент в пространствах Соболева также детально исследованы в работе А. М. Седлецкого [Сед99″].

Дальнейшие развитие, обобщения по безусловной базисности на отрезке и ее применениям см., в частности, в совместных книге и статье С. А. Авдонина и С. А. Иванова [АИ95], [АИ01], в работе С. А. Иванова и Н. Кэлтона [ИК01], в обзоре Г. М. Губреева [Гу00], в статьях А. М. Минкина [Мин96], [Мин98] и в библиографии из них. Условия полноты и минимальности более или менее конкретных систем экспонент в различных пространствах содержатся в неявном виде в исследованиях (абсолютно) представляющих систем экспонент (см. обзор Ю. Ф. Коробейника [Кор02], заметку А. В. Абанина и О. В. Шершневой [АШ01] и библиографию в них).

Полнота и (равномерная) минимальность систем $\{e^{-i\lambda_k t-a|t|^\alpha}\}$

и некоторых более общих систем в пространствах $L^p(0,+\infty)$ и $L^p(\mathbb{R})$ исследовалась в работах А. М. Седлецкого и его учеников [Сед97′], [СеЕ97], [Сед98], [Сал94], [Сед01], [Пр04], [Сед03′], [Сед05], в совместных статьях Б. В. Винницкого и А. В. Шаповаловского [ВШ89], [ВШ00], Б. В. Винницкого и Г. Д. Галелюк [ВиГ05], в которых приведена и дополнительная библиография.

2.1.4 Избыток полноты. Устойчивость полноты и минимальности

Согласно первому абзацу предыдущего п. 2.1.3 общие определения и факты п. 1.1.3 переносятся на избытки $\operatorname{exc}\Lambda$ в пространствах $C[a,b]$ или $L^p(a,b)$, $1\leqslant p$. В дополнение к ним можно отметить, что в данной ситуации и при условии $\operatorname{exc}\Lambda=-\infty$ последовательность Λ можно дополнить некоторой *бесконечной* последовательностью Λ' так, что система $\operatorname{Exp}_{\Lambda\cup\Lambda'}$ по-прежнему неполна на $[a,b]$ или в $L^p(a,b)$, $1\leqslant p<+\infty$ [Red68], [Red74, Теорема 6].

Когда при некоторых условиях на определенный тип преобразований (сдвиг и т. п.) последовательности показателей Λ в последовательность Γ (не)полнота или (равномерная) минимальность сохраняются, то можно говорить об *устойчивости* этого свойства относительно рассматриваемого вида преобразования. Так, если при преобразовании последовательности Λ в Γ имеет место равенство избытков $\operatorname{exc}\Lambda=\operatorname{exc}\Gamma$, то очевидна устойчивость и полноты, и минимальности. Бо́льшая часть основных результатов об избытках экспоненциальных систем на отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$, установленных до 1977 г., приведена в обзоре Р. М. Редхеффера [Red74]. Ряд тонких утверждений в этом направлении при специальных, но достаточно общих условиях на расположение показателей системы экспонент принадлежит А. М. Седлецкому и отражен в его монографиях последних лет.

Исходной точкой среди этих многочисленных результатов часто является теорема Редхеффера–Александера, установленная в [AR67, Теорема 3] в ослабленной форме, а затем в окончательном виде в обзоре [Red74, Теорема 14].

Теорема 2.1.31. *Если для последовательностей* $\Lambda=(\lambda_k)$ *и* $\Gamma=$

(γ_k), $k = 1, 2, \ldots$, *выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1 + |\mathrm{Re}\,\lambda_k| + |\mathrm{Re}\,\gamma_k|} < \infty\,, \tag{2.1.33}$$

то $\operatorname{exc} \Lambda = \operatorname{exc} \Gamma$ *для* $C[a,b]$ *и* $L^p(a,b)$, $1 \leqslant p < \infty$, *при всех значениях* $-\infty < a < b < +\infty$.

Неулучшаемость здесь в некотором смысле условия (2.1.33) отражена в примерах Д. Петерсона [Pe74], [Red74, Теорема 15] и А. М. Седлецкого [Сед77, Пример]. Как отмечено в [AR67] и [Red74], принципиальная особенность теоремы Редхеффера–Александера, в контрасте с другими результатами об избытках, состоит в том, что условие (2.1.33) не накладывает каких-либо специальных условий на распределение точек каждой из последовательностей Λ и Γ по отдельности. При дополнительных условиях на расположение каждой из последовательностей Λ и Γ возможно существенное ослабление условия (2.1.33) (см. работы Ю. Эльзнера [El71], Д. Петерсона [Pe74] и обзор [Red74, 6, 7]). Приведем для подобной ситуации один из наиболее далеко продвинувшихся после теоремы Редхеффера–Александера 2.1.31 результатов А. М. Седлецкого для $L^2(a,b)$ (см. [Сед74], [Сед80], [Сед83]), который в определенной степени неулучшаем.

Теорема 2.1.32 ([Сед03, Теорема 5.5.4]). *Пусть* Λ *и* Γ — *последовательности в* $\mathbb{C}$, *для которых*

$$\sup|\mathrm{Im}\,\Lambda| + \sup|\mathrm{Im}\,\Gamma| < +\infty,$$

$$\int_1^{\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_x^{x+u}\left|n^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Re}\,\Lambda}(t) - n^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Re}\,\Gamma}(t)\right|\mathrm{d}t\right)\frac{du}{u^2} < +\infty\,.$$

Тогда $\operatorname{exc} i\Lambda = \operatorname{exc} i\Gamma$ *для* $L^2(a,b)$ *при* $-\infty < a < b < +\infty$.

Новые условия устойчивости полноты системы $\mathrm{Exp}_{i\mathbb{Z}}$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ при малых возмущениях $\mathbb{Z}$ даны в [Сед97, следствие]. Многочисленные следствия теоремы 2.1.32 и аналоги для $L^p(a,b)$ можно найти в [Сед00, 5.4], [Сед03]–[Сед03′], [Сед05]. Устойчивость базисности, полноты и минимальности для систем экспонент Exp_Λ в $L^2(-\pi,\pi)$ при случайных возмущениях последовательности показателей Λ очень подробно исследована в совместной статье Г. П. Чистякова и Ю. И. Любарского [ЧЛю97, Теоремы 1, 4, 5] — естественно, в теоретико-вероятностных терминах. Приведем здесь их результаты об устойчивости полноты и минимальности.

Теорема 2.1.33 ([ЧЛю97, Теоремы 4, 5]). *Пусть последовательность* $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ *попарно различных точек порождает базис Рисса* $\mathrm{Exp}_{i\Lambda}$ *в* $L^2(-\pi,\pi)$, *а система* $\mathrm{Exp}_{i(\Lambda+\Xi)}$ *получена случайным возмущением*[7] $\Lambda + \Xi := (\lambda_k + \xi_k)$ *показателей* Λ *последовательностью* (ξ_k) *независимых вещественных случайных величин с математическим ожиданием* $\mathbb{E}(\xi_k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. *Если* $\sup\limits_k \mathbb{E}\bigl(|\xi_k|^2\bigr) < +\infty$, *то система* $\mathrm{Exp}_{i(\Lambda+\Xi)}$ *полна в* $L^2(-\pi,\pi)$ *почти наверное. Если* $\sup\limits_k \mathbb{E}\bigl(|\xi_k|^m\bigr) < +\infty$, $m = 2, 3, \dots$, *то эта система полна и минимальна в* $L^2(-\pi,\pi)$ *почти наверное.*

Исследования избытков экспоненциальных систем на отрезке продолжаются и поныне (см., например, работы А. М. Седлецкого [Сед99′], Н. Фуджи, А. Накамуры и Р. М. Редхеффера [FNR99], А. Накамуры [Na00], Э. Зиккоса [Zi05] с более или менее жесткими специальными ограничениями на последовательности показателей). Из последних исследований отметим здесь работу А. Буавена и Х. Жонга [BoZ05, Теоремы 1 и 2]. Вторая теорема в ней обобщает результат из [FNR99], который, впрочем, содержался в существенно более ранней работе А. М. Седлецкого [Сед83]. Здесь приводится только более простая по формулировке

Теорема 2.1.34 ([BoZ05, Теорем 1]). *Пусть* $\Lambda = (\lambda_k)$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *— две последовательности, каждая из которых состоит из попарно различных комплексных чисел,* $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ *при* $k < 0$ *и* $\operatorname{Re}\lambda_k \geqslant 0$ *при* $k > 0$, *а также* $|\lambda_k - \gamma_k| \leqslant \alpha_k = \alpha_{-k}$ *при всех* $k \neq 0$, *где убывающая последовательность* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *стремиться к нулю и* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k/k < +\infty$. *Тогда* $\operatorname{exc}\Lambda = \operatorname{exc}\Gamma$ *в любом* $L^2(a,b)$.

Приведем также одно из последних достижений по избыткам систем экспонент в $L^2(a,b)$, обобщающее результат А. Накамуры [Na00] и принадлежащее А. И. Хейфицу:

Теорема 2.1.35 ([Хе04, Теорема 1]). *Пусть* $\lambda_k := k + d_k$ *при* $k \in \mathbb{Z}$, $d_k \in \mathbb{C}$ *и* $\sup_k |d_k| < \infty$, $\Lambda := \{\lambda_k\}$. *Тогда* $\operatorname{exc} i\Lambda$ *для*

---

[7] Корректные определения см. в [ЧЛю97].

системы $\mathrm{Exp}_{i\Lambda}$ *в* $L^2(-\pi,\pi)$ *равен наибольшему целому числу* r, *при котором расходится ряд*

$$\sum_{l=-\infty,\, l\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{|l|^{2r}} \exp\left(2 \sum_{k=-\infty,\, k\neq 0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} d_{k+l} - \operatorname{Re} d_k}{k}\right).$$

Законченные условия близости последовательностей Λ и Γ, при которых $\operatorname{exc}\Lambda = \operatorname{exc}\Gamma$ хотя бы для одного из пространств $C[a,b]$ или $L^p(a,b)$ неизвестны, и здесь еще более уместен комментарий, приведенный после проблемы 2.1.3.

2.1.5 Абсолютная полнота на отрезке

Наряду с указанными в п. 1.1.4 работами абсолютная полнота и близкая ей $\{m_k\}$-полнота для системы степеней $\{x^k\}$, $k = 0,1,\ldots$, и системы Exp_Λ на отрезке, т.е. в пространствах $C[a,b]$ и $C_0[a,+\infty]$, исследовалась в работах Дж. А. Стафни [St67], М. фон Голичека и Д. Левиатана [GL77], В. И. Гурария и М. А. Мелетиди [ГМ71], О. А. Мурадян и С. Я. Хавинсона [МХ77], Р. М. Тригуба [Тр77]. Приведем здесь условие И. Ф. Красичкова-Терновского из [Кр86] об абсолютной полноты системы экспонент на отрезке, которое содержит в себе и многие ранее известные.

Пусть $\Lambda = (\lambda_k)$ — последовательность в $\mathbb{C}$ и $\mathrm{M} = (M_k)$, $k = 1,2,\ldots,$ — последовательность строго положительных чисел. Рассмотрим систему

$$\left\{\frac{1}{M_k}\exp(\lambda_k z)\right\}, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{2.1.34}$$

Последовательность $\Lambda' = \{\lambda'_k\}$ *вполне сгущается* в направлении θ, если $\arg\lambda'_k \to \theta$ при $\lambda'_k \to \infty$ и сходится ряд (2.1.9) с λ'_k вместо λ_k. Для подпоследовательности $\Lambda' \subset \Lambda$, вполне сгущающейся в направлении θ, введем

$$H_{\Lambda'}(\theta) := \limsup_{\lambda_k\to\infty,\lambda_k\in\Lambda'} \frac{\log M_k}{|\lambda_k|}\,; \quad H(\theta;\Lambda) := \inf_{\Lambda'\subset\Lambda} H_{\Lambda'}(\theta)\,, \tag{2.1.35}$$

где точная нижняя грань берется по всем подпоследовательностям $\Lambda' \subset \Lambda$, вполне сгущающимся в направлении θ. Функцию $H(\theta;\Lambda)$ и выпуклое множество $\bigcap_{0\leqslant\theta<2\pi}\{z : \operatorname{Re} ze^{-i\theta} \leqslant H(\theta;\Lambda)\}$

называем соотв. *индикатором* и *диаграммой существенного роста последовательности* M *на последовательности* Λ.

Теорема 2.1.36. *Пусть для последовательности* Λ *существуют числа* $t_0, A > 0$ *такие, что* $n_\Lambda(z,t) \leqslant At$ *при* $t \geqslant t_0$ *для всех* $z \in \mathbb{C}$, *и выполнено условие* (2.1.8) *отделенности от мнимой оси. Система* (2.1.34) *абсолютно полна на отрезке* $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$ *(соотв. на* $[0,+\infty]$*) тогда и только тогда, когда диаграмма существенного роста* M *на* Λ *имеет не более одной общей точки с отрезком* $[a,b]$ *(соотв.* $\operatorname{Re}\Lambda < 0$ *и* $\inf\bigl\{H(\theta;\Lambda) : |\cos\theta| \geqslant d\bigr\} = -\infty$ *при некотором* $d > 0$*).*

В [Кр86, § 1, замечание 1] отмечено, что в рассматриваемой ситуации абсолютная полнота системы (2.1.34) эквивалентна ее $\{m_k\}$-полноте с $m_k = 1/M_k$, что означает $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$-полноту при $\Lambda = \{\lambda_k\}$ в смысле подраздела 1.1.4.

Проблема 2.1.7. *Избавиться в теореме* 2.1.36 *от всех или части дополнительных ограничений на последовательность* Λ.

Скорее всего для решения проблемы 2.1.7 потребуются еще более тонкие характеристики, чем индикатор и диаграмма существенного роста последовательности.

2.2 Полнота систем экспонент на открытом интервале

2.2.1 Полнота

Задачу полноты системы экспонент на открытом интервале (a,b) при любых $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, т.е. в пространстве $C(a,b)$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах, ра́вно как и в пространствах $L^p_{\mathrm{loc}}(a,b)$ функций, локально интегрируемых на (a,b), $1 \leqslant p < \infty$, в пространстве $C^\infty(a,b)$ бесконечно дифференцируемых на (a,b) функций и других (неквазианалитических) пространствах функций на (a,b) с естественной топологией проективного предела, полностью решает теорема 2.1.10 Берлинга–Мальявена о радиусе полноты:

Теорема 2.2.1. *(Полнота* $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ *на* (a,b)*)* $\Longleftrightarrow$ $(b-a) \leqslant 2\pi R_e(\Lambda)$.

Теорема остается в силе и для пространств $C[a,+\infty)$, $C(-\infty,b]$, $a,b\neq\pm\infty$, $C(\mathbb{R})$ с заменой последнего неравенства теоремы 2.2.1 на условие $R_e(\Lambda)=+\infty$. Дополнительно отметим, что из теоремы 2.1.20 легко следует бесконечный набор достаточных условий полноты системы экспонент в интервале.

Теорема 2.2.2. *Пусть $V\not\equiv 0$ — функция Йенсена. Если*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_n V(\lambda_n/t)\geqslant\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}V(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

то система $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ полна на $(-a,a)$.

Напомним, что один из общих способов построения разнообразных функций Йенсена был описан в схеме i)–v) из п. 1.2.2.

2.2.2 Устойчивость полноты

Один из основных результатов по устойчивости полноты на открытом интервале — следующая теорема Р. М. Редхеффера [Red72], [Red74, Теорема 78], полученная элементарными методами из теоремы 2.1.10 и эквивалентная ей (ср. (2.1.12) с (2.2.1)).

Теорема 2.2.3. *Если для пронумерованных последовательностей $\Lambda=(\lambda_k)$ и $\Gamma=(\gamma_k)$ выполнено условие Редхеффера*

$$\sum_k\left|\frac{1}{\lambda_k}-\frac{1}{\gamma_k}\right|<\infty\,, \tag{2.2.1}$$

то системы $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ и $\operatorname{Exp}_{i\Gamma}$ полны или не полны на (a,b) и в $L^p_{\mathrm{loc}}(a,b)$ только одновременно.

Именно в контексте этой теоремы Р. М. Редхеффер отмечал актуальность прямого доказательства теоремы 2.2.3, уже обсуждавшуюся после формулировки теоремы 2.1.12 (см. также комментарий в [Хаб04, § 2, Замечание]).

Другой возможный вариант исследования устойчивости полноты (соотв. неполноты) системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на интервале (a,b) — выяснить, какие последовательности можно удалить из (соотв. добавить к) Λ, чтобы полнота (соотв. неполнота) для новой последовательности сохранилась. По устойчивости неполноты теоремы Берлинга–Мальявена в интерпретации Ж.-П. Кахана позволяют легко установить следующий точный результат: *если система* $\operatorname{Exp} i\Lambda$ *неполна на* (a,b) *и для последовательности* Γ *плотность* $R_e(\Gamma) < (b-a)/(2\pi) - R_e(\Lambda)$, *то и система* $\operatorname{Exp}_{i(\Lambda\cup\Gamma)}$ *неполна на* (a,b). Аналогичный точный результат по устойчивости полноты, формулируемый в терминах внутренней плотности Берлинга–Мальявена $A_i(\Gamma)$ и других внутренних плотностей, ей равных [Кр89], легко следуют из тех же теорем. Кроме того, из определения плотности Редхеффера $R_e(\Lambda)$ через (2.1.12) нетрудно извлечь следующий любопытный факт об устойчивости полноты на интервале системы экспонент $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ относительно удаления более чем "половины экспонент" в следующем смысле:

Теорема 2.2.4. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию* (2.1.13) *и условию типа Линделефа*

$$\Bigl|\sum_{|\lambda_k|<r} \operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_k}\Bigr| = O(1), \quad r\to+\infty, \tag{2.2.2}$$

что гарантировано, когда Λ *— последовательность нулей некоторой ц.ф.э.т.. Положим*

$$\Lambda_\varepsilon := \Lambda\cap\angle(-\varepsilon,\varepsilon), \qquad \Lambda_{-\varepsilon} := \Lambda\cap\angle(-\pi-\varepsilon,-\pi+\varepsilon).$$

Если система $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ *полна на* (a,b) *или в* $L^p_{\mathrm{loc}}(a,b)$, *то там же полна каждая из систем* $\operatorname{Exp}_{i\Lambda_\varepsilon}$ *и* $\operatorname{Exp}_{i\Lambda_{-\varepsilon}}$.

2.2.3 Дополнение к п. 2.1.4: устойчивость равномерной минимальности

Формулировка части результатов А. М. Седлецкого [Сед07] —

Теорема 2.2.5. *Если для двух последовательностей* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *и* $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *выполнено* $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\lambda_k-\gamma_k| < +\infty$ *или же* $\sup\bigl\{|\operatorname{Re}\Lambda|, |\operatorname{Re}\Gamma|\bigr\} < +\infty$ *и* $\operatorname{Re}\lambda_k = \operatorname{Re}\gamma_k$, $k\in\mathbb{Z}$, *то системы* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *и* $\operatorname{Exp}_\Gamma$ *могут быть равномерно минимальны на* $[a,b]$ *и(или) в* $L^p(a,b)$, $p\geqslant 1$, *только одновременно.*

Глава 3

Пространства функций на подмножествах в $\mathbb{C}$

3.1 Системы экспонент в пространствах на дуге

3.1.1 Полнота на дуге

Точные условия неполноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на спрямляемой дуге $\ell \subset \mathbb{C}$ (соотв. в $L^p(\ell)$) формулируются так же, как в теореме 2.1.1, с той лишь разницей, что интегрирование в (2.1.1) (соотв. в (2.1.2)) ведется по дуге ℓ и по мере σ с носителем на ℓ (соотв. с функцией $f \in L^q(\ell)$). К первым результатам о полноте систем экспонент *на дуге* (после замены $z = e^w$) можно отнести классическую аппроксимационную теорему Дж. Уолша [Wal27] о полноте системы степеней $\{z^n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, в пространстве $C(\ell)$ для любой жордановой, не обязательно спрямляемой, дуги ℓ. Следующий принципиальный шаг по исследованию полноты систем степеней, а значит, и систем экспонент на дугах с последовательностью целых показателей, по существу отличной от $\mathbb{N}$, был сделан А. Ф. Леонтьевым [Лео58]. Многочисленные условия (не)полноты системы экспонент на различного рода дугах в духе теорем Мюнтца и Саса, т.е. в терминах расходимости ряда (2.1.10) (для полноты) или сходимости (для неполноты), можно найти в работах П. Мальявена и Дж. Сиддики [MS71], [MS76], Я. Корevаара [Kor73], [Kor74], [Kor79] и его совместных с М. Диксоном статьях [KD78], [DK78], [KD79], у А. Ф. Леонтьева [Лео74], Т. Эркамма [Erk76], в совместных работах А. Байетт и Дж. Сиддики [BS75], [BS79], [BS81]. Они большей частью описаны по состоянию в начале 1980-х годов в монографии А. Ф. Леонтьева [Лео80, гл. III, § 3, п. 5] и обзорах Я. Кореваара [Kor79] и [Kor83], а к началу 1990-х годов у Ю. И. Любарского [Лю89], А. М. Гайсина [Гай91] и Р. Зайнстры [Ze92].

Как отмечено в обзоре Я. Кореваара [Kor83], известные к тому времени методы по задаче полноты систем экспонент на дуге не дают результатов более сильных для ограниченных дуг, чем для неограниченных кривых. Кажется, ситуация мало изменилась в случае достаточно произвольных последовательностей показателей и к настоящему времени. Поэтому в данном п. 3.1.1, как правило, утверждения, формулируемые в терминах условия расходимости Бляшке–Мюнтца ряда (2.1.10), не различают неограниченные кривые и ограниченные дуги. На фоне этого остается открытой

Проблема 3.1.1. *Найти условия (не)полноты и(или) (не)минимальности системы экспонент на дуге при достаточно общих последовательностях показателей, которые по существу зависели бы от геометрических характеристик дуги (ее размеров, конфигурации и т.п.).*

Наиболее сильные из известных нам достаточных условий полноты системы экспонент на дуге при подходе через условие Бляшке–Мюнтца принадлежат Р. Зайнстре [Ze92, теоремы 2 и 5]. Приведем более общую теорему 2 из [Ze92]. Теорема 5 в [Ze92], хотя и несколько более сильная, касается только последовательности положительных показателей.

Пусть кривая ℓ задана параметрически $t \mapsto \ell(t) = t + ih(t)$, $t \in [0, +\infty)$ и $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h(0) = 0$, и удовлетворяет условию Липшица $\bigl|h(t_2) - h(t_1)\bigr| \leqslant M|t_2 - t_1|$ при всех $t_1 \neq t_2$, M — постоянная. Такая кривая называется кривой *ограниченного наклона*. Полагаем $\alpha(\ell) = \operatorname{arctg} M$.

Теорема 3.1.1. *Пусть кривая ℓ ограниченного наклона представима в виде объединения дуг ℓ_n, $n \in \mathbb{N}$, для которых конечная точка дуги ℓ_n — начальная точка дуги ℓ_{n+1}, причем каждая дуга ℓ_n может быть получена как поворот некоторой дуги ℓ'_n ограниченного наклона с $\alpha(\ell'_n) < \pi/4$. Если $|\arg \Lambda| < \pi/2 - \alpha(\ell) - \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ и ряд (2.1.9) расходится, то система $\operatorname{Exp}_{(-\Lambda)}$ полна на кривой ℓ.*

Условия теоремы 3.1.1 выполнены, например, если кривая ℓ

ограниченного наклона кусочно гладкая, а также в случае, когда функция h возрастающая или убывающая. По-видимому, остается открытой давняя

Проблема 3.1.2 (Я. Коревaар [Kor83]). *Верно ли заключение теоремы 3.1.1 для произвольной кривой ограниченного наклона?*

Наряду с этим частным случаем проблемы 3.1.1 в обзоре [Kor83, 1.8] сформулированы и другие до сих пор далекие от окончательного решения проблемы о (не)полноте систем Exp_Λ на неограниченной кривой или на ограниченной дуге.

Простое достаточное условие полноты системы степеней в пространстве $L^p(\ell)$, где ℓ — замкнутая кривая в угле, дано в работе [ИА73] в степенной трактовке. Приведем его здесь в экспоненциальной форме.

Теорема 3.1.2 (И. И. Ибрагимов, И. С. Аршон [ИА73]). *Пусть* $0 \leqslant d \leqslant \pi$, *а замкнутая спрямляемая жорданова кривая* ℓ *лежит в замкнутой полуполосе* $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \geqslant 0, |\operatorname{Im} z| \leqslant d\}$. *Если для последовательности* $\Lambda > 0$ *выполнено условие*

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int_1^r \frac{n_\Lambda^{\mathbb{R}}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{d}{\pi}\log r\right) = +\infty, \qquad (3.1.1)$$

то система Exp_Λ *полна в пространстве* $L^p(\ell)$ *при* $1 < p < +\infty$.

По неполноте систем экспонент $\mathrm{Exp}_{(-\Lambda)}$ при $\Lambda > 0$ известно, что условие сходимости ряда из (2.1.10) влечет неполноту системы $\mathrm{Exp}_{(-\Lambda)}$ на аналитической дуге [MS71], [MS76], [Kor73]. Для кусочно гладких дуг ограниченного наклона и интерполяционных последовательностей $\Lambda > 0$ в смысле А. И. Павлова [Па72] такое же условие неполноты дано в совместных работах Я. Кореваара и М. Диксона [DK78], [KD79].

В терминах неквазианалитичности определенных классов функций, построенных по порождающей функции последовательности $\Lambda > 0$, соответствующие условия неполноты системы экспонент на спрямляемой дуге содержатся в работах А. Байетт и Дж. Сиддики [BS75], [BS79], [BS81], [Sid84].

Приведем здесь результат А. М. Гайсина [Гай91], основанный на методе интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева, об условиях *усиленной* неполноты системы Exp_Λ на дуге.

Пусть $\Lambda = (\lambda_k) > 0$ — возрастающая неограниченная последовательность. Система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ называется[1] *усиленно не полной*, если для любых чисел $a < b$ и $c > 0$ для каждого $0 < \beta \notin \Lambda$ выполнено неравенство

$$\inf_{\gamma(a,b)} \inf_{c_k} \Bigl\| e^{\beta z} - \sum_k c_k e^{\lambda_k z} \Bigr\|_{\gamma(a,b)} > 0,$$

где внутренняя точная нижняя грань берется по всем конечным наборам чисел $c_k \in \mathbb{C}$, а внешняя — по всем кривым $\gamma = \gamma(a,b)$, соединяющим вертикальные стороны прямоугольника $\bigl\{z \in \mathbb{C} \colon a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b,\ |\operatorname{Im} z| < c\bigr\}$.

При $\overline{\Delta}(\Lambda) = 0$, т. е. нулевой (и даже конечной) верхней плотности последовательности Λ, определено каноническое четное произведение Адамара–Вейерштрасса (рода 1)

$$W(z;\Lambda) := \prod_k \Bigl(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\Bigr), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.1.2}$$

Для достаточно малых $\delta > 0$ положим

$$\begin{aligned} h_+(\delta) &:= \int_0^{+\infty} W(ir;\Lambda)\, e^{-\delta r}\, \mathrm{d}r, \\ h_-(\delta) &:= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\delta r}}{\bigl|W(re^{i\delta};\Lambda)\bigr|}\, \mathrm{d}r, \\ h(\delta) &:= \max\{h_+(\delta), h_-(\delta)\}. \end{aligned}$$

Теорема 3.1.3 (А. М. Гайсин [Гай91, Теорема A]). *Допустим, что для возрастающей неограниченной последовательности* $\Lambda = (\lambda_k) > 0$ *нулевой верхней плотности выполнено условие типа Левинсона* $\int_0 \log\log h(\delta)\, \mathrm{d}\delta < +\infty$. *Тогда система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *усиленно не полна и неполна на любой непрерывной кривой.*

В [Гай03] установлены четыре более простых условия, эквивалентных условию типа Левинсона (но при отсутствии h_-). Одно из них, к примеру, дает

Следствие 3.1.1 ([Гай91, Теорема A], [Гай03, Теорема 2]). *Допустим, что для возрастающей неограниченной последовательности* $\Lambda = (\lambda_k) > 0$ *можно подобрать непрерывную возрастающую неограниченную функцию* $w > 0$ *на* $[0, +\infty)$ *такую,*

---

[1] Соответствующее определение для систем степеней вводилось Я. Кореваром в [Kor79].

что $\int_1^{+\infty} w(t)t^{-2}\,\mathrm{d}t < \infty$, *а при некотором* $a_0 > 0$ *неравенства* $n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t)/t \leqslant w(a)/a$ *выполнены для любых* $t \geqslant a \geqslant a_0$. *Тогда система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *неполна на каждой кривой ограниченного наклона.*

Все отмеченные выше условия полноты (соотв. неполноты) для $\operatorname{Exp}_\Lambda$ таковы, что ее избыток полноты $= +\infty$ (соотв. $= -\infty$).

Условия полноты и (равномерной) минимальности системы экспонент на дуге, которые лишены этого недостатка, найдены Ю. И. Любарским [Лю89] (см. также его обзор [Лю89′]) и во многом основаны на свойствах функций типа синуса, т. е. очень регулярном распределении последовательностей показателей, и довольно жестких условиях на конфигурацию дуги.

Результаты С. Я. Хавинсона [Хав71] и О. А. Мурадян [Му73] о $\{m_k\}$-полноте системы степеней на нигде не плотном компакте со связным дополнением в $\mathbb{C}$ могут быть переформулированы как условия абсолютной полноты системы экспонент с последовательностью показателей $\Lambda \subset \mathbb{N}$ на дуге. Подробное изложение как предшествующих результатов с детальной библиографией, так и новых о весовой аппроксимации системами функций $\{z^{\lambda_k}\}$ на системах кривых, уходящих в бесконечность, дал И. О. Хачатрян [Ха00]. Они, очевидно, допускают и экспоненциальную трактовку после соответствующей замены переменной.

3.1.2 Избыток полноты на дуге

Всюду в этом пункте ℓ — *жорданова спрямляемая дуга на* $\mathbb{C}$.

Если в обозначениях п. 1.1.2 в качестве пространства E рассматривать пространства $C(\ell)$ (соотв. $L^p(\ell)$, $1 \leqslant p < +\infty$), а в роли системы $\mathcal{E}_\Lambda$ систему экспонент $\operatorname{Exp}_\Lambda$, то соответствующее пространство $\widehat{E'}$ является подпространством ц.ф.э.т., внутренне устойчивым на всем $\mathbb{C}$ (см. [Хаб02′, Предложение 1.3], [Хаб02″, Предложение 3.3]). Таким образом, все общие определения и факты из пп. 1.1.2–1.1.3 переносятся на понятия минимальности и избытков $\operatorname{exc}\Lambda$ для систем экспонент в $C(\ell)$ или $L^p(\ell)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

В последние годы в исследованиях Б. Н. Хабибуллина [Хаб02′], [Хаб02″], [Хаб02*] получены аналоги теоремы Редхеффера–Александера 2.1.31 об избытках полноты системы экспонент на ℓ, а значит, и об устойчивости полноты и минимальности. Они основаны

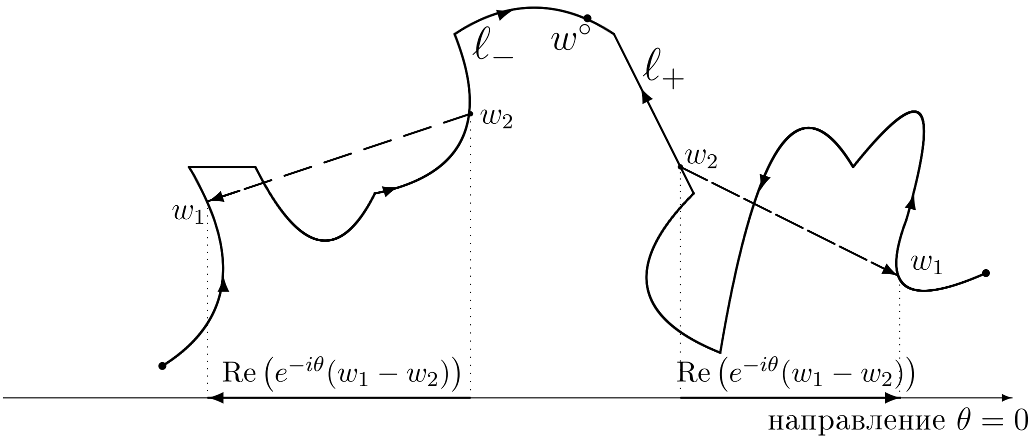

Рис. 3.1. К определению дефекта выпуклости произвольной жордановой спрямляемой дуги ℓ в направлении θ.

на далеко идущем обобщении рекурсивного метода Редхеффера–Александера из [AR67], [Red68]. Ранее эти вопросы ни для какой дуги, отличной от отрезка, изучению не поддавались. Эти исследования в [Хаб02″] используют новую характеристику дуг — дефект выпуклости $\mathrm{dfc}(\ell,\lambda)$ дуги ℓ в направлении точки $\lambda\neq 0$.

Пусть $\theta\in\arg\lambda$. Отметим некоторую точку w° (*отмеченная точка*) на дуге ℓ. Она разбивает дугу ℓ на две поддуги, одну из которых обозначим через ℓ_-, другую — ℓ_+ (возможно вырождение одной из поддуг в точку). Выберем ориентацию каждой из поддуг так, что "движение" по каждой из них направлено от конца дуги ℓ к отмеченной точке w°. При этом для двух различных точек w_1 и w_2, лежащих на дуге ℓ, пишем $w_1\prec_\circ w_2$, если, во-первых, обе эти точки одновременно лежат либо на дуге ℓ_-, либо на дуге ℓ_+, а во-вторых, при движении от конца дуги ℓ в направлении отмеченной точки w° точка w_1 "встречается раньше" точки w_2. Длину дуги, соединяющей эти точки, обозначим $s(w_1,w_2)=s(w_2,w_1)$. При фиксированной точке w° однозначно определено значение

$$d_{w^\circ}(\theta,\ell):=\sup\left\{\frac{\mathrm{Re}\,\big(e^{-i\theta}(w_1-w_2)\big)}{s(w_1,w_2)}\ :\ w_1\prec_\circ w_2\right\}. \qquad (3.1.3)$$

Тогда величина $\mathrm{dfc}(\ell,\lambda):=\inf\{d_{w^\circ}(\theta,\ell):w^\circ\in\ell\}\in[-1,1]$ — это *дефект выпуклости* $\mathrm{dfc}(\ell,\lambda)$ *дуги* ℓ *в направлении точки* λ.

Теорема 3.1.4 ([Хаб02″, Теорема 3]). *Пусть* S *— длина дуги* ℓ, $\Lambda=(\lambda_k)$ *и* $\Gamma=(\gamma_k)$, $k=1,2,\dots,$ *— две занумерованные последо-*

вательности в $\mathbb{C}$. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k - \gamma_k| \, \frac{\exp\bigl(S \cdot \mathrm{dfc}(\ell, \overline{\lambda}_k)\, |\lambda_k|\bigr) - 1}{\mathrm{dfc}(\ell, \overline{\lambda}_k)\, |\lambda_k|} < +\infty \,, \tag{3.1.4}$$

то $\operatorname{exc} \Gamma \leqslant \operatorname{exc} \Lambda$ *на дуге* ℓ *и в* $L^p(\ell)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

В (3.1.4) и далее, в п. 3.4.3, при формулировке теоремы 3.4.3, функция $\dfrac{\exp(S \cdot x) - 1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $S > 0$, считается продолженной в точку $x = 0$ по непрерывности, т.е. $\dfrac{\exp(S \cdot x) - 1}{x}\Big|_{x=0} = S$. Если $\ell = [a, b]$ — отрезок на $\mathbb{R}$, то $\mathrm{dfc}([a, b], \lambda) = -|\cos \theta|$ и условие (3.1.4) эквивалентно условию (2.1.33) (подробности — в [Хаб02″]). Таким образом, теорема 3.1.4 содержит в себе теорему Редхеффера–Александера 2.1.31. Другой вариант теоремы об избытках на дуге, не перекрывающийся теоремой 3.1.4, учитывает размеры дуги ℓ, но не ее конфигурацию.

Пусть $B \subset \mathbb{C}$, λ — ненулевая точка в $\mathbb{C}$, $\theta \in \arg \lambda$. Положим

$$d(x, \theta; B) := \sup \{ |z - z'| \colon \ \operatorname{Re} z e^{-i\theta} = \operatorname{Re} z' e^{-i\theta} = x, \ z, z' \in B \},$$

$$d(B; \lambda) := d(B, \theta) := \sup_{x \in \mathbb{R}} d(x, \theta; B) \tag{3.1.5}$$

Здесь $d(B; \lambda)$ и $d(B, \theta)$ — это *ширина множества* B *в направлении точки* λ и соотв. *в направлении* θ.

Теорема 3.1.5 ([Хаб02′, Теорема 1]). *Если две занумерованные последовательности* $\Lambda = (\lambda_k)$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)$ *связаны соотношением*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \gamma_k| \exp\bigl(d(\ell; \overline{\lambda}_k)\, |\lambda_k|\bigr) < +\infty \,, \tag{3.1.6}$$

то $\operatorname{exc} \Gamma = \operatorname{exc} \Lambda$ *на* ℓ *и в* $L^p(\ell)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Легко понять, что при предъявлении какой-либо конкретной последовательности показателей, порождающей (не)полную или (не)минимальную систему экспонент на дуге, теоремы 3.1.4 и 3.1.5 сразу дают теоремы о (не)полноте или (не)минимальности для близких в смысле (3.1.4) или (3.1.6) последовательностей показателей. По-видимому, при дополнительных условиях на дугу ℓ и последовательность показателей Λ возможны и ослабления условий в теоремах этого пункта, подобные теореме А. М. Седлецкого

2.1.32 и др. для избытков в пространствах на отрезке. Какие-либо исследования в этом направлении нам неизвестны.

3.2 Полнота в неограниченной области и на ее замыкании

3.2.1 Неограниченная область

Для *положительных* последовательностей Λ критерий полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в открытой горизонтальной полосе, после предшествующих результатов Т. Карлемана [C22], В. Фукса [Fu46], Ж.-П. Кахана [Kah53], А. Ф. Леонтьева [Лео51], был установлен П. Мальявеном и Л. А. Рубелом [MR61, Теоремы 6.2, 9.1], [Ru96, раздел 22]. Для последовательности Λ, лежащей *на мнимой оси*, соответствующий результат был получен И. Ф. Красичковым-Терновским в [Кр72′, Следствие 8.7] в связи с потребностями задачи спектрального синтеза.

Задача полноты системы экспонент в *неограниченной выпуклой области* в $\mathbb{C}$ была полностью решена в работах Б. Н. Хабибуллина (анонсировано в [Хаб88′]; частный случай[2] получен в [Хаб88], окончательно — в [Хаб89]; другим, более общим методом, — в [Хаб91]). Критерий полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ основан на приведенной ниже теореме 3.2.1, имеющей и самостоятельный интерес (ср. с [MR61, Теорема 4.1], где рассматривались только последовательности $\Lambda > 0$ и $\Gamma > 0$).

Функции интервалов

$$l_\Lambda^-(r,R) = \sum_{\substack{r\leqslant|\lambda_n|<R\\ \operatorname{Re}\lambda_n<0}} \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{\lambda_n}\right), \quad l_\Lambda^+(r,R) = \sum_{\substack{r\leqslant|\lambda_n|<R\\ \operatorname{Re}\lambda_n>0}} \operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_n} \qquad (3.2.1)$$

положительной полуоси порождают *логарифмическую меру*

$$l_\Lambda(r,R) = \max\{l_\Lambda^-(r,R), l_\Lambda^+(r,R)\}, \quad 0 \leqslant r < R < +\infty, \qquad (3.2.2)$$

последовательности Λ. Главный результат в [Хаб89, Основная Теорема], опирающийся на технику выметания мер на прямую (мнимую ось), —

---

[2] В [Лев96, с. 86] неверно приведена ссылка именно на эту работу, а не на две последующие.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\Lambda, \Gamma \subset \mathbb{C}$ *— последовательности конечной верхней плотности и* $\operatorname{Re}\Gamma > 0$. *Тогда следующие три утверждения попарно эквивалентны:*

1) *Для любой ц.ф.э.т.* $g \not\equiv 0$ *при* $g(\Gamma) = 0$ *и любом числе* $\varepsilon > 0$ *найдется ц.ф.э.т.* $f \not\equiv 0$ *такая, что* $f(\Lambda) = 0$ *и* $\log\bigl|f(iy)\bigr| \leqslant \log\bigl|g(iy)\bigr| + \varepsilon|y|$ *при всех* $y \in \mathbb{R} \setminus E_\varepsilon$, *где* E_ε *— множество конечной лебеговой меры на* $\mathbb{R}$.

2) *Для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется постоянная* M *такая, что неравенство* $l_\Lambda(r, R) \leqslant l_\Gamma(r, R) + \varepsilon \log(R/r) + M$ *справедливо при всех* $0 < r < R < +\infty$.

3) *Слова "Для любой ц.ф.э.т.* $g \not\equiv 0$ *при* $g(\Gamma) = 0$ …*" в начале п. 1) заменены на фразу "Для некоторой ц.ф.э.т.* $g \not\equiv 0$ *с* $\operatorname{Zero}_g \cap \mathbb{C}_+ = \Gamma$ …*", а далее дословно п. 1).*

Неограниченная выпуклая область $G \subset \mathbb{C}$ *звездна в направлении* $\theta \in \mathbb{R}$ (относительно бесконечно удаленной точки), если при некотором $t_0 \geqslant 0$ она включает в себя луч $\{te^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon\ t \geqslant t_0\}$. При формулировке критерия полноты системы экспонент в неограниченной выпуклой области G, не умаляя общности, можно считать ее звездной в направлении 0 (за счет поворота плоскости). *Ширину* $d(G, 0) =: d_G$ такой области G, определенную в (3.1.5) в терминах величины

$$d(x, 0; G) := \sup\{|z - z'| : z, z' \in G, \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z' = x\},$$

допуская для нее и значение $+\infty$, можно задать и как

$$d_G := \lim_{x\to+\infty} d_G(x), \quad d_G(x) := d(x, 0; G). \tag{3.2.3}$$

В [Хаб89] введены понятия *логарифмической блок-плотности* последовательности точек в $\mathbb{C}$, рассматривавшегося ранее для последовательностей *положительных* чисел Л. А. Рубелом в [Ru56] и в его совместной с П. Мальявеном статье [MR61]:

$$\overline{D}_{\inf}(\Lambda) := \inf_{a>1} \frac{1}{\log a} \limsup_{r\to+\infty} l_\Lambda(r, ar), \tag{3.2.4i}$$

$$\overline{D}_L(\Lambda) := \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r\to+\infty} l_\Lambda(r, ar), \tag{3.2.4L}$$

$$b^*(\Lambda) := \inf b\,, \tag{3.2.4b}$$

где последний infimum берется по всем b таким, что найдется постоянная M_b, для которой неравенства $l_\Lambda(r,R) \leqslant b\log(R/r) + M_b$ выполнены при всех значениях $0 < r < R < +\infty$. Для последовательностей конечной верхней плотности все эти плотности совпадают между собой (см. [Хаб89], [KX00]).

Теорема 3.2.2 ([Хаб89, Теорема 2]). *Пусть G — неограниченная выпуклая область, звездная в направлении* 0. *Система* Exp_Λ *полна в такой области G, если и только если $\overline{D}_L(\Lambda) \geqslant \dfrac{d_G}{2\pi}$ или верхняя плотность $\overline{\Delta}(\Lambda)$ бесконечна.*

Заметим, что топология пространства $H(G)$ эквивалентна L^p_{loc}-топологии, индуцированной на $H(G)$, как на множество. Таким образом, критерий полноты справедлив и в такой топологии. Из определения плотностей (3.2.4) и теоремы 3.2.2 следует аналог теоремы 2.2.4 об избытке “половины экспонент”:

Теорема 3.2.3. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ удовлетворяет условию типа Линделефа* (2.2.2), *область G такая же, как в теореме* 3.2.2, $\Lambda_+ := \Lambda \cap \mathbb{C}_+$, $\Lambda_- := \Lambda \cap \mathbb{C}_-$. *Если система* Exp_Λ *полна в G, то и системы* Exp_{Λ_+}, Exp_{Λ_-} *полны в G.*

Следующий пример показывает, что в теореме 3.2.2 существенны именно плотности (3.2.4), построенные через логарифмическую меру $l_\Lambda(r,R)$ по всевозможным интервалам $[r,R)$, а функция $l_\Lambda(0,R)$ недостаточно информативна.

Пример 3.2.1. Пусть $r_k = \exp k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $I_k = [r_k, kr_k]$, N — натуральное число. Составим последовательность Λ из рациональных чисел, попавших в отрезки I_k и имеющих в несократимой записи знаменатель не более $3N$. Тогда при $k > 2$ и $2r_k \leqslant t < kr_k$ справедлива оценка $n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(b) \geqslant Nt$. Используя интегрирование по частям, получаем

$$l_\Lambda(r_k, kr_k) \geqslant \int\limits_{2r_k}^{kr_k} \frac{\mathrm{d}n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t)}{t} \geqslant N\log\frac{kr_k}{r_k} + O(1),$$

т.е. по теореме 3.2.2 (через плотность $b^*(\Lambda)$ из (3.2.4b), совпадающей с (3.2.4L)) система Exp_Λ полна в любой открытой горизонтальной полосе ширины $b = 2\pi N$. В то же время функция $l_\Lambda(0,R)$

растет медленно. Действительно, интегрируя по частям и учитывая оценку $n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant 3Nt$, при $R \to +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} l_\Lambda(0,R) &\leqslant \sum_{r_k<R} \int_{r_k}^{kr_k} \frac{\mathrm{d}n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t)}{t} \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{\log R}} \Bigl(\int_{r_k}^{kr_k} \frac{3Nt}{t^2}\,\mathrm{d}t + O(1)\Bigr) \\ &\leqslant 3N \sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{\log R}} \log k + O\bigl(\sqrt{\log R}\,\bigr) \\ &\leqslant O\bigl(\sqrt{\log R}\log\sqrt{\log R}\,\bigr) \leqslant o(\log R), \quad R\to+\infty. \end{aligned}$$

3.2.2 Замыкание неограниченной области

Пусть G — неограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, звездная в направлении 0, как и в предыдущем п. 3.2.1. Если в обозначениях (3.2.3) либо $d_G = +\infty$, либо для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $d_G(x) \neq d_G < +\infty$, то условия полноты системы Exp_Λ на $\operatorname{clos} G$, как нетрудно видеть, в точности те же, что и в Теореме 3.2.2. Когда же существует значение $x \in \mathbb{R}$, при котором $d_G(x) = d_G < +\infty$, то *проблема полноты системы экспонент в* $\operatorname{clos} G$ *не решена и в целом остается открытой.* Однако, и для такой ситуации в работе Б. Н. Хабибуллина [Хаб91, Следствие 4.2] установлен критерий полноты системы Exp_Λ на $\operatorname{clos} G$ при определенных условиях отделенности последовательности Λ от $i\mathbb{R}$:

Теорема 3.2.4. *Пусть неограниченная выпуклая область G звездна в направлении 0 и существует хотя бы одно $x \in \mathbb{R}$, при котором $d_G(x) = d_G < +\infty$, а последовательность Λ удовлетворяет условию (2.1.8) отделенности от $i\mathbb{R}$. Система Exp_Λ полна на $\operatorname{clos} G$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{1\leqslant r<R<+\infty} \Bigl(l_\Lambda(r,R) - \frac{d_G}{2\pi}\log\frac{R}{r}\Bigr) = +\infty\,.$$

Ранее очень специальный случай этого результата для $\Lambda \geqslant 0$ в терминах порождающей функции F_Λ рассматривался для замкнутой горизонтальной полосы А. Ф. Леонтьевым [Лео63], [Лео80, Теорема 3.1.7]. Частный случай теоремы 3.2.4 для *положительных* последовательностей Λ — критерий полноты системы Exp_Λ в замкнутой горизонтальной полосе — был установлен Л. А. Рубелом и П. Мальявеном в [MR61, Теорема 9.1]. Как и для $\Lambda > 0$ в [MR61, Теорема 4.1], предварительно доказывается усиление теоремы 3.2.1: *во всех трех утверждениях теоремы 3.2.1 при дополнительном условии отделенности последовательностей Λ и Zero_g от мнимой оси можно положить $\varepsilon = 0$, $E_\varepsilon = \varnothing$* [Хаб91, Основная Теорема]. Для $g(z) = \sin \pi z$ этот результат можно рассматривать как далеко идущее усиление и обобщение теоремы Ф. Карлсона [Ca14] (см. [Boa54, с. 153], [Лев56, гл. IV], [Лев96, 8.3]) и многочисленных ее обобщений (для $\Lambda > 0$) в работах Т. Карлемана [C22], В. Фукса [Fu46], Ж.-П. Кахана [Kah52], [Kah53] и др. Еще одно следствие из [Хаб91, Основная Теорема] —

Теорема 3.2.5 ([Хаб91, Следствие 4.1]). *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (2.1.8) отделенности от мнимой оси. Для существования ц.ф.э.т. $f \not\equiv 0$, $f(\Lambda) = 0$, с индикатором роста $h_f(\pm\pi/2) \leqslant \pi d$, где $d \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\delta(y)$ такая, что $\delta(y) \to 0$ при $y \to +\infty$, для которой при всех $0 \leqslant r < R < +\infty$ выполнено*

$$l_\Lambda(r, R) \leqslant \bigl(d + \delta(R)\bigr) \log \frac{R}{r} + O(1). \tag{3.2.5}$$

Из этой теоремы вытекает

Следствие 3.2.1. *Пусть последовательность Λ такая же, как в теореме 3.2.5, $d \geqslant 0$. Тогда эквивалентны утверждения:*

i) *Существует число $D > 0$, для которого система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ неполна в пространстве ростков голоморфных функций $H(\Pi)$, когда Π — замкнутый прямоугольник со сторонами, параллельными осям $\mathbb{R}$ и $i\mathbb{R}$, ширины*[3] *$2\pi d$ в направлении 0 и ширины D в направлении $\pi/2$.*

ii) *Существует функция $\delta(y) \to 0$ при $y \to +\infty$, с которой (3.2.5) выполнено для всех $0 \leqslant r < R < +\infty$.*

Условие (2.1.8) отделенности от мнимой оси в теоремах 3.2.4, 3.2.5 и в следствии 3.2.1 можно ослабить. Достаточно, например, требовать выполнения лишь следующего условия: существуют постоянные $\delta > 0$ и C такие, что для любого $y \in \mathbb{R}$ сумма всех

---

[3] Если $d = 0$, то прямоугольник Π вырождается в отрезок длины D.

углов, под которыми виден отрезок $[i(y-1), i(y+1)]$ из точек $\lambda_k \in D(iy, \delta|y|)$, не превышает C. Но полное исключение дополнительных требований на расположение точек из Λ вдоль iR при использовании лишь логарифмической меры невозможно. Приведем соответствующий

Пример 3.2.2. В работе Ж.-П. Кахана [Kah59] (см. также [Red74, с. 25]) построена последовательность нулевой верхней плотности $\Lambda_0 \subset i\mathbb{R}$, для которой не существует ц.ф.э.т. $f_0 \not\equiv 0$, $f_0(\Lambda_0)$, ограниченной на $i\mathbb{R}$, хотя, очевидно, $l_{\Lambda_0}(r, R) \equiv 0$. Этот же пример можно модифицировать и применительно к мажоранте $\pi d|y|$, $d > 0$. Рассмотрим последовательность Λ, полученную объединением последовательности Λ_0 и множества нулей ц.ф.э.т. $\cos \pi dz$. Тогда имеет место соотношение

$$l_\Lambda(r, R) \leqslant d \log \frac{R}{r} + O(1), \qquad 0 \leqslant r < R < +\infty.$$

Если бы существовала ц.ф.э.т. $f_d \not\equiv 0$, $f_d(\Lambda) = 0$, такая, что $\log|f_d(iy)| \leqslant \pi d|y|$, то ц.ф.э.т. $f_0(z) = \dfrac{f_d(z)}{\cos \pi dz}$ противоречила бы примеру Ж.-П. Кахана.

Варьируя один пример из [Хаб91′, Пример 3], на основе следствия 3.2.1 (с $d = 0$) для любого $R > 0$ можно построить несколько неожиданный пример последовательности показателей Λ, для которой система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ не полна в любой сколь угодно узкой неограниченной области, содержащей луч, но полна в круге радиуса R (см. [Хаб93, пример 3.8.1]).

Использование именно логарифмической меры $l_\Lambda(r, R)$ по всевозможным интервалам в теоремах 3.2.4, 3.2.5 и в следствии 3.2.1 также по существу (ср. с примером 3.2.1). Наиболее рельефно это проявляется через критерий полноты системы экспонент уже в другом пространстве функций $H_0(S_d)$, непрерывных в замыкании $\overline{S}_d \subset \mathbb{C}$ горизонтальной полосы

$$S_d := \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| < d\} \subset \mathbb{C}, \tag{3.2.6}$$

стремящихся к нулю равномерно по $\operatorname{Im} z$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$, $z \in S_d$, и одновременно голоморфных в S_d; топология в $H_0(S_d)$ задается как топология равномерной сходимости на замкнутых полуполосах $\overline{S}_d \cup \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \geqslant a\}$, где $a > -\infty$. Этот критерий отмечен

П. Мальявеном и Л. А. Рубелом [MR61, с. 204] как следствие работы В. Фукса [Fu46], но его полное доказательство приведено у Дж. М. Андерсона [An72, Теорема 1]:

Теорема 3.2.6. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\} > 0$ *удовлетворяет условию разделенности* (2.1.16). *Система* $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ *полна в* $H_0(S_d)$ *тогда и только тогда, когда* (ср. с (3.1.1))

$$\limsup_{R\to+\infty}\Bigl(l_\Lambda(0,R) - \frac{d}{\pi}\log R\Bigr) = +\infty.$$

Для *неограниченной выпуклой n-угольной* области G с границей ∂G, состоящей из двух лучей и конечного числа отрезков, критерий полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в пространстве Смирнова[4] $E^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, функций, голоморфных в G с предельными угловыми значениями из $L^p(\partial G)$ и с нормой $\|f\|_{p,\partial G} := \Bigl(\int_{\partial G}|f(z)|^p\,|dz|\Bigr)^{1/p}$, был установлен для $p = 2$ Б. В. Винницким в [Ви96, Теорема 1]. Для краткости приведем здесь лишь критерий полноты из предшествующей работы Б. В. Винницкого [Ви94, Теорема 5] для полуполосы S_d^+ — пересечение полосы (3.2.6) с правой полуплоскостью.

Теорема 3.2.7. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}_+$ — *последовательность попарно различных комплексных чисел. Система* $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ *полна в в пространстве* $E^2(S_d^+)$, *если и только если имеет место хотя бы одно из двух равенств*

$$\sum_{|\lambda_k|\leqslant 1} \operatorname{Re}\lambda_k = +\,\infty,$$

$$\limsup_{r\to\infty}\Biggl(\sum_{1<|\lambda_k|\leqslant r} \operatorname{Re}\Bigl(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{\lambda_k}{r^2}\Bigr) - \frac{d}{\pi}\log r\Biggr) = +\infty.$$

Результаты из [Ви94, Теорема 5] и [Ви96, Теорема 1] основаны на полном описании последовательностей неединственности для широкого класса голоморфных в полуплоскости функций, развивающем теорему 2.1.26 для $p = 2$ и существенно обобщающем предшествующие классическую теорему Неванлинны об описании нулей ограниченных голоморфных в полуплоскости функций [Го86, гл. I, § 3], [Koo84, гл. VI, C]), теорему В. Фукса [Fu46], результат М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [ДжМ77, Теорема

---

[4] $E^p(G)$ можно определить и как пополнение $\mathbb{C}[z]$ по норме $\|\cdot\|_{p,\partial G}$.

3] (G — угол) и следующую теорему, формулируемую здесь в чуть ослабленной форме:

Теорема 3.2.8 (Ж.-П. Кахан [Kah52], [Kah53, Ch. III, § 3]). *Пусть $\Lambda > 0$ — последовательность конечной верхней плотности, а функция $b\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации. Существование голоморфной в правой полуплоскости функции $F \not\equiv 0$, $F(\Lambda) = 0$, удовлетворяющей оценке $|F(z)| \leqslant e^{b(|z|)|z|}$ при всех $\operatorname{Re} z > 0$, в обозначениях (3.2.1) эквивалентно условию*

$$\limsup_{R\to+\infty}\Bigl(l_\Lambda^+(0,R) - \frac{1}{\pi}\int_1^R \frac{b(t)}{t}\,\mathrm{d}t\Bigr) < +\infty. \tag{3.2.7}$$

Далеко идущие обобщения теоремы Ж.-П. Кахана 3.2.8 на произвольные последовательности комплексных чисел Λ с $\operatorname{Re}\Lambda > 0$ были получены в статье Б. В. Винницкого [Ви96′] и в совместных работах Б. В. Винницкого и В. Л. Шарана [ВиШ98]–[ВиШ02], одно из которых —

Теорема 3.2.9 (Винницкий Б. В., Шаран В. Л. [ВиШ98, Теорема]). *Пусть функция b такая же, как в теореме 3.2.8, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность*[5] *точек в $\mathbb{C}_+$. Существование голоморфной в правой полуплоскости функции $F \not\equiv 0$, $F(\Lambda) = 0$, удовлетворяющей оценке $|F(z)| \leqslant e^{b(|z|)|z|}$ при всех $\operatorname{Re} z > 0$, эквивалентно одновременному выполнению двух соотношений*

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty,$$

$$\limsup_{r\to\infty}\Bigl(\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \operatorname{Re}\Bigl(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{r^2}\Bigr) - \frac{1}{\pi}\int_1^R \frac{b(t)}{t}\,\mathrm{d}t\Bigr) < +\infty.$$

Для $\Lambda > 0$ с $\overline{\Delta}(\Lambda) < \infty$ пара последних соотношений легко упрощается до (3.2.7), значит теорема Ж.-П. Кахана 3.2.8 — частный случай теоремы 3.2.9.

Различные утверждения об описании последовательностей неединственности в весовых классах голоморфных в полуплоскости функций в связи с проблемой Ватсона–Мандельбройта–Винера имеются в книгах С. Мандельбройта [Man55], [Man62] и в статьях П. Мальявена [Mal55] и Г. Т. Денга [De86]–[De00].

---

[5] Для Λ допускаются предельные точки и на мнимой оси.

Недавно, обобщая некоторые результаты М. М. Джрбашяна [Дж88] и Х. Шена [Sh64], в совместных работах А. Буавен и Ч. Жу получили новые достаточные условия полноты систем вида $\mathcal{F}_\Lambda$ (см. введение) [BZh01] и систем степеней $\{z^{\lambda_k}\}$ [BZh02] в гильбертовом пространстве Бергмана (см. [HKZ00])

$$B^2(G) := \left\{ f \in H(G)\colon \|f\|_{2,G} := \sqrt{\int_G |f(z)|^2 \, \mathrm{d}m(z)} < \infty \right\}, \quad (3.2.8)$$

когда G — неограниченная и невыпуклая область. Условия полноты системы степеней $\{z^{\lambda_k}\}$ из [BZh02] распространялись на пространства $B^p(G)$, $1 < p < \infty$, в совместной статье Х. Янга и Г. Т. Денга [YDe05].

Результаты из [BZh01] влекут за собой условия полноты в $B^2(G)$ для систем экспонент как частного случая систем вида $\mathcal{F}_\Lambda$, а из [BZh02] и [YDe05] такие условия для систем Exp_Λ можно получить после стандартной замены $z = e^w$, но уже для соответствующим образом преобразованной области и нормы. Поскольку первый основной результат из [BZh01] сразу дает достаточные условия полноты для систем Exp_Λ, приведем именно его. При этом на *неограниченную односвязную в* $\mathbb{C}_\infty$ *область* G накладываются следующие ограничения:

(G1) *для некоторых постоянных* $\alpha', s' > 0$ *суммарная длина дуг, полученных пересечением окружности* $\partial D(r)$ *с областью* G *при достаточно больших* r *не превышает величины* $\exp(-\alpha' r^{s'})$*;*

(G2) *дополнение* $\mathbb{C} \setminus \operatorname{clos} G$ *состоит из конечного числа неограниченных односвязных в* $\mathbb{C}$ *областей* D_n*,* $n = 1, 2, \ldots, m$*, содержащих открытые углы раствора соотв.* π/α_n*,* $\alpha_n > 1/2$*.*

Для такой области G справедлива

Теорема 3.2.10 (А. Буавен, Ч. Жу [BZh01])**.** *Пусть* $f \in E[\rho, \sigma]$*,* $\beta := 1/(s' - \rho)$*, и производные* $f^{(n)}(0) \neq 0$ *отличны от нуля при всех* $n = 0, 1, \ldots$*. Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$

попарно различных чисел удовлетворяет одному из неравенств

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to\infty}\frac{n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(r)}{r^{s'\rho\beta}} &> e\Big(\frac{2}{s'\alpha'}\Big)^{\rho\beta}(\rho\sigma)^{s'\beta},\\ \liminf_{r\to\infty}\frac{n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(r)}{r^{s'\rho\beta}} &> \Big(\frac{2}{s'\alpha'}\Big)^{\rho\beta}(\rho\sigma)^{s'\beta}.\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Тогда если

$$\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{1+\vartheta-s'}}=+\infty, \qquad \vartheta:=\max_{1\leqslant n\leqslant m}\alpha_n,$$

то система целых функций $\{f(\lambda_k z)\}$ *полна в* $B^2(G)$.

По-видимому, абсолютная полнота для пространств на неограниченных областях специальным образом не изучалась, за исключением одного результата В. В. Напалкова [На80] (сразу многомерного), о котором речь пойдет в п. 4.1.7. Таким образом, эта тематика еще ждет исследования. Устойчивость полноты также отдельно не рассматривались, но содержательные результаты в этом направлении нетрудно получить из упомянутых выше теорем и соответствующих утверждений для пространств функций в ограниченных областях и на компактах.

3.3 Полнота в ограниченной области

3.3.1 Полнота

Основа подавляющего большинства результатов здесь — следующая версия теоремы 1.1.2.

Теорема 3.3.1 ([Мар45]). *Система* Exp_Λ *полна в выпуклой области* G *с опорной функцией* H_G, *если и только если* Λ — *последовательность единственности для пространства* $E[1,h)$, *где* $h(\theta)\equiv H_G(-\theta)$, $\theta\in[-\pi,\pi]$.

Достаточные или необходимые условия полноты системы экспонент, полученные в XX веке, — материал обширнейший, и мы отсылаем по их поводу к книгам И. И. Ибрагимова [Иб71], Б. Я. Левина [Лев56], [Лев96], А. Ф. Леонтьева [Лео80], [Лео81, гл. II]. Эти условия прежде всего касаются полноты в открытом круге $D(R)$ радиуса R с центром в нуле и, как правило, формулировались в терминах верхней или нижней (усредненной) плотностей и $\underline{D}(\Lambda)$ или подобных им характеристик последовательностей Λ. Отметим здесь наиболее сильный в этих терминах точный результат Б. Н. Хабибуллина [Хаб92, следствие 1].

Радиус круга полноты $R(\Lambda)$ — это точная верхняя грань радиусов кругов $D(R)$, в которых полна система Exp_Λ. В терминах усредненной верхней плотности $\overline{D}(\Lambda)$ из (2.1.4) имеет место а

Теорема 3.3.2 ([Хаб92, Следствие 1]). *Справедливы и точны оценки* $\overline{D}(\Lambda) \leqslant R(\Lambda) \leqslant \pi\overline{D}(\Lambda)$.

Там же с использованием неконструктивного метода выметания из подраздела 1.2 в форме упрощенного варианта теоремы 1.2.1 были получены неулучшаемые оценки для *экстремального типа* $\sigma_{\inf}(\Lambda;\rho) := \inf\{\sigma \in \mathbb{R}\colon\, f \in E[\rho,\sigma],\ f \not\equiv 0,\ f(\Lambda) = 0\}$ в терминах усредненной верхней плотности[6] $\overline{D}_\rho(\Lambda) := \limsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}$ произвольной последовательности Λ при порядке ρ.

Теорема 3.3.3 ([Хаб92, Теорема 1]). *При любом* $\rho > 0$ *имеют место точные оценки* $\overline{D}_\rho(\Lambda) \leqslant \sigma_{\inf}(\Lambda;\rho) \leqslant P(\rho)\overline{D}_\rho(\Lambda)$, *где*

$$P(\rho) := \begin{cases} \pi\rho, & \rho > 1/2, \\ \pi\rho/\sin\pi\rho\,, & 0 < \rho \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Оценка снизу величины $R(\Lambda)$ для *положительных* Λ часто увязывалась с каноническим четным произведением Адамара–Вейерштрасса $W(z;\Lambda)$ из (3.1.2). Но в работе Л. А. Рубела [Ru56, Теорема 6] для $\Lambda > 0$ было установлено, что величина $\sigma_{\inf}(\Lambda, 1)$, всегда совпадающая по теореме 3.3.1 с $R(\Lambda)$, не обязательно достигается на $W(z;\Lambda)$. Некоторыми количественными оценками (не окончательными) этот факт дополнен А. Ю. Поповым [По99].

В совместной статье П. Мальявена и Л. А. Рубела [MR61, Теорема 8.1] для $\Lambda > 0$ в терминах логарифмической блок-плотности $\bar{D}_L(\Lambda)$ из (3.2.4) и так называемой плотности Пуассона дано описание всех случаев, когда $R(\Lambda)$ совпадает с типом произведения Вейерштрасса (3.1.2). Там же дважды ставиться

---

[6] В частности, по (2.1.4) $\overline{D}_1(\Lambda) = \overline{D}(\Lambda)$.

Проблема 3.3.1 ([MR61, стр. 177, 198]). *Найти точное выражение для радиуса круга полноты $R(\Lambda)$ или, более общо̀, для $\sigma_{\inf}(\Lambda;\rho)$ исключительно в терминах распределения, или специальных плотностей, точек из Λ.*

Последняя работа [MR61] вместе с совместной статьей Ж.-П. Кахана и Л. А. Рубела [KaR60] содержит много другой интересной и полезной информации о свойствах произведений Вейерштрасса (3.1.2). В то же время задача полноты системы экспонент, не говоря уж о проблеме полноты систем вида $\mathcal{F}_\Lambda$, в настоящее время не имеет удовлетворительного решения *ни для какой ограниченной выпуклой области* G (даже для круга — проблема 3.3.1). Тем не менее в работе Б. Н. Хабибуллина [Хаб91″, Теорема 5] дается полное решение проблемы полноты в терминах функций Йенсена или Грина в духе подраздела 1.2.

Применение метода выметания

Пусть G — ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{C}$, G^* — множество, симметричное ему относительно вещественной оси, $s_G(\theta)$ — длина дуги границы $\partial \operatorname{clos} G^*$, отсчитываемая против часовой стрелки от заданной фиксированной точки до ближайшей к ней (вдоль границы) точки опоры опорной к $\operatorname{clos} G^*$ прямой, ортогональной направлению θ.

Пусть $V \in \mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$ (см. подраздел 1.2). Функцию $k_V(\theta) := \int_0^{+\infty} V(te^{i\theta})\,\mathrm{d}t$ называем *индикатором* V (при порядке 1). Индикатор k_V всегда может мыслится как опорная функция некоторого выпуклого компакта K_V такого, что $0 \in \operatorname{int} K_V \neq \varnothing$. Полагаем

$$S(K_V, G) := \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} k_V(\theta)\,\mathrm{d}s_G(\theta)\,, \tag{3.3.1}$$

Это ни что иное, как классическая *смешанная площадь Минковского выпуклых множеств* K_V *и* G^* (см. комментарий в [Хаб91′]).

Для $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$, полагаем $D_G(\Lambda) := \inf d$, где точная нижняя грань берется по всем $d \in \mathbb{R}^+$, для которых

$$\sup_{V\in\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})}\Big(\sum_k V(\lambda_k) - \frac{d}{\pi}S(K_V, G)\Big) < +\infty\,. \tag{3.3.2}$$

Здесь класс функций Йенсена $\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$ можно заменить на любой из подклассов (J1)–(J3) из п. 1.2.2, к примеру, на класс функций Грина $\mathcal{G}_0^{\mathrm{reg}}(\Omega)$ или на класс функций вида (1.2.9) по аналитическим дискам g или по полиномиальным дискам g (ср. с формулировкой теоремы 2.1.19). Критерий из [Хаб91″, Теорема 5] —

Теорема 3.3.4. *Система* Exp_Λ *полна в выпуклой области* G *тогда и только тогда, когда* $D_G(\Lambda) \geqslant 1$.

Начальная форма метода выметания, применявшаяся в работах [Хаб91″, § 7, п. 4, Теорема единственности], [Хаб91′, Теорема 4.1], позволила получить развернутую “непрерывную” шкалу достаточных условий для множеств единственности для пространств целых функций $E[\rho, h)$ и $E[\rho, h]$, где h — ρ-тригонометрически выпуклая. При $\rho = 1$ по теореме 3.3.1 они переходят в условия полноты системы экспонент в области (теорема 3.3.5 ниже). В крайних проявлениях эта шкала охватывает практически все основные известные ранее результаты о полноте системы экспонент в области или на компакте, формулируемые в терминах различных плотностей распределения последовательности показателей. Фактически при доказательстве теоремы 3.3.5 было в той или иной форме использовано соотношение (1.2.7) следствия 1.2.1 для функций Йенсена, построенных по схеме i)–v) из п. 1.2.2, исходя из функций $v \in SH^+(\mathbb{C})$ вида $q(\theta)r^\gamma$, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Теорема 3.3.5. *Пусть область* G *выпукла,* $s_G(\theta)$ *— функция длины дуги от направления, определеная выше,* $\gamma \in \mathbb{R}^+$, *а* q *— некоторая* γ*-тригонометрически выпуклая положительная функция. Для* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ *и* $c \in \mathbb{R}^+$ *полагаем*

$$\Lambda(t; q) := \sum_{|\lambda_k|<t} q(\arg \lambda_k), \qquad \Lambda(t; c) := \sum_{|\lambda_k|<t} c = c \cdot n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t). \tag{3.3.3}$$

Допустим, что

1) *если* $0 \leqslant \gamma < 1$, *то выполнено неравенство*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \int\limits_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^\gamma + \left(\frac{t}{r}\right)^\gamma \right) \frac{\Lambda(t;q)}{t} \, \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{1-\gamma^2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} q(\theta) \, \mathrm{d}s_G(\theta),$$

2) *если* $\gamma = 1$, *то справедливо неравенство*

$$\limsup_{a\to+\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r\to+\infty} \int\limits_r^{ar} \frac{\Lambda(t;q)}{t^2} \, \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} q(\theta) \, \mathrm{d}s_G(\theta),$$

3) *если* $\gamma > 1$ *и* $\|q\| := \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} q(\theta)$, *то*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \left(\int\limits_1^r \left(2\Lambda\bigl(t; \|q\|\bigr) - \left(\frac{t}{r}\right)^\gamma \Lambda(t;q) \right) \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^\gamma \Lambda(t;q) \frac{\mathrm{d}t}{t} \right) \geqslant \frac{\|q\|}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(\theta) \, \mathrm{d}\theta + \frac{1}{\gamma^2 - 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} q(\theta) \, \mathrm{d}s_G(\theta).$$

Тогда система Exp_Λ *полна в области* G.

Впрочем, в силу теоремы 3.3.1 второе условие полноты в теореме 3.3.5 для случая $\gamma = \rho$ было известно и несколько раньше как теорема единственности из совместной работы А. Ф. Гришина и М. Л. Содина [ГС88]. Ряд примеров из [Хаб91′, § 4, примеры] и [Хаб93, примеры 2.5.1, 2.5.2, 3.8.1] показывает, что условия 1)–3) в теореме 3.3.5 без ее ослабления не могут быть упрощены отбрасыванием каких-либо слагаемых в левых частях неравенств и условия эти независимы друг от друга. На примерах правильно распределенных последовательностей Λ в свете [Лев56, гл. IV, Теорема 9] нетрудно убедиться, что все условия 1)–3) теоремы 3.3.1 *точны*. Любопытно отметить, что условия 1)–3) в краевых своих проявлениях "замыкаются в окружность" в следующем смысле. *При* $\gamma = 0$ (в этом случае всегда $q \equiv \text{const.}$), *а также при* $\gamma \to +\infty$ (в этом случае можно брать любую[7] γ'-тригонометрически выпуклую функцию q с $\gamma' \leqslant \gamma$) *условия* 1) *и* 3) *приводят к одному и тому же давно известному* [Лев56, гл. IV, § 1] *достаточному условию полноты* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *в области* G*:*

$$\overline{D}(\Lambda) \overset{(2.1.4)}{:=} \limsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r} \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}s_G(\theta) = \frac{\text{длина } \partial G}{2\pi}$$

— элементарное следствие классических формулы и неравенства Йенсена (2.1.6)–(2.1.7) в свете теоремы 3.3.1.

В связи со шкалой достаточных условий полноты системы экспонент в ограниченной выпуклой области G из $\mathbb{C}$ весьма правдоподобной представляется

Гипотеза. *Система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна в выпуклой области* G *тогда и только тогда, когда при каком-нибудь значении* $\gamma \in \mathbb{R}^+$ *для некоторой* γ*-тригонометрически выпуклой положительной функции* q *имет место одно из условий* 1)–3) *теоремы* 3.3.5.

Подтверждение этой гипотезы означало бы вполне удовлетворительное и близкое к окончательному решение проблемы полноты системы экспонент в ограниченной выпуклой области в традиционных терминах плотностей распределения показателей Λ (левые части последних неравенств из 1)–3) в теореме 3.3.5) в увязке с геометрическими характеристиками области G (аналоги смешанных площадей Минковского (3.3.1) в правых частях неравенств 1)–3) теоремы 3.3.5). Как показывают упоминавшиеся выше примеры, обойтись конечным числом плотностей для Λ при решении задачи полноты в ограниченной области невозможно.

В связи с уже существующим “слабым” критерием полноты — теоремой 3.3.4, основанной на соотношении (3.3.2), — и ввиду возникновения шкалы плотностей распределения показателей Λ при доказательстве теоремы 3.3.5 через посредство специальных функций Йенсена наиболее естественным представляется переход от теоремы 3.3.4 к подтверждению гипотезы, используя некоторую выпуклую аппроксимацию (с определенными допустимыми

---

[7] Каждая γ'-тригонометрически выпуклая функция q будет в то же время и γ-тригонометрически выпуклой функцией при любых значениях $\gamma \geqslant \gamma'$.

“зазорами”) всех функций Йенсена или Грина из классов $\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$ или $\mathcal{G}_0^{\mathrm{reg}}(\Omega)$ этими использованными специальными функциями Йенсена. Возможно, в силу отмеченной в п. 1.2.2 двойственности между функциями и мерами Йесена, удобнее на определенных этапах переходить к мерам Йенсена (соотв. от функций Грина к гармоническим мерам). Но пока, на данном этапе, осуществимость такой аппроксимации остается проблематичной.

Задача полноты системы экспонент в выпуклой области G разрабатывалась также в работах В. С. Азарина и В. Б. Гинера [АГ89], [АГ94] (см. также близкую к ним статью [АГ90]) в терминах предельного в смысле В. С. Азарина множества $\operatorname{Fr} F_\Lambda$ порождающей ц.ф.э.т. F_Λ, $\operatorname{Zero}_{F_\Lambda} = \Lambda$, и наибольшей субгармонической миноранты вкупе с условием разрешимости некоторой однородной краевой задачи на торе. Их результаты для специальных классов так называемых индикаторных и периодических последовательностей Λ дают в отмеченных терминах необходимые и достаточные условия полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в специальной области G_Λ, которая является внутренностью сопряженной диаграммы функции F_Λ. Ими же предложена удачная классификация различных дополнительных аспектов задачи полноты (максимальность и предельная переполненность G для $\operatorname{Exp}_\Lambda$). Они несомненно интересны в плане исследования дополнительных возможностей теории предельных множеств В. С. Азарина. Но на наш взгляд эти условия трудно обозримы и маловероятно, чтобы на этом пути можно было достичь удовлетворительного и достаточно осязаемого законченного решения задачи полноты в ограниченной выпуклой области. Наше убеждение в этом, возможно и ошибочное, вызвано следующими обстоятельствами. Предельные множества целых и субгармонических функций в смысле В. С. Азарина идеально приспособлены к исследованию “близости” целых или субгармонических функций, да и вызваны к жизни потребностями именно такого плана — прежде всего теорией Левина–Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста и проблемами аппроксимации субгармоническими функциями. Природа предельных множеств носит в сильной степени топологический характер (слабая топология в пространстве распределений или L^1_{loc}-топология). Теория эта дала много глубоких и точных результатов, существенных упрощений сложных и технически трудных доказательств классических результатов (см. обзор [ГЛО91, гл. 3]). Успешно используются и ее многомерные обобщения (см. монографию Л. И. Ронкина [Рон92] и библиографию в ней). Но задача полноты в выпуклой области G, если решать ее через описание множеств неединственности в пространстве ц.ф.э.т., требует поиска законченных условий, при которых порождающую целую функцию F_Λ с $\mathrm{Zero}_{F_\Lambda} = \Lambda$ и $\overline{\Delta}(\Lambda) < \infty$ можно домножить на какую-либо целую функцию-мультипликатор $g \not\equiv 0$ так, что индикатор произведения h_{gF_Λ} строго меньше опорной функции области G^*. А это — задача "мажорирования", а не "близости", и имеет она ярко выраженный порядковый, а не топологический характер (хотя, конечно, порядок и порождает порядковую топологию). Косвенным подтверждением этому стал и результат самого В. С. Азарина [Аз02, Теорема 4.1] о недостаточности так называемых тотальных семейства асимптотических характеристик для характеризации возможности существования требуемых функций-мультипликаторов g.

О полноте в невыпуклых областях

Для невыпуклых ограниченных или неограниченных областей G какие-либо законченные результаты по задаче полноты пока не проглядываются, в частности, в связи со сложностями в описании характеристических функций функционалов из сопряженного к $H(G)$. Тем не менее, наряду с теоремой 3.2.10 имеются и другие содержательные результаты для невыпуклых областей. Первый таким результатом, охватывающим как неограниченные, так и ограниченные области, но требующим исключительно регулярного распределения последовательности показателей Λ, по-видимому, является полученная Б. Я. Левиным [Лев61, Теорема 21] и независимо А. Ф. Леонтьевым [Лео55], [Лео80, Теорема 3.1.6]

Теорема 3.3.6. *Если для* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ *существует предел* $d := \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{\lambda_k} > 0$, *то система* Exp_Λ *полна во всякой области, пересекающей каждую прямую, параллельную* $i\mathbb{R}$, *по отрезку длины, не большей* $2\pi d$, *но не полна ни в какой области, содержащей отрезок длины* $2\pi d$, *параллельный* $i\mathbb{R}$.

Имеются также эпизодические результаты о полноте систем экспонент на ограниченных невыпуклых “крестообразных” областях (Галимов И. С. [Гал75]).

Комбинирование метода выметания, описанного в подразделе 1.2, с выметанием неограниченной меры на систему лучей [Хаб91*] сыграло решающую роль в доказательствах теоремы 3.2.1, ее уточнения [Хаб91, Основная Теорема] (см. п. 3.2.2), а также в получении критериев полноты для неограниченных областей (теоремы 3.2.2, 3.2.4). Это же позволило доказать следующий результат [Хаб01, следствие 3] о неполноте системы экспонент в невыпуклых ”почти гиперболически сужающихся” неограниченных областях.

Теорема 3.3.7. *Пусть область $G \subset \mathbb{C}$ содержит луч l, параллельный вещественной оси, и вместе с каждой точкой $x_0 + iy_0$ на l содержит все точки вертикального интервала*

$$\{x_0 + iy \in \mathbb{C} : -y_-(x_0) < y - y_0 < y_+(x_0)\}.$$

Если $|t|y_-(t) \to +\infty$ или $|t|y_+(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ конечной верхней плотности сгущается к мнимой оси в том смысле, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\mathrm{Re}\,\lambda_k|}{|\lambda_k|} = 0$, то система Exp_Λ неполна в области G.

Доказательство последней теоремы 3.3.7 основано на следующей теореме неединственности 3.3.8, формулируемой здесь с потерей значительной части информации по сравнению с ее оригинальной версией.

Теорема 3.3.8 ([Хаб01, Теорема 1]). *Если последовательность Λ конечной верхней плотности $\overline{\Delta}(\Lambda)$ сгущается к $i\mathbb{R}$, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется ц.ф.э.т. $f \not\equiv 0$, обращающаяся в нуль на Λ, с индикатором роста h_f, удовлетворяющим одновременно двум оценкам*

$$\begin{aligned} h_f(\pi/2) + h_f(-\pi/2) &\leqslant 250\overline{\Delta}(\Lambda)\varepsilon, \\ h_f(0) + h_f(\pi) &\leqslant \frac{250\overline{\Delta}(\Lambda)}{\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Только с первой оценкой из (3.3.4) этот результат был установлен гораздо раньше И. Ф. Красичковым-Терновским в [Кр72′, Теорема 8.5] в связи с задачей спектрального синтеза, что потребовало в свое время достаточно сложных технических приемов. В [Хаб01] же использованы методы выметания, которые позволяют дополнить его результат “сбалансированной” (ср. правые части в неравенствах из (3.3.4)) оценкой и вдоль $\mathbb{R}$.

О полноте систем вида $\mathcal{F}_\Lambda$

Первые результаты по задаче полноты в круге $D(R)$ системы функций $\mathcal{F}_\Lambda$, более общей, чем система экспонент, были получены, по-видимому, А. О. Гельфондом [Ге38] и А. И. Маркушевичем [Мар45]. Дальнейшие исследования для таких общих систем, когда полнота рассматривалась в круге или на всей комплексной плоскости, проводились Б. Я. Левиным [Лев56, с. 283], И. И. Ибрагимовым [Иб71, гл. IV, § 3, п. 2], А. Ф. Леонтьевым [Лео81, гл. II, § 1]. Полноту в некоторых специальных областях на плоскости, отличных от круга и плоскости, изучали И. Ф. Лохин [Ло51], [Ло54], И. И. Ибрагимов [Иб71, гл. IV, § 3, п. 5], Х. Шен [Sh64].

Здесь мы приведем почти полный аналог теоремы 3.3.5 о полноте уже для систем $\mathcal{F}_\Lambda$, который также содержит в себе подавляющее большинство предыдущих результатов и основан на аппарате функций Йенсена. При этом нам потребуется ряд определений.

Определение 3.3.1 ([Хаб99, Определение 2.1]). Пусть $\gamma, \rho \in \mathbb{R}^+$, а $q \geqslant 0$ — γ-тригонометрически выпуклая функция. *Верхнюю (q,ρ)-плотность $\overline{D}_q(\Lambda;\rho)$ последовательности* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ при функции $\Lambda(t;q)$, определенной в (3.3.3),

1) при условии $0 \leqslant \gamma < \rho$ полагаем равной

$$\overline{D}_q(\Lambda;\rho) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{2r^\rho} \int\limits_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^\gamma + \left(\frac{t}{r}\right)^\gamma \right) \frac{\Lambda(t;q)}{t}\, \mathrm{d}t\,;$$

2) при условии $\gamma = \rho$ задаем в виде

$$\overline{D}_q(\Lambda;\rho) := \limsup_{a\to+\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r\to+\infty} \int\limits_r^{ar} \frac{\Lambda(t;q)}{t^{\rho+1}}\, \mathrm{d}t\,;$$

3) при $\gamma > \rho$ и в обозначении $\|q\| := \max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} q(\theta)$ определяем как

$$\overline{D}_q(\Lambda;\rho) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{2r^\rho}\left(\int\limits_1^r \Big(2\Lambda\big(t;\|q\|\big) - \Big(\frac{t}{r}\Big)^\gamma \Lambda(t;q)\Big)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int\limits_r^{+\infty} \Big(\frac{r}{t}\Big)^\gamma \Lambda(t;q)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right).$$

В определении 3.3.1 при $\rho = 1$ получаются в точности соответствующие левые части соотношений 1)–3) теоремы 3.3.5.

Следующие определения увязывают рост заданной целой функции f, участвующей в образовании системы $\mathcal{F}_\Lambda = \{f(\lambda_k z)\}$, с геометрией множества $A \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим функции от $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} B(\lambda; f, A) &:= \sup_{z\in A} \log|f(\lambda z)|, \\ B^*(\lambda; f, A) &:= \limsup_{\lambda'\to\lambda} B(\lambda'; f, A), \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

т. е. $B^*(\lambda;\cdot,\cdot)$ — полунепрерывная сверху регуляризация функции $B(\lambda;\cdot,\cdot)$. Полунепрерывную сверху регуляризацию функции

$$H_\rho(\lambda; f, A) := \limsup_{t\to+\infty} \frac{B^*(t\lambda; f, A)}{t^\rho}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.3.6}$$

обозначим как $H^*_\rho(\lambda; f, A)$ и назовем ее *продолженным* (на всю плоскость $\mathbb{C}$) *взаимным индикатором функции f и множества A при порядке $\rho \in \mathbb{R}^+$* (см. [Ха699, § 1], ср. с функцией $M[\cdots]$, введенной в формулировке [Иб71, Теорема 4.3.5]), а ее сужение

$$H^*_\rho(\lambda; f, A)\,\big|_{\partial\mathbb{D}} =: h_\rho(\theta; f, A), \quad \lambda = e^{i\theta}, \tag{3.3.7}$$

на единичную окружность $\partial\mathbb{D}$ — просто *взаимным индикатором функции f и множества A при порядке ρ*.

Если $f \in E[\rho,\infty)$, а множество A *ограничено*, то их взаимный индикатор при порядке ρ — ρ-тригонометрически выпуклая функция. В частности, при $A = \{1\}$ такой взаимный индикатор — это индикатор роста функции f при порядке ρ; взаимный индикатор функции e^z и A при $\rho = 1$ — это опорная функция выпуклой оболочки множества A^*, симметричного A относительно $\mathbb{R}$.

С 2π-периодической ρ-тригонометрически выпуклой функцией h ассоциируется неотрицательная мера $\mathrm{d}s_h^{(\rho)}(\theta)$ на $\partial\mathbb{D}$ по правилу

$$s_h^{(\rho)}(\theta) = h'(\theta - 0) + \rho^2 \int\limits_0^\theta h(\phi)\,\mathrm{d}\phi\,, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\,. \tag{3.3.8}$$

Для $q \in C[0, 2\pi]$ полагаем (ср. с (3.3.1) и правыми частями в последних неравенствах в 1)–3) из теоремы 3.3.5)

$$S_\rho(q, h) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta)\,\mathrm{d}s_h^{(\rho)}(\theta)\,. \tag{3.3.9}$$

Теорема 3.3.9 ([Хаб99, Теорема 2.1]). *Пусть все тейлоровские коэффициенты функции $f \in E[\rho, \infty)$ отличны от нуля, G — односвязная область, и h — взаимный индикатор функции f и области G при порядке ρ. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность попарно различных комплексных чисел, а $q \geqslant 0$ — γ-тригонометрически выпуклая функция. Допустим, что*

1) *если $0 \leqslant \gamma < \rho$, то $\overline{D}_q(\Lambda; \rho) > \dfrac{S_\rho(q, h)}{\rho^2 - \gamma^2}$,*

2) *если $\gamma = \rho$, то $\overline{D}_q(\Lambda; \rho) > \dfrac{S_\rho(q, h)}{\rho}$,*

3) *если $\gamma > \rho$, то $\overline{D}_q(\Lambda; \rho) > \dfrac{S_\rho(\|q\|, h)}{\rho^2} + \dfrac{S_\rho(q, h)}{\gamma^2 - \rho^2}$.*

Тогда система функций $\{f(\lambda_k z)\}_{k=1}^\infty$ полна в области G.

Доказательство теоремы 3.3.9 основано на аналитическом подходе и использует фактически одномерный вариант теоремы единственности — полный аналог ее многомерного двойника [Хаб99, Теорема 3.2]. Эта теорема единственности значительно сильнее тех ранних результатов Р. Ф. Боаса, что были использованы и доказательстве теоремы Буавена–Жу 3.2.10 при выводе условий (3.2.9). По-видимому, применение теоремы единственности из [Хаб99] может позволить значительно обобщить и усилить теорему Буавена–Жу в части развития условий (3.2.9).

Несколько особняком стоят условия (не)полноты системы $\mathcal{F}_\Lambda$ в круге, полученные И. И. Ибрагимовым и И. С. Нагнибидой в [ИН73]. В них предполагается, что Λ — это последовательность нулей некоторой целой функции (ср. с теоремой Абреу 2.1.6).

Теорема 3.3.10 ([ИН73, Теоремы 1–2, 4–5]). *Пусть* g *— целая функция типа* $\sigma_g \in (0, +\infty)$ *при порядке* $\rho_g \in (0, +\infty)$ *с последовательностью попарно различных нулей* $\operatorname{Zero}_g = \Lambda$, *а функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \ z \in \mathbb{C}, \quad \textit{где все} \quad f_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{3.3.10}$$

— целая и типа $\sigma_f < +\infty$ *при порядке* $\rho_f \in (0, +\infty)$. *Тогда*

1) *если* $\sigma_f > 0$ *и существует предел* $\lim\limits_{n \to \infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|f_n|} = (\sigma_f e \rho_f)^{1/\rho}$, *то при* $\rho_g < \rho_f$ *система* $\mathfrak{F}_\Lambda := \{f(\lambda z)\}_{\lambda \in \Lambda}$ *неполна во всех кругах* $D(R)$ *радиуса* $R > 0$, *а при* $\rho_g = \rho_f$ *в каждом круге* $D(R)$ *радиуса* $R > (\sigma_g / \sigma_f)^{1/\rho_f}$;

2) *если тип функции* f *при порядке* $\rho_g \notin \mathbb{N}$ *равен нулю, то система* $\mathfrak{F}_\Lambda$ *полна в круге* $D(R)$ *при любом* $R > 0$.

В статье С. З. Ибрагимовой [Ибр82, Теорема 1] получено достаточно простое условие полноты в кольце $D(R) \setminus \operatorname{clos} D(r)$ системы функций $\{f(\lambda_k z)\}$ с $f \in H\big(\mathbb{C} \setminus \{0\}\big)$ и с последовательностью показателей $\{\lambda_k\}$, представленной в виде объединения двух последовательностей Λ_0 и Λ_∞, стремящихся соотв. к 0 и к ∞. Оно формулируется в терминах оценок сверху роста функции f через считающие функции последовательностей $1/\Lambda_0$ и Λ_∞.

3.3.2 Устойчивость полноты

Условия устойчивости (не)полноты системы экспонент в $H(G)$ легко следуют из более общих результатов Б. Н. Хабибуллина [Хаб94] об устойчивости множеств неединственности для широкого класса весовых пространств целых функций. Следствие из [Хаб94, § 7, Теоремы 7.1, 7.2] при $\rho = 1$ —

Теорема 3.3.11. *Пусть* $\Lambda = (\lambda_k)$ *— занумерованная последовательность. Если система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *неполна в выпуклой области* G, *то найдется число* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любой последовательности* $\Gamma = (\gamma_k)$, *удовлетворяющей условию*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{|\lambda_k|} \leqslant \varepsilon \,, \tag{3.3.11}$$

система $\operatorname{Exp}\Gamma$ *также неполна на* G. *Если* $\varepsilon = 0$ *в* (3.3.11), *то для любой выпуклой области* G *системы* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *и* $\operatorname{Exp}_\Gamma$ *полны или неполны в области* G *одновременно. Последнее утверждение справедливо и для пространства* $H(\operatorname{clos} G)$.

Еще один результат Б. Н. Хабибуллина [Хаб04] об устойчивости полноты можно рассматривать как вариацию на тему теоремы Редхеффера 2.2.3 об устойчивости полноты на интервале.

Теорема 3.3.12 ([Хаб04, Следствие 2]). *Пусть* G *— ограниченная выпуклая область в* $\mathbb{C}$, *а* $\Lambda = (\lambda_k)$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)$ *в* $\mathbb{C}$ *удовлетворяют условию Редхеффера* (2.2.1). *Тогда системы экспонент* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *и* $\operatorname{Exp}\Gamma$ *полны или неполны в области* G *или в пространстве* $H(\operatorname{clos} G)$ *только одновременно.*

Отметим, что теорема 3.3.11 не содержит в себе теорему 3.3.12, как, впрочем, и наоборот, в том смысле, что условие (2.2.1) и условие (3.3.11) с $\varepsilon = 0$, вообще говоря, независимы. Теорема 3.3.12 справедлива и для пространства $H[a, b]$, поэтому может служить одним из шагов [Хаб04, Замечание] на пути к реализации проблемы Р. М. Редхеффера прямого доказательства теоремы 2.2.3 (см. п. 2.2.2). На самом деле в терминах ц.ф.э.т. условие Редхеффера (2.2.1) дает несколько больше, чем улавливает теорема 3.3.12. Оно сохраняет не только множества единственности, но и нулевые множества. Точнее, справедлива

Теорема 3.3.13 ([Хаб04, Следствие 1]). *Пусть* h *— тригонометрически выпуклая функция и для* $\Lambda = (\lambda_k)$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)$ *выполнено условие Редхеффера* (2.2.1). *Тогда последовательности* Λ *и* Γ *могут быть нулевыми последовательностями для пространства* $E[1, h]$ *только одновременно.*

Доказательства теорем 3.3.12, 3.3.13 используют некоторую рекуррентную процедуру, восходящую к Р. М. Редхефферу и заключающуюся в последовательной замене нулей λ_k некоторой ц.ф.э.т. f с $\Lambda \subset \operatorname{Zero}_f$ на точки γ_k с сохранением ограничений на рост преобразованной ц.ф.э.т. g с $\Gamma \subset \operatorname{Zero}_g$.

3.3.3 Абсолютная полнота в выпуклой области

Достаточные геометрические условия абсолютной полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в пространстве $H(G)$ (далее абсолютная полнота в G) были установлены В. Б. Шерстюковым в [Ше00], [Ше00′, Теорема 3.3.3] (теорема 3.3.14 ниже). Оно во многом следует предшествующему условию абсолютной полноты систем $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на выпуклом компакте (см. п. 3.4.4). Для его формулировки придется несколько усилить понятие вполне сгущаемости последовательности и изменить определение диаграммы существенного роста последовательности M на последовательности Λ (ср. с п. 2.1.5).

Минимальная плотность Пойя $\Delta_{\min}(\Lambda)$ определяется через замену внутреннего верхнего предела в (2.1.5n) на нижний предел. Последовательность $\Lambda' = \{\lambda'_k\}$ *вполне сгущается* в направлении θ, если $\arg \lambda'_k \to \theta$ при $\lambda'_k \to \infty$, но условие сходимости ряда (2.1.9) заменяется на неравенство $\Delta_{\min}(\Lambda') \geqslant \frac{1}{2\pi}\, d(G, -\theta)$, где $d(G, -\theta)$ — ширина области G в направлении $-\theta$ из (3.1.5).

Индексом конденсации последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ называется величина

$$\gamma_\Lambda := \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \int_0^{\varepsilon|\lambda_k|} \frac{n_\Lambda(\lambda_k, t) - 1}{t}\, dt. \tag{3.3.12}$$

Для последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ совокупность направлений Θ и набор подпоследовательностей $\Lambda(\Theta) := \{\Lambda(\theta) \subset \Lambda \colon \theta \in \Theta\}$ *согласованы*, если каждая последовательность $\Lambda(\theta)$ вполне сгущается в направлении $\theta \in \Theta$. В обозначениях из п. 2.1.5 *диаграммой существенного роста последовательности* $\mathrm{M} = (M_k) > 0$ *на последовательности* $\Lambda = (\lambda_k)$ *относительно согласованной пары* Θ *и* $\Lambda(\Theta)$ называется множество-пересечение

$$\bigcap_{\theta\in\Theta} \bigl\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z e^{-i\theta} \leqslant H_{\Lambda(\theta)}(\theta) + \gamma_{\Lambda(\theta)}\bigr\},$$

где функция $H_{\Lambda(\theta)}$ на Θ определена в (2.1.35) при $\Lambda' = \Lambda(\theta)$.

Теорема 3.3.14. *Если диаграмма существенного роста последовательности* $\mathrm{M} = (M_k)$ *на последовательности* $\Lambda = (\lambda_k)$ *относительно согласованной пары* Θ *и* $\Lambda(\Theta)$ *содержится в области* $G^* := \{\overline{z} \colon z \in G\}$, *где* G *— ограниченная выпуклая область с* *опорной функцией* H_G, *и* $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{\log M_k}{|\lambda_k| H_G(-\arg\lambda_k)} < 1$, *то система* Exp_Λ *абсолютно полна в* G.

Доказательство теоремы 3.3.14 опирается на аналитическую реализацию двойственной критерия абсолютной полноты в локально выпуклых пространствах из п. 1.1.4. Как промежуточный этап, представляющий и несомненный самостоятельный интерес, в [Ше00] и [Ше00′, Теорема 3.3.2] В. Б. Шерстюков установил также достаточные условия абсолютной полноты системы Exp_Λ в ограниченной выпуклой области G в терминах определенного "асимптотически правильного" поведения ц.ф.э.т. L с $\mathrm{Zero}_L = \Lambda$. Наконец, к теореме 3.3.14 можно отнести и проблему 2.1.7.

3.4 Полнота на компакте

В этом подразделе рассматривается полнота только в двух видах пространств. Во-первых, речь пойдет о полноте в пространстве $A(K)$ (полноте на K), где $K \subset \mathbb{C}$ — компакт с непустой внутренностью, как в п. 7) введения.

Для определения второго типа пространств рассмотрим ограниченную односвязную область G с *жордановой спрямляемой границей* ∂G. Через $\overline{\mathrm{Pol}}_\infty(\partial G)$ обозначаем замыкание кольца полиномов $\mathbb{C}[z]$, $z \in \mathbb{C}$, в $C(K)$ по sup-норме. Для $1 \leqslant p < \infty$ через $\overline{\mathrm{Pol}}_p(\partial G)$ обозначаем замыкание кольца полиномов $\mathbb{C}[z]$ в L^p-метрике в пространстве $L^p(\partial G)$. По классической теореме Келдыша [Ga86] пространство $\overline{\mathrm{Pol}}_\infty(\partial G)$ отождествляется линейно изометрично с пространством $A(\operatorname{clos} G)$. Если G — еще и область Смирнова (см. обзор П. Л. Дюрена [Du89]), то $\overline{\mathrm{Pol}}_p(\partial G)$, $1 \leqslant p < \infty$, отождествляется линейно изометрично с пространством Смирнова $E^p(G)$, уже упоминавшимся перед формулировкой теоремы 3.2.7. Очевидно, функции из $\overline{\mathrm{Pol}}_p(\partial G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, голоморфны в области G.

3.4.1 Полнота

Точные условия неполноты системы Exp_Λ на выпуклом компакте $K \subset \mathbb{C}$ (соотв. в пространстве $\overline{\mathrm{Pol}}_p(\partial G)$ при $1 \leqslant p < \infty$)

формулируются так же, как в теореме 2.1.1 с той лишь разницей, что интегрирование в (2.1.1) (соотв. в (2.1.2)) ведется по компакту K и по мере σ с носителем на K (соотв. с $f \in L^q(\partial G)$).

Отдельные известные условия (не)полноты на компакте, как правило, содержатся в соответствующих условиях для пространства $H(G)$ и уже отмечены в предыдущем подразделе. Так, если выпуклая оболочка $\operatorname{conv} K$ компакта K совпадает с замыканием выпуклой области G, то из теоремы 3.3.5 после замены нестрогих неравенств в 1)–3) на строгие получаем шкалу достаточных условий полноты в пространстве $A(K)$. Расширенный вариант теоремы 3.3.9 в [Хаб99, Теорема 2.1] показывает, что неравенства 1)–3) дают достаточные условия полноты системы $\{f(\lambda_k z)\}$ на компакте K со связным дополнением, если в формулировке заменить G на K. Аналогичные результаты могут быть легко получены и для пространств $\overline{\operatorname{Pol}}_p(\partial G)$ на основе неравенства Гельдера.

Никакие точные условия полноты систем экспонент на компакте K неизвестны и проблема полноты в этой ситуации выглядит еще сложнее, чем для пространства $C[a,b]$ или $H(G)$, объединяя трудности их обоих. Здесь мы можем предоставить критерий полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ на K лишь с точностью до двух экспонент в духе теоремы 2.1.20, т. е. в терминах функций Йенсена (использованы обозначения и понятия из подразделов 1.2 и 3.3).

Теорема 3.4.1 ([Хаб91$''$, § 7, п. 3]). *Пусть K — выпуклый компакт, $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность в $\mathbb{C}$. Если величина* (в обозначении (3.3.1))

$$\sup_{V \in \mathcal{P}_{J_0}} \Big(\sum_k V(\lambda_k) - \frac{1}{\pi} S(K_V, G) \Big) \tag{3.4.1}$$

равна $+\infty$, то система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ полна на B. Обратно, если это величина ограничена сверху, то для любой пары точек $\{\lambda', \lambda''\} \subset \Lambda$ система $\operatorname{Exp}_{\Lambda \setminus \{\lambda', \lambda''\}}$, не полна на K. Класс всех функций Йенсена $\mathcal{P}_{J_0}(\mathbb{C})$ в (3.4.1) *можно заменить на любой из подклассов* (J1)–(J3), *к примеру, на подкласс функций Грина $\mathcal{G}_0^{\text{reg}}(\Omega)$ или на подкласс функций вида* (1.2.9) *по аналитическим дискам g или по полиномиальным дискам g.*

3.4.2 Минимальность и экспоненциальные базисы

Исследование полноты и минимальности систем экспонент в пространствах $A(G)$ и в пространствах Смирнова тем более актуально и в определенной степени выдвигается на первый план ввиду того, что очень часто для указанных пространств существование “хороших” базисов или представляющих систем для всего пространства, не говоря уж о таковых именно вида Exp_Λ, проблематично. Так, если в одной точке границы *выпуклой области* G кривизна существует и отлична от нуля, то в пространстве Смирнова $E^2(G)$ нет базисов Рисса из экспонент (см. предварительный результат у Ю. И. Любарского [Лю88], промежуточный — у В. И. Луценко [Лу92] и окончательный — в диссертации К. П. Исаева [Ис04] и в совместной статье К. П. Исаев и Р. С. Юлмухаметова [ИЮ06]. Аналогично, если граница ∂G содержит дугу класса C^2, кривизна которой в каждой точке отлична от нуля, то и в пространстве Бергмана $B^2(G)$ отсутствуют базисы Рисса из экспонент (Напалков В. В. (мл.) [На(м)95]); в связи с отсутствием абсолютно представляющих систем из экспонент в $A(K)$ см. краткий обзор Ю. Ф. Коробейника [Кор94]; в пространстве $A(K)$, как и в $C[0,1]$ [Day61, Гл. IV, 4, Следствие 1]), не существует безусловных базисов [Wo84] и даже базисов Бесселя[8] [Bou84] (Ж. Бурген).

Построение специальных последовательностей показателей Λ, являющихся последовательностями нулей целой функции F_Λ типа синуса и порождающих одновременно полные и минимальные системы экспонент Exp_Λ при некоторых условиях на границу выпуклого компакта $B = \operatorname{clos} G$, проводилось в связи с представлением функций рядами экспонент для выпуклых многоугольников B А. Ф. Леонтьевым [Лео76, гл. IV, § 7], В. К. Дзядыком [Дз74], Ю. И. Мельником [Мел75], А. М. Седлецким [Сед78], Б. Я. Левиным и Ю. И. Любарским [ЛЛю75], а для пространств Смирнова $E^p(G)$ и Бергмана $B^2(G)$, когда граница ∂G выпуклой области G из определенного класса гладкости, — соотв. в работах Б. Я. Левина и Ю. И. Любарского [ЛЛю75], Ю. И. Любарского [Лю88], Ю. И. Любарского и М. Л. Содина [ЛюС86, п. 16] и в диссертации В. В. Напалкова (мл.) [На(м)95]. В связи с обсужденными ситуа-

---

[8] Определение см. в [You80].

циями возникает, вообще говоря, нерешенная

Проблема 3.4.1. *Для каких выпуклых компактов K с непустой внутренностью в пространстве $A(K)$ существуют базисы или равномерно минимальные системы экспонент Exp_Λ?*

3.4.3 Устойчивость полноты и минимальности. Избыток полноты

В работах Б. Н. Хабибуллина [Хаб00], [Хаб01*], [Хаб02] впервые получены результаты об избытке полноты и соотв. об устойчивости полноты и минимальности системы экспонент в банаховых пространствах голоморфных функций. Основные результаты установлены для пространств $\overline{\mathrm{Pol}}_p(\partial G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, когда G — *ограниченная односвязная область с жордановой спрямляемой границей*, а значит, и для $A(\operatorname{clos} G)$ и пространства Смирнова $E^p(G)$, если G еще и область Смирнова. До этих работ подобные исследования условия устойчивости и избытка полноты не проводились ни для какой области G ввиду отсутствия какихлибо методов в этом направлении. Обобщение рекурсивного метода Редхеффера–Александера, упоминавшееся в п. 3.1.2, позволило получить полные аналоги теоремы Редхеффера–Александера 2.1.31 и для указанных пространств. Сначала сформулируем его только для выпуклой области G, когда аналогия с теоремой Редхеффера–Александера наиболее прозрачна.

Пусть пока G — *выпуклая область*. Среди всех прямых, ортогональных направлению $\theta \in \mathbb{R}$, т.е. прямых вида

$$l_\theta = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} ze^{-i\theta} = a\}, \quad a \in \mathbb{R},$$

и имеющих общую точку с компактом $\operatorname{clos} G$, *опорной прямой к G в направлении θ*, называется прямая с наибольшим значением параметра a. Общие точки этой опорной прямой с множеством $\operatorname{clos} G$ называются точками опоры этой прямой. Точка границы ∂G называется *неугловой*, если через эту точку проходит единственная опорная прямая к G. В противном случае эта точка — *угловая*. Через $\mathrm{Sm}(G)$ обозначаем *замыкание объединения множества всех точек $re^{i\theta}$, $r \geqslant 0$, для каждой из которых опорная прямая к G в направлении θ среди своих точек опоры имеет хо-*

тя бы одну неугловую точку границы ∂G. После этого положим $\mathrm{Sym}(G) := \mathrm{Sm}(G) \cup \mathrm{Sm}(-G)$.

Теорема 3.4.2 ([Хаб01*, Теорема 1]). *Пусть* $G \neq \varnothing$ *— ограниченная выпуклая область в* $\mathbb{C}$ *и для последовательностей* $\Lambda = (\lambda_k)$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *имеет место условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1 + \mathrm{dist}(\overline{\lambda}_k, \mathrm{Sym}(G)) + \mathrm{dist}(\overline{\gamma}_k, \mathrm{Sym}(G))} < +\infty. \tag{3.4.2}$$

Тогда $\mathrm{exc}\,\Lambda = \mathrm{exc}\,\Gamma$ *для* $A(\mathrm{clos}\,G)$ *и* $E^p(G)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Аналог условия (2.1.33) Редхеффера–Александера — (3.4.2).

Общий случай *ограниченной односвязной области* G со *спрямляемой жордановой границей* ∂G потребовал введения понятия *дефекта выпуклости* $\mathrm{dfc}(G, \lambda)$ области[9] G (или дефект выпуклости компакта $\mathrm{clos}\,G$) в направлении точки $\lambda \neq 0$.

Пусть $\theta \in \arg \lambda$ (см. Рис. 3.2). Две опорные прямые к области G, ортогональные направлению θ, т.е. опорные прямые соотв. в направлениях θ и $\theta + \pi$, обозначим как

$$\begin{aligned} l_+(\theta, G) &= \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\, z e^{-i\theta} = A\}, \\ l_-(\theta, G) &= \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\, z e^{-i\theta} = a\}, \end{aligned}$$

где $a \leqslant A$. Выберем какие-либо две точки опоры

$$\begin{aligned} w_-(\theta, G) &\in l_-(\theta, G) \cap \mathrm{clos}\, G, \\ w_+(\theta, G) &\in l_+(\theta, G) \cap \mathrm{clos}\, G\,. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Отмеченные в (3.4.3) точки опоры определяют разбиение кривой ∂G на две жордановы спрямляемые дуги ℓ_+ и ℓ_-, имеющие только две общие точки $w_-(\theta, G)$ и $w_+(\theta, G)$. Выберем ориентацию дуг так, что “движение” как по дуге ℓ_+, так и по дуге ℓ_- происходит в направлении от точки $w_-(\theta, G)$ к точке $w_+(\theta, G)$.

Пусть w_1 и w_2 — две различные точки, лежащие на одной и той же дуге ℓ_+ (соотв. ℓ_-). Пишем $w_1 \prec w_2$, если при движении от начальной точки $w_-(\theta, G)$ к конечной точке $w_+(\theta, G)$ по дуге ℓ_+ (соотв. ℓ_-), точка w_1 “встречается раньше” точки w_2. При этом длину дуги, соединяющей эти точки при движении вдоль ℓ_+

---

[9] В оригинальной работе [Хаб01*] этот дефект выпуклости неудачно назван дефектом выпуклости кривой ∂G в направлении точки λ.

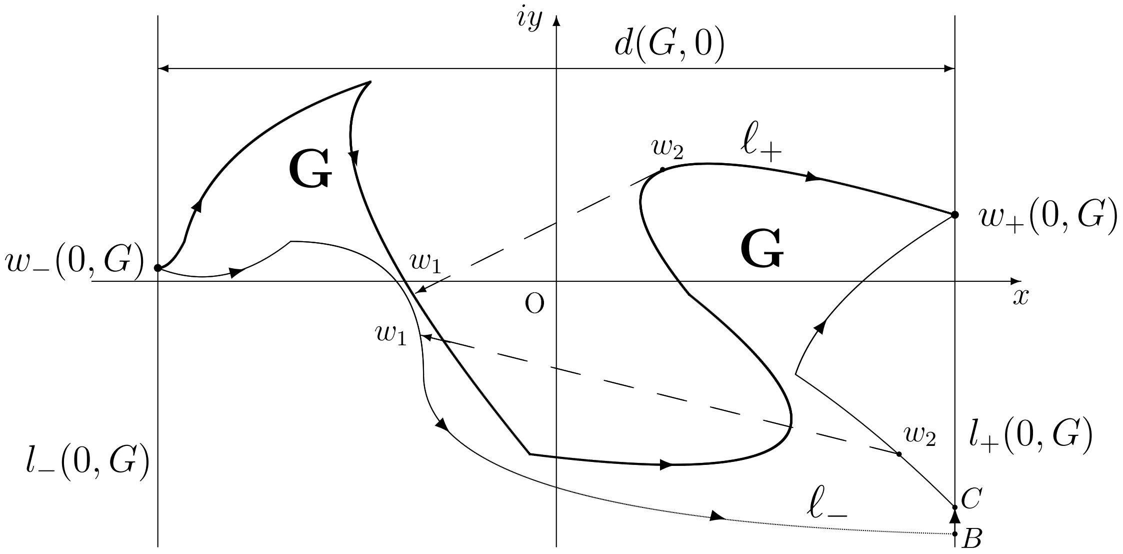

Рис. 3.2. К дефекту выпуклости области G в направлении $\theta = 0$.

(соотв. ℓ_-), обозначим $s(w_1, w_2) = s(w_2, w_1)$. При фиксированных точках (3.4.3) однозначно определена величина (ср. с (3.1.3))

$$d(\theta, G) := \sup\left\{\frac{\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}(w_1 - w_2)\right)}{s(w_1, w_2)} \ : \ w_1 \prec w_2\right\} \in [-1, 1].$$

Назовем *дефектом выпуклости* (или избытком вогнутости) *области* G *(или компакта* $\operatorname{clos} G$*) в направлении точки* λ величину

$$\operatorname{dfc}(G, \lambda) := \inf d(\theta, G) \in [-1, 1],$$

где infimum взят *по всем возможным выборам точек опоры* (3.4.3) (на Рис. 3.2 точка опоры $w_+(0, G)$ могла быть выбрана и на вертикальном отрезке $[B, C] \subset \ell_-$). Противоположное число $-\operatorname{dfc}(\theta, G)$ — избыток выпуклости или дефект вогнутости.

Теорема 3.4.3 ([Хаб01*, Теорема 3]). *Пусть* S *— длина жордановой спрямляемой границы односвязной области* G*, и* $\Lambda = (\lambda_k)$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)$*,* $k = 1, 2, \ldots,$ *— последовательности в* $\mathbb{C}$*. Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \gamma_k| \, \frac{\exp\bigl(S \cdot \operatorname{dfc}(G, \overline{\lambda}_k)\, |\lambda_k|\bigr) - 1}{\operatorname{dfc}(G, \overline{\lambda}_k)\, |\lambda_k|} < +\infty, \qquad (3.4.4)$$

то $\operatorname{exc} \Gamma \leqslant \operatorname{exc} \Lambda$ *для любого пространства* $\overline{\operatorname{Pol}}_p(\partial G)$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*.*

Справедлив и аналог теоремы 3.1.5 в терминах ширины области G в направлении точки (см. (3.1.5) и Рис. 3.2; ср. с теоремой 3.1.5), который также не перекрывается теоремой 3.4.3, но учитывает только размеры области G, а не ее конфигурацию.

Теорема 3.4.4 ([Хаб01*, Теорема 2])**.** *Пусть область G и последовательности Λ и Γ такие же, как в теореме 3.4.3. Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \gamma_k| \exp\bigl(d(G; \overline{\lambda}_k)\,|\lambda_k|\bigr) \;<\; +\infty\,, \tag{3.4.5}$$

где $d(G; \overline{\lambda}_k)$ — ширина области G в направлении точки $\overline{\lambda}_k$, то $\operatorname{exc}\Gamma = \operatorname{exc}\Lambda$ *для любого из пространств* $\overline{\mathrm{Pol}}_p(\partial G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Ослабляя теорему 3.4.4, можно заменить в (3.4.5) ширину области $d(G; \overline{\lambda}_k)$ в направлении $\overline{\lambda}_k$ на ее диаметр $\operatorname{diam} G$.

Коментарий в конце п. 3.1.2 всецело переносится и на п. 3.4.3.

3.4.4 Абсолютная полнота на выпуклом компакте

Прямой перенос теоремы 2.1.36 с отрезка на выпуклый компакт K, т. е. на пространство $A(K)$, был дан Г. Н. Шиловой [Ши92] при определенных условиях на распределение последовательности показателей Λ и с потерей в части необходимости. Развернутое изложение этого результата — в совместной статье И. Ф. Красичкова-Терновского и Г. Н. Шиловой [КШ05]. Определение вполне сгущаемости последовательности $\Lambda' = \{\lambda'_k\}$ в направлении θ совпадает с определением из п. 3.3.3 с заменой ширины $d(G, -\theta)$ на ширину $d(K, -\theta)$ выпуклого компакта K в направлении $-\theta$ (снова см. (3.1.5) и ср. с п. 2.1.5).

Определение *диаграммы существенного роста последовательности* $\mathrm{M} > 0$ *на последовательности* Λ дословно переносится из п. 2.1.5. Потребуется также понятие *индекса концентрации последовательности* Λ, определенного как

$$I(\Lambda) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \limsup_{z\to\infty} \frac{1}{|z|} \int_0^{\varepsilon|z|} \frac{\bigl(n_\Lambda(z,t) - 1\bigr)^+}{t}\, \mathrm{d}t \overset{(3.3.12)}{\geqslant} \gamma_\Lambda\,.$$

Теорема 3.4.5 ([Ши92, Теорема 1.2], [КШ05, Теорема 2.1])**.** *Пусть K — выпуклый компакт,* $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, $K^* := \{\overline{z}\colon z \in K\}$, $I(\Lambda) = 0$, $\mathrm{M} = (M_k) > 0$. *Если пересечение границы ∂K^* с диаграммой существенного роста последовательности M на Λ пусто, то система* (2.1.34) *абсолютно полна в $A(K)$.*

Доказательство опирается на двойственную схему из п. 1.1.4 в форме критерия (1.1.8). Неизвестны степень необходимости приведенных условий и, тем более, окончательное решение задачи абсолютной полноты для систем экспонент в $A(K)$.

3.4.5 Дополнение к п. 3.3.1 и теореме 3.3.2 о радиусе круга полноты $R(\Lambda)$

По $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $D(\Lambda) < +\infty$, построим последовательность $\Lambda^{\textcircled{n}} := \bigcup_{m=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi m}{n}}\Lambda$, инвариантную при поворотах на угол $\frac{2\pi m}{n}$;

$$\overline{D}_P^{[n]}(\Lambda) := \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \limsup_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^n + t^n}\, \frac{n_\Lambda(t)}{t}\, \mathrm{d}t \qquad (3.4.6)$$

— *верхняя n-плотность Пуассона* для Λ. При $n = 2$, $\Lambda > 0$, это классическая верхняя плотность Пуассона $\overline{D}_P(\Lambda)$ для Λ [MR61]. Пусть $\sigma_{W_n}(\Lambda)$ — тип ц.ф.э.т. $W_n(z;\Lambda) := \prod_k \Bigl(1 - \dfrac{z^n}{\lambda_k^n}\Bigr)$.

Теорема 3.4.6 (см. [Хаб09′, Теорема 5]). *При $n \geqslant 2$ с гамма-функцией Эйлера Γ*

$$\frac{2^{1/n}\sqrt{\pi}\,\Gamma\bigl(1-1/2n\bigr)}{\Gamma\bigl(1/2-1/2n\bigr)}\cdot\sigma_{W_n}(\Lambda) \leqslant R\bigl(\Lambda^{\textcircled{n}}\bigr) \leqslant \frac{\pi}{\sin(\pi/n)}\,\overline{D}_P^{[n]}(\Lambda).$$

Оценка сверху точна уже в классе всех последовательностей $\Lambda \subset (0,+\infty)$, для которых левую часть можно заменить на

$$\frac{2^{1/n}\sqrt{\pi}\,\Gamma\bigl(1-1/2n\bigr)}{\Gamma\bigl(1/2-1/2n\bigr)}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/n)}\,\overline{D}_P^{[n]}(\Lambda)$$

В частности, при $n = 2$ и $\Lambda \subset (0,+\infty)$, $\Lambda^{\textcircled{2}} = \Lambda \cup (-\Lambda) =: \pm\Lambda$

$$(0{,}84721\ldots)\pi\overline{D}_P(\Lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\cdot\pi\overline{D}_P(\Lambda) \leqslant R(\pm\Lambda) \leqslant \pi\overline{D}_P(\Lambda).$$

Эту наилучшую в некотором смысле на момент публикации нашего обзора оценку радиуса круга полноты невозможно дополнить оценкой сверху через логарифмическую блок-плотность $\overline{D}_L(\Lambda)$, поскольку для любого числа $R_0 > 0$ найдется последовательность конечной верхней плотности $\Lambda \subset (0,+\infty)$, для которой $R(\pm\Lambda) \geqslant R_0$, в то время как $\overline{D}_L(e^{i\theta}\Lambda) = 0$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$.

Глава 4

Многомерные результаты

В качестве обобщения последовательности показателей Λ для многомерных систем экспонент (обозначения из (1.1.4))

$$\begin{gathered} z^p e^{<\lambda,z>}, \\ p=(p_1,\dots,p_n)\in(\mathbb{Z}^+)^n, \qquad z^p := z_1^{p_1}\cdot\dots\cdot z_n^{p_n}, \end{gathered} \tag{4.0.1}$$

можно рассматривать как дискретные множества показателей, так и аналитические множества (чаще чистой коразмерности 1). Поэтому в этом разделе в основу классификации положен вид множества показателей, и уже в следующую очередь — тип пространства, в котором рассматривается полнота. Точнее, вместо подмножества Λ рассматриваем *функцию-дивизор* $\Lambda\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{Z}^+$; множество $\operatorname{supp}\Lambda$ — носитель дивизора Λ. Каждому дивизору в обозначениях (4.0.1) сопоставляется система (кратных) экспонент

$$\operatorname{Exp}_\Lambda := \{z^p e^{<\lambda,z>} \colon \lambda\in\operatorname{supp}\Lambda, p_1+\dots+p_n<\Lambda(\lambda)\}. \tag{4.0.2}$$

По отношению к системе $\operatorname{Exp}_\Lambda$ дивизор Λ будем называть *дивизором показателей*. Дивизор показателей *дискретный*, если его носитель $\operatorname{supp}\Lambda$ — дискретное множество. Для дивизора Λ через $i\Lambda$ и $-\Lambda$ обозначаем функции-дивизоры, определенные соотв. по правилу $(i\Lambda)(z)\equiv\Lambda(-iz)$ и $(-\Lambda)(z)=\Lambda(-z)$, $z\in\mathbb{C}$. В частности, $i\operatorname{supp}\Lambda=\operatorname{supp} i\Lambda$ и $\operatorname{supp}(-\Lambda)=-\operatorname{supp}\Lambda$. Если дивизор $\Lambda(z)\leqslant 1$, $z\in\mathbb{C}^n$, то отождествляем его с носителем $\operatorname{supp}\Lambda$ и рассматриваем как подмножество в $\mathbb{C}^n$. Для подмножества $B\subset\mathbb{C}^n$ полагаем $\Lambda(B)=\sum_{z\in B}\Lambda(z)$.

Каждой голоморфной в области $G\subset\mathbb{C}^n$ функции f можно сопоставить дивизор нулей $\operatorname{Zero}_f\colon G\to\mathbb{Z}^+$, который в каждой точке $z\in G$ равен кратности нуля функции f в этой точке z.

Для подобласти $G' \subset G$ через $\mathcal{V}_f(G')$ обозначаем $(2n-2)$-мерный евклидов объем дивизора Zero_f в G' (см. [Рон92, гл. 3]).

Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, где $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, наряду с евклидовой нормой $|z| := \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$ в $\mathbb{C}^n$ рассматриваем и норму $\|z\| := \max\{|x_1|, |y_1|, \dots, |x_n|, |y_n|\}$.

Всюду далее $\mathbb{R}^n$ мыслится как вещественное подпространство (над $\mathbb{R}$) в $\mathbb{C}^n$. Для $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^n$ и $x^0 = (x_1, \dots, x_n)$

$$T_\sigma := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon |x_j| \leqslant |\sigma_j|, j = 1, \dots, n\} \tag{4.0.3}$$

— замкнутый n-мерный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, а $B_{\mathbb{R}^n}(R)$ и $B_{\mathbb{C}^n}(R)$ — открытые шары соотв. в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле радиуса R в евклидовой норме.

Радиусом шара полноты $R_{\mathbb{R}^n}(\Lambda)$ $\bigl($соотв. $R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda)\bigr)$ экспоненциальной системы Exp_Λ в $\mathbb{R}^n$ (соотв. в $\mathbb{C}^n$) называем точную верхнюю грань чисел R, для которых система Exp_Λ полна в $C\bigl(\operatorname{clos} B_{\mathbb{R}^n}(R)\bigr)$ $\bigl($соотв. в $H\bigl(B_{\mathbb{C}^n}(R)\bigr)\bigr)$. В определении радиуса шара полноты в $\mathbb{R}^n$ пространства $C\bigl(\operatorname{clos} B_{\mathbb{R}^n}(R)\bigr)$ можно заменить на любые из пространств $L^p\bigl(B_{\mathbb{R}^n}(R)\bigr)$, $1 \leqslant p < +\infty$. Аналогично — для радиуса шара полноты в $\mathbb{C}^n$. Двойственный аналитический подход из п. 1.1.1 в этой конкретной ситуации без труда дает неравенство $R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda) \leqslant R_{\mathbb{R}^n}(\Lambda)$.

4.1 Дискретные дивизоры показателей

4.1.1 Полнота в шаре и на параллелепипеде из $\mathbb{R}^n$

Результаты этого подраздела основаны на исследовании дискретных множеств единственности в пространствах ц.ф.э.т. с ограничениями на $\mathbb{R}^n$. Один из первых нетривиальных результатов о таких множествах —

Теорема 4.1.1 (А. Берлинг [Be66, III, Замечание 1)]). *Пусть f — ц.ф.э.т. $\leqslant \sigma$ в $\mathbb{C}^n$, ограниченная на $\mathbb{R}^n$, $f(\Lambda) = 0$ на дискретном подмножестве $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ и выполнено соотношение*

$$\limsup_{\mathbb{R}^n \ni x \to \infty} \operatorname{dist}(x, \Lambda) = \varepsilon < +\infty, \tag{4.1.1}$$

где $\operatorname{dist}(x, \Lambda) := \inf\limits_{\lambda \in \Lambda} |x - \lambda|$. *Если $\sigma < \dfrac{\pi}{2\varepsilon}$, то $f \equiv 0$ на $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство теоремы 4.1.1 основано на выметании комплекснозначных мер на последовательность точек из $\mathbb{R}^n$ относительно векторного подпространства, порожденного системой $\{\exp(i{<}x,z{>})\}$, $x\in\mathbb{R}^n$, в специальном пространстве ц.ф.э.т. (см. раздел 1.2). Из теоремы 4.1.1 по двойственной аналитической схеме из п. 1.1.1 сразу следует

Теорема 4.1.2 (А. Берлинг). *Если для дискретного подмножества* $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ *выполнено* (4.1.1), *то* $R_{\mathbb{R}^n}(i\Lambda)\geqslant\dfrac{\pi}{2\varepsilon}$.

По полноте в пространствах на параллелепипеде после начального исследования Я. Кореваара и С. Хеллерштейна [KH68] (см. также заметку Я. Кореваара [Kor66] и его обзор [Kor83]) наилучшие известные нам результаты в этом направлении достигнуты в серии статей Л. И. Ронкина, последние из которых — [Рон74], [Рон74′], [Рон78], а также в работе Б. Берндссона [Ber78]. Эти результаты объединены и подытожены в обзоре [Рон86] и монографии [Рон92] Л. И. Ронкина. В варианте из монографии и в ее обозначениях они и приводятся ниже.

Наряду с (4.0.3) для $x^0\in\mathbb{R}^n$ и $\alpha>0$ используется обозначение

$$T(x^0,\alpha):=\{x\in\mathbb{R}^n\colon \|x-x^0\|<\alpha\}$$

для “вещественного” открытого n-мерного куба с центром x^0 и ребром длины 2α, а при $\beta>0$ еще и обозначение

$$T_\beta(x^0,\alpha):=\{x+iy\in\mathbb{C}^n\colon x,y\in\mathbb{R}^n,\ \|x-x^0\|<\alpha,\ \|y\|<\beta\}$$

для “комплексного” n-мерного параллелепипеда. Для дивизора Λ при $\operatorname{supp}\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ и $x^0\in\mathbb{R}^n$ полагаем

$$\hat h_\Lambda:=\frac12\inf\{\|x'-x''\|\colon x',x''\in\operatorname{supp}\Lambda,\ x'\neq x''\},\tag{4.1.2h}$$

$$\check\delta_\Lambda(x^0):=\limsup_{\alpha\to0}\limsup_{r\to+\infty}\frac{1}{(2\alpha r)^n}\sum_{x\in T(rx^0,r\alpha)}\Lambda(x).\tag{4.1.2d}$$

Кроме того, введем величину

$$W_n:=\inf_{\alpha>0}\inf_{\substack{f\in H(T_\alpha(0,\alpha))\\ f(0)=0}}\frac{\mathcal{V}_f\big(T_\alpha(0,\alpha)\big)}{\mathrm{Zero}_f(0)(2\alpha)^{2n-2}}.\tag{4.1.3}$$

Из теоремы единственности Ронкина–Берндссона [Рон92, Теорема 5.2.2], основанной на оценках сверху и снизу объема дивизора нулей, по двойственной аналитической схеме сразу выводится

Теорема 4.1.3. *При* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^n$ *и* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *для дивизора показателей* Λ *с* $\operatorname{supp} \Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *из неравенства*

$$\sigma_1 + \cdots + \sigma_n < \pi W_n \hat{h}_\Lambda^{n-1} \check{\delta}_\Lambda(x^0), \tag{4.1.4}$$

следует полнота системы $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ *в* $L^p(T_\sigma)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и в* $C(T_\sigma)$.

Ясно, что согласно условию (4.1.4) теорема 4.1.3 содержательна только при $\hat{h}_\Lambda > 0$, т. е. для дискретных дивизоров Λ. Величина $\check{\delta}_\Lambda(x^0)$ из (4.1.2d) имеет естественный вид плотности распределения дивизора Λ. Таким образом, для более прозрачного вида условия (4.1.4) необходимы более или менее оптимальные оценки снизу постоянной W_n из (4.1.3). Например, известна оценка [Рон92]

$$\frac{\pi^{n-1}}{2^{2n-2} \cdot (n-1)!} \leqslant W_n. \tag{4.1.5}$$

Подстановка правой части (4.1.5) вместо W_n в (4.1.4) дает более явное условие полноты. Но в идеале должна быть решена

Проблема 4.1.1. *Найти значение постоянной* W_n *из* (4.1.3).

Основная гипотеза — $W_n = 1$ для любого $n = 2, 3, \ldots$. Подтверждена она, по-видимому, только для $n = 2$ в совместной статье В. Э. Кацнельсона и Л. И. Ронкина [KP74, Теорема 1], и при $n = 2$ с $W_n = 1$ теорема 4.1.3 точна.

Возможна и иная версия теоремы 4.1.3 [Рон92, Замечание 3].

Описанию некоторых неполных систем экспонент в весовых банаховых пространствах многих вещественных переменных посвящена недавняя совместная статья Ж. Гао и Г. Т. Денга [GDe04], использующая обобщение теоремы единственности П. Мальявена на функции многих переменных.

4.1.2 Многомерная версия теоремы Ландау

Многомерное обобщение теоремы Ландау 2.1.14 на пространства $L^2(D)$ оказалось еще более неожиданным по результату.

Теорема 4.1.4 (А. М. Улановский [Ул01, Теорема 2]). *Пусть последовательность* $\left(\delta_{k_1,\dots,k_n}\right)_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}}$ *удовлетворяет условию*

$$0<|\delta_{k_1,\dots,k_n}|\leqslant \mathrm{const.}\, q^{|k_1|+\dots+|k_n|},\quad k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z},\quad 0<q<1.$$

Допустим также, что набор чисел $s_1,\dots,s_n\in\mathbb{R}$ *линейно независим над* $\mathbb{Z}$, $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. *Тогда система экспонент*

$$\left\{\exp i\left((2\pi k_1+s_1\delta_{k_1,\dots,k_n})x_1+\dots+(2\pi k_n+s_n\delta_{k_1,\dots,k_n})x_n\right)\right\}$$

полна в $L^2(D)$ *в случае открытого ограниченного подмножества* $D\subset\mathbb{R}^n$, *пересечение замыкания которого с* $\mathbb{Z}^n\subset\mathbb{R}^n$ *пусто.*

4.1.3 Об ортонормированных базисах из экспонент в $L^2(D)$

В последние годы немало работ было посвящено существованию ортонормированных базисов вида

$$\mathrm{Exp}_{i\Lambda},\quad \Lambda\subset\mathbb{R}^n \text{ — дискретное множество, } n\geqslant 2, \tag{4.1.6}$$

в $L^2(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$ — *ограниченная область*. Исследования эти прежде всего направлены на подтверждение (или опровержение) гипотезы Фугледе, остающейся в общем случае открытой с 1974 года и имеющей приложения к коммутированию полусопряженных дифференциальных операторов и к теории групп:

Гипотеза (Б. Фугледе [Fug74]). *Пространство функций* $L^2(D)$ *в ограниченной области* $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *допускает ортонормированный базис вида* (4.1.6) *в том и только том случае, когда замыкание объединения некоторого семейства непересекающихся сдвигов области* D *совпадает с* $\mathbb{R}^n$.

Открытый куб в $\mathbb{R}^n$ в качестве области D подтверждает эту гипотезу. Из результатов по гипотезе Фугледе отметим следующие:

(a) *для выпуклой несимметричной (без центра симметрии) области* D *ортонормированных базисов вида* (4.1.6) *в* $L^2(D)$ *не существует* (М. Н. Колонцакис [Kol00′]);

(b) *для выпуклой симметричной области* D *с гладкой границей в* $L^2(D)$ *их также нет* (А. Иосевич, Н. Кац, Т. Тао [IKT01]);

(c) *если плоская* ($n = 2$) *область* D *выпукла, то ортонормированный базис вида* (4.1.6) *в* $L^2(D)$ *существует тогда и только тогда, когда* D *либо невырожденный паралеллограмм, либо невырожденный шестиугольник с центром симметрии* (А. Иосевич, Н. Кац, Т. Тао [IKT03]). В последнее вписывается более ранний результат тех же авторов [IKT01] *об отсутствии ортонормированного базиса вида* (4.1.6) *в* $L^2(D)$ *для плоской выпуклой области* D*, когда на* ∂D *есть точка, в которой кривизна границы ненулевая* (ср. с началом п. 3.4.2).

Дальнейшие сведения по тематике этого пункта, включая многие открытые проблемы, можно почерпнуть из обзоров М. Н. Колонцакиса [Kol00], [Kol04]. В дополнение к ним отметим, что гипотеза Фугледе была опровергнута недавно в части необходимости в статьях Т. Тао [Tao04] при $n \geqslant 5$, М. Матолши [Mat05] при $n = 4$, М. Н. Колонцакиса и М. Матолши [KM04′] при $n = 3$, а в части достаточности — в работах М. Н. Колонцакиса и М. Матолши [KM04] при $n \geqslant 5$, Б. Фаркаша и С. Ревеса [FR04] при $n = 4$.

4.1.4 Полнота в $L^p(D)$ при неограниченности D

Методами, аналогичными использованным при доказательстве теоремы 4.1.3, в статье Л. И. Ронкина [Рон73], получены достаточные условия полноты системы (4.0.2) в $L^p(D)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная выпуклая область, а $\operatorname{supp}\Lambda$ включен в конус

$$\operatorname{supp}\Lambda \subset K_D := \Bigl\{\zeta \in \mathbb{R}^n \colon \sup_{x\in D} <\zeta, x> \; < +\infty\Bigr\}.$$

Условия эти формулируются в терминах характеристики $\hat{h}_\Lambda$ из (4.1.2h) и плотности

$$\overline{d}_\Lambda := \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{|x|<r} \Lambda(x). \tag{4.1.7}$$

Теорема 4.1.5 (Ронкин Л. И. [Рон73]). *Пусть область* $D \subset \mathbb{R}^n$ *выпукла и неограничена,* $\operatorname{int} K_D \neq \varnothing$, $\operatorname{supp}\Lambda \subset K_D$. *Если* $\hat{h}_\Lambda > 0$ *и* $\overline{d}_\Lambda > 0$, *то система* $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна в* $L^p(D)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Условия $\hat{h}_\Lambda > 0$ и $\overline{d}_\Lambda > 0$ не учитывают каких-либо естественных геометрических характеристик области D (ср. с одномерными результатами из подразделов 3.2.1–3.2.2). Это значит, что теорема 4.1.5 еще очень далека от точных результатов.

4.1.5 Радиус шара полноты в $\mathbb{C}^n$

Для числа $\varepsilon > 0$ подмножество $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ называется ε-сетью для подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} |x_j - x'_j| \leqslant \varepsilon \colon x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \Lambda \right\}$$

для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$. В. Н. Логвиненко в [Лог75]–[Лог91] применил принципиально новые аппроксимационные методы к исследованию вещественных так называемых нормирующих множеств для пространств целых функций в $\mathbb{C}^n$ с ограничениями на тип при заданном порядке. Здесь важно лишь то, что каждое нормирующее множество является и множеством единственности, а это дает оценки радиуса шара полноты $R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda)$.

Теорема 4.1.6 ([Лог75, Теорема 1], [Лог89, Теорема 5], [Лог91, Теорема 1.2.4]). *Пусть* Λ *—* ε*-сеть для* $\mathbb{R}^n$*. Тогда* $R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda) \geqslant \dfrac{1}{2\varepsilon([en]+1)}$*, где* $[\,\cdot\,]$ *— целая часть. Если* Λ *—* ε*-сеть для* $(\mathbb{R}^+)^n$*, то имеет место более слабая оценка* $R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda) \geqslant \dfrac{1}{2^{n+1}\varepsilon([en]+1)}$*.*

Эти оценки далеки от точных, поскольку, как показано в совместной статье В. Н. Логвиненко и С. Ю. Фаворова [ЛоФ93], нормирующие множества обладают дополнительными свойствами по сравнению с множествами единственности.

Для ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{C}^n$ некоторые частные результаты о полноте систем экспонент с дискретной последовательностью показателей в пространстве Бергмана $B^2(G)$, определяемом в полной аналогии с одномерным случае (3.2.8), относительно недавно привел в [Le99] Ле Хай Хой. Конкретнее, пусть H_G — опорная функция выпуклой области $G \ni 0$, определенная на всем $\mathbb{C}^n$ как положительно однородная функция.

Теорема 4.1.7 ([Le99, Теорема 3.1, Следствие 3.2]). *Если для некоторого числа* $a > 1$ *последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ *попарно различных точек — множество единственности для пространства* *ц.ф.э.т.* $E[1, aH_G)$ *с радиальным индикатором роста* $< aH_G$ *на* $\mathbb{C}^n$ (ср. с пространствами в конце п. 0.1.4), *то система экспонент* Exp_Λ *полна в пространстве Бергмана* $B^2(G)$.

При этом для каждой выпуклой области $G \Subset \mathbb{C}^n$ *при любом числе* $a > 1$ *можно явно построить последовательность единственности* Λ *для* $E[1, aH_G)$, *а стало быть и полную систему экспонент* Exp_Λ *для пространства Бергмана* $B^2(G)$.

На самом деле в работе Ле Хай Хоя строится так называемое слабо достаточное дискретное множество Λ для пространства $E[1, aH_G)$, которое обязано быть множеством единственности для $E[1, aH_G)$, но не наоборот. Явно конструируемая последовательность единственности Λ для $E[1, aH_G)$ достаточно тесно связана с геометрией G и числом a: чем “больше” G и a, тем “реже” Λ.

4.1.6 О теоремах типа Мюнтца–Саса

В терминах плотности (4.1.7) первоначальные ослабленные аналоги теоремы Мюнтца–Саса для степенных функций многих преременных, а значит, и для систем Exp_Λ в пространствах $L^p\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$ и $C_0\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$ рассматривались и установлены в работах Я. Кореваара и С. Хеллерштейна [Kor66], [KH68], [Kor70], [He71], [Kor83], Л.И.Ронкина [Рон73], Б. Берндссона [Ber78].

Многомерные версии теоремы Мюнтца–Саса в степенной трактовке, когда последовательность показателей

$$\Lambda = \{\lambda^{(k)}\} \subset (\mathbb{Z}^+ \setminus \{0\})^n, \quad \lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}),$$

такова, что

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_j^{(k)}} = +\infty \ \text{ для каждого } j = 1, \dots, n,$$

получены в статьях Б.Х. Аупетита [Au73], а также Ш. Огавы и К. Китохары [OK87]. В последней работе получены критерии полноты и для более общих систем функций

$$\prod_{j=1}^n \psi_j^{\lambda_j^{(k)}}.$$

Эти результаты в экспоненциальной трактовке дают критерий полноты системы экспонент $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ в пространстве $C_0\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$ функций $f\colon x=(x_1,\dots,x_n)\to\mathbb{C}$, непрерывных в $(\mathbb{R}^+)^n$ и стремящихся к нулю при $x_j\to+\infty$ по любой переменной x_j, $j=1,\dots,n$, [Au73, Теорема], [OK87, Теорема 1] и в пространстве $L^p\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$ [OK87, Теорема 2]. Но природа этих результатов во многом одномерна, т. е. их доказательства в той или иной мере сводятся к классической теореме Мюнтца–Саса для отрезка $[0,1]$.

Для явной аналогии с одномерными результатами необходимо дать многомерную версию условия расходимости Бляшке–Мюнтца (см. теорему 2.1.4), которую для дискретного дивизора показателей Λ будем рассматривать в виде

$$\sum_{z\in\mathbb{C}^n}\frac{\Lambda(z)}{1+|z|}=+\infty. \tag{4.1.8}$$

В начале 1990-х к многомерной теореме Мюнтца–Саса для пространства $C_0\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$ наиболее близко подошли А. Кроо [Kro94] (статья направлена в печать в 1991 г.) и Т. Блум [Blo90]. В последней статье была высказана гипотеза, которую подтвердил Х. Янг [Ya91]. После него еще одно доказательство этой гипотезы, основанное на интерполяционных методах, предоставил и Т. Блум.

Теорема 4.1.8 ([Ya91], [Blo92]). *Пусть для дивизора показателей* Λ *с* $\operatorname{supp}\Lambda\subset(\mathbb{R}^+\setminus\{0\})^n$ *при некотором* $\varepsilon>0$ *пересечение* $B_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon)\cap\operatorname{supp}\Lambda$ *пусто. Система* $\operatorname{Exp}_{(-\Lambda)}$ *полна в* $C_0\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие расходимости* (4.1.8).

Ситуация для пространств $L^p\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$ при $n\geqslant 2$ не так однозначна, как в случае одной переменной для *вещественной* последовательности показателей. При $n\geqslant 2$ для любых $1\leqslant p_1<p_2<+\infty$ С. Хеллерштейн в [He71, Теорема 1] построил последовательности $\Lambda=\{\lambda^{(k)}\}$ из $\subset(\mathbb{R}^+\setminus\{0\})^n$, координаты точек которой стремятся к $+\infty$ при $k\to+\infty$, а система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ полна в $L^{p_1}\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$, но не полна в $L^{p_2}\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$. Там же показано [He71, Следствие 1.1], что условия полноты системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в $C_0\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$ и в $L^p\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$, вообще говоря, различны.

Неголоморфную двумерную версию теоремы Мюнтца $C(D)$ рассматривал Т. Т. Трент [Tre81].

4.1.7 Аппроксимация с ограничениями на рост коэффицентов

Результаты этого пункта получены В. В. Напалковым [На80] для аппроксимации непрерывных функций на компакте многочленами и родственны абсолютной полноте (см. п. 1.1.4). Но само доказательство основного результата [На80, Теорема 2.1] фактически имеет дело с системами экспонент и доказано несколько больше, если привлечь еще и теорему Титце–Урысона о непрерывном продолжении непрерывных функций с компакта в содержащую его область. Эта усиленная версия и приводится здесь.

Теорема 4.1.9 (Напалков В. В. [На80]). *Пусть* $\Lambda = \{\lambda^{(k)}\}$, $k \in \mathbb{N}$, *— последовательность попарно различных точек* $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}) \in (\mathbb{R}^+)^n$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_j^{(k)}/j = 1$ *для каждого* $j = 1, \ldots, n$, *а последовательность* $\{M_k\} \subset (0, +\infty)$ *удовлетворяет условию* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\log M_k}{|\lambda^{(k)}|} = +\infty$. *Пусть* f *— функция, непрерывная на компакте* $K \subset \mathbb{R}^n$ *(соотв. из пространства* $C_0\big((\mathbb{R}^+)^n\big)$*). Тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *найдется конечная линейная комбинация* $C_\varepsilon(x) = \sum\limits_k a_k \exp(-{<}\lambda^{(k)}, x{>})$, *для которой*

$$\sup_{x\in K\ \big(\text{соотв. } \in (\mathbb{R}^+)^n\big)} \big|f(x) - C_\varepsilon(x)\big| < \varepsilon, \qquad \sum_k \frac{|a_k|}{M_k} \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 4.1.9 не “чувствует” расположения и геометрии компакта K (ср. с одномерными теоремами 2.1.36 и 3.4.5), что актуализирует дальнейшее ее развитие. Общие принципы исследования аппроксимации с ограничениями на рост коэффициентов аппроксимирующих линейных комбинаций вместе с их реализациями для весовых пространств голоморфных функций в области из $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, изложены в работах В. Б. Шерстюкова [Ше95], [Ше97] и в его диссертации [Ше00′].

4.2 Недискретные дивизоры показателей в $\mathbb{C}^n$

4.2.1 Множества показателей $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ или $\Lambda \subset i\mathbb{R}^n$

Этот пункт 4.2.1 можно рассматривать как промежуточный при переходе от предыдущего подраздела 4.1 к дивизорам показателей с носителем, выходящим за рамки $\mathbb{R}^n$ или $i\mathbb{R}^n$.

Одно простое утверждение следует из оценок $(n-1)$-мерной площади пересечения $\operatorname{supp} \mathrm{Zero}_f \cap \mathbb{R}^n$ для целой функции f в $\mathbb{C}^n$ через максимум модуля f. Конкретнее, пусть $\mathcal{H}_\alpha$ — α-мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$ [Чи85, П 6], [Хаб92*], [Хаб99].

Теорема 4.2.1 (П. Лелон и Ф. Фейгс [Lel77, Следствие 4])**.** *Если для $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\mathcal{H}_{n-1}\bigl(\Lambda \cap B_{\mathbb{R}^n}(r)\bigr)}{r^n} = +\infty,$$

то радиус шара полноты $R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda) = +\infty$.

Другой тип условий полноты касается относительно плотных подмножеств $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Следуя Б. Я. Левину, измеримое подмножество $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ плотно относительно $A \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\sup_{\alpha>0} \inf_{x\in A} m\bigl(\Lambda \cap T(x,\alpha)\bigr) > 0,$$

где m — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. После предваряющих работ Б. Я. Левина [Лев71], В.Э.Кацнельсона [Ка73], Б. Я. Левина и В. Н. Логвиненко [ЛеЛ89] из результата В. Н. Логвиненко [Лог89, Теорема 3] о нормирующих множествах следует

Теорема 4.2.2. *Если подмножество $\Lambda \subset (\mathbb{R}^+)^n$ плотно относительно $(\mathbb{R}^+)^n$, то $R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda) = \infty$.*

Приведем еще один специфический тип условий полноты системы экспонент в пространстве $L^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ назывется 1-периодическим в $\mathbb{R}^n$, если $A+\mathbb{Z}^n = A$. Оно же называется *лакунарным над* кубом $T(0,\alpha)$, если для любого $x \in T(0,\alpha)$ существует число $N = N(x) \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $p \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ точка x покрывается не более чем N множествами семейства $(A+2\alpha(k+p)) \cap (A+k)$, когда k пробегает все $\mathbb{Z}^n$. В совместной работе В. Н. Логвиненко и С. Ю. Фаворова

[LF92] установлено несколько специфических теорем единственности для таких подмножеств Λ, из одной из которых следует

Теорема 4.2.3 ([LF92, Теорема 9]). *Если подмножество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *— лакунарное над* $T(0,\pi)$ *и* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *содержит* 1*-периодическое подмножество строго положительной лебеговой меры в* $\mathbb{R}^n$*, то система* $\operatorname{Exp}_{i\Lambda}$ *полна в* $L^1(A)$.

4.2.2 Дивизоры показателей с носителем в $\mathbb{C}^n$

Когда необходимо, $\mathbb{C}^n$ отождествляем с $\mathbb{R}^{2n}$ по правилу

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^n \ni z = (z_1, \dots, z_n) \longleftrightarrow (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n},\\ z_j = x_j + iy_j, \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Кроме того, *для дивизоров (соотв. подмножеств)* Λ *в* $\mathbb{C}^n$ *всюду далее для простоты считаем, что* $0 \notin \operatorname{supp} \Lambda$ *(соотв.* $0 \notin \Lambda$*).* Элементарная теорема единственности для целых функций многих переменных — *если целая функция* f *тождественно равна нулю на открытом подмножестве из* $\mathbb{C}^n$*, то* $f \equiv 0$ *на всем* $\mathbb{C}^n$ (слабый аналог предложения 1.1.1). Только на этом факте основаны результаты следующего пункта

Элементарные методы

Здесь мы излагаем некоторые результаты из статьи Л. Бернала-Гонзалеза [B-G00]. Они опираются только на элементарную теорему единственности и формулу Йенсена (многомерное покоординатное применение (2.1.6)) и потому не могут быть достаточно тонкими. Тем не менее эти результаты все же представляют несомненный интерес как демонстрация максимальных возможностей на пути применения элементарных методов.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, где $|c| = 1$. Через $n_\Lambda(a, c; t)$, $t \geqslant 0$, обозначаем число точек из Λ, попавших в круг $\{a + \zeta c \colon \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| \leqslant t\}$.

Для $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in [0, 2\pi]^{n-1}$ можем ввести величины

$$c(\alpha, r) := \frac{1}{|r|} \left(r_1 e^{i\alpha_1}, \dots, r_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}}, r_n\right)$$

и

$$V_\Lambda(a,r) := \int\limits_0^{|r|} \left(\int_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} n_\Lambda\bigl(a, c(\alpha, r); t\bigr)\, \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_{n-1} \right) \mathrm{d}t.$$

Основной результат работы Л. Бернала-Гонзалеза —

Теорема 4.2.4 ([B-G00, Теорема 1]). *Пусть* $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, *а* G — *непустая область в* $\mathbb{C}^n$. *Допустим, что существует* n *семейств* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ *из* $H(G)$, *для которых*

$$\overline{\operatorname{span}}\{g_1^{k_1} \cdots g_n^{k_n} \colon k_j \in \mathbb{Z}^+, g_j \in \mathcal{A}_j, j = 1, \ldots, n\} = H(G), \quad (4.2.1)$$

и к тому же выполнено одно из следующих трех условий:

(i) *существует подмножество* $A \subset \mathbb{C}^n$ *с непустой внутренностью замыкания такое, что для каждого* $a \in A$ *найдется* $t > 0$, *с которым при любом* $m \in \mathbb{N}$ *можно подобрать* $c \in \mathbb{C}^n$, $|c| = 1$, *так, что* $n_\Lambda(a, c; t) > m$;

(ii) *существует подмножество* $A \subset \mathbb{C}^n$ *с непустой внутренностью замыкания и* $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ *такие, что для любого* $a \in A$ *имеет место неравенство*

$$\limsup_{|r| \to \infty} \frac{V_\Lambda(a,r)}{|r|} \geqslant (2\pi)^{n-1} \sup_{\substack{g_j \in \mathcal{A}_j \\ j=1,\ldots,n}} \sup_{z \in G} \left(\sum_{j=1}^n |g_j(z) - b_j|^2 \right)^{1/2}; \quad (4.2.2)$$

(iii) *внутренность замыкания* Λ *в* $\mathbb{C}^n$ *непуста.*

Тогда в области G *полна система*

$$\left\{ \exp\Bigl(\sum_{j=1}^n \lambda_j g_j \Bigr) \colon (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \Lambda,\ g_j \in \mathcal{A}_j \right\}.$$

Если в в качестве $\mathcal{A}_j$ взять $\{z_j\}$ — j-ая координата $z \in \mathbb{C}^n$, то (4.2.1) означает полноту полиномов в G, а двойная точная верхняя грань в правой части неравенства (4.2.2) — это наименьший радиус $R_{\min}(G)$ шара, включающего в себя область G. Это дает

Следствие 4.2.1 ([B-G00, Следствие 1]). *Если G — область Рунге, $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ и существует $A \subset \mathbb{C}^n$ такое, что* $\operatorname{int}\operatorname{clos} A \neq \varnothing$ *и*

$$\limsup_{|r|\to\infty} \frac{V_\Lambda(a,r)}{|r|} \geqslant (2\pi)^{n-1} R_{\min}(G)$$

для всех $a \in A$, то система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна в G. То же самое заключение выполнено при условии* (i) *или* (iii) *из теоремы* 4.2.4.

Дивизор показателей = дивизор нулей

При $t \geqslant 0$ и $z \in \mathbb{C}^n$ для дивизора показателей $\Lambda\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{Z}^+$ полагаем $n_\Lambda(t;z) := \sum_{w\in\mathbb{C},\,|w|<t} \Lambda(wz)$. Конечно, эта характеристика может принимать и значение $+\infty$. Но если $\Lambda = \operatorname{Zero}_f$ для $f \in H(\mathbb{C}^n)$ и $f(0) \neq 0$, то она конечна и обладает свойствами интегрируемости, позволяющими определить ее усреднения

$$N^*_\Lambda(z) := \int_0^1 \frac{n_\Lambda(t;z)}{t}\,\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$
$$N_\Lambda(r) := \int_{\partial\mathbb{B}_n} N^*_\Lambda(rz)\,\mathrm{d}s_n(z), \quad r > 0,$$

где $\mathbb{B}_n := B_{\mathbb{C}^n}(1)$ — единичный шар в $\mathbb{C}^n$, а $\mathrm{d}s_n$ — элемент интегрирования по площади единичной сферы $\partial\mathbb{B}_n$ с нормировкой $s_n(\partial\mathbb{B}_n) = 1$. При этом *усредненная верхняя плотность* $\overline{D}(\Lambda)$ дивизора Λ определяется как в (2.1.4). Как частный случай общих теорем (не)единственности для целых функций многих переменных, основанных на многомерной версии метода выметания из подраздела 1.2, а точнее, на обобщении теоремы 1.2.1 на многие переменные (см. [Хаб92′], [Хаб92″] и [Хаб93′]) в работе Б. Н. Хабибуллина [Хаб93″, введение, следствие] получены оценки радиуса шара полноты $R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda)$ в $\mathbb{C}^n$ (ср. с теоремой 3.3.2):

Теорема 4.2.5. *Пусть $\Lambda = \operatorname{Zero}_f$ для некоторой целой функции f на $\mathbb{C}^n$ и $f(0) \neq 0$. Тогда справедливы точные оценки*

$$\overline{D}(\Lambda) \leqslant R_{\mathbb{C}^n}(\Lambda) \leqslant \pi\overline{D}(\Lambda)\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1 + \frac{1}{2k}\Bigr).$$

Более того, из точных теорем (не)единственности, доказанных в [Хаб93″, Теорема 2.2] для классов целых функций, выделяемых ограничениями на их круговой индикатор при порядке $\rho > 0$, получено аналогичное теореме 4.2.5 *точное* утверждение о полноте системы экспонент в выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$.

Круговым индикатором $h_c^*(z,\Lambda)$, $z \in \mathbb{C}^n$, *дивизора* Λ называем полунепрерывную сверху регуляризацию функции

$$\limsup_{\mathbb{C}\ni w\to\infty} \frac{N_\Lambda^{*}(wz)}{|w|}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Теорема 4.2.6 (Б. Н. Хабибуллин [Хаб93″, следствие 2.1, пример 2.1]). *Пусть* Λ *— дивизор показателей на* $\mathbb{C}^n$ *и* $0 \notin \operatorname{supp}\Lambda$, G *— выпуклая область в* $\mathbb{C}^n$ *с опорной функцией*

$$K_G(z) := \sup_{\zeta\in G} \operatorname{Re} <\zeta, \overline{z}>, \quad \overline{z} = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда имеют место и точны утверждения

(a) *Если для некоторого открытого подмножества* W *единичной сферы* $\partial\mathbb{B}_n$ *в некоторой точке* $z \in W$

$$h_c^*(z,\Lambda) \geqslant \sup\{K_G(e^{i\theta}\overline{w})\colon w \in W,\ \theta \in \mathbb{R}\},$$

то система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна в области* G.

(b) *Если найдется функция* $f \in H(\mathbb{C}^n)$ *такая, что*

$$f(0) \neq 0, \quad \Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_f, \quad h_c^*(z, \operatorname{Zero}_f) < K_G(\overline{z}),\ \forall\, z \in \partial\mathbb{B}_n,$$

то $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *неполна в области* πG*, где* $\pi G := \{\pi z\colon z \in G\}$.

Полнота в областях и на компактах

Для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ и $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $\lambda \times z := (\lambda_1 z, \lambda_2 z, \dots, \lambda_n z) \in \mathbb{C}^n$. *Взаимный* (продолженный на $\mathbb{C}^n$) *индикатор* $H_\rho^*(\lambda; f, A)$ *целой функции* f *и подмножества* $A \subset \mathbb{C}^n$ *при порядке* $\rho \in \mathbb{R}^+$ определяется так же, как и в (3.3.5)–(3.3.6) для одномерного случая, с той лишь разницей, что в (3.3.5) в первом равенстве-определении функцию $f(\lambda z)$ надо заменить на $f(\lambda \times z)$ при $\lambda, z \in \mathbb{C}^n$. Сужение $H_\rho^*(\lambda; f, A)$ на единичную сферу $\partial\mathbb{B}_n$, обозначаемое далее $h_\rho^*(\,\cdot\,; f, A)$ (ср. с (3.3.7)), — просто *взаимный индикатор* f *и* A *при порядке* ρ. Как и в случае одной переменной это понятие содержит в себе определения регуляризованного радиального индикатора целой функции при порядке ρ и опорной функции выпуклого множества в $\mathbb{C}^n$.

Определение 4.2.1 (см., например, [Кон84], [Хаб91′]). Полунепрерывная сверху функция $h : \partial\mathbb{B}_n \to [-\infty, +\infty)$, интегрируемая по $\mathrm{d}s_n$ на единичной сфере, называется *субсферической функцией порядка* ρ, если $\mathcal{L}_\rho h \geqslant 0$, где оператор $\mathcal{L}_\rho := \Delta_\theta + \rho\,(\rho + m - 2)$, Δ_θ — сферическая часть оператора Лапласа [Рон71], а неравенство выполнено в пространстве обобщённых функций (распределений) на единичной сфере. При этом меру $s_h^{(\rho)} = \mathcal{L}_\rho h$ на $\partial\mathbb{B}_n$ называем ассоциированной с h мерой (аналог (3.3.8)). Класс всех (соотв. положительных) субсферических функций порядка ρ обозначаем через SS_ρ (соотв. SS_ρ^+).

В случае одной переменной SS_ρ — это класс ρ-тригонометрически выпуклых 2π-периодических функций. Если f — целая функция конечного типа при порядке ρ, а множество A *ограничено*, то их взаимный индикатор при порядке ρ принадлежит классу SS_ρ.

Для полунепрерывной сверху функции q на единичной сфере при $h \in SS_\rho$ полагаем

$$S_\rho(q, h) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{B}_n} q \, \mathrm{d}s_h^{(\rho)}$$

(ср. с (3.3.9)); $\|q\| := \sup\{q(\zeta) : \zeta \in \partial\mathbb{B}_n\}$. Для $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, обобщая (3.3.3), полагаем (при условии интегрируемости)

$$\Lambda(t; q) := \int_{\Lambda \cap t\mathbb{B}_n} q(z/|z|) \, \mathrm{d}\mathcal{H}_{2n-2}(z)\,,$$
$$\Lambda(t; c) := c\,\mathcal{H}_{2n-2}(\Lambda \cap t\mathbb{B}_n), \quad c \in \mathbb{R}^+,$$

$\mathcal{H}_{2n-2}$ — $(2n-2)$-мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^{2n}$, отождествленном с $\mathbb{C}^n$.

Определение 4.2.2 ([Хаб99, Определение 3.2]). Для $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ при $q \in SS_\gamma^+$ *верхнюю* (q, ρ)*-плотность* $\overline{D}_q(\Lambda; \rho)$

1) при условии $0 \leqslant \gamma < \rho$ полагаем равной

$$\overline{D}_q(\Lambda; \rho) := \limsup_{r \to +\infty} \frac{1}{2r^{\rho+2n-2}} \int_1^r \left(\frac{\gamma + 2n - 2}{\gamma + n - 1} \left(\frac{r}{t}\right)^{\gamma+2n-2} + \frac{\gamma}{\gamma + n - 1} \left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma} \right) \frac{\Lambda(t; q)}{t} \, \mathrm{d}t\,;$$

2) при условии $\gamma = \rho$ задаем в виде

$$\overline{D}_q(\Lambda; \rho) := \limsup_{a \to +\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r \to +\infty} \int_r^{ar} \frac{\Lambda(t; q)}{t^{\rho+2n-1}} \, \mathrm{d}t\,;$$

3) при $\gamma > \rho$ определяем как

$$\overline{D}_q(\Lambda;\rho) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{2r^{\rho+2n-2}} \Biggl(2\, r^{2n-2} \int\limits_1^r \frac{\Lambda\bigl(t;\|q\|\bigr)}{t^{2n-1}}\, \mathrm{d}t - \frac{\gamma}{\gamma+n-1} \int\limits_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma} \frac{\Lambda(t;q)}{t}\, \mathrm{d}t + \frac{\gamma+2n-2}{\gamma+n-1} \int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{\gamma+2n-2} \frac{\Lambda(t;q)}{t}\, \mathrm{d}t \Biggr).$$

При $n = 1$ определение 4.2.2 в точности совпадает с определением 3.3.1, вследствие чего следующий результат представляет собой прямую многомерную версию теорем 3.3.5 и 3.3.9.

Теорема 4.2.7 ([Хаб99, Теорема 3.1]). *Пусть f — целая функция в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, конечного типа при порядке $\rho > 0$ и все частные производные (по комплексным переменным) функции f в нуле отличны от нуля, D — область Рунге или полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, h^* — взаимный индикатор f и D при порядке ρ, h — непрерывная субсферическая функция порядка ρ и $h^* \leqslant h$ на единичной сфере, $q \in SS^+_\gamma$. Допустим, что*

1) *если $\gamma < \rho$, то выполнено неравенство*

$$\overline{D}_q(\Lambda;\rho) > \frac{1}{(\rho-\gamma)(\rho+\gamma+2n-2)} S_\rho(q,h);$$

2) *если $\gamma = \rho$, то* $\overline{D}_q(\Lambda;\rho) > \dfrac{1}{\rho+2n-2} S_\rho(q,h)$;

3) *если $\gamma > \rho$, то справедливо неравенство*

$$\overline{D}_q(\Lambda;\rho) > \frac{\|q\|}{\rho(\rho+2n-2)} S_\rho(1,h) + \frac{1}{(\gamma-\rho)(\gamma+\rho+2n-2)} S_\rho(q,h)\,.$$

Тогда система функций $\{f(\lambda\times z)\}_{\lambda\in\Lambda}$ полна на множестве D.

Доказательство основано на конструировании специальных функций Йенсена многих переменных и на многомерной версии следствия 1.2.1. Как отмечено в [Хаб99, Замечание], когда

$$f(z) \equiv \exp(z_1 + \dots + z_n), \; z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \; \rho = 1,$$

а D — выпуклая область Рунге в $\mathbb{C}^n$, теорема 4.2.7 переходит в теорему о полноте системы экспонент $\operatorname{Exp}_\Lambda$ в $H(D)$. В этом случае можно показать, что она останется верной, если даже строгие неравенства $>$ в последних соотношениях из 1)–3) заменить на нестрогие $\geqslant$, и в таком варианте теорема 4.2.7 точна.

Возможно распространение теоремы 4.2.7 и на еще более общие системы целых по $z \in \mathbb{C}^n$ функций $\{f(z, \lambda)\}$, $\lambda \in \Lambda$ (см. [Хаб99, Теорема 3.3]). Эти обобщения содержат в себе подавляющее большинство известных условий полноты для подобных систем в области и на компакте для случая отличной от нуля $(2n-2)$-меры Хаусдорфа множества показателей в $\mathbb{R}^{2n}$, отождествленном с $\mathbb{C}^n$.

Литература

[АШ01] Абанин А. В., Шершнева О. В. Об одной системе экспонент в пространствах Жеврея // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. 2001. № 3. С. 3–6.

[Ав74] Авдонин С. А. К вопросу о базисах Рисса из показательных функций // Вестник Ленингр. ун-та. 1974. Т. 13. С. 5–12.

[АИ00] Авдонин С. А., Иванов С. А. Теорема Левина–Головина для пространств Соболева // Матем. заметки. 2000. Т. 68. Вып. 2. С. 163–172.

[АИ01] Авдонин С. А., Иванов С. А. Базисы Рисса из экспонент и разделенных разностей // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 3. С. 1–17.

[Аве90] Аветисян А. Е. О необходимых и достаточных условиях полноты систем функций $\big\{E_\rho(\lambda_n z;\mu)\big\}_1^\infty$ на системе конечных отрезков // Изв. АН Арм. ССР. 1990. Т. XXIII. № 1. С. 98–103.

[ААХ78] Аветисян А. Е., Акопян С. А., Хачатрян И. О. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера на произвольной конечной системе лучей // Изв. АН Арм. ССР. 1978. Т. XIII. № 5–6. С. 389–395.

[АГ89] Азарин В. С., Гинер В. Б. О полноте систем экспонент в выпуклых областях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 1. С. 11–14.

[АГ90] Азарин В. С., Гинер В. Б. О мультипликаторах целых функций конечного порядка // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 5. С. 1033–1036.

[АГ94] Азарин В. С., Гинер В. Б. Предельные множества целых функций и полнота систем экспонент // Матем. физика, анализ, геом. 1994. Т. 1. № 1. С. 3–30.

[АК78] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.

[Би04] Билалов Б. Т. Базисные свойства некоторых систем экспонент, косинусов и синусов // Сиб. матем. журн. 2004. Т 45. № 2. С. 264–273.

[Ваг77] Вагаршакян А. А. О некоторых обобщениях теоремы Мюнца–Саса // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1977. Т. XII. № 6. С. 476–485.

[Ви94] Винницкий Б. В. О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. матем. журн. 1994. Т. 46. № 5. С. 484–500.

[Ви96] Винницкий Б. В. Аппроксимационные свойства систем экспонент в одном пространстве аналитических функций // Укр. матем. журн. 1996. Т. 48. № 2. С. 168–183.

[Ви96′] Винницький Б. В. Про нулі деяких класів функцій, аналітичных в півплощині // Матем. студії. 1996. Вип. 6. С. 67–72.

[ВиГ05] Винницький Б. В., Галелюк Г. Д. Про умови неповноти систем експонент з вагою в $L^2(\mathbb{R})$ // Матем. студії. 2006. V. 25, № 1. P. 292–206.

[ВШ89] Винницкий Б. В., Шаповаловский А. В. О полноте систем экспонент с весом // Укр. матем. журн. 1989. Т. 41. № 12. С. 1695–1700.

[ВШ00] Винницький Б. В., Шаповаловьский О. В. Зауваження про повноту систем експонент з вагою в $L^2(\mathbb{R})$ // Укр. матем. журн. 2000. Т. 52. № 7. С. 875–880.

[ВиШ98] Винницький Б. В., Шаран В. Л. Опис послідовностей нулів одного класу функцій, аналітичних у півплощині // Укр. матем. журн. 1998. Т. 50. № 9. С. 1169–1176.

[ВиШ99] Винницький Б. В., Шаран В. Л. Про нулі аналітичних у півплощині функцій заданого уточненого формального порядку // Укр. матем. журн. 1999. Т. 51. № 7. С. 904–909.

[ВиШ02] Винницкий Б. В., Шаран В. Л. О нулях, сингулярных граничных функциях и модулях угловых предельных значений одного класса функций, аналитических в полуплоскости // Укр. матем. журн. 2004. Т. 56. № 6. С. 851–856.

[Ga86] Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М: Мир, 1986.

[Гай91] Гайсин А. М. Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931–945.

[Гай03] Гайсин А. М. Различные интерпретации условия типа Левинсона // Вестник УГАТУ. 2003. Т. 4. № 2. С. 79–83.

[Гал75] Галимов И. С. О полноте системы экспонент в невыпуклых областях // Матем. сб. 1975. Т. 98(140). № 1(9). С. 42–54.

[Ге38] Гельфонд А. О. Sur les systèmes complets des fonctions analitiques // Матем. сб. 1938. Т. 4(46). № 1. С. 149–156.

[Го86] Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука, 1986.

[ГЛО91] Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции // Итоги ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1991. Т. 85. С. 5–185.

[ГС88] Гришин А. Ф., Содин М. Л. Рост по лучу, распределение по аргументам корней целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Теор. функций, функц. анализ и их прилож. Харьков. Вища школа. 1988. Вып. 50. С. 47–61.

[Гр03] Громов В. П. О полноте системы значений голоморфной векторфункции в пространстве Фреше // Матем. заметки. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 3–18.

[Гу00] Губреев Г. М. Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B-представимых вектор-функций (метод проектирования: 20 лет спустя) // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 6. С. 827–840.

[ГМ71] Гурарий В. И., Мелетиди М. А. Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5. № 1. С. 73–75.

[DS62] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Т. I. М.: ИЛ, 1962.

[Дж66] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М: Наука, 1966.

[Дж88] Список печатных работ М. М. Джрбашяна // Изв. АН АРМ. ССР. 1988. Т. XXIII. № 6. С. 509–516.

[ДжМ77] Джрбашян М. М., Мартиросян В. М. Теоремы типа Винера–Пэли и Мюнтца–Саса //Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 44. № 1. С. 868–894.

[Day61] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.

[Дз74] Дзядык В. К. Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках // Матем. сб. 1974. Т. 95(137). № 4(12). С. 475–498.

[Ев79] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М: Наука, 1979.

[Зл99] Злобина С. В. О полноте некоторых систем в пространстве непрерывных функций // Труды VI междун. конф. женщин-математиков (Чебоксары 25–30 мая 1998 г.). Изд-во Нижегор. гос. ун-т. 1999. Т. 6, вып. 1. С. 21–24.

[Иб71] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.

[ИА73] Ибрагимов И. И., Аршон И. С. О полноте системы $\{x^{\lambda_n}\}$ на кривой // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 1. С. 29–32.

[ИН73] Ибрагимов И. И., Нагнибида И. С. Несколько замечаний о полноте системы $\{f(\alpha_k z)\}$ // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 6. С. 1277–1279.

[Ибр82] Ибрагимова С. З. О полноте одной системы функций, аналитических в кольце // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-тех. и матем. наук. 1982. № 2. С. 23–28.

[Ил83] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности в L^p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений по системе экспонент // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 789–793.

[Ис04] Исаев К. П. Безусловные базисы из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых областях. Диссертация … кандидата физ.-мат. наук. Уфа. 2004.

[ИЮ06] Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С. Безусловные базисы из экспонент в пространствах Бергмана // Тр. МИАН. 2006. Т. 253. С. 88–100

[КХ00] Каримов М. Р., Хабибуллин Б. Н. Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций // Труды международной конференции “Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы”. III. Анализ и дифференциальные уравнения. Уфа. 2000. С. 29–34.

[Ка73] Кацнельсон В. Э. Эквивалентные нормы в пространствах целых функций // Матем. сб. 1973. Т. 92(134). № 1(9). С. 34–54.

[КР74] Кацнельсон В. Э., Ронкин Л. И. О минимальном объеме аналитического множества // Сиб. матем. журн. Т. XV. № 3. С. 516–528.

[КМ65] Катцнельсон И., Мандельбройт С. Целые функции и проблема Гельфанда–Шилова // Сб. переводов: Математика. 1967. Т. 11:3. С. 117–127; пер. с франц. Katznelson Y., Mandelbrojt S. Fonctions entirés et le problème de Gelfand et Šilov // J. d'Analyse Math. 1965. V. 15. P. 263–279.

[Кон84] Кондратюк А. А. Сферические гармоники и субгармонические функции // Матем. сб. 1984. Т. 125. №2. С. 147–166.

[КК92] Кондратюк А. А., Коробейник Ю. Ф. Отделимость нулей целых функций экспоненциального типа и полнота характеров // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 83-91.

[Кор94] Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Матем. сб. 1975. Т. 97. № 2. С. 193-229.

[Кор94] Коробейник Ю. Ф. О некоторых свойствах абсолютно представляющих систем // В сб.: Линейные операторы в комплексном анализе. Изд-во РГУ. Ростов-на-Дону. 1994. С. 58–65.

[Кор02] Коробейник Ю. Ф. О некоторых классах представляющих систем и их преобразованиях. I // Геометрическая теория функций и краевые задачи. Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань. 2002. Т. 14. С. 171–185.

[КШ98] Коробейник Ю. Ф., Шерстюков В. Б. Об абсолютной полноте системы степеней в пространстве аналитических функций // Изв. Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 1. С. 87–89.

[Коо84] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. М.: Наука, 1984.

[Кр62] Красичков[-Терновский] И. Ф. О полноте систем функций вида $\left\{\frac{\partial^{n_k}}{\partial h^{n_k}}F(z,h_k)\right\}$ // Матем. сб. 1962. Т. 56(98). №. 2. С. 147–172.

[Кр65] Красичков[-Терновский] И. Ф. Полнота в пространствах комплекснозначных функций, описываемых поведением модуля // Матем. сб. 1965. Т. 68(110). №. 1. С. 26–57.

[Кр72] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87(129). № 4. С. 459–489.

[Кр72′] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). № 1. С. 3–30.

[Кр86] Красичков-Терновский И. Ф. Об абсолютной полноте систем экспонент на интервале // Матем. сб. 1986. Т. 131(173). № 3. С. 309–322.

[Кр89] Красичков-Терновский И. Ф. Интерпретация теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 3. С. 397–423.

[КШ05] Красичков-Терновский И. Ф., Шилова Г. Н. Абсолютная полнота систем экспонент на выпуклых компактах // Матем. сб. 2005. V. 196, № 12. С. 85–98.

[Ла78] Ладыгин В. И. О проблеме Мюнтца–Саса // Матем. заметки. 1978. Т. 23. Вып. 1. С. 91–103.

[Лев71] Левин Б. Я. Субгармонические мажоранты и их приложения // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. Харьков: Изд-во ФТИНТ АН СССР, 1971. С. 117–120.

[Лев56] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Физматгиз, 1956.

[Лев61] Левин Б. Я. О базисах из показательных функций в L^2 // Зап. мат. отд. физ.-мат. ф-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва. 1961. Т. 27. С. 39–48.

[ЛеЛ89] Левин Б. Я., Логвиненко В. Н. О классах субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций, ограниченных на некоторых подмножествах // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1989. Т. 170. С. 157–175.

[ЛЛю75] Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР, сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 657–702.

[Лео51] Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщение // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1951. Т. 35. С. 1–215.

[Лео55] Леонтьев А. Ф. О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе // Матем. сб. 1955. Т. 36. № 4. С. 555–568.

[Лео58] Леонтьев А. Ф., О полноте системы $\{z^{\lambda_k}\}$ на кривых в комплексной плоскости // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 5. С. 797–800.

[Лео63] Леонтьев А. Ф. О полноте системы $\{e^{\lambda_k z}\}$ в замкнутой полосе // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. № 2. С. 266–268.

[Лео74] Леонтьев А. Ф. О полноте системы экспонент на кривой // Сиб. матем. журн. 1974. Т. 15. № 5. 1103–1114.

[Лео76] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

[Лео80] Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.

[Лео81] Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экпонент. М.: Наука, 1981.

[Лог75] Логвиненко В. Н. Теоремы типа теоремы М. Картрайт и вещественные множества единственности для целых функций многих переменных // Теория функций, функц. анализ и их прил. 1975. № 22. С. 85–100.

[Лог88] Логвиненко В. Н. Условия ограниченности и условия медленного роста вдоль вещественной гиперплоскости целых функций экспоненциального типа // Сиб. матем. журн. 1988. Т. XXIX. №. 4. С. 126–138.

[Лог89] Логвиненко В. Н. Условия ограниченности целых функций экспоненциального типа внутри гипероктанта $\mathbb{R}^n_+$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 3. С. 644–656.

[Лог91] Логвиненко В. Н. Вещественные нормирующие, вещественные лиувиллевские множества и дискретные множества единственности для целых функций многих комплексных переменных. Дисс. … доктора физ.-мат. наук. Харьков, 1991.

[ЛоФ93] Логвиненко В. Н., Фаворов С. Ю. Теоремы типа теоремы Картрайт и вещественные множества единственности для целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. 1993. Т. 53. Вып. 3. С. 72–79.

[Ло51] Лохин И. Ф. О полноте систем функций вида $\{f(\lambda_n z)\}$ // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. С. 141–155.

[Ло54] Лохин И. Ф. О полноте систем функций вида $\{f(\lambda_n z)\}$ // Матем. сб. 1954. Т. 35 (77). С. 215–222.

[Лу92] Луценко В. И., Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1992.

[Лю88] Любарский Ю. И. Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 3. С. 559–580.

[Лю89] Любарский Ю. И. Ряды экспонент в пространствах функций, заданных на кривых // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. № 2. С. 108–121.

[Лю89′] Любарский Ю. И. Свойства систем линейных комбинаций степеней // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. Вып. 6. С. 1–69.

[ЛюС86] Любарский Ю. И., Содин М. Л. Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей. Препринт ФТИНТ АН УССР. Харьков. 17–86. 1986.

[Man55] Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М.: ИЛ, 1955.

[Man62] Мандельбройт С. Теоремы замкнутости и теоремы композиции. М.: ИЛ, 1962.

[Man63] Мандельбройт С. Преобразование Фурье целых функций и ряды Дирихле; принцип двойственности // Сб. переводов: Математика. 1964. Т. 8:3. С. 102–118; пер. с франц. Mandelbrojt S. Transformée de Fourier de fonctions entiéres et séries de Dirichlet: un principle de dualité.// J. d' Analyse Math. 1963. T. 10. P. 381–404.

[Мар45] Маркушевич А. И. О базисе в пространстве аналитических функций // Матем. сб. 1945. Т. 17(59). С. 211–252.

[МНХ04] Машреги Дж., Назаров Ф. Л., Хавин В. П. Теорема Берлинга–Мальявена о мультипликаторе: седьмое доказательство // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 5. С. 3–68.

[Mei73] Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.

[Мел75] Мельник Ю. И. О представлении функций рядами Дирихле в замкнутом круге // Матем. сб. 1975. Т. 97. № 4. С. 493–502.

[Мил70] Мильман В. Д. Геометрическая теория банаховых пространств // УМН. Т. XXV. Вып. 3(153). С. 111–174.

[Мин91] Минкин А. М. Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. Вып. 5. С. 109–134.

[Мин98] Минкин А. М. Необходимость условия Макенхаупта для безусловной базисности собственных функций // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. Вып. 3. С. 65–91.

[МПС04] Моисеев Е. И., Прудников А. П., Седлецкий А. М. Базисность и полнота некоторых систем элементарных функций. М.: Вычислительный центр РАН, 2004.

[Му73] Мурадян О. А. О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнтца // Изв. АН Арм. ССР, сер. матем. 1973. Т. 8. № 1. С. 70–87.

[МХ77] Мурадян О. А., Хавинсон С. Я. О величинах коэффициентов многочленов в аппроксимационной теореме Вейерштрасса // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 269–276.

[На80] Напалков В. В. Аппроксимация функций многих переменных с учетом роста коэффициентов аппроксимирующих агрегатов // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 1. С. 144–156.

[На(м)95] Напалков В. В. (мл.) Ряды экспонент в пространстве Бергмана. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1995.

[Ни80] Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.

[НиП70] Никольский Н. К., Павлов Б. С. Базисы из собственных векторов вполне неунитарных сжатий и характеристическая функция // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34, вып. 1. С. 90–133.

[Па72] Павлов А. И. О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13. №. 5. С. 1169–1181.

[Пе87] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.

[Пол01] Полецкий Е. А. Дисковые оболочки функций // В книге: Комплексный анализ в современном мире. К 80-летию Б. В. Шабата. М.: Фазис, 2001. С. 47–55.

[По99] Попов А. Ю. О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1999. № 5. С. 48–52.

[Пр04] Прошкина А. В. О полноте взвешенных экспонент // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2004. № 2. С.33–39.

[Рон71] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.

[Рон73] Ронкин Л. И. Некоторые вопросы полноты и единственности для функций многих переменных // Функц. анализ и его приложения. 1973. Т. 7. вып. 3. С. 45–55.

[Рон74] Ронкин Л. И. О дискретных множествах единственности для целых функций экспоненциального типа многих переменных // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. № 1. С. 142–152.

[Рон74′] Ронкин Л. И. Дискретные множества единственности для целых функций экспоненциального типа, ограниченных при вещественных значениях переменных // Математическая физика и функциональный анализ. Вып. 5. 1974. Харьков. ФТИНТ. С. 11–26.

[Рон78] Ронкин Л. И. О дискретных множествах единственности для целых функций экспоненциального типа многих переменных // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. № 1. С. 142–152.

[Рон86] Ронкин Л. И. Целые функции // Итоги ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1986. Т. 9. С. 5–36.

[Сал94] Сальникова Т. А. Полные и минимальные системы экспонент в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 118–129.

[Сед74] Седлецкий А. М. Об устойчивости полноты и минимальности в L^2 системы показательных функций // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 1. С. 213–219.

[Сед75] Седлецкий А. М. К проблеме Мюнтца–Саса для пространства $C[0,1]$ // Труды Моск. энерг. инст. 1975. Т. 260. С. 89–98.

[Сед77] Седлецкий А. М. Избытки систем показательных функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 6. С. 803–814.

[Сед78] Седлецкий А. М. О разложении функции в ряды Дирихле на замкнутых выпуклых многоугольниках // Сиб. матем. журн. 1978. Т. XIX. № 4. С. 878–887.

[Сед80] Седлецкий А. М. Избытки систем экспоненциальных функций // Изв. АН СССР. Серия матем. 1980. Т. 44. № 1. С. 203–218.

[Сед82] Седлецкий А. М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37, вып. 5(277). С. 51–95.

[Сед83] Седлецкий А. М. Избытки близких систем экспонент в L^p // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 4. С. 164–175.

[Сед95] Седлецкий А. М. Построение полных минимальных, но не равномерно минимальных в L^p и C систем экспонент с вещественным отделимым спектром // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 4. С. 584–595.

[Сед95′] Седлецкий А. М. Аппроксимативные свойства систем экспонент в $L^p(a,b)$ // Диффер. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1675–1681.

[Сед97] Седлецкий А. М. О целых функциях класса С.Н. Бернштейна, не являющихся преобразованиями Фурье–Стильтьеса // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 367–379.

[Сед97′] Седлецкий А. М. Преобразование Фурье быстро убывающих функций // Изв. РАН. 1997. Т. 61. № 3. С. 187–202.

[Сед98] Седлецкий А. М. Аппроксимативные свойства систем экспонент на прямой и полупрямой // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 3. С. 125–140.

[Сед99] Седлецкий А. М. Базисы, встречающиеся при решении уравнений смешанного типа // Диффер. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С. 507–515

[Сед99′] Седлецкий А. М. Об устойчивости равномерной минимальности системы экспонент // Метрич. теор. функций и смеж. вопр. анализа. Сб. ст., посвящ. П. Л. Ульянову к его 70-летию. М.: АФЦ, 1999. С. 221–237.

[Сед99″] Седлецкий А. М. Аппроксимативные свойства систем экспонент в пространствах Соболева // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1999. № 6. С. 3–8.

[Сед01] Седлецкий А. М. Необходимое условие равномерной минимальности системы экспонент в пространствах L^p на прямой // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 11. С. 137–156.

[Сед01′] Седлецкий А. М. Негармонический анализ // В книге: Итоги науки и техники, Серия “Современная математика”. Тематические обзоры. 2001. Т. 96. Функциональный анализ.

[Сед03] Седлецкий А. М. Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации. I. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: МАИ, 2003.

[Сед03′] Седлецкий А. М. Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации. II. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 6. М.: МАИ, 2003.

[Сед05] Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005.

[Сед07] Седлецкий А. М. Об устойчивости равномерной минимальности системы экспонент //Современная математика. Фундаментальные направления, 2007. Т. 25. С. 165–177

[СеЕ97] Седлецкий А. М., Егорченко Т. А. Аппроксимация посредством взвешенных экспонент на прямой // Тезисы докл. междун. конф. по комплексному анализу и смеж. вопр. Нижн. Новгород. 1997. С. 66–67.

[Тр77] Тригуб Р. М. О приближении функций многочленами со специальными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1977. № 1. С. 93–99.

[Фа08] Фаворов С. Ю. Множества нулей целых функций экспоненциального типа с дополнительными условиями на вещественной прямой // Алгебра и Анализ. 2008. Т. 20, № 1. С. 154–161; see also Proceedings of the Conference “Computational Methods and Function Theory” (CMFT 2005). Finland. Joensuu.

[Fa59] Фань Ц. (Фан Ки) Линейные неравенства и свойства замыкания в нормированном линейном пространстве // Сб. переводов: Математика. 1961. Т. 5:4. С. 117–122; пер. с англ. Fan Ky Linear inequalities and closure properties in normed linear spaces // Séminaire N. Bourbaki. Paris. 1959. II-202–II-212.

[ФА72] Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека (под общей ред. С. Г. Крейна). М: Наука, 1972.

[Хаб88] Хабибуллин Б. Н. О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 5. С. 644–655.

[Хаб88′] Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 270–273.

[Хаб89] Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 5. С. 706–719.

[Хаб91] Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа с заданными нулями вдоль прямой // Analysis Math. 1991. V. 17. № 3. P. 239–256.

[Хаб91′] Хабибуллин Б. Н. Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 6. С. 811–827.

[Хаб91″] Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР, серия матем. 1991. Т. 55. № 5. С. 1401–1423.

[Хаб91*] Хабибуллин Б. Н. Выметание на систему лучей и целые функции вполне регулярного роста // Изв. АН СССР. 1991. Т. 55. № 1. С.184–202.

[Хаб92] Хабибуллин Б. Н. О типе целых и мероморфных функций // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 11. С. 35–44.

[Хаб92′] Хабибуллин Б. Н. Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. I // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 1. С. 173–178.

[Хаб92″] Хабибуллин Б. Н. Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. II. Алгебры функций конечного λ-типа // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 3. С. 186–191.

[Хаб92*] Хабибуллин Б. Н. Оценки объема нулевых множеств голоморфных функций // Изв. вузов. Математика. 1992. № 3(358). С. 58–63.

[Хаб93] Хабибуллин Б. Н. Распределение нулей целых функций и выметание. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. Харьков, 1993.

[Хаб93′] Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции // Изв. АН СССР. Серия матем. 1993. Т. 57. № 1. С. 129–146.

[Хаб93″] Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного порядка // Изв. АН СССР. Серия матем. 1993. Т. 57. № 3. С.70–91.

[Хаб94] Хабибуллин Б. Н. Неконструктивные доказательства теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций // Изв. РАН. Серия матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 125–148.

[Хаб94′] Хабибуллин Б. Н. О целых функций класса Картрайт в $\mathbb{C}^n$ // В сб: Линейные операторы в комплексном анализе. Ростов-на-Дону: изд-во РГУ, 1994. С. 103–112.

[Хаб96] Хабибуллин Б. Н. О нулевых множествах для классов целых функций и представлении мероморфных функций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. Вып. 4. С. 611–617.

[Хаб96′] Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов // В сб.: Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. I. Комплексный анализ. РАН и Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. Уфа. 1996. С. 122–131.

[Хаб99] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Матем. заметки. 1999. Т. 66. Вып. 4. С. 603–616.

[Хаб00] Хабибуллин Б. Н. Об устойчивости последовательностей неединственности и полноты систем экспонент // В сб.: Актуальные проблемы математического анализа. Ростов-на-Дону: изд-во “Гин-Го”. 2000. С. 156–164.

[Хаб01] Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа с нулями вблизи прямой // Матем. заметки. 2001. Т. 70. Вып. 4. С. 621–635.

[Хаб01′] Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Известия РАН. Серия матем. 2001. Т. 65. № 4. С. 205–224.

[Хаб01″] Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Серия матем. 2001. Т. 65. № 5. С. 167–190.

[Хаб01*] Хабибуллин Б. Н. Избытки систем экспонент в области и дефект выпуклости кривой в направлении // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 6. С. 193–236.

[Хаб02] Хабибуллин Б. Н. Устойчивость полноты экспоненциальных систем на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$ // Матем. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 587–596.

[Хаб02′] Хабибуллин Б. Н. Устойчивость полноты и минимальности систем экспонент на жордановых дугах // В сб.: “Методы функц. ан-за и теор. функций в различных задачах матем. физики. II.” Труды междун. науч. сем.-совещ. БашГУ, ИМВЦ УНЦ РАН. Уфа. 2002. С 224–245.

[Хаб02″] Хабибуллин Б. Н. Избытки систем экспонент. II. Пространства функций на дугах // Алгебра и анализ. 2002. Вып. 14. № 4. С. 196–228.

[Хаб03] Хабибуллин Б. Н. Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 4 . С. 905–925.

[Хаб04] Хабибуллин Б. Н. Аппроксимационная теорема для целых функций экспоненциального типа и устойчивость нуль-последовательностей // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 1. С. 143–156.

[Хаб04′] Хабибуллин Б. Н. Целые функции-миноранты: опыт применения оценок Мацаева–Островского–Содина // Математическая физика, анализ, геометрия. 2004. Т. 11. № 4. С. 518–536.

[Хаб05] Хабибуллин Б. Н. Теоремы единственности для голоморфных функций и выметание // В сб.: Исследования по теории операторов, комплексному анализу и математическому моделированию. Владикавказ: ВНЦ РАН, 2005. С. 116–130.

[Хаб09] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент в пространствах функций на луче и характеристика Коренблюма—Сейпа // Уфимский математический журнал. 2009. Т. 1, № 1. С. 77-83.

[Хаб09′] Хабибуллин Б. Н. Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 2. С. 129–158

[Хав71] Хавинсон С. Я. О понятии полноты, учитывающей величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов // Изв. АН Арм. ССР. 1971. Т. VI. № 2–3. С. 221–233.

[Хав99] Хавинсон С. Я. Суммы Голубева: теория экстремальных задач типа задачи об аналитической емкости и сопутствующих аппроксимационных процессов // УМН. 1999. Т. 54. Вып. 4. С. 75–142.

[Хав02] Хавинсон С. Я. Аппроксимация элементами клина с учетом величин аппроксимирующих элементов // Известия вузов. Математика. 2002. № 10(485). С. 71–84.

[Ха00] Хачатрян И. О. О полноте системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ при взвешенно-равномерной аппроксимации на кривых в комплексной плоскости // Математическая физика, анализ, геометрия. 2000. Т. 7. № 2. С. 231–249.

[Хе68] Хейфиц А. И. Характеристика нулей некоторого специального класс целых функций конечной степени // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Харьков. 1968. Т. 9. С. 3–13.

[ХЯ62] Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М: Физматгиз, 1962.

[Чи85] Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М: Наука, 1985.

[Ше95] Шерстюков В. Б. Абсолютно полные системы и слабо максимальные множества // Деп. в ВИНИТИ 18.08.95. № 2465–В95. 22 С.

[Ше97] Шерстюков В. Б. Об одном классе полных систем // Известия вузов Сев.-Кавк. региона. Естественные науки. 1997. Т. 2. С. 38–40.

[Ше00] Шерстюков В. Б. Геометрические условия абсолютной полноты системы экспонент в пространстве аналитических функций // Деп. в ВИНИТИ 5.04.2000. № 3893–В00. 10 С.

[Ше00′] Шерстюков В. Б. Некоторые классы полных систем. Достаточные и эффективные множества. Диссертация ... кандидата физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону. 2000.

[Ши92] Шилова Г. Н. Аппроксимация линейными комбинациями экспонент с ограничениями на коэффициенты. Диссертация ... кандидата физ.-мат. наук. Уфа. 1992.

[Шу99] Шумяцкий Б М. Пространство Бернштейна B_σ как банахово пространство // Математическая физика, анализ, геометрия. 1999. Т. 6. № 3/4. С. 372–384.

[Ed69] Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.

[Ю95] Юркин М. Ю. Геометрические условия минимальности системы экспонент в $L_p[-\pi,\pi]$ // Матем. заметки. 1995. Т. 58. Вып. 5. С. 773–777.

[Abr06] Abreu L. D. Completeness, special functions and uncertainty principles over q-linear grids // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 14567–14580.

[AR67] Alexander W. O., Redheffer R. M. The excess of sets of complex exponentials // Duke Math. J. 1967. V. 34. № 1. P. 59–72.

[Alm03] Almira J. M. Some remarks on the Müntz theorem for numerable compact sets // IV Intern. Meeting on Approx. Theory. Abstracts. Úbeda. 2002. P. 19–21.

[ADJ02] Almira J. M., Del Toro N., Jódar J. Müntz type theorems for simultaneous Diophantine approximation on intervals of lenght bigger than one // III Intern. Meeting on Approx. Theory. Abstracts. Úbeda. 2002. P. 19–21.

[ADL04] Almira J. M., Del Toro N., López-Moreno A. J. A Müntz-type theorem for Diophantine approximation on intervals of lenght smaller than four // Comm. in Appl. Analysis. 2004. V. 8. P. 563–575.

[AL02] Almira J. M., Luther U. A Note on Simultaneous Diophantine Approximation // Appl. Math. E-Notes. 2002. P. 29–35.

[An72] Anderson J. M. Müntz–Szász type approximation and the angular growth of lacunary integral functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 169. P. 237–248.

[AB71] Anderson J. M., Binmore K. G. Closure theorems with applications to entire functions with gaps // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 161. P. 381–400.

[Au73] Aupetit B. H. Théorème de Müntz pour les fonctions de plusieurs variables // Can. Math. Bull. 1973. V. 16. P. 165-166.

[АИ95] Avdonin S. A. , Ivanov S. A. Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[AJ88] Avdonin S. A. , Joó I. Riesz bases of exponentials and sin-type functions // Acta Math. Hungar. 1988. V. 51. No. 1–2. P. 3–14.

[Аз02] Azarin V. S. On independence of characteristics of asymptotic behavior of entire functions // Матем. физика, анализ, геометрия. 2002. Т. 9. № 2. С. 220–223.

[BS75] Baillette A., Siddiqi J. Approximation polynômiale sur un arc dans le plan complexe // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1975. V. 281. P. 791–793.

[BS79] Baillette A., Siddiqi J. Non-totalité d'exponentielles sur un arc rectifiable // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1979. V. 289. P. A177–A179.

[BS81] Baillette A., Siddiqi J. Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles sur un arc rectifiable // J. d'Analyse Math. 1981. V. 40. P. 263–268.

[BI97] Baxter B. J. C., Iserles A. On approximation by exponentials // Annals of Num. Maths. 1997. V. 4. P. 39–54.

[BW00] Benedetto J. J., Wu H.-Ch. Nonuniform sampling and spiral MRI reconstruction // Proc. SPIE. Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII (A. Aldroubi, A. F. Laine, M. A. Unser; Eds.). 2000. V. 4119. P. 130-141.

[B-G00] Bernal-González L. A note on approximation of holomorphic functions by exponentials // Indian Jour. of Pure and Applied Math. 2000. V. 31. No. 6. P. 573–582.

[Ber78] Berndtsson B. Zeros of analytic functions of several variables // Ark. för Math. 1978. V. 16, No. 2. P. 251–262.

[B12] Bernstein S. N. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné // Mem. Cl. Sci.Acad. Roy. Belg. 1912. V. 4. P. 1–103.

[B13] Bernstein S. N. Sur les recherches récentes relatives à la meille - ure approximation des fonctions continues par des polynômes // In: Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge, 1912), E. W. Hobson and A. E. H. Love (eds.). 1913. V. I. P. 256–266.

[Be66] Beurling A. Local harmonic analysis with some applications to differential operators // In: The Collected Works of Arne Beurling. V. 2. Birkhäser. 1989. P. 299–315 (reprinted from "Some Recent Advan. Basic Sciences". N. Y.: Academic Press Inc., 1966. P. 109–125.).

[BM62] Beurling A., Malliavin P. On Fourier transforms of measures with compact support // Acta Math. 1962. V. 107. P. 291–309.

[BM67] Beurling A., Malliavin P. On the closure of characters and the zeros of entire functions // Acta Math. 1967. V. 118. P. 79–93.

[Bl95] Blanchet P. On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions // Complex Variables. 1995. V. 26. P. 311–322.

[Blo90] Bloom T. A spanning set for $C(I^n)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 321. No. 2. P. 743–759.

[Blo92] Bloom T. A Multivariable Version of Müntz–Szász Theorem // Contemporary Math. 1992. V. 137. P. 85–92.

[Boa54] Boas R. P. Entire functions. N. Y.: Acad. Press, 1954.

[BoZ05] Boivin A., Zhong H. Completeness of systems of complex exponentials and the Lambert W functions // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359. P. 1829–1849.

[BZh01] Boivin A., Zhu Ch. On the L^2-Completeness of some Systems of Analytic Functions // Complex Variables. 2001. V. 45. P. 273-295.

[BZh02] Boivin A., Zhu Ch. On the L^2-Completeness of the System z^{τ_n} // J. Approx. Theory. 2002. V. 118. P. 1-19.

[BE95] Borwein P., Erdélyi T. Polynomials and Polinomial Inequalities. Graduate Texts in Mathematics. V. 161. N. Y.: Springer-Verlag, 1995.

[BE96] Borwein P., Erdélyi T. The full Müntz Theorem in $C[0,1]$ and $L^1[0,1]$.// J. London Math. Soc. 1996. V. 54. P. 102–110.

[BE98] Borwein P., Erdélyi T. Müntz's Theorem On Compact Subsets Of Positive Measure // In Approximation Theory. Govit et al. (Eds.), Marcel Dekker, Inc. 1998. P. 115–131.

[Bou97] Bourdon P. S. Rudin's orthoganality problem and the Nevanlinna counting function // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. No. 4. P. 1187–1192.

[Br68] de Branges L. Hilbert Spaces of Entire Function. Prentise Hall, New York, 1968.

[Bru01] Bruna J. Sampling in complex and harmonic analysis // In: European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000). Progr. Math. 201. Basel: Birkhäuser. 2001. P. 225-246.

[BMO03] Bruna J., Massaneda X., Ortega-Cerdà J. Connections between signal processing and complex analysis // Contributions to Science, Institut d'Estudis Catalans, Barselona. 2003. V. 2(3). P. 345–357.

[BSc92] Bu S., Schachermayer W. Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331. No. 2. P.585–608.

[BS83] Burckel R. B., SaФункцияeki S. An elementary proof of the Müntz-Sz'asz theorem // Expo. Math. . 1983. V. 4. P. 335–341.

[Bo99] Botelho L. C. L. A Theorem of Müntz-Szász Type for Intervals [1,a] // Rio de Janeiro, 1999. Preprint CBPF-NF 043/99. 2 P.

[Bou84] Bourgain J. On bases in the disk algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 285. No. 1. P. 133–139.

[C22] Carleman T. Über die Approximation analytischer Functionen durch lineare Aggregate von Vorgegebenen Potenzen // Arkiv för Mat., Astr. och Fysik. 1922. Bd. 17. No. 9. S. 1–30.

[Ca14] Carlson F. Sur une classe des séries de Taylor. Thése. Upsala. 1914.

[Car30] Carthright M. The zeros of certain integral function // Q. J. Math. 1930. V. 1. 38–59.

[CCG05] Chacón G. A., Chacón G. R., Giménez J. Composition operators on the Dirichlet space and related problems // http: arxiv.org/abs/math.FA/0504179. 8 P.

[ЧЛю97] Chistyakov G., Lyubarskii Yu. Random perturbation of exponential Riesz bases in $L^2(-\pi, \pi)$ // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1997. V. 47. No. 1. P. 201–255.

[CE43] Clarkson J. A., Erdös P. Approximation by polynomials // Duke Math. J. 1943. V. 10. P. 5–11.

[CRW00] Clunie J., Rahman Q. I., Walker W. J. On entire functions of exponential type bounded on the real axis // J. London Math. Soc. 2000. V. 61. P. 161–176.

[CR97] Cole B. J., Ransford T. J. Subharmonicity without Upper Semicontinuity // J. Funct. Anal. 1997. V. 147. P. 420–442.

[CR01] Cole B. J., Ransford T. J. Jensen measures and harmonic measures // J. reine angew. Math. 2001. V. 541. P. 29–53.

[CDGR01] Crabb M. J., Duncan J., McGregor C. M., Ransford T. J. Hermitian powers: A Müntz theorem and extremal algebras // Stud. Math. 2001. V. 146(1). P. 83–97.

[Dav75] Davis Ph. J. Davis P.J. Interpolation and Approximation. N.Y.: Dover, 1975, P. 70.

[DF57] Davis Ph., K. Fan Complete sequences and approximation in the normed linear spaces // Duke Math. J. 1957. V. 24. No. 2. P. 183–192.

[De86] Deng G. T. Ununiqueness of some holomorphic functions // Chin. Ann. Math. Ser. B. 1986. V. 7. P. 330-338.

[De89] Deng G. T. Théorème d'existence et d'unicité pour les fonctions méromorphes dans un demi-plan // Bull. Sc. math., 2^e série. 1989. V. 113. P. 443–462.

[De00] Deng G. T. A generlization of Malliavin's uniqueness theorem // Kodai Math. J. 2000. V. 23. No.3. P. 320-325.

[De03] Deng G. T. Incompleteness and closure of a linear span of exponential system in a weighted Banach space // J. Approx. Theory. 2003. V. 125. No. 1. P. 1–9.

[De03′] Deng G. T. Weighted exponential polynomial approximation // Science in China. Series A. 2003. V. 46. No. 2. P. 280-287

[De04] Deng G. T. Incompleteness of Complex Exponential System in Banach Space // Northeast. Math. J. 2004. V. 20. No. 3. P. 303–308.

[DK78] Dixon M., Korevaar J. Nonspanning sets of powers on curves: analyticity theorem. Duke Math. J. 1978. V. 45, № 3. P. 543–559.

[ДжГ88] Djrbashian M. M. , Grigorian N. V. A new Generalisation of the Classical Theorem of G. Szegö // Math. Nachr. 1988. Bd. 138. S. 239–254.

[Dur97] Duran A. J. The Hausdorff moment problem with complex exponents and a Müntz-Szász theorem for distributions // Math. Nachr. 1997. V. 187. P. 79-99.

[Du89] Duren P. L. Smirnov domains // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 170. С. 95–101.

[Edw66] Edwards D. A. Choquet Boundary Theory for Spaces of Lower Semicontinuous Functions // In: Proc. of an Inter. Symp. “Function Algebras” (Birtel F. T., Ed.). Chicago: Scott, Foresman and Co., 1966. P. 300–309

[El71] Elsner J. Zulässige Abänderung von Exponentialsystemen im $L^p(-A, A)$ // Math. Z. 1971. Bd. 120. S. 211–220.

[Er03] Erdélyi T. The full Clarkson–Erdös–Schwartz Theorem on the uniform closure of non-dense M"untz spaces // Studia Math. 2003. V. 155. P. 145–152.

[Er05] Erdélyi T. Extremal properties of polynomials // In: a Panorama of Hungarian Mathematics in the XXth Century (János Horváth, Ed.). New York: Springer. 2005. P. 119-156.

[Er05′] Erdélyi T. The full Müntz Theorem revisited // Constr. Math. 2005. V. 21. P. 319–335.

[ErJ01] Erdélyi T., Johnson W. The "Full Müntz Theorem" in $L_p[0,1]$ for $0 < p < \infty$ // J. d' Analyse Math. 2001. V. 84. P. 145–172.

[Erk76] Erkamma T. Classes non-quasi-analyticues et le théorème d'approximation de Müntz // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1976. V. 283. P. 595–597.

[Es92] Estrada R. The separation of zeros for functions with compact spectrum // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 171. P. 593–594.

[E743] Euler L. De integratione aequationum differentialum altiorum gradum // Miscellanea Berol. 1743. № 7. P. 193–242.

[FR04] Farkas B., Révész Sz. Tiles with no spectra in dimension 4 // Alfréd Rényi Institute of Mathematics. Hung. Acad. Sci. Preprint series, 10/2004. 7 P. (http://www.reyi.hu/revesz/fuglede4.pdf).

[FN75] Feinerman R. P., Newman D. J. Polynomial Approximation. Baltimor: Williams and Wilkins, 1974.

[Fel68] Feller W. On Müntz–Szász theorem and completely monotone functions // Amer. Math. Monthly. 1968. V. 75. P. 342–350.

[Fer80] Ferguson L. B. O. Approximation by polynomials with integral coefficients. Mathematical Surveys, No.17. Providence, R.I.: AMS, 1980.

[FG75] Ferguson L. B. O., von Golitschek M. Müntz–Szász theorem with integral coefficients. II // Trans. Am. Math. Soc. 1975. V. 213. P. 115–126.

[Fo70] Forst W. Ein funktionentheoretischer Beweis des Satzes von Müntz // Manuscr. Math. 1970. V. 3. P. 357–374.

[Fu46] Fuchs W. H. J. A generalization of Carlson's theorem // J. London Math. Soc. 1946. V. 21. P. 106–110.

[Fu67] Fuchs W. H. J. An application of the Ahlfors distorian theorem // J. d' Analyse Math. 1967. V. 18. P. 61–79.

[Fug74] Fuglede B. Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem // J. Func. Anal. 1974. V. 16. P. 101–121.

[FNR99] Fujii N., Nakamura A., Redheffer R. M. On the excess of sets of complex exponentials // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. No. 6. P. 1815–1818.

[FA66] Function Algebras. Proceedings of an Inter. Symposium on Function Algebras (Birtel F., Ed.). Chicago: Scott, Foresman and Co., 1966.

[Ga78] Gamelin T. W. Uniform Algebras and Jensen Measures. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.

[GDe04] Gao Zh., Deng G. T. Uniqueness of analytic functions in weighted Hardy space and weighted exponential polynomial approximation in many variables // J. Beijing Normal Univ. (Natural Science). 2004. V. 40. No. 6. P. 737–745 (in China).

[Go75] von Golitschek M. Linear approximation by exponential sums on finite intervals // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. V. 81. P. 443–445.

[Go83] von Golitschek M. A short proof of Müntz's theorem // J. Approx. Theory. 1983. V. 39. No. 4. P. 394–395.

[GL77] von Golitschek M., Leviatan D. Permissible bounds on the coefficients of generalized polynomials with real or complex exponents // J. Math. Anal. and Appl. 1977. V. 60, No. 1. P. 123–128.

[Gr56] Grum M. On the theorem of Müntz and Szász // J. London Math. Soc. 1956. V. 31. P. 433–437.

[Gr57] Grum M. On the theorem of Müntz and Szász. Corrigendum and addwendum // J. London Math. Soc. 1957. V. 32. P. 517.

[GOP02] Gyllenberg M., Osipov A., Päivärianta L. The inverse problem of linear age-structured population dynamics // J. Evol. Equ. 2002. V. 2. P. 223–239.

[Har00] Harutyunyan G. W. Quasipolynomials in a subspace of continuous functions // J. of Contemporary Math. Analysis. 2000, V. 35, No. 3. P. 21–32.

[XJ94] Havin V. P., Jöricke B. The uncertainly principle in harmonic analysis. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.

[HKZ00] Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics. V. 199. N. Y.: Springer-Verlag, 2000.

[He71] Hellerstein S. Some analytic varietes in the polydisc and the Müntz-Szász problem in several variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 158. P. 285–292.

[Hi77] Higgins J. R. Completeness and basis properties of sets of special functions. London, New York,Melbourne: Cambridge Univ. Press, 1977.

[Hl86] Hlawka E. Gleichverteilung und ein Satz von Müntz // J. Number Theory. 1986. V. 24. P. 35-46.

[Hw78] Hwang J. S. A note on Bernstein and Müntz-Szász theorems with applications to the order statistics // Ann. Inst. Stat. Math. 1978. V. 30. Part A. P. 167-176.

[HwL78] Hwang J. S., Lin G. D. Extensions of Müntz-Szász theorem and applications // Analysis. 1984. V. 4. P. 143-160.

[HPW78] Hwang J. S., Pan C. S., Wu L. S. An extension on Bernstein–Müntz–Szász theorems // Soochow J. Math. V. 4. P. 121-126.

[IKT01] Iosevich A., Katz N., Tao T. Convex bodies with a point of curvature do not admit exponential bases // Amer. J. Math. 2001. V. 123. No. 1. P. 115-120.

[IKT03] Iosevich A., Katz N., Tao T. Fuglede conjecture holds for convex planar domains // Math. Research Letters. 2003. V. 10. P. 559-569.

[ИК01] Ivanov S. A., Kalton N. Interpolation subspaces and applications of exponential bases // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 2. С. 93–115.

[Kah52] Kahane J.-P. Extension du théorème de Carlson et applications // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Math. 1952. V. 243. 2038–2040.

[Kah53] Kahane J.-P. Sur quelques problémes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1953–54. V. 5. P. 39–130.

[Kah59] Kahane J.-P. Sur la totalité des suites d'exponentielles imaginaires // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1959. V. 7. 273–275.

[Kah62] Kahane J.-P. Travaux de Beurling et Malliavin //Sémaire Bourbaki (14e année, 1961/62). Exposé 225, Secrétariat Math. Paris. 1962. Benjamin, New York,1966.

[KaR60] Kahane J.-P., Rubel L. A. On Weierstrass product of zero type on the real axis // Illinois J. Math. 1960. V. 4. P. 584–592.

[KM63] Katznelson Y., Mandelbrojt S. Quelques classes de fonctions entiéres. Le probléme de Gelfand et Shilov.// C. r. Acad. sci. 1963. T. 257. No 2. P. 345–348.

[Kn02] Knockaert L. Equivalent formulations of the Müntz–Szasz completeness condition for systems of complex exponentials // J. Franklin Inst. 2002. V. 339. No. 1. P. 103–109.

[KnZ02] Knockaert L., De Zutter D. On the completeness of eigenmodes in a parallel plate waveguide with a perfectly matched layer termination // IEEE Trans. Antennas Propag. 2002. V. 50. No. 11. P. 1650–1653.

[Kol00] Kolountzakis M. N. Packing, tiling, orthogonality and completeness // Bull. London Math. Soc. 2000. V. 339. No. 1. P. 103–109.

[Kol00′] Kolountzakis M. N. Non-symmetric convex domains have no basis of exponentials // Illinois J. Math. 2000. V. 44. No. 3. P. 542-550.

[Kol04] Kolountzakis M. N. The study of translftional tiling with Fourier Analysis // In: Fourier Analysis and Convexity. Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser, Boston, MA. 2004. P. 131–187.

[KM04] Kolountzakis M. N., Matolcsi M. Tiles with no spectra // Forum Math. Forum Math. 2006. V. 18. P. 519-528; Electronic Archive at LANL. 2004. 8 P. http://arxiv.org/abs/math.CA/0406127.

[KM04′] Kolountzakis M. N., Matolcsi M. Complex Hadamard matricesand the spectral set conjecture // In Collectanea Mathematica: Proceedings of the 7th Intern. Conf. on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial, 2004 (accepted for publ.); Electronic Archive at LANL. 2004. 8 P. http://arxiv.org/abs/math.CA/0411512.

[Koo60] Koosis P. Sur la totalité des systémes de d'exponentielles imaginaires // C. R. Acad. Sci. 1960. V. 250. 2102–2103.

[Koo83] Koosis P. La plus petite majorante surharmonique et son rapport avec l'existence des functions entiéres de type exponentiel jouant le rôle de multiplicateurs. // Ann. Inst. Fourier. 1983. V. 33, No. 1. P. 67–107.

[Koo88] Koosis P. The logarithmic integral. V. I. Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1988.

[Koo92] Koosis P. The logarithmic integral. V. II. Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1992.

[Koo96] Koosis P. Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Les Publications CRM. Montréal, 1996.

[Koo98] Koosis P. A result on polynomials and its relation to another, concerning entire functions of exponential type // Матем. физика, анализ, геометрия. 1998. Т. 5. № 1/2. С. 68–86.

[Kor66] Korevaar J. Diskrete sets of uniqueness for bounded holomorphic functions $f(z,w)$. Lecture Notes Prepared in Connection with the Summer Institute on Entire Functions and Related Parts of Analysis held at University of California. San Diego La Jolia. California. 1966. 111-Q-1–111-Q-11.

[Kor70] Korevaar J. Two-dimensional Müntz-Szász type approximation // Notices Amer. Math. Soc. 1970. V. 17. P. 557.

[Kor73] Korevaar J. Approximations on curves by linear combinations of exponentials. Approxim. Theory (Proc. Internat. Sympos., Austin, TX, 1973). Academic Press. New York. 1973. P. 387–399.

[Kor74] Korevaar J. Approximations on curves by linear combinations of exponentials. Proceedings of the Symposium on Complex Analysis (Univ. Kent, Canterbery, 1973). London Math. Soc. Lecture Note. Ser. No. 12. Cambridge Univ. Press. 1974. P. 97–99.

[Kor79] Korevaar J. Müntz approximations on arcs and Macintyre exponents. Complex Analysis Jonesuu 1978. Lecture Notes in Math. V. 747, Springer-Verlag. Berlin etc.. 1979. P. 205–218.

[Kor80] Korevaar J. Zero Distribution of Entire Functions and Spanning Radius for a Set of Complex Exponentials // In: Aspects of Contemporary Complex Analysis. L.– N.Y.: Academic Press, 1980. P. 293–312.

[Kor83] Korevaar J. Müntz-type theorems for arcs and for $\mathbb{R}^n$ // Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 1983. V. 3. P. 199–225.

[KD78] Korevaar J., Dixon M. Interpolation, strongly nonspanning powers end Macintyre exponent // Nederl. Akad. Wetensh. Indag. Math. 1978. V. 40. P. 243–258.

[KD79] Korevaar J., Dixon M. Non-spanning sets of exponentials on curves. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1979. V. 33, № 1–2. P. 89–100.

[KH68] Korevaar J., Hellerstein S. Diskrete sets of uniqueness for bounded holomorphic functions $f(z, w)$ // Proc. Symp. Pure Math. V. 11. Amer. Math. Soc. Providence. 1968. P. 273–284.

[Kro94] Kroó A. A geometric approach to the multivariate Müntz problem // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121, № 1. P. 199–208.

[Хаб97] Khabibullin B. N. Dual approach to certain questions for weighted spaces of holomorphic functions // Israel Math. Conf. Proc. (Tel-Aviv, 1997). 2001. V. 15. P. 207–219.

[Хаб00′] Khabibullin B. N. Completeness of sets of complex exponentials in convex sets // Труды международной конференции “Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы”. III. Анализ и дифференциальные уравнения. Уфа, 2000. С. 56–63.

[Хаб00″] Khabibullin B. N. Completeness of sets of complex exponentials in convex sets: open problems // Proceedings of the NATO Advanced Study Institute (Il Ciocco, Italy, July 2-15, 2000), Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. NATO Sci. Ser. II, Math. Phys. Chem. 2001. V. 33. P. 371-373.

[Хаб02*] Khabibullin B. N. The Excesses of Sets of Exponentials in Domains and Arcs.// В сб.: Труды международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо. 2002. МГУ–РГУ. С. 167-169.

[Хаб04″] Khabibullin B. N. Zero (sub)sets for spaces of holomorphic functions and (sub)harmonic minorants // Electronic Archive at LANL. 2004. 42 P. http://arxiv.org/abs/math.CV/0412359.

[Хе04] Kheyfits A. On the excesses of sequences of complex exponentials // Hokkaido Math. J. 2004. V. 33. No. 3. P. 539-549

[ХНП81] Khrushchev S. V., Nikol'skiĭ N. K., Pavlov V. S. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels // Complex Analysis and Spectral Theory (Sem., Leningrad, 1979/80). Lecture Notes in Math. V. 864. Springer-Verlag. Berlin. 1981. P. 214–335.

[La64] Landau H. J. A sparse regular sequence of exponentials closed on large sets // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. No. 4. P. 566–569.

[La72] Landau H. J. On the completeness of a set of translates // J. Approx. Theory. 1972. V. 5. No. 4. P. 438–440.

[LS98] Larusson F., Sigurdsson R. Plurisubharmonic functions and analytic discs on manifolds // J. reine angew. Math. 1998. V. 501. P. 1–39.

[Le99] Lê Hai Khôi Density theorems for exponential systems in the Bergman space of holomorphic functions // Proceedings of the second ISAAC congress. V. 1. eds. H. G. W. Begehr, R. P. Gilbert, J. Kajiwara. Fukuoka, Japan. August 16-21, 1999. Dordrecht: Kluwer, 2000. P. 789–797.

[Lel77] Lelong P. Real and Semireal Zeros of Entire Functions in $\mathbb{C}^n$ // Proceedings of Symposia in Pure Math. 1977. V. 30. P. 245–250.

[Лев96] Levin B. Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monographs, V. 150. Amer. Math. Soc., Providence RI, 1996.

[Le40] Levinson N. Gap and Density Theorem. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 26. N. Y.: AMS, 1940.

[Le74] Levinson N. On the Szász–Müntz Theorem // J. Math. Analysis and Appl. 1974. V. 48. P. 264–269.

[LF92] Logvinenko V. N., Favorov S. Yu. Lacunary Series and Fourier Integrals of Functions of Several Variables // Adv. in Soviet Math. 1992. V. 11. P. 223–235.

[Lux76] Luxemburg W. A. J. Muntz–Szasz type approximation results and the Paley–Wiener theorem // In: Approximation Theory II, G.G. Lorentz etc. (eds.). N.Y.: Academic Press, 1976. P. 437–448.

[LK71] Luxemburg W. A. J., Korevaar J. Entire functions and Müntz–Szász type approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 157. P. 23–37.

[Ly03] Lyons R. Determinal Probability Measures // Publ. Math. Hautes Études Sci. 2003. V. 98. P. 167–212.

[ЛюS97] Lyubarskii Yu. I., Seip K. Complete interpolating sequences for Paley–Wiener spaces and Muckenhoupt's A_p condition // Rev. Mat. Iberoamericana. 1997. V. 13. P. 361–376.

[Mae05] Maergoiz L. S. An analog of the Paley–Wiener theorem for entire functions of the space W_σ^p and some applications. Красноярск: Красноярский научный центр РАН. 2005. Препринт № 310. 16 C.

[МП05] Makarov N., Poltoratski A. Meromorphic inner functions, Toeplitz kernels and the Uncertainty Principle. USA: California Institute of Technology, Texas A&M University. Preprint. 2005. 58 P. http://www.math.tamu.edu/ alexeip/publications.htm

[Mal55] Malliavin P. Sur quelques procédés d'extrapolation // Acta Math. 1955. V. 53. No. 3–4. P. 179–255.

[Mal79] Malliavin P. On the multiplier theorem for Fourier transforms of measures with compact support // Arkiv för Mat. 1979. V. 17. P. 69–81.

[Mal97] Malliavin P. Complex Harmonic Analysis in the Aftermath of Paley-Wiener // Proc. of Symposia in Applied Math. 1997. P. 129–140.

[MR61] Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89. P. 175–206.

[MS71] Malliavin P., Siddiqi J., Approximation polynômiale sur un arc analytique dans le plan complexe // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1971. V. 273. P. 105–108.

[MS76] Malliavin P., Siddiqi J. Classes de fonctions monogènes et approximation par des d'exponentielles sur un arc rectifiable de $\mathbb{C}$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1976. V. 282. P. 1091–1094.

[Mat05] Matolcsi M. Fuglede's conjecture is false in dimension 4 // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. V. 133. No. 10. P. 3021–3026.

[MOC02] Matsaev V. I., Ostrovskii I. F., Sodin M. L. Variation on the theme of Marcinkevicz' inequality // J. d' Analyse Math. 2002. V.86. P. 289–317.

[Мин96] Minkin A. M. Projection method and unconditional bases // Матем. физика, анализ, геом. 1996. Т. 3. Вып. 3/4. С. 332–338.

[Mü14] Müntz Ch. H. Über den Approximationssatz von Weierstrass // In: Math. Abhandlung H. A. Schwartz zu seinem 50. Doktorjubiläum gewidmet. Festschrift. Berlin. 1914. S. 303–312.

[Na00] Nakamura A. On the excess of a sequence of exponentials with perturbations at some subsequences of integers. Hokkaido Math. J. 2000. V. 29. No. 2. P. 303–313.

[OK87] Ogawa Sh., Kitahara K. An extension of Müntz's theorem in multivariables // Bull. Aust. Math. Soc. 1987. V. 36. P. 375–387.

[Op96] Operstein V. Full Müntz theorem in $L_p[0,1]$ // J. Approx. Theory. 1996. V. 85. No. 2. P. 233–235.

[Pet83] Peters J. V. The Müntz–Szász theorem for countable sets // Bull. Calcutta Math. Soc. 1983. V. 75. P. 1–4.

[Pe74] Peterson D. R. The excess of sets of complex exponentials // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 44. P. 321–325.

[Pin04] Pinkus A. Density methods and results in approximation theory // In: Orlicz Centenary Volume Banach Center Publ. 2004. V. 64. Inst. of Math. Polish Acad. of Sci. Warszawa.

[Пол91] Poletsky E. A. Plurisubharmonic Functions as Solution of Variational Problems // Proceedings of Symposia in Pure Math. 1991. V. 52. Part 1. P. 163–171.

[Пол93] Poletsky E. A. Holomorphic Currents // Indiana U. Math. J. 1993. V. 42. No. 1. P. 85–144.

[Пол97] Poletsky E. A. Disk envelopes of functions I // In the book: Complex Analysis in Contemporary Mathematics, dedicated to B. V. Shabat. ed. E. M. Chirka. Moscow: Fasis, 1997.

[Пол99] Poletsky E. A. Disk envelopes of functions II // J. Funct. Anal. 1999. V. 163. P. 111–132.

[Ra00] Ransford T. J. Jensen measures // In: Approximation, Complex Analysis and Potential Theory. Proc. NATO Adv. Stud. Inst. 2000 (Quebec, Canada, N. U. Arakelyan and P. M. Gauthier, eds.). NATO Science Series II. V. 37. Kluwer Acad. Publ. (Dordrecht, Boston). 2001. P. 221–237.

[Red68] Redheffer R. M. Elementary remarks on completeness // Duke Math. J. 1968. V. 35. P. 103–116.

[Red57] Redheffer R. M. Ganze Funktionen und Vollständigkeit // Österreichische Akad. der Wissen. 1957. Bd. 6. S. 96–99.

[Red72] Redheffer R. M. Two consequences of the Beurling–Malliavin theory // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 16. No. 1. P. 116–122.

[Red74] Redheffer R. M. Completeness of sets of complex exponentials // Adv. in Math. 1977. V. 24. P. 1–62.

[Rog81] Rogers L. C. G. A simple proof of Müntz's theorem // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1981. V. 90. P. 1–3.

[Рон92] Ronkin L. I. Functions of Completely Regular Growth. Dordrecht/Boston/London: Kluver Acad. Publ. Math. and Its Appl. (Soviet Series). 1992.

[Ru56] Rubel L. A. Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 83. P. 417–429.

[Ru96] Rubel L. A. (with Colliander J. E.) Entire and meromorphic functions. Springer-Verlag. New York, 1996.

[Rud70] Rudin W. Real and Complex Analysis. London etc.: McGrow-Hill, 1970.

[Sch43] Schwartz L. Etude des sommes d'exponentielles // Actualités. scient. et industr. No. 959. Paris: Hermann, 1943 (2^e ed. 1959).

[Сед00] Sedletskii A. M. Fourier transforms and approximation. An Internat. Ser. Monogr. Math. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher, 2000.

[Сед03″] Sedletskii A. M. Nonharmonic Analysis // J. Math. Sci. 2003. V. 116. No. 5. P. 3551–3619.

[Se95] K. Seip On Korenblum's density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$ // J. d' Analyse Math. 1995. V. 67. P. 307–322.

[Se98] Seip K. Developments from Nonharmonic Fourier Series // Doc. Math. J. DMV. 1998. II. P. 713–722.

[SU97] Seip K., Ulanovskii A. M. The Beurling–Malliavin density of a random sequence // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. No. 6. P. 1745–1749.

[Sh64] Shen X. Completeness of the sequence of functions $\{f(\lambda_n z)\}$ // Acta Math. Sinica. 1964. V. 14. No. 1. P. 103–118 (In Chinese); Chinese Math. 1965. V. 5. P. 112–128

[Sid84] Siddiqi J. Non-spanning sequences of exponentials on rectifiable plane arcs // In: Linear and Complex Analysis Problem Book. Lecture Notes in Math. V. 1043. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1984. P. 555–556.

[Sie72] Siegel A. R. On the Müntz-Szász theorem for $C[0,1]$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 36. P. 161–166.

[St67] Stafney J. A. A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0,1]$ // Duke Math. J. 1967. V. 34. No. 3. P. 393–396.

[Sti85] Still G. On the approximation of holomorphic functions by Müntz polynomials on an interval away from the origin // J. Approx. Theory. 1985. V. 45. P. 167-193.

[Su02] Sundberg C. Measures induced by analytic functions and a problem of Walter Rudin // J. Amer. Math. Soc. 2002. V. 16. No. 1. P. 69–90.

[Sz16] Szász O. Über die Approximation analytischer Functionen durch lineare Aggregate von Potenzen // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 482–496.

[Tak80] Takahasi S. An extension of Müntz–Szász theorem and Hwang–Pan–Wu theorem // Soochow J. Math. 1980. V. 6. P. 129–136.

[Tao04] Tao T. Fuglede's conjecture is false in 5 and higher dimension // Math. Research Letters. 2004. V. 11. P. 251–258.

[Tre81] Trent T. T. A Müntz-Szász theorem for $C(D)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 83. P. 296-298.

[Ул01] Ulanovskii A. On Landau's phenomenon in $\mathbb{R}^n$ // Math. Scand. 2001. V. 88. P. 72–78.

[Vou97] Vourdas A. The growth of Bargmann functions and the completeness of sequences of coherent states // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. 4867–4876.

[Wa91] Walker W. J. Zeros of the Fourier transform of a distribution // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 154. P. 77–79.

[Wal27] Walsh J. L. Über die Entwicklung einer Funktion einer komplexen Veränderlichen nach Polynomen // Math. Ann. 1927. Bd. 96. S. 437–450.

[W885] Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen // Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin. 1885. S. 633–639, 789–805.

[WP34] Wiener N., Paley R. Fourier transforms in the complex domain. AMS. N. Y. 1934; Преобразование Фурье в комплексной области. M.: Наука, 1964.

[Wo84] Wojtaszczyk P. Bases in H^p spaces on the ball // In: Linear and Complex Analysis Problem Book. Lect. Notes in Math. V. 1043. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1984. P. 24–25.

[Ya91] Yang X. Une generalisation à plusieurs variables du théorème de Müntz–Szász // C. R. Acad. Sci. Paris. 1991. V. 312. S. I. P. 575–578.

[YDe05] Yang X., Deng G. T. On the completeness of the system (z^{τ_n}) in L^p // J. Beijing Normal Univ. (Natural Science). 2005. V. 41. No. 1. P. 1–3 (in China).

[You80] Young R. M. An introduction to nonharmonic Fourier series. N. Y.: Academic Press, 1980.

[Ze92] Zeinstra R. Zeros and regular growth of Laplace transforms along curves // J. reine und angew. Math. 1992. V. 424. P. 1–15.

[Zi05] Zikkos E. On the excess of complex exponential systems in $L^2(-a, a)$ // J. Math. Analysis and Appl. 2005. V. 308. No. 1. P. 47–60.

Предметный указатель

Именной указатель

Научное издание

Хабибуллин Булат Нурмиевич

ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Монография

Редактор Гамбарова Р. М.
Корректор Николаева А. И.

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 07.11.2011 г. Бумага офсетная.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times. Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. 10,8. Уч.-изд. л. 10,36. Тираж 75 экз.
Изд. № 30. Заказ 86. Цена договорная.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г. Уфа, ул. З. Валиди,32.

ДЛЯ ПРИМЕЧАНИЙ