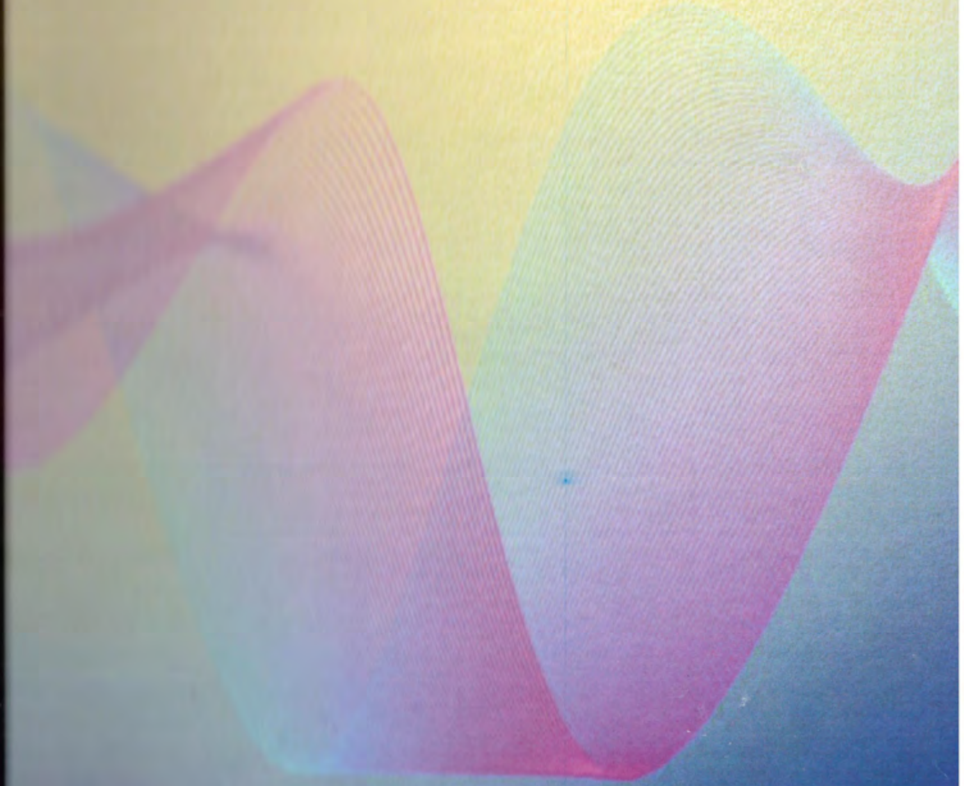
Б.Н. Хабибуллин

# ОГИБАЮЩИЕ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ



УДК 517.5+517.98
ББК 22.161.5+22.162
Х12

*Печатается по решению кафедры*
*высшей алгебры и геометрии БашГУ.*
*Протокол № 2 от 04.10.2021 г.*

***Рецензенты:***
д-р физ.-мат. наук, профессор **К.Г. Малютин**
(Курский государственный университет, г. Курск);
д-р физ.-мат. наук, директор ИМ **И.Х. Мусин**
(Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа)

**Хабибуллин Б.Н.**
Х12 Огибающие в теории функций: монография / Б.Н. Хабибуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. – 140 с.
ISBN978-5-7477-5396-9

Основная тематика монографии – условия существования огибающих, верхних или нижних, по выпуклым конусам или множествам для векторов в векторных решетках и в их проективных пределах. Обсуждаются и указываются применения огибающих к ряду задач теории функций прежде всего комплексных переменных. Как модельные подробно разобраны случаи выпуклых конусов и множеств (плюри) субгармонических функций, а также, в чисто алгебраическом обрамлении, (полу) однородных функций.

Предназначено для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов по теории функций и алгебре.

УДК 517.5+517.98
ББК 22.161.5+22.162

ISBN 978-5-7477-5396-9



# Оглавление

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Б. Н. Хабибуллин

# ОГИБАЮЩИЕ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

**Монография**

Уфа
РИЦ БашГУ
2021

УДК 517.5 +517.98
ББК 22.161.5+22.162
Х

*Печатается по решению кафедры
высшей алгебры и геомерии БашГУ*
(протокол № 2 от 4 октября 2021 г.)

*Рецензенты:*
д-р физ.-мат. наук, профессор **К. Г. Малютин**
(Курский государственный университет, г. Курск)
д-р физ.-мат. наук, директор ИМ **И. Х. Мусин**
(Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа)

**Хабибуллин Б.Н.**
Х Огибающие в теории функций: монография /Б.Н. Хабибуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. — 112 с.
ISBN

Основная тематика монографии — условия существования огибающих, верхних или нижних, по выпуклым конусам или множествам для векторов в векторных решётках и в их проективных пределах. Обсуждаются и указываются применения огибающих к ряду задач теории функций прежде всего комплексных переменных. Как модельные подробно разобраны случаи выпуклых конусов и множеств (плюри)субгармонических функций, а также, в чисто алгебраическом обрамлении, (полу)однородных функций. Предназначено для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов по теории функций и алгебре.

УДК 517.5+517.98
ББК 22.161.5+22.162

ISBN

# Оглавление

# Глава 1

# Введение. Истоки. Описание задач

Материалы, изложенные в монографии, в той или мере опираются на наши исследования, отражённые в работах [22]–[40] и [55]–[58] , но в наибольшей степени используют результаты из [35] и [38].

## 1.1 Огибающая

Символом $\emptyset$ обозначаем *пустое множество.* Множества, как обычно, записываем в фигурных скобках, но одноточечные множества $\{x\}$ часто записываем без фигурных скобок, т.е. просто как $x$, если это не вызывает разночтений. Так, для множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ *натуральных чисел* через $\mathbb{N}_0 := 0 \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ обозначаем «французское» множество натуральных чисел.

Множество $\mathbb{R}$ *вещественных чисел* рассматривается со стандартными порядковой ($\leq$, $\sup / \inf$), алгебраической и топологической структурами, а $\mathbb{R}_{\pm\infty} := -\infty \cup \mathbb{R} \cup +\infty$ — *расширенная действительная прямая* с двумя концами

$\pm\infty \notin \mathbb{R}$, дополненная (не)равенствами

$$\sup\emptyset := \inf\mathbb{R} = -\infty \leqslant x \leqslant +\infty = \sup\mathbb{R} =: \inf\emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$$

и снабжённая естественной порядковой топологией.

*Интервалы на* $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ — связные подмножества в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$, такие, как *отрезок* $[a,b] := \bigl\{x \in \overline{\mathbb{R}} \bigm| a \leqslant x \leqslant b\bigr\}$ с *концами* $a, b \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$, где $[a,b] = \emptyset$ — *пустое множество* при $a > b$, а также $(a,b] := [a,b] \setminus a$, $[a,b) := [a,b] \setminus b$ и *открытый интервал* $(a,b) := (a,b] \cap [a,b)$. Таким образом, *базу открытых множеств* в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ можно задать интервалами $(a,b)$ с концами $a < b$, $(a,+\infty]$ с $a < +\infty$, $[-\infty, b)$ с $b > -\infty$; $\mathbb{R}^+ := [0,+\infty)$, $\mathbb{R}^+_{\pm\infty} := [0,+\infty]$, а $x^+ := \sup\{0,x\} \in \mathbb{R}^+_{\pm\infty}$ и $x^- := (-x)^+$ — соответственно *положительная часть* и *отрицательная часть* $x \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$.

Множество *числовых функций* $f\colon X \to \mathbb{R}$ и *расширенных числовых функций* $f\colon X \to \mathbb{R}_{\pm\infty}$, действующих из $X$ соотвественно в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$, предполагаем определёнными на всем $X$, если не оговорено иное, а множество всех таких функций обозначаем соответственно через $\mathbb{R}^X$ и $\mathbb{R}^X_{\pm\infty}$. На $\mathbb{R}^X_{\pm\infty}$ отношения равенства и порядка $\leq$ определяются, если не оговорено иное, поточечно:

$$\begin{aligned} (f = g) &\overset{\text{def}}{\iff} \bigl(f(x) = g(x)\, \forall x \in X\bigr), \\ (f \leqslant g) &\overset{\text{def}}{\iff} \bigl(f(x) \leqslant g(x)\, \forall x \in X\bigr). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

*Сужение функции* $f \in \mathbb{R}^X_{\pm\infty}$ *на* $S \subset X$ обозначаем как $f\,\big|_S$ и

$$\Bigl(f\,\big|_S \leqslant g\,\big|_S\Bigr) \overset{\text{def}}{\iff} \bigl(f(x) \leqslant g(x)\, \forall x \in S\bigr). \tag{1.1.2}$$

### 1.1.1 Алгебраические версии

Одна из основ функционального анализа —

**Теорема Хана – Банаха** (об огибающей [1, II.1.3–4], [47], [63], [50], [64], [71]). *Пусть $X$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ и $f \in \mathbb{R}^X$.*

**I.** *Эквивалентны следующие три утверждения.*

**1.** *Функция $f$ сублинейная и принадлежит конусу* $\operatorname{sbl}\mathbb{R}^X$*, что здесь означает одновременное выполнение двух свойств:*

**(ph)** *положительная однородность:*

$$f(tx) = tf(x) \qquad \forall x \in X,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

**(sa)** *и субаддитивность:*

$$f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X.$$

**2.** *Для векторного пространства* $\operatorname{lin}\mathbb{R}^X$ *над $\mathbb{R}$ всех линейных функций $l \in \mathbb{R}^X$, определяемых требованиями*

$$\begin{gathered} l(t_1x_1 + t_2x_2) = t_1l(x_1) + t_2l(x_2) \\ \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall t_2 \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

*функция $f$ совпадает со своей нижней огибающей* $\underline{\operatorname{env}}^f_{\operatorname{lin}\mathbb{R}^X}$ *по* $\operatorname{lin}\mathbb{R}^X$*? а именно:*

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\in X}{\equiv} \sup\bigl\{l(x) \bigm| f \geqslant l \in \operatorname{lin}\mathbb{R}^X\bigr\} \\ =: \underline{\operatorname{env}}^f_{\operatorname{lin}\mathbb{R}^X}(x). \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

**3.** *Для $f$ имеет место тождество*

$$f(x) \underset{x\in X}{\equiv} \inf\left\{ \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} t_k x_k = x, \right.$$
$$\left. x_k \in X,\ t_k \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.1.3)$$

**II.** *Следующие три утверждения эквивалентны.*

**1.** *Функция $f$ выпуклая и принадлежит выпуклому множеству* $\operatorname{conv}\mathbb{R}^X$, *т.е. удовлетворяет неравенству Йенсена*

$$\begin{gathered} f\bigl(tx_1 + (1-t)x_2\bigr) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \\ \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X,\ \forall t \in (0,1). \end{gathered} \quad (1.1.4)$$

**2.** *Для векторного пространства* $\operatorname{aff}\mathbb{R}^X$ *над* $\mathbb{R}$ *всех аффинных функций* $a \in \mathbb{R}^X$, *определяемых требованиями*

$$\begin{gathered} a\bigl(tx_1 + (1-t)x_2\bigr) = ta(x_1) + (1-t)a(x_2) \\ \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X,\ \forall t \in (0,1), \end{gathered} \quad (1.1.5)$$

*где* $(0,1)$ *можно заменить на* $\mathbb{R}$, $f$ *совпадает со своей нижней огибающей* $\underline{\operatorname{env}}^f_{\operatorname{aff}\mathbb{R}^X}$ *по* $\operatorname{aff}\mathbb{R}^X$:

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\in X}{\equiv} \sup\bigl\{ a(x) \bigm| f \geqslant a \in \operatorname{aff}\mathbb{R}^X \bigr\} \\ =: \underline{\operatorname{env}}^f_{\operatorname{aff}\mathbb{R}^X}(x). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

**3.** *Для $f$ имеет место тождество*

$$\begin{gathered} f(x) \underset{x\in X}{\equiv} \inf\left\{ \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} t_k x_k = x, \right. \\ \left. x_k \in X,\ t_k \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{k=1}^{n} t_k = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}. \end{gathered} \quad (1.1.7)$$

**III.** *Точные нижние границы* inf *из* (1.1.3) *и* (1.1.7) *тождественно равны соответственно*

**1)** *наибольшей сублинейной миноранте функции* $f$:

$$\underline{\operatorname{env}}^{f}_{\operatorname{sbl}\mathbb{R}^X}(x) := \sup\bigl\{p(x) \bigm| f \geqslant p \in \operatorname{sbl}\mathbb{R}^X\bigr\} \underset{x\in X}{\equiv} (1.1.3),$$

**2)** *и наибольшей выпуклой миноранте функции* $f$:

$$\underline{\operatorname{env}}^{f}_{\operatorname{conv}\mathbb{R}^X}(x) := \sup\bigl\{v(x) \bigm| f \geqslant v \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^X\bigr\} \underset{x\in X}{\equiv} (1.1.7).$$

**Замечание 1.1.1.** Чаще всего формулируют только часть I Теоремы Хана – Банаха об огибающей и только импликацию I1⇒I2, но обратная I2⇒I1 — элементарное следствие определений линейной и сублинейной функций. Часть II достаточно просто следует из части I (см., например, [72], [41, основная теорема, часть (2)]). Эквивалентности I1⇔I3 и II1⇔II3 элементарны и в неявной форме содержатся, например, в [17, доказательство теоремы 1]. По схеме из [17] и определению сублинейной функции без труда выводится III1. По аналогии с этим выводом по определению выпуклой функции легко устанавливается наверняка известная и сформулированная где-нибудь ранее часть III2. В «Математической энциклопедии» [13, Хана–Банаха теорема] формулировка теоремы Хана–Банаха для векторного пространства некорректна: *«В случае действительного пространства $X$ полунорму можно заменить положительно однородным функционалом, . . . »*, т.е. опущено требование субаддитивности **(sa)**. Тем не менее, основной ориентир в выборе терминологии и обозначений, где это возможно, — именно [13], а также монография [1]. В различных источниках и у разных авторов терминология зачастую существенно разнится, поэтому в нашем изложении по возможности все, даже элементарные, определения, понятия и утверждения, встречавшиеся нам в литературе хотя бы раз в различных смыслах и трактовках, приводятся полностью во избежание разночтений.

Нас в первом приближении будет интересовать актуальный в теории оптимизации [48] и в теории функций [27]–[34] случай, когда функция $f$ на векторном пространстве $X$ расширенная числовая, т.е. может принимать и значения $\pm\infty$, а точнее случай

**(sbl)** ($f\colon X \to \mathbb{R}_{+\infty} := \mathbb{R} \cup +\infty$ — *сублинейная функция*) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (*выполнено* **(ph)**, *но только для* $t \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$, *и* **(sa)**), *где* $t \cdot (+\infty) := +\infty$ *при условии* $0 \neq t \in \mathbb{R}^+$, *а также* $t + (+\infty) := +\infty =: (+\infty) + t$ *при* $t \in \mathbb{R}_{+\infty}$.

Такие функции называют ещё *гиполинейными* (hypolinear [45], [48]) или *расширенными сублинейными* (extended sublinear [70], [71, замечание 1.4]) функционалами, но *только при любом из следующих эквивалентных друг другу дополнительных трёх соглашений*

$$\begin{aligned}\bigl(f(0) = 0\bigr) &\overset{\text{или}}{\Longleftrightarrow} \bigl(f(0) \in \mathbb{R}\bigr)\\ &\overset{\text{или}}{\Longleftrightarrow} \bigl(\textbf{(ph)} \text{ с } t \in \mathbb{R}^+,\ 0 \cdot (+\infty) := 0\bigr).\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Уже при $X := \mathbb{R}$ примеры функций $\boldsymbol{+\infty}\colon x \mapsto +\infty$ и

$$x \underset{x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \begin{cases} +\infty, & x \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & x \notin \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

показывают, что сублинейность в смысле **(sbl)** не влечёт за собой выполнения ни одного из соглашений (1.1.8).

В такой постановке задача описания нижней огибающей существенно усложняется и далеко не тривиальна. Представляется уместной пространная цитата из [48, 1. Введение]: “A surprising fact occurs when, as requested in many constraint optimization problem, $p$ is allowed to take the value $+\infty$. When the dimension of the underlying space $X$ is infinite, S. Simons provided (see[1] the paragraph of the article [70] entitled ‘Counterexample to 4’, at p.114) a highly counterintuitive example: a hypolinear function (that is a convex ph-function) $p\colon X \to \mathbb{R}^+_{\pm\infty}$ such that the inequality $g \leqslant p$ is false for all the linear mappings $g\colon X \to \mathbb{R}$. Arguably, the better illustration of the difficulty to address this case is the unusually large number of flawed Hahn–Banach type theorems for hypolinear functions which can be found in the mathematical literature; in the articles, [45], [73]– [74] the reader can find examples and criticism of as much as seven such incorrect results published between 1969 and 2005.” Эту цитату можно дополнить еще одним более поздним восьмым некорректным результатом [52, теорема 2.4] 2013 г., где вместо сублинейных функций из **(sbl)**$\cap$(1.1.8) рассматриваются противоположные им суперлинейные функционалы со значениями в $\mathbb{R}_{-\infty} := \mathbb{R} \cup -\infty$. Этот результат по существу используется для [52, теоремы 2.7, 2.8, следствия 2.5, 2.9], но опровергается контрпримерами [70, Counterexample to (3), p. 113], [71, замечание 2.3], [45, пример (1.6)].

[1]Наше дополнение к цитате — см. и [71, замечание 1.4], [45, (1.6)].

### 1.1.2 Топологические версии

По-видимому, первая *топологическая версия* теоремы Хана – Банаха об огибающей для расширенных сублинейных **(sbl)**$\cap$(1.1.8) функционалов была дана Л. Хёрмандером [53] ещё в 1955 г., хотя, как отмечено в [21, 0.1, теорема 8 и далее], как минимум, в конечномерном случае $X = \mathbb{R}^n$ для расширенных выпуклых функционалов она была известна и Г. Минковскому.

**Теорема Хёрмандера** (об огибающей [53], [45, (3.6), (4.8)], [11, **2**°], [10, 4.7.3(3)])**.** *Пусть $X$ — локально выпуклое пространство, $f\colon X \to \mathbb{R}_{+\infty}$ или $f = -\boldsymbol{\infty}\colon x \underset{x\in X}{\longmapsto} -\infty$ — тождественная $-\infty$ на $X$, а $C(X) \subset \mathbb{R}^X$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ непрерывных функций на локально выпуклом пространстве $X$.*

**I.** *Следующие два утверждения эквивалентны.*

**1.** *Функция $f$ сублинейная в смысле* **(sbl)** *полунепрерывная снизу на $X$ или $f = -\boldsymbol{\infty}$.*

**2.** *$f$ совпадает со своей нижней огибающей по $C(X) \cap \operatorname{lin} \mathbb{R}^X$:*

$$f(x) \underset{x\in X}{\equiv} \sup\bigl\{l(x) \bigm| f \geqslant l \in C(X) \cap \operatorname{lin} \mathbb{R}^X\bigr\} =: \underline{\operatorname{env}}^f_{C(X)\cap \operatorname{lin} \mathbb{R}^X}(x).$$

**II.** *Эквивалентны следующие два утверждения.*

**1.** *$f\colon X \to \mathbb{R} \cup +\infty$ — выпуклая в смысле* (1.1.4) *полунепрерывная снизу или $f = -\boldsymbol{\infty}$ на $X$.*

2. *$f$ совпадает со своей нижней огибающей по $C(X) \cap \operatorname{aff} \mathbb{R}^X$:*

$$f(x) \underset{x \in X}{\equiv} \sup\bigl\{a(x) \bigm| f \geqslant a \in C(X) \cap \operatorname{aff} \mathbb{R}^X\bigr\}$$
$$=: \underline{\operatorname{env}}^f_{C(X) \cap \operatorname{aff} \mathbb{R}^X}.$$

«Индивидульное», также топологическое, развитие теоремы Хёрмандера для отдельных точек $x \in X$ даёт

**Теорема Энгера – Лембке** (об огибающей [45, теоремы (3.4), (4.7)]). *Пусть $X$ — локально выпуклое пространство и $P \subset X$ — выпуклый конус, $K \subset X$ — выпуклое множество.*

**I.** *Пусть $f\colon P \to \mathbb{R} \cup +\infty$ — гиполинейный функционал на $P$, полунепрерывный снизу в нуле. Тогда эквивалентны два утверждения*

1. *$f$ полунепрерывен снизу в $x \in P$.*
2. $f(x) = \sup\bigl\{l(x) \bigm| l \in C(X) \cap \operatorname{lin} \mathbb{R}^X,\ l\bigm|_P \leqslant f\bigm|_P\bigr\}$.

**II.** *Пусть $f\colon K \to \mathbb{R} \cup +\infty$ — расширенная выпуклая функция на $K$, локально ограниченная снизу. Тогда эквивалентны два утверждения*

1. *$f$ — полунепрерывная снизу в точке $x \in K$.*
2. $f(x) = \sup\bigl\{a(x) \bigm| a \in C(X) \cap \operatorname{aff} \mathbb{R}^X, a\bigm|_K \leqslant f\bigm|_K\bigr\}$.

Введение топологии позволяет дать и законченную векторную версию теоремы Хана – Банаха о мажорируемом продолжении линейных функционалов:

**Следствие Энгера – Лембке** ( [45, Введение, 127–128]). *Для гиполинейного функционала $f$ на векторном пространстве $X$ и для $l_0 \in \operatorname{lin} \mathbb{R}^{X_0}$ с ограничением $l_0 \leqslant f$*

*на векторном подпространстве* $X_0 \subset X$ *линейное продолжение* $l \in \operatorname{lin} \mathbb{R}^X$, *удовлетворяющее условиям* $l = l_0$ *на* $X_0$ *и* $l \leqslant f$ *на* $X$, *возможно тогда и только тогда, когда функция*

$$x \underset{x \in X}{\longmapsto} \inf_{x' \in X_0} \bigl( f(x + x') - l_0(x') \bigr)$$

*ограничена снизу в некоторой окрестности нуля в сильнейшей локально выпуклой топологии на* $X$, *в которой непрерывны все линейные функции из* $\operatorname{lin} \mathbb{R}^X$.

**Замечание 1.1.2.** *Теорема Хана – Банаха – Канторовича* [10, 1.4.13–14] в *порядковой версии* в духе предыдущих теорем об огибающей формулируется в подразделе 2.4.1, где она непосредственно потребуется, после некоторой необходимой подготовки.

## 1.2 Основные определения и постановки задач

В этом разделе 1.2.2, даются возможные общие постановки рассматриваемых в работе задач, мотивированные для нас прежде всего предшествующими применениями в теории функций [22]– [34], [56].

### 1.2.1 Упорядоченные множества. Пополнение

Пусть $\mathrm{S}$ — (частично) упорядоченное множество [1] с отношением порядка (рефлексивным, транзитивным, антисимметричным) $\leqslant$, т.е. пара $(\mathrm{S}, \leqslant)$; $\geqslant$ и $>$ — соответственно *обратные к* $\leqslant$ и *строгому порядку* $<$, равному пересечению отношений $\leqslant$ и $\neq$.

Пара $(\mathrm{S}, \leqslant)$, или множество $\mathrm{S}$, *полное снизу* (соответственно *сверху*), если для каждого непустого подмножества $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{S}$ существует *точная нижняя* (соответственно *верхняя*) *граница* $\inf \mathrm{S}_0$ (соответственно $\sup \mathrm{S}_0$). Множество $\mathrm{S}$ *полное,* если $\mathrm{S}$ полное и снизу, и сверху. Подмножество $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{S}$ *ограничено снизу* (соответственно *сверху*), если существует элемент $s_0 \in \mathrm{S}$, для которого $s_0 \leqslant s$ (соответственно $s \leqslant s_0$) для всех $s \in \mathrm{S}_0$. Множество $\mathrm{S}$ *порядково полное снизу* (соответственно *сверху*) [1], [10], [11], [46][2], если для каждого непустого ограниченного снизу (соответственно сверху) подмножества $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{S}$ существует $\inf \mathrm{S}_0 \in \mathrm{S}$ (соответственно $\sup \mathrm{S}_0 \in \mathrm{S}$). Множество $\mathrm{S}$ *порядково полное,* если $\mathrm{S}$ порядково полное и снизу, и сверху.

Пусть $\mathrm{S}$ — *порядково полное.* Если $\inf \mathrm{S}$ и/или $\sup \mathrm{S}$ не существуют, то часто удобна и полезна операция *(полу-)пополнения* порядково полного $\mathrm{S}$ до полного путём добавления <u>*символов*</u> $\inf \mathrm{S}$ и/или $\sup \mathrm{S}$, если таких элементов первоначально в $\mathrm{S}$ нет. Конкретнее[3],

[$\downarrow$] $\mathrm{S}_{\downarrow} := \{\inf \mathrm{S}\} \cup \mathrm{S}$ — *полупополнение*, или полурасширение, множества $\mathrm{S}$ *вниз,* или влево;

[$\uparrow$] $\mathrm{S}^{\uparrow} := \mathrm{S} \cup \{\sup \mathrm{S}\}$ — *полупополнение*, или полурасширение, множества $\mathrm{S}$ *вверх,* или вправо;

[$\updownarrow$] $\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow} := \mathrm{S}_{\downarrow} \cup \mathrm{S}^{\uparrow}$ — *пополнение*, или расширение, множества $\mathrm{S}$ в порядковом смысле,

где порядок $\leqslant$ продолжен естественным путём на эти пополнения, т.е. $\inf \mathrm{S} \leqslant s \leqslant \sup \mathrm{S}$ *для всех элементов*

[2]*lower* (*upper* resp.) *order-complete*

[3]В [10, 1.3.3] использовано иное обозначение $\mathrm{S}^{\bullet}$ вместо $\mathrm{S}^{\uparrow}$.

$s \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$. Очевидно, пополнения $\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \mathrm{S}_{\downarrow}, \mathrm{S}^{\uparrow}$ с таким отношением порядка соответственно полное, полное снизу, полное сверху упорядоченные множества. Для пустого множества $\emptyset \subset \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$ полагаем

$$\sup \emptyset := \inf \mathrm{S}, \quad \inf \emptyset := \sup \mathrm{S}. \tag{1.2.1}$$

### 1.2.2 Верхняя и нижняя огибающие

Для множеств $X, Y$ традиционно, как и для частных случаев $Y := \mathbb{R}$ или $Y := \mathbb{R}_{\pm\infty}$ выше в разделе 1.1, через $Y^X$ обозначаем множество всех *функций* (отображений, операторов, функционалов, форм и проч.) $f\colon X \to Y$, $f\colon x \underset{x\in X}{\longmapsto} f(x)$ или $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, определённых на $X$. Далее в основном используем термин *функция*, индифферентный к природе множеств $X, Y$ [13, Функция].

Для $X_0 \subset X$ через $f \bigm|_{X_0}$ обозначаем *сужение* $f$ *на* $X_0$. Для двух функций $f, g \in Y^X$ пишем $g \bigm|_{X_0} = f \bigm|_{X_0}$ и говорим, что «$g = f$ *на* $X_0$», если $g(x) = f(x)$ *для всех* $x \in X_0$. В противном случае $g \bigm|_{X_0} \neq f \bigm|_{X_0}$. Пишем $g \bigm|_{X_0} \leqslant f \bigm|_{X_0}$ и говорим, что «$g \leqslant f$ *на* $X_0$», или $g$ *минорирует* $f$, или $f$ *мажорирует* $g$, *на* $X_0$, если $g(x) \leqslant f(x)$ *для всех* $x \in X_0$. Пусть $Y = \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$ — пополнение порядково полного $(\mathrm{S}, \leqslant)$. Отношение $f \bigm|_X \leqslant g \bigm|_X$ определяет *отношение поточечного порядка на множестве функций* $\left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ аналогично (1.1.1)–(1.1.2). Очевидно, множество $\left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ с отношением поточечного порядка, обозначаемого тем же символом $\leqslant$, *полное*, а именно: *для произвольного* $F \subset \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ *всегда существуют функции*

$$\sup F\colon x \underset{x\in X}{\longmapsto} \sup_{f\in F} f(x) \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad \inf F\colon x \underset{x\in X}{\longmapsto} \inf_{f\in F} f(x) \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow},$$

когда на $X$ рассматриваются и постоянные функции

$$\begin{aligned} \inf\left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X &: x \underset{x\in X}{\longmapsto} \inf S \in \mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}, \\ \sup\left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X &: x \underset{x\in X}{\longmapsto} \sup S \in \mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}, \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

а при рассмотрении $\emptyset \subset \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X$ в соответствии с соглашением (1.2.1) определены точные границы

$$\begin{aligned} \sup\emptyset &:= \inf\left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X \in \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X, \\ \inf\emptyset &:= \sup\left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X \in \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

**Определение 1.2.1.** Пусть $(\mathrm{S}, \leqslant)$ порядково полное, а также

$$f \in \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X, \quad X_0 \subset X, \quad L \subset \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^{X_0}.$$

*Нижнюю* и *верхнюю* $L$-*огибающие*, или *огибающие по* $L$ *для* $f$ *на* $X_0$, определяем соответственно как функции

$$\underline{\mathrm{env}}^f_L\colon x \underset{x\in X_0}{\longmapsto} \sup\Big\{ l(x) \;\Big|\; L \ni l\,\big|_{X_0} \leqslant f\,\big|_{X_0} \Big\} \in \mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}, \tag{1.2.4l}$$

$$\overline{\mathrm{env}}^L_f\colon x \underset{x\in X_0}{\longmapsto} \inf\Big\{ l(x) \;\Big|\; f\,\big|_{X_0} \leqslant l\,\big|_{X_0} \in L \Big\} \in \mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}. \tag{1.2.4u}$$

Очевидно, всегда

$$\underline{\mathrm{env}}^f_L\,\big|_{X_0} \leqslant f\,\big|_{X_0} \leqslant \overline{\mathrm{env}}^L_f\,\big|_{X_0}. \tag{1.2.5}$$

Функция $f\colon X \to Y$ с упорядоченными $(X, \leqslant)$, $(Y, \leqslant)$ *возрастающая* на $X$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \leqslant x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. При этом, если $F \subset Y^X$, то множество всех возрастающих функций $f \in F$ обозначаем как $\operatorname{incr} F$. Функция $f \in Y^X$ *строго возрастающая* на $X$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично для убывания. Функция (строго) возрастающая или убывающая — (*строго*) *монотонная*. Функции $f \mapsto \underline{\operatorname{env}}_L^f$ и $f \mapsto \overline{\operatorname{env}}_f^L$ для функции $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ возрастающие на $\left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$, но, вообще говоря, не строго возрастающие.

### 1.2.3 Общие постановки задач

В приложениях роль $X$ из определения 1.2.1 часто играет некоторый класс функций и $\mathrm{S} = \mathbb{R}$ [28]– [32]. Основные проблемы, продиктованные определением 1.2.1 в свете теорем Хана – Банаха, Хёрмандера, Энгера – Лембке, а также приведённой в подразделе 2.4.1 теоремы Хана – Банаха – Канторовича — следующие

**Задача 1.** *Описать функции $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$, равные своей нижней (верхней) $L$-огибающей на $X_0$.*

**Задача 2.** *Указать метод(ы) конструктивного построения нижних (верхних) $L$-огибающих для $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$.*

Именно эти задачи 1, 2 решают для определенных классов $L$ и функций $f$ результаты подраздела 1.1.1.

В связи с приложениями не меньший, а для некоторых применений даже бóльший интерес [26]– [34], чем задача 1, представляет собой менее требовательная

**Задача 3.** *Описать те функции $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$, для которых $\underline{\operatorname{env}}_L^f \neq \inf \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ или $\overline{\operatorname{env}}_f^L \neq \sup \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$.*

Если порядково полное S изначально дополнительно снабжено какими-либо алгебраическими операциями, согласованными с отношением порядка $\leqslant$, то продолжения этих операций на пополнения, или (полу)расширения, вообще говоря, с ограничениями, могут определяется в каждом конкретном случае в зависимости от проблематики (см. и ср. с [12, § 4], [10, 1.3.1]).

Для пары добавляемых символов $\inf \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ и/или $\sup \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ часто, в особенности, если на $\mathrm{S}$ используется бинарная операция в аддитивной форме как основная, по аналогии с расширениями вещественной прямой $\mathbb{R}$ (с операцией сложения) вверх и/или вниз, используются соответственно обозначения $-\infty := \inf \mathrm{S}$ и/или $+\infty := \sup \mathrm{S}$. Применяются, но не здесь, — в зависимости от контекста и природы упорядоченного множества $(\mathrm{S}, \leqslant)$, — и обозначения в виде пар $0, 1$; $\mathbf{0}, \mathbf{1}$; $-\infty, 0$; $0, +\infty$ и т.п.

### 1.2.4 Пространства Канторовича

Для множества $S$ через $\operatorname{card} S$ обозначаем число элементов в $S$ или мощность множества $S$.

Векторные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$, если не оговорено противное. Нулевой вектор различных векторных пространств обозначаем одним и тем же символом $0$. Задачи 1–3 будут решаться на проективных пределах векторных решёток по аналогии с [26]– [32], [8] для функций (функционалов) со значениями в пространстве Канторовича $\mathbb{K}$ и в $\mathbb{K}_{\pm\infty}$.

Пусть $X, Y$ — упорядоченные векторные пространства. Через $X^+$ обозначаем множество всех положительных векторов в $X$. В частности, для подмножества $F \subset Y^X$ тогда $F^+$ — подмножество всех *положительных* функций $f$ из $F$, для которых по определению $f(X^+) \subset Y^+$. Порядково полная векторная решётка $\mathbb{K}$ с $\operatorname{card} \mathbb{K} > 1$ —

*пространство Канторовича* [7], [1], [10], [11]. При этом $\mathbb{K}$ не полное ни снизу, ни сверху. Будут использованы, не оговаривая особо, следующие определения, соглашения и обозначения[4]:

$$\inf \mathbb{K} =: -\infty \overset{(1.2.1)}{=:} \sup \emptyset, \quad \sup \mathbb{K} =: +\infty \overset{(1.2.1)}{=:} \inf \emptyset;$$
$$-(-\infty) := +\infty, \quad -(+\infty) := -\infty,$$
$$-\infty \leqslant k \leqslant +\infty \quad \forall k \in \mathbb{K}_{\pm\infty};$$
$$\mathbb{K}_{-\infty} := \mathbb{K}_{\downarrow}, \quad \mathbb{K}_{+\infty} := \mathbb{K}^{\uparrow}, \quad \mathbb{K}_{\pm\infty} := \mathbb{K}_{\downarrow}^{\uparrow};$$
$$(-\infty) + k =: k + (-\infty) := -\infty \quad \forall k \in \mathbb{K}_{-\infty},$$
$$(+\infty) + k =: k + (+\infty) := +\infty \quad \forall k \in \mathbb{K}_{+\infty},$$
$$t(-\infty) =: (-t)(+\infty) := -\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$$
$$t(+\infty) =: (-t)(-\infty) := +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus 0;$$
$$\mathbb{K}^S_{-\infty} := (\mathbb{K}_{-\infty})^S, \quad \mathbb{K}^S_{+\infty} := (\mathbb{K}_{+\infty})^S, \quad \mathbb{K}^S_{\pm\infty} := (\mathbb{K}_{\pm\infty})^S;$$
$$\inf \mathbb{K}^S_{\pm\infty} =: \inf \mathbb{K}^S_{-\infty} \overset{(1.2.2)}{:=} -\infty \quad \forall S \neq \emptyset,$$
$$\sup \mathbb{K}^S_{\pm\infty} =: \sup \mathbb{K}^S_{+\infty} \overset{(1.2.2)}{:=} +\infty \quad \forall S \neq \emptyset;$$
$$\sup \emptyset := -\infty, \ \inf \emptyset := +\infty \text{ для } \emptyset \subset \mathbb{K}^S \subset (\mathbb{K}_{\pm\infty})^S.$$

Конкретные нетривиальные примеры пространств Канторовича приводятся, например, в [7, гл. I, § 3].

[4]Здесь и далее ссылки над знаками бинарных отношений означают, что эти соотношения как-то связаны с приведёнными ссылками, например, вытекают из них.

# Глава 2

# Проективные пределы

## 2.1 Проективный предел упорядоченных векторных пространств

Для векторных пространств $X$ и $Y$ через $\operatorname{lin} Y^X$ обозначаем векторное пространство всех линейных функций $l$ из $Y^X$, удовлетворяющих (1.1.1). В случае упорядоченных векторных пространств $X$ и $Y$ положительные линейные функции из $\operatorname{lin}^+ Y^X := (\operatorname{lin} Y^X)^+$ — это в точности возрастающие линейные функции на $X$ и $\operatorname{lin}^+ Y^X = \operatorname{incr} \operatorname{lin} Y^X$.

Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность упорядоченных векторных пространств над $\mathbb{R}$ и $\leqslant_n$ — отношение порядка на $X_n$. Проекцию вектора $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из векторного пространства-произведения

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n =: \prod\nolimits_n X_n$$

на пространство $X_n$ обозначаем через $\operatorname{pr}_n x = x_n$, $n \in \mathbb{N}$. На $\prod_n X_n$ вводится естественный порядок $\leqslant$, а именно: $x = (x_n) \leqslant x' = (x'_n)$ в $\prod_n X_n$, если и только если $x_n \leqslant_n x'_n$ для каждого номера $n \in \mathbb{N}$.

**Определение 2.1.1.** Пусть $p_n \in \operatorname{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$ — линейные положительные функциииз $X_{n+1}$ в $X_n$, которые называем *линейными возрастающими вложения $X_{n+1}$ в $X_n$*. Векторное подпространство $X$ в $\prod_n X_n$, с характеризующим его условием

$$(x \in X) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\operatorname{pr}_n x = p_n(\operatorname{pr}_{n+1} x) \quad \forall n \in \mathbb{N}\big), \qquad (2.1.1)$$

снабженное индуцированным с $\prod_n X_n$ отношением порядка $\leqslant$, называем *проективным пределом последовательности $(X_n)$ относительно $(p_n)$* и обозначаем как

$$X = \operatorname{proj}\lim_n X_n p_n. \qquad (2.1.2)$$

В записи $\operatorname{proj}\lim_n$ нижний индекс $n$ часто опускаем.

Из (2.1.1) сразу следует, что

$$p_n(\operatorname{pr}_{n+1} B) = \operatorname{pr}_n B \quad \forall B \subset X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n. \qquad (2.1.3)$$

### 2.1.1 Проективный предел векторных решёток

Упорядоченное векторное пространство — *векторная решётка*, если для всякой пары векторов в нём существует точная верхняя граница sup, а значит, и точная нижняя граница inf. Операцию sup в упорядоченном множестве $S$ для её идентификации обозначаем как $S$-sup. При этом для $(X_n, \leqslant_n)$ наряду с обозначением $X_n$-sup иногда используем и обозначение $n$-sup, как и для $X_n$-inf и $n$-inf.

Проективный предел $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ векторных решёток $X_n$ называем *правильным проективным пределом*, если $p_n$ сохраняют sup для конечных множеств, т.е.

$$\begin{gathered} X_n\text{-}\sup p_n(B_{n+1}) = p_n(X_{n+1}\text{-}\sup\ B_{n+1}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall B_{n+1} \subset X_{n+1} \text{ при } \operatorname{card} B_{n+1} < \infty. \end{gathered} \qquad (2.1.4)$$

**Предложение 2.1.1.** *Для правильного предела* (2.1.2) *векторных решёток* $X_n$

(i) *если* $B \subset X$ *и* $\operatorname{card} \operatorname{pr}_n B < \infty$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$, *то существует*

$$\begin{aligned} &v = X\text{-}\sup B = \Big(\prod\nolimits_n X_n\Big)\text{-}\sup B, \\ &\textit{для которого } \operatorname{pr}_n v = X_n\text{-}\sup \operatorname{pr}_n B; \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

(ii) $X$ *и все проекции* $\operatorname{pr}_n X$ *с индуцированным с* $X_n$ *отношением порядка* $\leqslant_n$ *— векторные решётки;*

(iii) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *сужения* $p_n \big|_{\operatorname{pr}_{n+1} X}$ *сохраняют* sup *для конечных множеств.*

*Доказательство.* (i). Положим $v = (v_n) \in \prod_n X_n$, где $v_n = X_n\text{-}\sup \operatorname{pr}_n B$. Очевидно, $v = \big(\prod_n X_n\big)\text{-}\sup B$. Поскольку $p_n$ сохраняют sup по (2.1.4) и (2.1.3) получаем

$$\begin{aligned} p_n(v_{n+1}) &= p_n(X_{n+1}\text{-}\sup \operatorname{pr}_{n+1} B) \\ &\overset{(2.1.4)}{=} X_n\text{-}\sup p_n(\operatorname{pr}_{n+1} B) \overset{(2.1.3)}{=} X_n\text{-}\sup \operatorname{pr}_n B = v_n. \end{aligned}$$

Значит для $x = v$ имеет место правая часть (2.1.1) и $v \in X$ по определению 2.1.1. Так как порядок на $X$ индуцирован с $\prod_n X_n$, то $v = X\text{-}\sup B \in X$ и (i) доказано.

(ii). Пространство-произведение векторных решёток — векторная решётка [1], [5, гл.II, § 1]. По п. (i) ввиду (2.1.5) с $\operatorname{card} B = 2$ его векторное подпространство $X$ — тоже векторная решётка. Пусть теперь $x_n, x'_n \in \operatorname{pr}_n X$, то есть существуют $x, x' \in X$, для которых $\operatorname{pr}_n x = x_n$, $\operatorname{pr}_n x' = x'_n$. Поскольку $X$ — векторная решётка, существует вектор $v = X\text{-}\sup\{x, x'\} \in X$, для которого

$X_n\text{-}\sup\{x_n, x'_n\} = \operatorname{pr}_n v \in \operatorname{pr}_n X$. Таким образом,

$$\operatorname{pr}_n v = (\operatorname{pr}_n X)\text{-}\sup\{x_n, x'_n\} = X_n\text{-}\sup\{x_n, x'_n\} \tag{2.1.6}$$

и $\operatorname{pr}_n X$ — векторная решётка, что завершает доказательство п. (ii).

(iii). Из (2.1.6) для $x_n, x'_n \in \operatorname{pr}_n X$ при $n \in \mathbb{N} \setminus 1$ имеем

$$\begin{aligned} p_{n-1}\big|_{\operatorname{pr}_n X}\big((\operatorname{pr}_n X)\text{-}\sup\{x_n, x'_n\}\big) \\ &\overset{(2.1.6)}{=} p_{n-1}\big(X_n\text{-}\sup\{x_n, x'_n\}\big) \\ &\overset{(2.1.4)}{=} X_{n-1}\text{-}\sup\big\{p_{n-1}(x_n),\, p_{n-1}(x'_n)\big\} \\ &\overset{(2.1.6)}{=} (\operatorname{pr}_{n-1} X)\text{-}\sup\Big\{p_{n-1}\big|_{\operatorname{pr}_n X}(x_n),\, p_{n-1}\big|_{\operatorname{pr}_n X}(x'_n)\Big\}. \end{aligned}$$

Отсюда все $p_{n-1}\big|_{\operatorname{pr}_n X}$ при $n \in \mathbb{N} \setminus 1$ сохраняют sup для конечных множеств из $\operatorname{pr}_n X$. $\square$

Предел $X = \operatorname{proj\,lim} X_n p_n$ называем *приведённым*, если $\operatorname{pr}_n X = X_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ (ср. с [43, гл.IV, § 4]). Не умаляя общности общности, любой проективный предел можно считать приведённым, поскольку

$$X = \operatorname{proj\,lim} X_n p_n \overset{(2.1.3)}{=} \operatorname{proj\,lim}\,(\operatorname{pr}_n X)\Big(p_n\big|_{X_{n+1}}\Big).$$

При этом все отображения $p_n\big|_{X_{n+1}}\colon \operatorname{pr}_{n+1} X \to \operatorname{pr}_n X$ в силу (2.1.3) сюръективные. Более того, если первоначально рассматривался правильный проективный предел векторных решёток, то по предложению 2.1.1 после перехода к приведённому проективному пределу мы по-прежнему имеем дело с правильным проективным пределом векторных решёток $\operatorname{pr}_n X$ относительно $p_n\big|_{X_{n+1}}$.

**Замечание 2.1.1.** Векторные решётки $X$ и $Y$ решёточно изоморфны, если существует линейная биекция из $X$ на $Y$, сохраняющая порядок. Каждый приведённый правильный проективный предел $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ векторных решёток для произвольной возрастающей подпоследовательности $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ решёточно изоморфен такому же пределу $X = \operatorname{proj}\lim_k X_{n_k} q_k$ относительно линейных возрастающих вложений

$$q_k = p_{n_k} \circ p_{n_k+1} \circ \cdots \circ p_{n_{k+1}-1} \ : \ X_{n_{k+1}} \to X_{n_k},$$

где $\circ$ — операция суперпозиции.

### 2.1.2 Примеры

**Пример 2.1.1 (Векторные решётки-произведения и решётки из последовательностей).** Рассмотрим $(X_k, \leq'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность векторных решеток с отношением порядка $\leqslant'_k$. Тогда каждое конечное произведение $\prod_{k=1}^n X_k$ — векторная решетка при естественном отношении порядка $(x_1, \ldots, x_n) \leqslant_n (x'_1, \ldots, x'_n)$, $x_k \in X_k$, при $x_k \leqslant'_k x'_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Для линейных возрастающих функций

$$\begin{aligned} &p_n \colon \prod_{k=1}^{n+1} X_k \to \prod_{k=1}^{n} X_k, \\ &p_n \colon (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

пространство-произведение $\prod_{k\in\mathbb{N}} X_k$ векторных решеток решёточно изоморфно приведённому правильному проективному пределу $\operatorname{proj}\lim\,(\prod_{k=1}^n X_n)p_n$ векторных решёток $\prod_{k=1}^n X_n$ относительно $p_n$. Таким образом, каждое пространство-произведение счетного числа векторных решёток можно рассматривать как приведённый правильный проективный предел.

В частном случае совпадающих при всех $k$ векторных решёток $(X_k, \leqslant'_k) = (X, \leqslant')$, $k \in \mathbb{N}$, пространство-произведение $X^{\mathbb{N}}$ — это векторная решётка всех последовательностей $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ с векторами $x_k \in X$, которую можно решёточно изоморфно отождествить с приведённым правильным проективным пределом $\operatorname{proj}\lim\,(X^n)p_n$ относительно $p_n$ из (2.1.7).

**Пример 2.1.2 (Векторные решётки функций и мер).** Пусть $D$ — топологическое хаусдорфово пространство. Для $S \subset D$ через $\operatorname{clos} S$, $\operatorname{int} S$ и $\partial S$ обозначаем соответственно *замыкание, внутренность* и *границу* $S$ в $D$. Подмножество $S$ *предкомпактно в* $D$ (пишем $S \Subset D$), если $\operatorname{clos} S$ — компакт в $D$.

Допустим, что для $D$ *существует исчерпание последовательностью* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *предкомпактных открытых подмножеств из* $D$:

$$\operatorname{int} D_n = D_n \Subset D_{n+1},\ n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D. \tag{2.1.8}$$

Различные *достаточные условия для существования исчерпания* (2.1.8) давно известны и не раз отмечались и использовались [27, § 1, перед (1.3)], [52, лемма 2.1]:

(a) $D$ локально компактное и представимо в виде объединения счётного числа компактных подмножеств, т.е. $\sigma$-компактно [44, следствие 2.77].

(b) $D$ удовлетворяет первой аксиоме счётности и полукомпактное (hemicompact), т.е. существует последовательность компактных подмножеств со свойством: каждое компактное подмножество содержится в некотором компактном подмножестве из этой последовательности.

По каждому из условий (a)$\Leftarrow$(b) пространство $D$ нормальное, в силу чего любая непрерывная функция из $\mathbb{R}^{\operatorname{clos} D_n}$ — сужение какой-либо непрерывной функции из $\mathbb{R}^D$ на замыкание $\operatorname{clos} D_n$.

**Пример 2.1.3 (Векторная решётка $C(D)$).** Для подмножества $S \subset D$ через $C(S) \subset \mathbb{R}^S$ обозначаем векторную решётку непрерывных на $S$ функций с отношением поточечного порядка на $S$. При исчерпании (2.1.8) для $p_n\colon f \mapsto f\,\big|_{\operatorname{clos} D_n}$, $f \in C(\operatorname{clos} D_{n+1})$, определён проективный предел векторных решеток $\operatorname{proj}\lim_n C(\operatorname{clos} D_n) p_n$, который для нормального $D$ приведённый правильный и его можно решёточно изоморфно отождествить с $C(D)$.

**Пример 2.1.4 (Векторная решётка $L^p_{\mathrm{loc}}(D,\mu)$).** Пусть $0 < p \in \mathbb{R}^+$, $D$ локально компактное с исчерпанием (2.1.8) и $\mu$ — вещественная мера Радона на $D$; $L^p\bigl(\operatorname{clos} D_n, \mu\,\big|_{\operatorname{clos} D_n}\bigr)$ — векторная решётка над $\mathbb{R}$ функций-классов эквивалентности на $\operatorname{clos} D_n$ по отношению $=$ $\mu$-п. в. и отношением порядка $\leqslant$ $\mu$-п. в. поточечно [5, гл. IV, § 2, 6]. Тогда определён приведённый правильный проективный предел

$$L^p_{\mathrm{loc}}(D,\mu) = \operatorname*{proj\,lim}_n L^p\bigl(\operatorname{clos} D_n, \mu\,\big|_{\operatorname{clos} D_n}\bigr) p_n \qquad (2.1.9)$$

над $\mathbb{R}$ локально интегрируемых в $p$-ой степени модулем по мере Радона $\mu$ функций-классов эквивалентности, где

$$p_n\colon f \longmapsto f\,\big|_{\operatorname{clos} D_n}, \quad f \in L^p\bigl(\operatorname{clos} D_{n+1}, \mu\,\big|_{\operatorname{clos} D_{n+1}}\bigr),$$

— линейные возрастающие вложения векторной решётки $L^p\big(\operatorname{clos} D_{n+1}, \mu \ \big|_{\operatorname{clos} D_{n+1}}\big)$ в векторную решётку $L^p\big(\operatorname{clos} D_n, \mu \,\big|_{\operatorname{clos} D_n}\big)$.

**Пример 2.1.5 (Векторная решётка мер** $\operatorname{Meas}(D)$**).** Пусть $D$ локально компактное с исчерпанием (2.1.8), $\operatorname{Meas}(\operatorname{clos} D_n)$, $n \in \mathbb{N}$, — векторные решётки вещественных мер Радона на компактах $\operatorname{clos} D_n$, а линейные возрастающие вложения из векторной решётки $\operatorname{Meas}(\operatorname{clos} D_{n+1})$ в векторную решётку $\operatorname{Meas}(\operatorname{clos} D_n)$ заданы как $p_n \colon \mu \mapsto \mu \,\big|_{D_n}$ — сужения на $\operatorname{clos} D_n$ меры $\mu \in \operatorname{Meas}(\operatorname{clos} D_{n+1})$ [5, гл. III]. Тогда векторная решетка всех вещественных мер Радона $\operatorname{Meas}(D)$ на $D$ [5, гл. III, § 2] можно рассматривать как приведённый проективный предел $\operatorname{proj\,lim}_n \operatorname{Meas}(\operatorname{clos} D_n) p_n$.

### 2.1.3 Положительные аддитивные функции на проективном пределе

**Определение 2.1.2.** Пусть $(X, +)$ и $(Y, +)$ — полугруппы по сложению. Функция $a \colon X \to Y$ *аддитивная,* если $a(x_1 + x_2) = a(x_1) + a(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$. Множество всех таких аддитивных функций обозначаем как $\operatorname{add} Y^X$. Когда $X$ и $Y$ — упорядоченные векторные пространства, то полагаем (ср. с [1, I.1.4.III])

$$\operatorname{add}^+ Y^X := (\operatorname{add} Y^X)^+, \quad \operatorname{add}^{\mathrm{reg}} Y^X := \operatorname{add}^+ Y^X - \operatorname{add}^+ Y^X.$$

Элементарно устанавливается

**Предложение 2.1.2.** *Пусть* $(X, +)$ *и* $(Y, +)$ — *аддитивные упорядоченные группы. Тогда для любой функции*

*$a \in \operatorname{add} Y^X$ имеем $a(0) = 0 \in Y$, $a(-x) = -a(x)$. Когда $X$ и $Y$ — упорядоченные векторные пространства, то $\operatorname{add}^+ Y^X := (\operatorname{add} Y^X)^+ = \operatorname{incr}\operatorname{add} Y^X$.*

**Предложение 2.1.3** (ср. с [27, предложение 2.1]). *Пусть $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток $(X_n, \leqslant_n)$. Для любой функции $a \in \operatorname{add}^+ \mathbb{R}^X$ существуют номер $n_a \in \mathbb{N}$ и функции $a_n \in \operatorname{add}^+ \mathbb{R}^{X_n}$ при каждом натуральном $n \geqslant n_a$, для которых*

$$a(x) = a_n(\operatorname{pr}_n x) \quad \text{для всех } x \in X \tag{2.1.10}$$

*при всех $n \geqslant n_a$.*

*Обратно, если $a_n \in \operatorname{add}^+ \mathbb{R}^{X_n}$, то (2.1.10) определяет аддитивную положительную функцию $a \in \operatorname{add}^+ \mathbb{R}^X$.*

*Очевидно, $\operatorname{add}^+ \mathbb{R}^X$ и $\operatorname{add}^+ \mathbb{R}^{X_n}$ здесь можно расширить соответственно до $\operatorname{add}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^X$ и $\operatorname{add}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^{X_n}$.*

*Доказательство.* Часть *«Обратно, ...»* очевидна, поскольку суперпозиция $a \circ \operatorname{pr}_n$ аддитивной положительной функции $a$ с линейной положительной функцией $\operatorname{pr}_n$ аддитивна и положительна.

Покажем сначала, что найдётся номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $a_n(x) = a_n(x')$, как только $\operatorname{pr}_n x = \operatorname{pr}_n x'$, т.е. $a(x - x') = 0$ при $\operatorname{pr}_n(x - x') = 0$. Предположим, что такого номера $n$ не существует. Тогда по предложению 2.1.2 для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдётся элемент $x^{(m)} \in X$, для которого

$$\operatorname{pr}_m x^{(m)} = 0, \quad a(x^{(m)}) > 0 \quad \text{при всех } m \in \mathbb{N}. \tag{2.1.11}$$

Из последнего строгого неравенства, переходя от $x^{(m)}$ к $k_m x^{(m)}$ с достаточно быстро растущей последовательностью $(k_m) \subset \mathbb{N}$, по аксиоме Архимеда можно добиться того, что последовательность $\big(a(k_m x^{(m)})\big)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, где $a(k_m x^{(m)}) = k_m a(x^{(m)})$, *не ограничена сверху* в $\mathbb{R}$ и

$$\operatorname{pr}_m(k_m x^{(m)}) = k_m \operatorname{pr}_m x^{(m)} \overset{(2.1.11)}{=} 0.$$

В силу этих равенств и линейности $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ для каждого $k_m x^{(m)}$ имеем $\operatorname{pr}_n(k_m x^{(m)}) = 0$ при $n \leqslant m$, то есть при фиксированном $n$ лишь конечное число элементов последовательности $(\operatorname{pr}_n k_m x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ отлично от нуля в векторной решётке $X_n$. Следовательно, по предложению 2.1.1(i) последовательность $(k_m x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ *ограничена сверху* в $X$. По предложению 2.1.2 рассматриваемая функция $a \in \operatorname{add}^+ \mathbb{R}^X$ возрастающая. Отсюда и последовательность $\big(a(k_m x^{(m)})\big)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *ограничена сверху* в $\mathbb{K}$. Противоречие!

Пусть $n$ — номер, для которого $a(x) = a(x')$, как только $\operatorname{pr}_n x = \operatorname{pr}_n x'$. Тогда $a_n$ однозначно определяется по (2.1.10). Аддитивность $a_n$ следует из линейности $\operatorname{pr}_n$ и аддитивности $a$. Кроме того, если имеем $x_n \in \operatorname{pr}_n X$, $0 \leqslant_n x_n$, то существует $x \in X$, для которого $\operatorname{pr}_n x = x_n$. По предложению 2.1.1(i) имеем $x_n \overset{(2.1.5)}{=} \operatorname{pr}_n x^+$, где $x^+ = \sup\{x, 0\} \geqslant 0$ в $X$, и $a_n(x_n) = a_n(\operatorname{pr}_n x^+) = a(x^+) \geqslant 0$. Установлена положительность $a_n$. Теперь можно положить $n_a = n$. Остальные $a_m \in \operatorname{add}^+(\mathbb{R}^{X_m})$ однозначно определяются при $m \geqslant n$ по правилу $a_m(x_m) := a_n\big(p_n \circ p_{n+1} \circ \cdots \circ p_{m-1}(x_m)\big)$, $m \geqslant n \geqslant n_a$. □

**Замечание 2.1.2.** Предложение 2.1.3 обобщает тот известный факт, что линейные положительные функционалы на $C(D)$ и $L^p_{\mathrm{loc}}(D, \mu)$ и их разности из подраздела 2.1.2 имеют компактный носитель.

**Замечание 2.1.3.** Предложение 2.1.3 остается в силе и для функций $a \in \operatorname{add}^+ \mathbb{G}^X$, когда $(\mathbb{G}, +)$ — аддитивная линейно упорядоченная архимедова группа. Доказательство почти дословно такое же.

**Следствие 2.1.1** ( [27, предложение 2.1]). *В условиях предложения 2.1.3 для каждой функции $l \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$ существуют $n_l \in \mathbb{N}$ и линейные положительные функции $l_n \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$, $n \geqslant n_l$ на $X_n$, для которых*

$$l(x) = l_n(\operatorname{pr}_n x) \quad \text{для всех } x \in X \tag{2.1.12}$$

*при всех $n \geqslant n_l$.*

*Обратно, если $l_n \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$, то (2.1.12) определяет $l \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$.*

*Здесь $\operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$ и $\operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$ можно заменить соответственно на $\operatorname{lin}^{\text{reg}} \mathbb{R}^X := \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X - \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$ и $\operatorname{lin}^{\text{reg}} \mathbb{R}^{X_n}$.*

*Доказательство.* В дополнение к предложению 2.1.3 достаточно добавить, что суперпозиция двух линейных функций линейна. □

**Определение 2.1.3.** Пусть $X$ и $Y$ — векторные пространства. Функция $a\colon X \to Y$ *аффинная,* если имеет место (1.1.5). Множество всех аффинных функций из $Y^X$ обозначаем как $\operatorname{aff} Y^X$. Для упорядоченных векторных пространств $X$ и $Y$ определён класс $\operatorname{aff}^+ Y^X := (\operatorname{aff} Y^X)^+$ аффинных положительных функций.

**Предложение 2.1.4.** *$a \in \operatorname{aff} X^Y$, если и только если имеет место единственное представление*

$$\begin{gathered} a = l_a + \mathbf{1}a(0), \quad \text{где } l_a \in \operatorname{lin} Y^X, \\ \text{а функция } \mathbf{1}\colon x \underset{x\in X}{\longmapsto} 1 \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{2.1.13}$$

— *тождественная единица на* $X$.

*Пусть* $X$ *и* $Y$ — *упорядоченные векторные пространства. Тогда*

(i) $a \in \operatorname{incr} \operatorname{aff} Y^X$, *если и только если в представлении* (2.1.13) $l_a \in \operatorname{lin}^+ Y^X$ — *линейная положительная функция;*

(ii) *если в* (2.1.13) *одновременно* $l_a \in \operatorname{lin}^+ Y^X$ *и положительно* $a(0) \in Y^+$, *то функция* $a \in \operatorname{aff}^+ Y^X$ — *аффинная положительная функция;*

(iii) *если* $a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$, *то одновременно имеем положительность* $a(0) \in \mathbb{R}^+$ *и* $l_a \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$.

*Доказательство.* Достаточность очевидна. Единственность представления (2.1.13) следует из $l_a(0) = 0 \in Y$. Для доказательства необходимости положим

$$l_a := a - \mathbf{1}a(0).$$

Тогда $l_a(0) = 0 \in Y$ и $l_a$ — аффинная функция. Следовательно, при любом $t \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} l_a(tx) &= a\big(tx + (1-t)0\big) - a(0) \\ &= ta(x) + (1-t)a(0) - a(0) = t\big(a(x) - a(0)\big) = tl_a(x). \end{aligned}$$

При $1 < t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\frac{1}{t} \in (0, 1), \quad l_a(x) = l_a\big((1/t)tx\big) = (1/t)l_a(tx),$$

откуда $l_a(tx) = tl_a(x)$ при $t \in \mathbb{R}^+$, т.е. $l_a$ — положительно однородная функция. При этом

$$l_a(x) + l_a(-x) = \frac{1}{2}l_a(2x) + \frac{1}{2}l_a(-2x) = l_a(0) = 0$$

и $l_a(x) = -l_a(-x)$ для любого $x \in X$. Это доказывает однородность $l_a$ на $X$. Аддитивность $l_a$ следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} l_a(x_1 + x_2) = l_a\Big(\frac{1}{2}2x_1 + \frac{1}{2}2x_2\Big) &= \frac{1}{2}l_a(2x_1) + \frac{1}{2}l_a(2x_2) \\ &= \frac{1}{2}2l_a(x_1) + \frac{1}{2}2l_a(x_2) = l_a(x_1) + l_a(x_2). \end{aligned}$$

Утверждения (i) и (ii) очевидны.

Если $a \in \operatorname{aff}^+ Y^X$, то, очевидно, $a(0) \in Y^+$.

(iii). Пусть теперь $Y = \mathbb{R}$ и $a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$. Тогда положительно $a(0) \in \mathbb{R}^+$. Предположим, что $l_a(x) < 0$ для некоторого $x \in X^+$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$0 \leqslant a(nx) = l_a(nx) + a(0) = nl_a(x) + a(0),$$

откуда $0 > nl_a(x) > -a(0)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, что невозможно по аксиоме Архимеда для $\mathbb{R}$. $\square$

**Следствие 2.1.2.** *В условиях предложения 2.1.3 для любых аффинных возрастающих функций $a \in \operatorname{incr}\operatorname{aff} \mathbb{R}^X$ или $a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$ существуют $n_l \in \mathbb{N}$ и последовательность $l_n \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$, $n \geqslant n_l$, для которых*

$$a(x) = l_n(\operatorname{pr}_n x) + a_0 \quad \textit{для всех } x \in X, \tag{2.1.14}$$

*при всех $n \geqslant n_l$, где $a_0 = a(0) \in \mathbb{R}$, а при $a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$ ещё и $a_0 \in \mathbb{R}^+$. Обратно, если $l_n \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$, то (2.1.14) при $a_0 \in \mathbb{R}$ определяет $a \in \operatorname{incr}\operatorname{aff} \mathbb{R}^X$, а при $a_0 \in \mathbb{R}^+$ определяет $a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$.*

*Очевидно, здесь множества* $\operatorname{incr}\operatorname{aff} \mathbb{R}^X$, $\operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$, $\operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$ *можно заменить соответственно на множества*

$$\operatorname{incr}^{\text{reg}}\operatorname{aff} \mathbb{R}^X := \operatorname{incr}\operatorname{aff} \mathbb{R}^X - \operatorname{incr}\operatorname{aff} \mathbb{R}^X,$$
$$\operatorname{aff}^{\text{reg}} \mathbb{R}^X := \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X - \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X, \ \operatorname{lin}^{\text{reg}} \mathbb{R}^{X_n},$$

*но без каких-либо ограничений на* $a_0 \in \mathbb{R}$.

*Доказательство.* Легко следует из сочетания предложений 2.1.4 и 2.1.3. $\square$

**Замечание 2.1.4.** По общей схеме из [4, гл. 3] можно определить проективный предел несчётного семейства упорядоченных векторных пространств, как это сделано в [62]. В то же время нам не известно естественное обобщение утверждений подраздела 2.1.3, в частности, следствия 2.1.1, в таком варианте, хотя ранее и была предпринята такая попытка в [62, § 2], оказавшаяся неудачной, поскольку некорректна [62, лемма 2].

**Замечание 2.1.5.** Если $X$ — векторная решётка, то по теореме Рисса–Канторовича $\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^X$ — векторная решётка и даже пространство Канторовича с положительным конусом $\operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$ [1, теорема 6(3.1)]. Следствие 2.1.1 означает, что упорядоченное векторное пространство $\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^X$, где $X = \operatorname{proj\,lim}_n X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток $X_n$, решёточно изоморфно индуктивному пределу $\operatorname{inj\,lim}_n i_n(\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^{X_n})$ относительно положительных линейных функций $i_n\colon \operatorname{lin}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^{X_n} \to \operatorname{lin}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^{X_{n+1}}$, сопряжённых к линейным отображениям $p_n$. Не останавливаясь подробно на соответствующих определениях, отметим, что они легко конструируются по общей схеме [4, гл. 3, § 2] и по аналогии с индуктивными пределами топологических векторных пространств [20], [43, гл. II и гл. IV, § 4].

## 2.2 Верхняя огибающая на проективном пределе

Всюду далее $\mathbb{K}$ — пространство Канторовича с отношением порядка $\leqslant$. При этом отношения порядка и на иных упорядоченных множествах могут обозначаться таким же символом $\leqslant$, если это не вызывает разночтений.

### 2.2.1 Случай произвольной функции

Неравенство из правой части (1.2.5) даёт

**Предложение 2.2.1.** *Пусть* $f \overset{1.2.4}{\in} \mathbb{K}^X_{\pm\infty}$. *Тогда*

$$f(x) \leqslant \overline{\operatorname{env}}^L_f(x) \overset{(1.2.4\mathrm{u})}{=} \inf\Bigl\{l(x) \colon l \in L,\ f\,\Bigr|_{X_0} \leqslant l\,\Bigr|_{X_0}\Bigr\} \quad \text{для любых } x \in X_0 \subset X \text{ и } L \subset \mathbb{K}^{X_0}. \tag{2.2.1}$$

*Если правая часть* (2.2.1) $= -\infty$, *то в* (2.2.1) *первый знак неравенства* $\leqslant$ *можно заменить на равенство* $=$.

В свете предложения 2.2.1 и в связи с задачами 1–3 будем исследовать условия, при которых правая часть в неравенстве из (2.2.1) принадлежит $\mathbb{K}$ и в (2.2.1) возможно равенство, т.е. противоположное неравенство, для проективного предела $X$ векторных решёток.

**Определение 2.2.1.** Пусть $X = \operatorname{proj\,lim} X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток $X_n$, $f \in \mathbb{K}^X_{\pm\infty}$. Функцию

$$\operatorname{sup-pr}_n f \colon x_n \underset{x_n \in X_n}{\longmapsto} \sup\Bigl\{f(x) \Bigm| x \in X,\ \operatorname{pr}_n x = x_n\Bigr\} \tag{2.2.2}$$

называем sup-*проекцией* $f$ *на* $X_n$. Функции $\operatorname{sup-pr}_n f$ могут принимать значение $\pm\infty$.

**Предложение 2.2.2.** *В обозначениях определения 2.2.1 для* sup-*проекции* $f_n := \text{sup-pr}_n f\colon X_n \to \mathbb{K}_{\pm\infty}$ *на* $X_n$

(i) $f_n(\mathrm{pr}_n x) \geqslant f_{n+1}(\mathrm{pr}_{n+1} x) \geqslant f(x)$ *для любых* $x \in X$ *при каждом номере* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) *для любых* $X_0 \subset X$, $L \subset \mathbb{K}^{X_0}$, $n \in \mathbb{N}$, $L_n \subset \mathbb{K}^{\mathrm{pr}_n X_0}$ *при условии включения*

$$L_n \circ \mathrm{pr}_n := \bigl\{ l_n \circ \mathrm{pr}_n \bigm| l_n \in L_n \bigr\} \subset L \tag{2.2.3}$$

*имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{env}}_f^L(x) &\overset{(1.2.4\mathrm{u})}{=} \inf\bigl\{ l(x) \bigm| l \in L,\ f\,\bigl|_{X_0} \leqslant l\,\bigr|_{X_0} \bigr\} \\ &\leqslant \inf\bigl\{ l_n(\mathrm{pr}_n x) \bigm| l_n \in L_n,\ f_n\,\bigl|_{\mathrm{pr}_n X_0} \leqslant l_n\,\bigr|_{\mathrm{pr}_n X_0} \bigr\} \\ &\overset{(1.2.4\mathrm{u})}{=} \overline{\mathrm{env}}_{f_n}^{L_n}(\mathrm{pr}_n x) \quad \text{для всех } x \in X_0. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

*Доказательство.* (i). Последнее неравенство сразу следует из определения 2.2.1, а первое — из (2.2.2) и соотношения (2.1.1) определения 2.1.1 элементов проективного предела.

(ii). Пусть правая часть (2.2.3) $< +\infty$ и

$$f_n\,\bigl|_{\mathrm{pr}_n X_0} \leqslant l_n\,\bigr|_{\mathrm{pr}_n X_0}, \quad l_n \in L_n.$$

Для $l := l_n \circ \mathrm{pr}_n \overset{(2.2.3)}{\in} L$ по определению 2.2.1 при всех $x \in X_0$ имеем $f(x) \overset{(2.2.2)}{\leqslant} f_n(\mathrm{pr}_n x) \leqslant l_n(\mathrm{pr}_n x) = l(x)$. Отсюда $f\,\bigl|_{X_0} \leqslant l\,\bigr|_{X_0}$ и $l_n(\mathrm{pr}_n x)$ не меньше левой части (2.2.4). Переходя к inf по всем $l_n\,\bigl|_{\mathrm{pr}_n X_0} \geqslant f_n\,\bigr|_{\mathrm{pr}_n X_0}$, получаем требуемое неравенство (2.2.4). $\square$

**Определение 2.2.2.** Пусть $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов упорядоченного множества $X$. Её *верхний предел* определяется как

$$\limsup_{k\to\infty} x^{(k)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} x^{(k)}, \tag{2.2.5}$$

если все sup и inf в правой части существуют.

Последовательность $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ векторов $x^{(k)}$ из проективного предела $X = \operatorname{proj}\lim_n X_n p_n$ *стабилизируется к* $x \in X$, если $\operatorname{pr}_n x^{(k)} = \operatorname{pr}_n x$ при всех $k \geqslant n$.

**Предложение 2.2.3.** *Пусть* $(x^{(k)}) := (x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ — *последовательность векторов из* $X = \operatorname{proj}\lim_n X_n p_n$. *Тогда*

(i) *если* $\operatorname{pr}_k x^{(k)} = \operatorname{pr}_k x$ *для бесконечной последовательности номеров* $k$, *то* $(x^{(k)})$ *стабилизируется к* $x$;

(ii) *если* $X$ — *приведённый правильный проективный предел векторных решёток и* $(x^{(k)})$ *стабилизируется к* $x \in X$, *то* $(x^{(k)})$ *ограничена и существует* $\limsup\limits_{k\to\infty} x^{(k)} \overset{(2.2.5)}{=} x$.

*Доказательство.* (i). Сразу следует из (2.1.1)–(2.1.3).

(ii). Пусть $x = (x_n)$. При фиксированном $n$ среди $\operatorname{pr}_n x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, лишь конечное число проекций отличается от $x_n$. По предложению 2.1.1(i) и определению (2.2.5) получаем требуемое. $\square$

**Теорема 2.2.1.** *Пусть* $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ — *приведённый правильный проективный предел векторных решёток* $X_n$ *и* $f \in \mathbb{K}^X_{\pm\infty}$, $f_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\overset{(2.2.2)}{:=}} \operatorname{sup-pr}_n f$, *а также при некотором* $n \in \mathbb{N}$ *имеем* $f_n(X_n) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$. *Пусть выбраны*

$$X_0 \subset X, \quad L \subset \mathbb{K}^{X_0}, \quad L_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\subset} \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}.$$

*Пусть также существует $n_f(X_0) \in \mathbb{N}$, для которого*

$$\begin{aligned} &f_n(\mathrm{pr}_n x) \overset{(2.2.4)}{=} \overline{\mathrm{env}}^{L_n}_{f_n}(\mathrm{pr}_n x) \\ &\text{при всех } x \in X_0 \text{ и } n \geqslant n_f(X_0). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

*Для некоторого $x \in X_0$ предполагаем, что выполнено одно из следующих двух условий:*

(i) *для любой стабилизирующейся к $x$ последовательности $(x^{(k)})$ из $X$ выполнено*

$$\limsup_{k\to\infty} f\left(x^{(k)}\right) \leqslant f\Bigl(\limsup_{k\to\infty} x^{(k)}\Bigr), \tag{2.2.7}$$

(ii) *$f$ — возрастающая функция на $X$ и для любой убывающей и стабилизирующейся к $x \in X_0$ последовательности $(x^{(k)})$ из $X$ имеем*

$$\inf_k f\left(x^{(k)}\right) \leqslant f\Bigl(\inf_k x^{(k)}\Bigr). \tag{2.2.8}$$

*Если для $L$ и $L_n$ имеем (2.2.3) при всех $n \geqslant n_f(X_0)$, то*

$$f(x) \overset{(2.2.4)}{=} \overline{\mathrm{env}}^{L}_{f}(x) \quad \text{для этого } x \in X_0. \tag{2.2.9}$$

*Доказательство.* Пусть для некоторого $c \in \mathbb{K}$ имеет место неравенство

$$c < \inf\Bigl\{l(x) \Bigm| l \in L = \mathrm{lin}\,\mathbb{K}^{X_0},\ f\bigm|_{X_0} \leqslant l\bigm|_{X_0}\Bigr\} \overset{(1.2.4\mathrm{u})}{=} \overline{\mathrm{env}}^{L}_{f}(x), \tag{2.2.10}$$

откуда ввиду (2.2.3) по предложению 2.2.2(ii) согласно (2.2.4) и (2.2.6) при $n \geqslant n_f(X_0) \geqslant n_f$ получаем

$$c \overset{(2.2.4)}{<} \inf\bigl\{l_n(x_n)\colon l_n \in L_n,\ f_n\bigm|_{\mathrm{pr}_n X_0} \leqslant l_n\bigm|_{\mathrm{pr}_n X_0}\bigr\} \overset{(1.2.4\mathrm{u})}{=} \overline{\mathrm{env}}^{L_n}_{f_n}(x_n) \overset{(2.2.6)}{=} f_n(x_n).$$

Отсюда по определению 2.2.1 для $f_n$ при любом номере $n \geqslant n_f(X_0)$ найдётся $x^{(n)} \in X$, для которого

$$c < f\big(x^{(n)}\big), \quad \operatorname{pr}_n x^{(n)} = x_n. \tag{2.2.11}$$

Ввиду последнего равенства последовательность $(x^{(n)})$ по предложению 2.2.3 стабилизируется к $x$ и $\limsup\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. Из (2.2.11) по условию (2.2.7) из п. (i) получаем

$$c \overset{(2.2.11)}{\leqslant} \limsup_{k\to\infty} f\big(x^{(k)}\big) \overset{(2.2.7)}{\leqslant} f\Big(\limsup_{k\to\infty} x^{(k)}\Big) = f(x).$$

Отсюда и из (2.2.10) следует неравенство, противоположное (2.2.1), т.е. имеем (2.2.9).

Покажем, что из (ii) следует (i), т.е. (2.2.8) влечёт за собой (2.2.7). Последовательность $(x^{(k)})$, стабилизирующаяся к $x$, по предложению 2.2.3(ii) ограничена. Значит существуют $\hat{x}^{(k)} = \sup_{n\geqslant k} x^{(n)}$. По построению $(\hat{x}^{(k)})$ — убывающая последовательность, которая по построению и предложению 2.1.1 также стабилизируется к $x$ и $\inf \hat{x}^{(k)} = x$. Если выполнено условие (2.2.8), то в силу возрастания $f$ по определению верхнего предела (2.2.5) имеем

$$\begin{aligned} f\Big(\limsup_{n\to\infty} x^{(n)}\Big) &= f\Big(\inf_k \hat{x}^{(k)}\Big) \overset{(2.2.8)}{\geqslant} \inf_k f\big(\hat{x}^{(k)}\big) \\ &= \inf_k f\Big(\sup_{n\geqslant k} x^{(n)}\Big) \geqslant \inf_k \sup_{n\geqslant k} f\big(x^{(n)}\big) = \limsup_{n\to\infty} f\big(x^{(n)}\big). \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено (2.2.7) и доказательство теоремы 2.2.1 завершено. □

**Замечание 2.2.1.** Согласно замечанию 2.1.1 в теореме 2.2.1 достаточно требовать выполнения условий (2.2.6) и (2.2.3) не при всех $n \geqslant n_f(X_0)$, а только для какой-либо бесконечной последовательности номеров $n \geqslant n_f(X_0)$.

### 2.2.2 Случай суперлинейной функции

$C$ — *конус в векторном пространстве* $X$, если

$$tC := \{tc \colon c \in C\} \subset C \quad \text{при любом } t \in \mathbb{R}^+ \setminus 0.$$

Конус $C$ *выпуклый*, если $x_1 + x_2 \in C$ для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$. Конус $C$ *с вершиной* 0, если $0 \in C$.

**Определение 2.2.3.** Функция $f \colon C \to \mathbb{K}_{-\infty}$ на выпуклом конусе $C$ из векторного пространства $X$ *суперлинейная*, если эта функция $f$

- *супераддитивная*:
$$f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2) \quad \textit{для всех } x_1 \in C, x_2 \in C,$$
- и одновременно *строго положительно однородная*:
$$f(tx) = tf(x) \quad \textit{для всех } x \in C \textit{ и } t \in \mathbb{R}^+ \setminus 0.$$

Если, в дополнение, $C$ с вершиной в 0, то требуем $f(0) \in \mathbb{K}$, откуда $f(0) \overset{(1.1.8)}{=} 0$. Множество всех таких суперлинейных функций обозначаем как

$$\operatorname{spl} \mathbb{K}^C_{-\infty}, \quad \mathbb{K}^C_{-\infty} := (\mathbb{K}_{-\infty})^C, \quad \operatorname{spl}^{\uparrow} \mathbb{K}^C_{-\infty} := \operatorname{spl} \mathbb{K}^C_{-\infty} \cup \{\boldsymbol{+\infty}\},$$

где функция $\boldsymbol{+\infty}$ — тождественная $+\infty \in \mathbb{K}_{+\infty}$ из подраздела 1.2.4. Каждая функция $f \in \operatorname{spl} \mathbb{K}^C_{-\infty}$ может быть канонически продолжена на всё $X$ как функция из $f \in \operatorname{spl} \mathbb{K}^X_{-\infty}$ значениями $-\infty$ вне $C$, но функция $\boldsymbol{+\infty} \in \operatorname{spl}^{\uparrow} \mathbb{K}^C_{-\infty}$ канонически продолжается на $X$ как функция $\boldsymbol{+\infty} \in \operatorname{spl}^{\uparrow} \mathbb{K}^X_{-\infty}$. Аналогично определяются множества всех сублинейных функций

$$\operatorname{sbl} \mathbb{K}^C_{+\infty} := -\operatorname{spl} \mathbb{K}^C_{-\infty}, \quad \operatorname{sbl}_{\downarrow} \mathbb{K}^C_{+\infty} := -\operatorname{spl}^{\uparrow} \mathbb{K}^C_{-\infty} \ni \boldsymbol{-\infty}$$

и их канонические продолжения на $X$: значением $+\infty$ на $X \setminus C$ для функций из $\operatorname{sbl} \mathbb{K}_{+\infty}^{X}$, но $-\infty \in \operatorname{sbl}_{\downarrow} \mathbb{K}_{+\infty}^{X}$ для $-\infty \in \operatorname{sbl}_{\downarrow} \mathbb{K}_{+\infty}^{C}$.

В связи с приложениями к теории функций здесь и далее, в отличие от Введения, нам удобнее иметь дело не с сублинейными, а с «противоположными» им суперлинейными функциями и их верхними огибающими по пространству линейных функций.

**Предложение 2.2.4.** *В обозначениях определений 2.2.1–2.2.3 пусть* $f \in \operatorname{spl} \mathbb{K}_{-\infty}^{X}$, *а также* $f_n \overset{(2.2.2)}{:=} \operatorname{sup-pr}_n f$. *Если* $f_n(X_n) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$, *то* $f_n \in \operatorname{spl} \mathbb{K}_{-\infty}^{X_n}$.

*Доказательство.* Пусть $x_n, x'_n \in X_n$. Супераддитивность следует из цепочки (не)равенств

$$
\begin{aligned}
f_n(x_n + x'_n) &= \sup\bigl\{f(x'')\colon\ \operatorname{pr}_n x'' = x_n + x'_n\bigr\}\\
&\geqslant \sup\bigl\{f(x+x')\colon\ \operatorname{pr}_n x = x_n,\ \operatorname{pr}_n x' = x'_n\bigr\}\\
&\geqslant \sup\bigl\{f(x)+f(x')\colon\ \operatorname{pr}_n x = x_n,\ \operatorname{pr}_n x' = x'_n\bigr\}\\
&= \sup\bigl\{f(x)\colon\ \operatorname{pr}_n x = x_n\bigr\} + \sup\bigl\{f(x)\colon\ \operatorname{pr}_n x' = x'_n\bigr\}\\
&= f_n(x_n) + f_n(x'_n).
\end{aligned}
$$

Из определения 2.2.1 в силу положительной однородности проекции $\operatorname{pr}_n$ легко следует строго положительная однородность $f_n$. Кроме того, по определению 2.2.1 и условию $f_n(X_n) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$ имеем

$$0 = f(0) \leqslant f_n(0) < +\infty,$$

т.е. $f_n(0) \in \mathbb{K}$. Таким образом, $f_n \in \operatorname{spl} \mathbb{K}_{-\infty}^{X_n}$. $\square$

**Предложение 2.2.5.** *Пусть* $X := \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ *приведённый правильный проективный предел векторных решёток,* $X_0$ *— векторное подпространство в* $X$. *Тогда проекция* $\operatorname{pr}_n X_0$ *— векторное подпространство в* $X_n$ *и для* $L := \operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}$ *и* $L_n := \operatorname{lin}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнены равенство и включение* (2.2.3).

*Доказательство.* Из линейности проекции $\operatorname{pr}_n$ образ $\operatorname{pr}_n X_0$ векторного подпространства $X_0$ — векторное подпространство в $X_n$, а для любой функции $l_n \in \operatorname{lin}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ суперпозиция двух линейных функций $l := l_n \circ \operatorname{pr}_n$ принадлежит $\operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}$, что означает $L_n \circ \operatorname{pr}_n \overset{(2.2.3)}{\subset} L$. □

Из теоремы 2.2.1 и предложения 2.2.5 получаем

**Следствие 2.2.1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.1 *до п.* (ii) *включительно, а также дополнительно* $f \in \operatorname{spl}^{\uparrow}\mathbb{K}^X_{-\infty}$ *и* $L, L_n$ *выбраны как в предложении* 2.2.5. *Тогда имеем* (2.2.9).

*Доказательство.* При $f \in \operatorname{spl}\mathbb{K}^X_{-\infty}$ достаточное для (2.2.9) условие (2.2.3) — в предложении 2.2.5.

При $f = +\infty$ равенство (2.2.9) ввиду соглашений из подраздела 1.2.4 очевидно. □

**Замечание 2.2.2.** Замечание 2.2.1 полностью переносится и на следствия 2.2.1.

### 2.2.3 Случай вогнутой функции

**Определение 2.2.4.** Функция $f\colon K \to \mathbb{K}_{-\infty}$ *вогнутая* на выпуклом подмножестве $K$ векторного пространства $X$, если «противоположная» функция $-f\colon K \to \mathbb{K}_{+\infty}$,

$(-f)(x) = -f(x)$ при $x \in K$, — *выпуклая* в смысле (1.1.4) с заменой $X$ на $K$. Множество всех таких вогнутых функция обозначаем как

$$\operatorname{conc} \mathbb{K}_{-\infty}^{K}, \qquad \operatorname{conc}^{\uparrow} \mathbb{K}_{-\infty}^{K} \overset{1.2.4}{:=} (\operatorname{conc} \mathbb{K}_{-\infty}^{K}) \cup \{+\boldsymbol{\infty}\}.$$

Каждая функция $f \in \operatorname{conc} \mathbb{K}_{-\infty}^{K}$ может быть канонически продолжена на всё $X$ как функция из $f \in \operatorname{conc} \mathbb{K}_{-\infty}^{X}$ значениями $-\infty$ вне $K$, но функция $+\boldsymbol{\infty} \in \operatorname{conc}^{\uparrow} \mathbb{K}_{-\infty}^{K}$ канонически продолжается на $X$ как функция $+\boldsymbol{\infty} \in \operatorname{conc}^{\uparrow} \mathbb{K}_{-\infty}^{X}$. Аналогично $\operatorname{conv} \mathbb{K}_{+\infty}^{K}$ — множество всех выпуклых функций на $K$ с каноническими выпуклыми продолжениями значениями $+\infty$ на $X \setminus K$, но функция

$$-\boldsymbol{\infty} \overset{1.2.4}{\in} \operatorname{conv}_{\downarrow} \mathbb{K}_{+\infty}^{K} := (\operatorname{conv} \mathbb{K}_{+\infty}^{K}) \cup \{-\boldsymbol{\infty}\}$$

канонически продолжается на $X$ как $-\boldsymbol{\infty} \in \operatorname{conv}_{\downarrow} \mathbb{K}_{+\infty}^{X}$. В частности, $\operatorname{aff} \mathbb{K}^X = \operatorname{conc} \mathbb{K}^X \cap \operatorname{conv} \mathbb{K}^X$.

Также в связи с приложениями к теории функций здесь, в отличие от подраздела 1.1.1 из введения, нам удобнее иметь дело не с выпуклыми, а с вогнутыми функциями и их верхними огибающими по пространству аффинных функций.

**Предложение 2.2.6.** *В обозначениях определений 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.3 пусть $f \in \operatorname{conc} \mathbb{K}_{-\infty}^{X}$, а также положим $f_n \overset{(2.2.2)}{:=} \operatorname{sup-pr}_n f$. Если $f_n(X_n) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$, то $f_n \in \operatorname{conc} \mathbb{K}_{-\infty}^{X_n}$.*

*Доказательство.* Пусть $x_n, x_n' \in X_n$, $t \in (0,1)$. Выпуклость следует из цепочки (не)равенств

$$\begin{aligned}
f_n\bigl(tx_n+(1-t)x'_n\bigr) &= \sup\bigl\{f(x'')\colon\ \mathrm{pr}_n\, x''=tx_n+(1-t)x'_n\bigr\}\\
&\geqslant \sup\bigl\{f\bigl(x_t+x'_t\bigr)\colon\ \mathrm{pr}_n\, x_t=tx_n,\ \mathrm{pr}_n\, x'_t=(1-t)x'_n\bigr\}\\
&= \sup\bigl\{f\bigl(tx+(1-t)x'\bigr)\colon\ \mathrm{pr}_n\, x=x_n,\ \mathrm{pr}_n\, x'=x'_n\bigr\}\\
&\geqslant \sup\bigl\{tf(x)+(1-t)f(x')\colon\ \mathrm{pr}_n\, x=x_n,\ \mathrm{pr}_n\, x'=x'_n\bigr\}\\
&= t\sup\bigl\{f(x)\colon\ \mathrm{pr}_n\, x=x_n\bigr\}+(1-t)\sup\bigl\{f(x)\colon\ \mathrm{pr}_n\, x'=x'_n\bigr\}\\
&= tf_n(x_n)+(1-t)f_n(x'_n),
\end{aligned}$$

использующей линейность проекции $\mathrm{pr}_n\colon X\to X_n$. □

**Предложение 2.2.7.** *Пусть выполнены условия предложения 2.2.5. Тогда для $L:=\operatorname{aff}\mathbb{K}^{X_0}$ и $L_n:=\operatorname{aff}\mathbb{K}^{\mathrm{pr}_n X_0}$ при всех $n\in\mathbb{N}$ выполнено (2.2.3).*

*Доказательство.* В предложении 2.2.5 уже отмечалось, что $\mathrm{pr}_n X_0$ — векторное подпространство в $\mathrm{pr}_n X_0$, значит корректно определено $L_n$. Для любой аффинной функции $a_n\in\operatorname{aff}\mathbb{K}^{\mathrm{pr}_n X_0}$ суперпозиция её с линейной функцией $\mathrm{pr}_n$ даёт $a:=a_n\circ\mathrm{pr}_n\in\operatorname{aff}\mathbb{K}^{X_0}$, откуда $L_n\circ\mathrm{pr}_n\overset{(2.2.3)}{\subset}L$. □

Из теоремы 2.2.1 и предложения 2.2.7 получаем

**Следствие 2.2.2.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 до п. (ii) включительно, а также дополнительно $f\in\operatorname{conc}^{\uparrow}\mathbb{K}^X_{-\infty}$ и $L, L_n$ выбраны как в предложении 2.2.7. Тогда имеем (2.2.9).*

*Доказательство.* При $f\in\operatorname{conc}\mathbb{K}^X_{-\infty}$ достаточное для (2.2.9) условие (2.2.3) — в предложении 2.2.7.

При $f=+\infty$ равенство (2.2.9) ввиду соглашений из подраздела 1.2.4 очевидно. □

**Замечание 2.2.3.** Замечание 2.2.1 полностью переносится и на следствие 2.2.2.

## 2.3 Супремальные функции и выметание

### 2.3.1 Супремальная функция

**Определение 2.3.1.** *Супремальной функцией, порождённой функцией $q \in \mathbb{K}^H$ относительно $H \subset X$* на упорядоченном множестве $X$ с отношением порядка $\leqslant$, называем функцию

$$\operatorname{spf}_{H,q}\colon x \underset{x\in X}{\longmapsto} \sup\bigl\{q(h)\colon H \ni h \leqslant x\bigr\} \overset{1.2.4}{\in} \mathbb{K}_{\pm\infty}. \qquad (2.3.1)$$

**Предложение 2.3.1.** *Супремальная функция* (2.3.1) *обладает следующими свойствами.*

1. $\operatorname{spf}_{H,q}(x) \in \mathbb{K}_{+\infty}$ *тогда и только тогда, когда существует такой элемент $h \in H$, что $h \leqslant x$.*

2. $\operatorname{spf}_{H,q}$ *возрастающая на $X$, по $H$ относительно отношения включения и по $q$ в том смысле, что при*

   $$x \leqslant x' \in X, \quad H \subset H' \subset X$$

   *и для $q' \in \mathbb{K}^{H'}$ при $q\,\bigl|_H \leqslant q'\,\bigl|_H$ имеем неравенство* $\operatorname{spf}_{H,q}(x) \leqslant \operatorname{spf}_{H',q'}(x')$.

3. *Пусть $X$ — упорядоченное векторное пространство. Тогда*

   (i) *если $0 \in H$ и $q(0) \geqslant 0$, то $\operatorname{spf}_{H,q}$ — положительная функция;*

   (ii) *если $H$ — конус в $X$ и $q$ — строго положительно однородная функция на $H$, то $\operatorname{spf}_{H,q}$ — строго положительно однородная функция на $X$; если, в дополнение, $H$ содержит отрицательный вектор, т.е. $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$, то $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = +\infty$ или*

$\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$, *а также* $\operatorname{spf}_{H,q}$ — *положительная функция* (пишем $\operatorname{spf}_{H,q} \in (\mathbb{K}_{-\infty}^X)^+$);

(iii) *если* $H$ — *выпуклое множество*, $\operatorname{spf}_{H,q}(X) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$, *а также* $q \in \operatorname{conc} \mathbb{K}^H$, *то* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc} \mathbb{K}_{-\infty}^X$;

(iv) *если* $H$ — *выпуклый конус*, $\operatorname{spf}_{H,q}(X) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$ *и* $q$ — *суперлинейная функция из* $\operatorname{spl} \mathbb{K}^H$, *то* $\operatorname{spf}_{H,q}$ — *супераддитивная строго положительно однородная функция на* $X$; *при этом если, в дополнение,* $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$, *то*

$$\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}_{-\infty}^X := (\mathbb{K}_{-\infty}^X)^+ \cap \operatorname{spl} \mathbb{K}_{-\infty}^X.$$

*Доказательство.* Пункты 1, 2 и 3i очевидным образом следуют из определения 2.3.1, расписанного в (2.3.1).

3ii. Пусть $0 < t \in \mathbb{R}^+$. Первая часть о строгой положительной однородности следует из равенств

$$\begin{aligned}\operatorname{spf}_{H,q}(tx) &= \sup\bigl\{q(h) \bigm| H \ni h \leqslant tx\bigr\} \\ &= \sup\left\{tq\Bigl(\frac{1}{t}h\Bigr) \Bigm| H \ni \frac{1}{t}h \leqslant x\right\} = t \operatorname{spf}_{H,q}(x).\end{aligned}$$

Если при этом $H$ содержит отрицательный вектор, то получаем $-\infty \overset{(2.3.1)}{<} \operatorname{spf}_{H,q}(0)$, откуда либо $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = +\infty$, либо, в противном случае, ввиду $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 2 \operatorname{spf}_{H,q}(0)$, имеем $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$. В любом из случаев по п. 2 возрастающая на $X$ функция $\operatorname{spf}_{H,q}$ положительна.

3iii. Пусть $0 < t_1 \in \mathbb{R}^+$, $0 < t_2 \in \mathbb{R}^+$ и $t_1 + t_2 = 1$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in X$ имеет место цепочка (не)равенств

$$\begin{gathered}\operatorname{spf}_{H,q}(t_1x_1+t_2x_2)\overset{(2.3.1)}{=}\sup\bigl\{q(h)\bigm| H\ni h\leqslant t_1x_1+t_2x_2\bigr\}\\ \geqslant \sup\bigl\{q(t_1h_1+t_2h_2)\bigm| H\ni h_1\leqslant x_1,\ H\ni h_2\leqslant x_2\bigr\}\\ \geqslant \sup\bigl\{t_1q(h_1)+t_2q(h_2)\bigm| H\ni h_1\leqslant x_1,\ H\ni h_2\leqslant x_2\bigr\}\\ =\sup\bigl\{t_1q(h_1)\bigm| H\ni h_1\leqslant x_1\bigr\}+\sup\bigl\{t_2q(h_2)\bigm| H\ni h_2\leqslant x_2\bigr\}\\ \overset{(2.3.1)}{=} t_1\operatorname{spf}_{H,q}(x_1)+t_2\operatorname{spf}_{H,q}(x_2).\end{gathered}\tag{2.3.2}$$

3iv. Ввиду $+\infty \notin \operatorname{spf}_{H,q}(X)$ и $q \in \operatorname{spl}\mathbb{K}^H$ по-прежнему имеет место цепочка (не)равенств (2.3.2), но для всех значений $0 < t_1 \in \mathbb{R}^+$, $0 < t_2 \in \mathbb{R}^+$ и $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, что доказывает супераддитивность и строго положительную однородность $\operatorname{spf}_{H,q}$ на $X$. При дополнительном условии $H\cap(-X^+) \neq \emptyset$ и $+\infty \notin \operatorname{spf}_{H,q}(X)$ согласно п. 3ii получаем $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$ и $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+\mathbb{K}^X_{-\infty}$. $\square$

**Предложение 2.3.2** (ср. с [27, предложение 4.2]). *Пусть $X = \operatorname{proj}\lim_n X_np_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток, $n \in \mathbb{N}$, $H \subset X$ и $H_n := \operatorname{pr}_n H$, $n \in \mathbb{N}$, а также*

$$\begin{aligned} &q_1 \in \mathbb{K}^{H_1}, \quad q := q_1 \circ \operatorname{pr}_1 \colon H \to \mathbb{K},\\ &q_n := q_1 \circ p_1 \circ \cdots \circ p_{n-1} \colon H_n \to \mathbb{K}.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

*Тогда в обозначении (2.3.1) определения 2.3.1 супремальная функция $\operatorname{spf}_{H,q}$, порождённая функцией $q$ относительно $H$, через её $\sup$-проекцию $\sup\text{-}\operatorname{pr}_n$ из определения 2.2.1 в обозначении (2.2.2) на $X_n$ связана с супремальными функциями $\operatorname{spf}_{H_n,q_n}$ равенствами*

$$\sup\text{-}\operatorname{pr}_n \operatorname{spf}_{H,q} = \operatorname{spf}_{H_n,q_n} \quad \textit{на } X_n \textit{ при всех } n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.4}$$

*Доказательство.* При $x_n \in X_n$ по определениям 2.2.1 и 2.3.1 для левой части (2.3.4) имеем

$$
\begin{gathered}
\bigl(\text{sup-pr}_n \operatorname{spf}_{H,q}\bigr)(x_n) \overset{(2.2.2)}{=} \sup\bigl\{\operatorname{spf}_{H,q}(x) \bigm| x \in X,\ \operatorname{pr}_n x = x_n\bigr\} \\
\overset{(2.3.1)}{=} \sup\Bigl\{\sup\bigl\{q(h) \bigm| H \ni h \leqslant x\bigr\} \colon x \in X,\ \operatorname{pr}_n x = x_n\Bigr\} \\
= \sup\bigl\{q(h) \bigm| H \ni h \leqslant x,\ \operatorname{pr}_n x = x_n\bigr\} \\
\overset{(2.3.3)}{=} \sup\bigl\{q_n(\operatorname{pr}_n h) \bigm| H \ni h \leqslant x,\ \operatorname{pr}_n x = x_n\bigr\} \\
= \sup\bigl\{q_n(h_n) \bigm| H \ni h \leqslant x,\ h_n = \operatorname{pr}_n h,\ \operatorname{pr}_n x = x_n\bigr\}. \quad (2.3.5)
\end{gathered}
$$

В то же время для правой части (2.3.4) по определению 2.3.1 имеем

$$
\operatorname{spf}_{H_n,q_n}(x_n) \overset{(2.3.1)}{=} \sup\bigl\{q_n(h_n) \bigm| H_n \ni h_n \leqslant_n x_n\bigr\}, \quad (2.3.6)
$$

где $\leqslant_n$ — отношение порядка на $X_n$. Если покажем, что множество

$$
\bigl\{h_n \bigm| h \in H,\ h \leqslant x,\ h_n = \operatorname{pr}_n h,\ \operatorname{pr}_n x = x_n\bigr\}, \quad (2.3.7)
$$

по которому берётся sup в правой части (2.3.5), совпадает с множеством

$$
\bigl\{h_n \bigm| h_n \in H_n,\ h_n \leqslant_n x_n\bigr\}, \quad (2.3.8)
$$

по которому берётся sup в правой части (2.3.6), то (2.3.5) совпадает с (2.3.6) при всех $x_n \in X_n$ и равенство (2.3.4) будет доказано.

Если $h_n$ из (2.3.7), то $h_n \leqslant_n x_n$, следовательно, множество (2.3.7) включается в (2.3.8).

Обратно, пусть $h_n$ из (2.3.8). Существуют элементы $h \in H$ и $x' \in X$, для которых $h_n = \operatorname{pr}_n h$, $\operatorname{pr}_n x' = x_n$. Полагаем $x = \sup\{h, x'\}$. Тогда $\operatorname{pr}_n x = x_n$ и, очевидно, $h \leqslant x$. Следовательно, (2.3.8) содержится в (2.3.7), что и требовалось. □

### 2.3.2 Выметание и росток функции

**Определение 2.3.2** (обобщение [29, определение 1], [1, III.1.3], [14, гл. XI, § 3, O41])**.** Пусть $X$ — упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$, $H \subset X$, $q \in \mathbb{K}^H$, $X_0 \subset X$. *Функцию* $b\colon X_0 \to \mathbb{K}_{\pm\infty}$ называем *выметанием функции* $q$ *относительно пары* $(H, X_0)$ и пишем $q \prec_H^{X_0} b$, если для любых $h \in H$ и $x \in X_0$ из неравенства $h \leqslant x$ следует неравенство $q(h) \leqslant b(x)$. Пусть $L \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$. «Луч»

$$\operatorname{spr}(q; H, X_0, L) := \Bigl\{ b \in L \Bigm| q \prec_H^{X_0} b \Bigr\}, \tag{2.3.9}$$

следуя [1, III.1.3] и [27, § 4], будем называть *ростком функции* $q$ *относительно тройки* $(H, X_0, L)$.

Элементарную взаимосвязь между супремальной функцией и выметанием даёт

**Предложение 2.3.3** (ср. с [29, предложение 1])**.** *В обозначениях определений 2.3.1 и 2.3.2*

$$\begin{aligned}
\operatorname{spf}_{H,q}(x) &\overset{(2.3.1)}{=} \sup\Bigl\{ q(h) \Bigm| H \ni h \leqslant x \Bigr\} \\
&\leqslant \inf\Bigl\{ b(x) \Bigm| q \prec_H^{X_0} b \Bigr\} \\
&\overset{(2.3.9)}{\leqslant} \inf\Bigl\{ b(x) \Bigm| b \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, L) \Bigr\} \\
&= \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \quad \text{для всех } x \in X_0.
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

*Так, для $x \in X_0$ существование элемента $h \in H$, удовлетворяющего неравенству $h \leqslant x$, влечёт за собой строгое неравенство $-\infty < \inf\bigl\{ b(x) \bigm| q \prec_H^{X_0} b \in L \bigr\}$, т.е. $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \neq -\infty$.*

*Доказательство.* Если в (2.3.10) левая часть $= -\infty$ или правая часть равна $= +\infty$, то неравенство (2.3.10) очевидно. Если левая часть $\neq -\infty$, то существуют элемент $h \in H$, удовлетворяющий неравенству $h \leqslant x$. Для любых $H \ni h \leqslant x \in x_0$ при $q \prec_H^{X_0} b$ имеем $q(h) \leqslant b(x)$, откуда $\sup\limits_{h \leqslant x} q(h) \leqslant b(x)$. Применяя к правой части операцию inf по всем выметаниям $b$ функции $q$ относительно пары $(H, X_0)$, получаем первое неравенство в (2.3.10). Следующее неравенство в (2.3.10) и заключительное утверждение — очевидное следствие из (2.3.10) ввиду $L \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$. □

**Замечание 2.3.1.** В свете предложения 2.3.3 ключевой интерес представляют условия на $(X, \leqslant)$, $H$, $q$, $X_0$, $L$, при которых в (2.3.10) имеет место равенство левой и правой частей — это задачи 1 и 2 из подраздела 1.2.3 введения. Для менее требовательной задачи 3 необходимо выявить условия на те же объекты и на $x$, при которых из $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \neq -\infty$ следует $\operatorname{spf}_{H,q}(x) \neq -\infty$.

**Предложение 2.3.4.** *В обозначениях определения 2.3.2 имеют место следующие свойства.*

1. *При* $L \subset L' \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ *справедливы соотношения* $\operatorname{spr}(q; H, X_0, L) \subset \operatorname{spr}(q; H, X_0, L')$ *и*

$$\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \underset{x \in X}{\geqslant} \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L')(x)\bigr).$$

2. *Если* $L \subset \operatorname{incr} \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$, *то на* $X_0$ *возрастает и функция*

$$x \underset{x \in X_0}{\longmapsto} \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \in \mathbb{K}_{\pm\infty}. \tag{2.3.11}$$

3. *Если* $H \subset H' \subset X$, *то*

$$\operatorname{spr}(q; H, X_0, L) \supset \operatorname{spr}(q; H', X_0, L),$$
$$\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \underset{x\in X_0}{\leqslant} \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H', X_0, L)(x)\bigr).$$

4. *Если* $q' \in \mathbb{K}^H$ *и* $q\,\bigr|_H \leqslant q'\,\bigr|_H$, *то*

$$\operatorname{spr}(q; H, X_0, L) \supset \operatorname{spr}(q'; H, X_0, L),$$
$$\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \underset{x\in X_0}{\leqslant} \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H', X_0, L)(x)\bigr).$$

5. *Если имеют место включения* $X_0 \subset X_0' \subset X$ *и для множества функций* $L' \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0'}$ *множество их сужений* $L'\,\bigr|_{X_0}$ *на* $X_0$ *содержится в* $L$, *то справедливы неравенства*

$$\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \underset{x\in X_0}{\leqslant} \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0', L')(x)\bigr).$$

6. *Пусть* $X$ *— упорядоченное векторное пространство. Тогда*

   (i) *если* $0 \in H$ *и* $q(0) \geqslant 0$, *то функция* (2.3.11) *положительна;*

   (ii) *если* $X_0$ *— конус в* $X$, *а все функции из* $L \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ *строго положительно однородны, то строго положительно однородна и функция*

$$\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)\bigr) \in \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}; \tag{2.3.12}$$

   *при этом если, в дополнение,* $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$ *и* $0 \in X_0$, *то* $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) = +\infty$ *или* $= 0$, *а при* $L \subset \operatorname{incr} \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ *функция* (2.3.11) *принадлежит выпуклому конусу* $(\mathbb{K}_{-\infty}^{X_0})^+$;

(iii) *если подмножество* $X_0 \subset X$ — *полугруппа по сложению (соответственно выпуклое множество или же соответственно выпуклый конус с вершиной и* $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$*) и все функции из* $L \subset \mathbb{K}_{-\infty}$ *супераддитивны (соответственно вогнуты или соответственно суперлинейны) и* $\operatorname{spr}(q; H, X_0, L) \subset \mathbb{K}_{-\infty}^{X_0}$, *то функция* (2.3.11) *супераддитивна (соответственно вогнута или соответственно суперлинейна) на* $X_0$.

*Доказательство.* Свойства из пп. 1–5 и 6i просто, хотя и несколько утомительно, выводятся из определения 2.3.2.

6ii. Строго положительная однородность функции (2.3.12) следует из равенств

$$\inf\bigl\{b(tx) \bigm| b \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)\bigr\} \underset{0<t\in\mathbb{R}^+}{=} t \inf\bigl\{b(x) \bigm| b \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)\bigr\}.$$

Если $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$, то $\operatorname{spf}_{H,q}(0) > -\infty$ и по предложению 2.3.3 согласно (2.3.10) получаем

$$\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) > -\infty.$$

При $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) \neq +\infty$ имеем

$$\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) \in \mathbb{K},$$

откуда в силу строгой положительной однородности $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) = 0$ и по п. 2 при $L \subset \operatorname{incr} \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ получаем положительность функции (2.3.11) на $X_0$.

6iii. Для краткости положим $S := \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)$. Для $t_1 = t_2 = 1$ (соответственно для $0 < t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+, t_1 + t_2 = 1$

или соответственно для $0 < t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$) имеем

$$\begin{aligned}\inf\{b(t_1x_1 + t_2x_2) \bigm| b \in S\}& \\ &\geqslant \inf\{b(t_1x_1) + b(t_2x_2) \bigm| b \in S\} \\ &\geqslant \inf\{t_1 b(x_1) + t_2 b(x_2) \bigm| b \in S\} \\ \geqslant t_1 \inf\{b_1(x_1) \bigm| b_1 \in S\} &+ t_2 \inf\{b_2(x_2) \bigm| b_2 \in S\}.\end{aligned}$$

Для доказательства суперлинейности осталось отметить, что по п. 6ii имеет место равенство $(\inf S)(0) = 0$. □

**Предложение 2.3.5** (обобщение [27, предложение 4.1], [1, III.1.3.VI])**.** *В обозначениях определений* 2.3.1 *и* 2.3.2 *имеет место равенство*

$$\operatorname{spr}(q; H, X_0, L) = \left\{ b \in L \,\middle|\, \operatorname{spf}_{H,q} \big|_{X_0} \leqslant b \big|_{X_0} \right\}. \tag{2.3.13}$$

*Доказательство.* Покажем, что правая часть (2.3.13) включена в левую. Пусть

$$\operatorname{spf}_{H,q} \big|_{X_0} \leqslant b \big|_{X_0}, \quad \text{где } b \in L. \tag{2.3.14}$$

Допустим, что $h \in H$ и $h \leqslant x \in X_0$. Тогда по соотношению (2.3.1) из определения 2.3.1 супремальной функции, в силу её возрастания на $X$ по п. 2 предложения 2.3.1 получаем

$$q(h) = \operatorname{spf}_{H,q}(h) \leqslant \operatorname{spf}_{H,q}(x) \overset{(2.3.14)}{\leqslant} b(x). \tag{2.3.15}$$

Это по определению 2.3.2 означает, что $b$ — выметание $q$ относительно пары $(H, X_0)$, т.е. $q \prec_H^{X_0} b$, и, таким образом, $b \overset{(2.3.9)}{\in} \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)$. Следовательно, правая часть (2.3.13) включена в левую.

Обратно, пусть $b \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)$. Тогда по определениям супремальной функции (2.3.1) и ростка функции $q$ относительно тройки $(H, X_0, L)$ в определении 2.3.2 при $x \in X_0$ имеем

$$\operatorname{spf}_{H,q}(x) \overset{(2.3.1)}{:=} \sup\bigl\{q(h) \colon H \ni h \leqslant x\bigr\} \underset{x \in X_0}{\overset{(2.3.9)}{\leqslant}} b(x),$$

откуда левая часть (2.3.13) включена в правую. □

# 2.4 Представление верхней огибающей на проективном пределе

## 2.4.1 Порядково-линейная версия для выпуклого конуса

В этом подразделе $\mathbb{K}$ — пространство Канторовича. Нам потребуется (ср. с теоремами об огибающей из Введения)

**Теорема Хана – Банаха – Канторовича** (об огибающей [10, 1.4.14(2)]). *Пусть $X$ — векторное пространство и $f \in \mathbb{K}^X$. Эквивалентны следующие три утверждения.*

**1.** *$f$ — суперлинейная функция на $X$, т.е. $f \in \operatorname{spl} \mathbb{K}^X$.*

**2.** *$f(x) \overset{(1.2.4u)}{=} \overline{\operatorname{env}}_f^{\operatorname{lin} \mathbb{K}^X}(x)$ для всех $x \in X$.*

**3.** *Для $f$ имеет место тождество*

$$f(x) \underset{x \in X}{\equiv} \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} t_k x_k = x,\right.$$
$$\left. x_k \in X,\ t_k \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}\right\}. \quad (2.4.1)$$

**Определение 2.4.1.** Пусть $(X, \leqslant)$ — упорядоченное множество, $X_0 \subset X$. Подмножество $H \subset X$ *минорирует* $X_0$, или *минорирующее* для $X_0$, если для любого $x \in X_0$ существует такой элемент $h \in H$, что $h \leqslant x$.

**Теорема 2.4.1.** *Пусть* $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ *— приведённый правильный проективный предел векторных решёток* $X_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$q_1 \in \operatorname{incr}\operatorname{spl}\mathbb{K}^{X_1}, \quad q \overset{(2.3.3)}{:=} q_1 \circ \operatorname{pr}_1,$$

$X_0$ *— векторное подпространство в* $X$*,* $H \subset X$ *— выпуклый конус,* $H_n := \operatorname{pr}_n H \subset X_n$*. Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *каждая проекция* $H_n$ *содержит отрицательный вектор из* $X_n$*, т.е.* $H_n \cap (-X_n^+) \neq \emptyset$*;*

(ii) *для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *проекция* $H_n$ *минорирует* $\operatorname{pr}_n X_0$*;*

(iii) $\sup H' \in H$ *для всех ограниченных сверху* $H' \subset H$*;*

(iv) *если последовательность*

$$(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset H \tag{2.4.2}$$

*убывающая ограниченная снизу в* $X$*, то её точная нижняя граница* $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}$ *принадлежит* $H$*;*

(v) *если последовательность* (2.4.2) *убывающая в* $X$ *и*

$$q(h^{(1)}) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{K}, \tag{2.4.3}$$

*то последовательность* (2.4.2) *ограничена снизу в* $X$ *и выполнено неравенство*[1]

$$q\bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\bigr) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}), \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \overset{\text{(iv)}}{\in} H. \qquad (2.4.4)$$

*Тогда для* $L := \operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}$ *супремальная функция* $\operatorname{spf}_{H,q}$ *со значениями в* $\mathbb{K}_{-\infty}$ *является супераддитивной и положительно однородной, а также допускает представление*

$$\begin{aligned}
\operatorname{spf}_{H,q}(x) &\overset{(2.3.1)}{:=} \sup\bigl\{q(h) \bigm| H \ni h \leqslant x\bigr\}\\
&= \inf\Bigl\{l(x) \Bigm| l \in L;\\
&\quad q(h) \leqslant l(x') \text{ при всех } h \in H,\ h \leqslant x',\ x' \in X_0\Bigr\}\\
&= \inf\bigl\{l(x) \bigm| l \in L,\ q \prec_H^{X_0} l\bigr\}\\
&\overset{(2.3.9)}{=:} \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \quad \text{для всех } x \in X_0. \qquad (2.4.5)
\end{aligned}$$

*Если усилить* (i) *до* $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$, *то* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}_{-\infty}^X$.

*Доказательство.* Будет использована теорема 2.2.1 в виде следствия 2.2.1 из неё. Для этого положим

$$\begin{gathered}
f := \operatorname{spf}_{H,q}, \quad f_n = \operatorname{sup-pr}_n f,\\
L := \operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}, \quad L_n := \operatorname{lin}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}.
\end{gathered}$$

Тогда по предложению 2.2.5 выполнено (2.2.3) и по предложению 2.3.2 в обозначениях (2.3.3) имеем равенства

$$f_n = \operatorname{sup-pr}_n \operatorname{spf}_{H,q} \overset{(2.3.4)}{=} \operatorname{spf}_{H_n,q_n} \quad \text{для любого } X_n, \qquad (2.4.6)$$

где по , п. 3iv предложения 2.3.1 с учётом условия (i)

$$\operatorname{spf}_{H_n,q_n} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}_{-\infty}^{X_n} \overset{(2.4.6)}{\Longrightarrow} f_n \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}_{-\infty}^{X_n}. \qquad (2.4.7)$$

[1]Из неравенства в (2.4.4) следует равенство, поскольку противоположное неравенство для $q \in \operatorname{incr}\mathbb{K}^X$ очевидно.

Кроме того, по п. 3iv предложения 2.3.1 функция $\operatorname{spf}_{H,q}$ супераддитивная и строго положительно однородная, а при $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$ ещё и $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$, $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^X_{-\infty}$.

Напомним, что $\operatorname{pr}_n X_0$ — векторное подпространство в $X_n$ по предложению 2.2.5. Рассмотрим сужения

$$f_n \Big|_{\operatorname{pr}_n X_0} = \operatorname{spf}_{H_n, q_n} \Big|_{\operatorname{pr}_n X_0} .$$

В правой части здесь — суперлинейная функция на $\operatorname{pr}_n X_0$ со значениями только в $\mathbb{K}$ по равенству (2.3.1) определения 2.3.1 супремальной функции $\operatorname{spf}_{H_n,q_n} \Big|_{\operatorname{pr}_n X_0}$ и по условию (ii) о минорировании. Таким образом, $f_n \Big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$. Тогда по теореме Хана – Банаха – Канторовича об огибающей, применённой в части импликации 1⇒2 в векторном пространстве $\operatorname{pr}_n X_0$, имеем

$$f_n \Big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \overset{(1.2.4u)}{=} \overline{\operatorname{env}}^{\operatorname{lin} \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}}_{f_n|_{\operatorname{pr}_n X_0}} \quad \text{на } \operatorname{pr}_n X_0.$$

Это равенство означает, что выполнено условие (2.2.6) теоремы 2.2.1.

Функция $f = \operatorname{spf}_{H,q}$ — возрастающая на $X$ по п. 2 предложения 2.3.1. Проверим выполнение условия (ii) теоремы 2.2.1. Для этого требуется, чтобы для любой убывающей и стабилизирующейся к $x \in X_0$ последовательности $(x^{(k)})$ из $X$ было выполнено неравенство (2.2.8). По определению 2.2.2

$$\begin{gathered} \inf_{k \in \mathbb{N}} x^{(k)} = x \in X_0, \; x^{(k+1)} \leqslant x^{(k)}, \; x^{(k)} = \sup_{m \geqslant k} x^{(m)}, \\ \operatorname{pr}_n x^{(k)} = \operatorname{pr}_n x^{(n)} \quad \text{при всех } k \geqslant n \geqslant 1. \end{gathered} \tag{2.4.8}$$

По определению 2.3.1 супремальной функции

$$f(x^{(k)}) = \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}) \overset{(2.3.1)}{=} \sup\bigl\{q(h) \bigm| h \leqslant x^{(k)},\ h \in H\bigr\}$$
$$= \sup\bigl\{q_1(\operatorname{pr}_1 h) \bigm| h \leqslant x^{(k)},\ h \in H\bigr\} =: a_k \in \mathbb{K}_{-\infty}. \quad (2.4.9)$$

Последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — убывающая. При равенстве $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$ условие (2.2.8) выполнено автоматически. Поэтому далее убывающая последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена в $\mathbb{K}$ и

$$\begin{gathered} a_0 \overset{(2.4.8)}{:=} \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k \overset{(2.4.9)}{=} \inf f(x^{(k)}) \in \mathbb{K}, \\ a_0 \leqslant a_k \leqslant a_1 \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{2.4.10}$$

По условию (iii) существует убывающая в $X$ последовательность

$$\begin{aligned} h^{(k)} := \sup\bigl\{h \in H \bigm| h \leqslant x^{(k)}\bigr\} \in H, \\ k \in \mathbb{N}, \quad h^{(k)} \leqslant x^{(k)}, \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

для которой в силу возрастания $q_1$ и $q = q_1 \circ \operatorname{pr}_1$ имеем равенства

$$a_k \overset{(2.4.9)}{=} q(h^{(k)}) = q_1(\operatorname{pr}_1 h^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.4.12}$$

Пусть сначала выполнено (2.4.3), т.е. $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{K}$. Тогда по условию (v) последовательность (2.4.2) ограничена снизу в $X$ и по условию (iv) существует

$$h = \inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H, \tag{2.4.13}$$

а из (2.4.11) и стабилизации последовательности $(x^{(k)})$ к вектору $x \in X_0$ имеем

$$h \leqslant x. \tag{2.4.14}$$

Из условия (v) доказываемой теоремы и из (2.4.11) по построению (2.4.13) вектора $h \in H$ вытекает

$$q(h) = q\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\Bigr) \overset{(\text{v})}{\geqslant} \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \overset{(2.4.12)}{=} \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k \overset{(2.4.10)}{=} a_0.$$

Следовательно, согласно (2.4.9) и (2.4.14), для некоторого $h \in H$, $h \overset{(2.4.14)}{\leqslant} x$, выполнено

$$q(h) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}).$$

По определению 2.3.1 супремального функционала $\operatorname{spf}_{H,q}$ и ввиду (2.4.9) это означает, что

$$\begin{aligned} \inf f(x^{(k)}) &= \inf_k \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}) \\ &\leqslant \operatorname{spf}_{H,q}\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\Bigr) = f\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\Bigr). \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Таким образом, в случае ограниченной снизу последовательности $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ выполнено (2.2.8).

Если же (2.4.3) не выполнено, т.е.

$$q(h^{(1)}) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) = -\infty$$

и по условию (iv) последовательность (2.4.2) не ограничена снизу, то согласно (2.4.12) имеем $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$. Как уже отмечалось выше, при $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$ условие (2.2.8), или (2.4.15), выполнено автоматически.

По теореме 2.2.1 в виде следствия 2.2.1 заключаем, что суперлинейная функция $f = \operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl} \mathbb{K}_{-\infty}^X$ допускает описание через верхнюю огибающую на $X_0$:

$$\operatorname{spf}_{H,q}(x) \underset{x\in X_0}{\equiv} \inf\Bigl\{ l(x) \Bigm| l \in L,\ \operatorname{spf}_{H,q} \leqslant l \text{ на } X_0 \Bigr\}.$$

По равенству (2.3.13) предложения 2.3.5 правая часть здесь совпадает с правой частью (2.4.5). $\square$

**Следствие 2.4.1** (развитие [27, теорема 5.1])**.** *Пусть для случая $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ выполнены все условия теоремы 2.4.1 за исключением условий (iii) и (iv), которые заменяем на одно условие*

(iii–iv) *для любой ограниченной в $X$ последовательности (2.4.2) существует верхний предел* (см. формулу (2.2.5) определения 2.2.2)

$$\limsup_{k\to\infty} h^{(k)} \overset{(2.2.5)}{:=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h^{(k)} \in H. \tag{2.4.16}$$

*Тогда функция $\operatorname{spf}_{H,q}$ такая же, как в теореме 2.4.1 и выполнено заключение (2.4.5), где $L := \operatorname{lin}\mathbb{R}^{X_0}$ можно заменить на $\operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_0}$, если в $H$ есть отрицательный вектор, т.е. $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$.*

*Доказательство.* Будет использована

**Лемма 2.4.1.** *Для каких бы то ни было условий на подмножество $H \subset X$ условие* (iii–iv) *эквивалентно сочетанию условий* (iv) *теоремы* 2.4.1 *и условия*

(iii′) *для любой ограниченной сверху в $X$ последовательности (2.4.2) имеем $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H$.*

*Доказательство леммы 2.4.1.* Достаточность условий (iv) теоремы 2.4.1 и (iii′) для выполнения (iii–iv) очевидна по определению верхнего предела в (2.4.16), или в (2.2.5).

Обратно, пусть выполнено условие (iii–iv). Если выбрать $h, h' \in H$, то для счётной последовательности

$b := (h, h', h, h', \dots)$ чередующихся пар $h, h'$ по условию (iii–iv) имеем

$$\sup\{h, h'\} = \sup b \overset{(2.2.5)}{=} \limsup b \overset{(2.4.16)}{\in} H.$$

Таким образом, точная верхняя граница любого конечного подмножества из $H$ принадлежит $H$. Отсюда, если последовательность (2.4.2) ограничена сверху, то новая последовательность

$$\Bigl(\sup_{k\leqslant n} h^{(k)}\Bigr)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$$

ограничена и по условию (iii–iv)

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Bigl\{\sup_{k\leqslant n} h^{(k)}\Bigr\} \overset{(2.2.5)}{=} \limsup_{n\to\infty}\Bigl(\sup_{k\leqslant n} h^{(k)}\Bigr) \overset{(2.4.16)}{\in} H.$$

Это означает, что выполнено условие (iii′). Кроме того, для любой убывающей ограниченной снизу, а значит и ограниченной, последовательности (2.4.2) её верхний предел, если он существует, равен точной нижней границе этой последовательности. Таким образом, из условия (iii–iv) следует условие (iv) теоремы 2.4.1. □

Условие (iii′) слабее условия (iii) теоремы 2.4.1, поэтому нам придётся изменить часть доказательства теоремы 2.4.1. Далее приведём лишь те этапы доказательства, которые для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ отличаются от соответствующих частей доказательства теоремы 2.4.1. Изменения начинаем сразу после (2.4.10).

Пусть $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ввиду (2.4.10) и (2.4.9) найдётся некоторый вектор $h_\varepsilon^{(k)} \in H$, для которого

$$q(h_\varepsilon^{(k)}) \geqslant a_k - \varepsilon, \quad h_\varepsilon^{(k)} \leqslant x^{(k)} \leqslant x^{(1)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.4.17}$$

Так как последовательность $(h_\varepsilon^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена сверху, по условию (iii′) существуют векторы

$$\begin{gathered} h^{(k)} \underset{k\in\mathbb{N}}{:=} \sup_{n\geqslant k} h_\varepsilon^{(n)} \in H, \\ h_\varepsilon^{(k)} \underset{k\in\mathbb{N}}{\leqslant} h^{(k)} \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{(2.4.17)}{\leqslant}} x^{(k)} \underset{k\in\mathbb{N}}{\leqslant} x^{(1)}, \end{gathered} \tag{2.4.18}$$

которые образуют убывающую последовательность (2.4.2). При этом по (2.4.17) ввиду стабилизации последовательности $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ из (2.4.8) к $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_0$, $x_n := \operatorname{pr}_n x \in X_n$, имеем

$$\begin{gathered} \operatorname{pr}_n h^{(k)} \leqslant_n \operatorname{pr}_n x^{(k)} = x_n \quad \text{при } k \geqslant n \in \mathbb{N}, \\ q(h^{(k)}) \geqslant q(h_\varepsilon^{(k)}) \overset{(2.4.17)}{\geqslant} a_k - \varepsilon. \end{gathered} \tag{2.4.19}$$

Пусть сначала выполнено (2.4.3), т.е. $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R}$. Тогда по условию (v) последовательность (2.4.2) ограничена снизу в $X$ и по условию (iv) имеем (2.4.13), а из (2.4.18) и стабилизации последовательности $(x^{(k)})$ к $x \in X_0$ следует (2.4.14), т.е. $h \leqslant x$. Из условия (v) доказываемой теоремы и из (2.4.17) по построению (2.4.13) вектора $h \in H$ вытекает

$$\begin{aligned} q(h) &\overset{(2.4.13)}{=} q\Big(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\Big) \overset{(\mathrm{v})}{\geqslant} \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \\ &\overset{(2.4.18)}{\geqslant} \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h_\varepsilon^{(k)}) \overset{(2.4.17)}{\geqslant} \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k - \varepsilon \overset{(2.4.10)}{=} a_0 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда для произвольного $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ при некотором, зависящем от $\varepsilon$, $h \in H$, $h \overset{(2.4.14)}{\leqslant} x$, выполнено

$$q(h) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}) - \varepsilon.$$

По определению 2.3.1 супремального функционала $\operatorname{spf}_{H,q}$ согласно (2.4.9) это означает, что

$$\begin{aligned}\inf f(x^{(k)}) &= \inf_k \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)})\\ &\leqslant \operatorname{spf}_{H,q}\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\Bigr) + \varepsilon = f\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\Bigr) + \varepsilon. \quad (2.4.20)\end{aligned}$$

Последнее, ввиду произвола в выборе $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$, даёт (2.4.15). Теперь повторяем рассуждения и выкладки после (2.4.15) до конца доказательства теоремы 2.4.1. Осталось заменить $\operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}$ на $\operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_0}$ в (2.4.5).

**Лемма 2.4.2.** *Пусть в условиях и обозначениях теоремы* 2.4.1 *до п.* (i) *включительно выполнены ещё и условия*

$$\mathbb{K} := \mathbb{R}, \quad l \in \operatorname{lin}\mathbb{R}^{X_0}, \quad q \prec_H^{X_0} l, \quad H \cap (-X^+) \neq \emptyset.$$

*Тогда* $l \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_0}$, *т.е. функция* $l$ *положительна на* $X_0$.

*Доказательство леммы* 2.4.2. Поскольку в $H$ существует отрицательный вектор, из строго положительной однородности $\operatorname{spf}_{H,q}$ по предложению 2.3.1, п. 3ii, имеем $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$. Из равенства (2.3.13) предложения 2.3.5 и определения 2.3.2 ростка в (2.3.9) получаем также $\operatorname{spf}_{H,q} \leqslant l$ на $X_0$. Кроме того, по предложению 2.3.1, п. 3iv, ввиду условия $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$ имеем $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+\mathbb{R}^X_{-\infty}$.

Пусть теперь $x \in X_0^+$. Тогда

$$0 = \operatorname{spf}_{H,q}(0) \leqslant \operatorname{spf}_{H,q}(x) \leqslant l(x),$$

что доказывает положительность $l$ на $X_0$. □

Применение леммы 2.4.2 позволяет заменить пространство $L := \operatorname{lin}\mathbb{R}^{X_0}$ на положительный конус $\operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_0}$ и завершает доказательство следствия 2.4.1. □

### 2.4.2 Векторно-аффинная версия для выпуклого множества

**Теорема 2.4.2.** *Пусть $X$ и $X_0 \subset X$ те же, что и в теореме 2.4.1, но*

$$q_1 \in \operatorname{incr}\operatorname{conc}\mathbb{R}^{X_1}, \quad q \overset{(2.3.3)}{:=} q_1 \circ \operatorname{pr}_1, \qquad H \subset X$$

*— выпуклое множество, $H_n = \operatorname{pr}_n H \subset X_n$, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. Пусть выполнены условия (ii) и (v) из теоремы 2.4.1 и условие (iii–iv) из следствия 2.4.1. Тогда для $L := \operatorname{aff}\mathbb{R}^{X_0}$ вогнутая функция $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc}\mathbb{R}^{X}_{-\infty}$ допускает представление (2.4.5).*

*Если $0 \in H$ и $q_1(0) \geqslant 0$, то $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc}^{+}\mathbb{R}^{X}_{-\infty}$, а $L = \operatorname{aff}\mathbb{R}^{X_0}$ в (2.4.5) можно заменить на*

$$L := \operatorname{aff}^{+}\mathbb{R}^{X_0} \overset{(2.1.13)}{=} \operatorname{lin}^{+}\mathbb{R}^{X_0} + \mathbb{R}^{+}\cdot\mathbf{1}. \tag{2.4.21}$$

*Доказательство.* Будет использована теорема 2.2.1 в виде следствия 2.2.2 из неё. Положим

$$\begin{aligned} f &:= \operatorname{spf}_{H,q}, \quad f_n = \sup\text{-}\operatorname{pr}_n f,\\ L &:= \operatorname{aff}\mathbb{K}^{X_0}, \quad L_n := \operatorname{aff}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}. \end{aligned}$$

Тогда по предложению 2.2.7 выполнено (2.2.3) и по предложению 2.3.2 в обозначениях (2.3.3) имеет место равенство (2.4.6), где по предложению 2.3.1, п. 3iii, имеем

$$\operatorname{spf}_{H_n,q_n} \in \operatorname{conc}\mathbb{K}^{X_n}_{-\infty} \quad \Longrightarrow \quad f_n \overset{(2.4.6)}{\in} \operatorname{conc}\mathbb{K}^{X_n}_{-\infty},$$

а также $f = \operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc}\mathbb{R}^{X}_{-\infty}$ ввиду $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. Напомним, что $\operatorname{pr}_n X_0$ — векторное подпространство в $X_n$ по предложению 2.2.5. Рассмотрим сужения

$$f_n \big|_{\operatorname{pr}_n X_0} = \operatorname{spf}_{H_n,q_n} \big|_{\operatorname{pr}_n X_0}.$$

В правой части здесь — вогнутая функция на $\operatorname{pr}_n X_0$ со значениями исключительно в $\mathbb{R}$ по определению 2.3.1, равенство (2.3.1), супремальной функции $\operatorname{spf}_{H_n,q_n} \big|_{\operatorname{pr}_n X_0}$ и по условию (ii) из теоремы 2.4.1 о минорировании. Таким образом, $f_n \big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \in \operatorname{conc} \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$. Тогда по теореме Хана – Банаха об огибающей из Введения, применённой в части импликации II1⇒II2 в «вогнутой форме» в векторном пространстве $\operatorname{pr}_n X_0$, имеем

$$f_n \big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \overset{(1.2.4u)}{=} \overline{\operatorname{env}}^{\operatorname{aff} \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}}_{f_n|_{\operatorname{pr}_n X_0}}$$

на $\operatorname{pr}_n X_0$, откуда выполнено условие (2.2.6) теоремы 2.2.1.

Функция $f = \operatorname{spf}_{H,q}$ — возрастающая на $X$ по п. 2 предложения 2.3.1. Проверим выполнение условия (ii) теоремы 2.2.1. Для этого требуется, чтобы для любой убывающей и стабилизирующейся к $x \in X_0$ последовательности $(x^{(k)})$ из $X$ было выполнено неравенство (2.2.8). По определению 2.2.2 имеем (2.4.8). По определению 2.3.1 супремальной функции также выполнено (2.4.9).

Последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — убывающая. При условии $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$ условие (2.2.8) выполнено автоматически. Поэтому далее убывающая последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена в $\mathbb{R}$ и выполнено (2.4.10) с $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. Из условия (iii-iv) следствия 2.4.1 по лемме 2.4.1 следуют условия (iv) теоремы 2.4.1 и (iii′) леммы 2.4.1.

Пусть $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ввиду (2.4.10) и (2.4.9) найдётся некоторый вектор $h_\varepsilon^{(k)} \in H$, для которого выполнено (2.4.17). Далее дословно повторяем рассуждения и выкладки из доказательства следствия 2.4.1 от (2.4.17) до (2.4.20) включительно. Последнее ввиду произвола в выборе $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ даёт (2.4.15). Теперь остаётся лишь повторить рассуждения и выкладки после (2.4.15) до конца доказательства теоремы 2.4.1, но с вогнутой функцией $f = \operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc} \mathbb{R}^X_{-\infty}$, что даёт (2.4.5) для $L := \operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0}$.

При $0 \in H$ и $q_1(0) \geqslant 0$, т.е. $q(0) \geqslant 0$, по предложению 2.3.1, п. 3i, $\operatorname{spf}_{H,q}$ — положительная функция. Тогда по предложению 2.3.5 из равенства (2.3.13) следует, что для $l \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, \operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0})$ имеем $l \geqslant \operatorname{spf}_{H,q}$ на $X_0$, откуда $l \in (\mathbb{R}^{X_0})^+$. Таким образом, $\operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0}$ можно заменить на $\operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^{X_0}$. Последнее равенство в (2.4.21) составляет содержание пунктов (ii) и (iii) предложения 2.1.4. □

### 2.4.3 Топологические версии для выпуклого конуса или множества

Для топологических вариантов теорем о двойственном представлении супремальных функций потребуется понятие решётки Фреше [43].

Пусть $X$ — векторная решётка. Для $x \in X$, как обычно, полагаем $|x| = \sup\{-x, x\}$ — абсолютная величина вектора $x$. Если к тому же $X$ — *полное метризуемое локально выпуклое пространство,* т.е. *пространство Фреше,* и обладает таким базисом окрестностей нуля, что для любой окрестности нуля $V$ из этого базиса при любом $x \in V$ неравенство $|x'| \leqslant |x|$ влечёт за собой $x' \in V$, то $X$ называется *решёткой Фреше.* Решётка Фреше — упорядоченное локально выпуклое пространство, т.е. конус положительных векторов в нём замкнут [43, гл. V, 7.2].

Кроме того, если $p$ — линейное отображение решётки Фреше в решётку Фреше, то $p$ непрерывно [43, гл.V, 6.4, 6.1]. В частности, непрерывны линейные положительные функционалы на решётке Фреше. Таким образом, если

$X = \operatorname{proj}\lim_n X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел решёток Фреше как упорядоченных векторных пространств, то отображения $p_n$ непрерывны и порождают на $X$ топологию проективного предела [43, гл. II], [20]. Топология на $X$ определяется как индуцированная с топологического произведения $\prod_n X_n$. Если проекции $\mathrm{pr}_n$ рассматривать как определённые на $X$, то $\mathrm{pr}_n$ — линейные непрерывные отображения и в качестве базиса окрестностей нуля в $X$ можно взять прообразы $\mathrm{pr}_n^{-1}(V_n)$ всевозможных окрестностей нуля $V_n$ пространств $X_n$. Пространство $X$ как топологический проективный предел локально выпуклых хаусдорфовых пространств будет локально выпуклым и хаусдорфовым.

Конус положительных элементов в $X$ замкнут в $X$. Действительно, если $K_n$ — конусы положительных векторов в решётках Фреше $X_n$ , то они замкнуты в $X_n$. Конус положительных элементов $K$ в $X$ — это пересечение $\bigcap\limits_n \mathrm{pr}_n^{-1}(K_n)$ замкнутых в силу непрерывности отображений $\mathrm{pr}_n$ множеств $\mathrm{pr}_n^{-1}(K_n)$, т.е. конус $K$ замкнут в $X$. Следовательно, $X$ — упорядоченное локально выпуклое пространство. Всюду далее в подразделе 2.4.3 проективный предел решёток Фреше рассматривается одновременно и как упорядоченное локально выпуклое пространство с топологией проективного предела, описанной выше.

Пусть $S$ — подмножество в локально выпуклом пространстве. Подмножество $S$ называется *секвенциально замкнутым,* если для любой сходящейся последовательности векторов из $S$ предел этой последовательности принадлежит $S$. Подмножество $S$ называется *секвенциально предкомпактным,* если любая последовательность векторов из $S$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

**Теорема 2.4.3** (вариация [27, теорема 6.1]). *Пусть* $X = \operatorname{proj}\lim_n X_n p_n$ — *приведённый правильный проективный предел решёток Фреше* $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $X_0$ — *векторное подпространство в* $X$, $q_1 \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_1}$ *и* $q \overset{(2.3.3)}{:=} q_1 \circ \operatorname{pr}_1$, *выпуклый конус* $H \subset X$ *секвенциально замкнут в* $X$ *и* $H \cap (-X^+) \neq \emptyset$. *Допустим, что при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено одно из двух условий:*

(i) $H_n = \operatorname{pr}_n H$ *минорирует* $\operatorname{pr}_n X_0$,

(ii) sup-*проекция* $f_n \overset{(2.2.2)}{:=} \sup\text{-}\operatorname{pr}_n \operatorname{spf}_{H,q}$ *полунепрерывна сверху на проекции* $\operatorname{pr}_n X_0 \subset X_n$,

*а также выполнено ещё и условие*

(iii) *для каждого не более чем счётного ограниченного сверху подмножества* $B$ *в* $H$ *при условии* $\inf q(B) > -\infty$ *найдётся* $n_q \in \mathbb{N}$, *для которого при каждом* $n \geqslant n_q$ *проекция* $\operatorname{pr}_n B \subset X_n$ *секвенциально предкомпактна в* $X_n$.

*Тогда для конуса* $L := \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0}$ *и супремальной функции* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^X_{-\infty}$ *справедливо заключение теоремы* 2.4.1 *вместе с представлением* (2.4.5) *на* $X_0$.

*Доказательство.* В обозначениях $L := \operatorname{lin} \mathbb{R}^{X_0}$ и $L_n := \operatorname{lin} \mathbb{R}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ так же, как и при доказательстве теоремы 2.4.1, убеждаемся, что выполнено (2.2.3), супремальная функция $f := \operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^X_{-\infty}$ возрастающая и для $f_n$ из (2.4.6), или из условия (ii), имеем $f_n \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^{X_n}_{-\infty}$. Если выполнено условие минорирования (i), то $f_n \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^{X_n}$ и по теореме Хана – Банаха об огибающей из Введения, применённой в части импликации I1⇒I2, получаем условие (2.2.6) теоремы 2.2.1 на векторном подпространстве $\operatorname{pr}_n X_0$ при $n \in \mathbb{N}$. В случае же выполнения условия (ii) по теореме Хёрмандера об огибающей из Введения, применённой в части импликации I1⇒I2, по-прежнему получаем условие (2.2.6) теоремы 2.2.1 при $n \in \mathbb{N}$. Остаётся проверить условие (ii) теоремы 2.2.1 для убывающей стабилизирующейся к $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_0$ последовательности (2.4.8). При этом по замечанию 2.1.1 можем в условии (iii) положить $n_q = 1$. Если для последовательности $(a_k)$, определённой в (2.4.9), $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$, то условие (2.2.8) выполнено очевидным образом. Пусть

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} a_k \overset{(2.4.10)}{=:} a_0 > -\infty. \tag{2.4.22}$$

Тогда согласно (2.4.9) найдётся некоторая последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset H$, для которой выполнено (2.4.17). При этом ввиду (2.4.22) для ограниченного сверху множества $B = \{h^{(k)} \colon k \in \mathbb{N}\}$ выполнено условие (iii), значит все проекции $\operatorname{pr}_n B$ секвенциально предкомпактны в $X_n$. Следовательно, в множестве $B$ можно выбрать последовательность $\left(h^{(1,n)}\right)$, сходящуюся в $X_1$; из последовательности $(h^{(1,n)})$ можно выбрать подпоследовательность $(h^{(2,n)})$, сходящуюся в $X_2$ и т.д. Диагональный процесс даёт последовательность $(h^{(n,n)})$, сходящуюся в каждом $X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Из этого по определению топологии проективного предела вытекает сходимость последовательности $(h^{(n,n)})$ в $X$. Так как по построению $(h^{(n,n)}) \subset H$, то в силу секвенциальной замкнутости $H$ в $X$ предел $h$ последовательности $(h^{(n,n)})$ лежит в $H$. Из включения

$$(h^{(n,n)}) \subset (h^{(k)}) \tag{2.4.23}$$

и неравенств $h^{(k)} \leqslant x^{(k)}$ из (2.4.17) ввиду стабилизации $(x^{(k)})$ к $x = (x_n)$ имеем

$$\mathrm{pr}_k\, h^{(n,n)} \leqslant_k \mathrm{pr}_k x^{(k)} = x_k \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда ввиду замкнутости конуса положительных векторов в каждом $X_k$ и непрерывности проекций $\mathrm{pr}_k$ получаем $\mathrm{pr}_k\, h \leqslant_k \mathrm{pr}_k\, x$ при всех $k \in \mathbb{N}$, что означает $h \leqslant x$ в $X$.

Пусть $q_k$ — функция, определённая в (2.3.3) на решётке Фреше $X_k$. Так как $q_k$ — линейный положительный функционал на решётке Фреше, то $q_k$ — непрерывный функционал. Отсюда

$$q(h) = q_k\bigl(\mathrm{pr}_k h\bigr) = q_k\bigl(\mathrm{pr}_k \lim_n h^{(n,n)}\bigr)$$
$$= \lim_n q_k\bigl(\mathrm{pr}_k h^{(n,n)}\bigr) = \lim_n q\bigl(h^{(n,n)}\bigr)$$

и в силу включения (2.4.23) и выполнения первого неравенства из (2.4.17) имеем $q(h) \geqslant a_0 - \varepsilon$, а также, как показано выше, $h \in H$, $h \leqslant x$. Следовательно, $\mathrm{spf}_{H,q}(x) \geqslant a_0$. Вспоминая определение величины $a_0$ из (2.4.22) и (2.4.9), а также (2.4.8), видим, что выполнено (2.4.15). По теореме 2.2.1 и предложению 2.3.5 функция $\mathrm{spf}_{H,q}$ допускает представление вида (2.4.5) с $L := \operatorname{lin} \mathbb{R}^{X_0}$. Возможность замены здесь пространства $L := \operatorname{lin} \mathbb{R}^{X_0}$ на положительный конус $L := \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0}$ следует из леммы 2.4.2. □

**Теорема 2.4.4** (вариация [27, теорема 6.1]). *Пусть* $X = \operatorname{proj\,lim}_n X_n p_n$ *— приведённый правильный проективный предел решёток Фреше* $X_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, и* $X_0$ *— векторное подпространство в* $X$*,* $q_1 \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^{X_1}$ *и* $q \overset{(2.3.3)}{:=} q_1 \circ \mathrm{pr}_1$*, выпуклое подмножество* $H \subset X$ *секвенциально замкнуто в* $X$*. Допустим, что при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено одно из двух условий* (i) *или* (ii) *теоремы* 2.4.3*, а также* *выполнено ещё и условие* (iii) *теоремы* 2.4.3. *Тогда для* $L := \operatorname{aff}\mathbb{R}^{X_0}$ *вогнутая функция* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc}\mathbb{R}^X_{-\infty}$ *допускает представление* (2.4.5). *Если дополнительно* $0 \in H$ *и* $q_1(0) \geqslant 0$, *то* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc}^+\mathbb{R}^X_{-\infty}$, *а* $L = \operatorname{aff}\mathbb{R}^{X_0}$ *в* (2.4.5) *можно заменить на* $L := \operatorname{aff}^+\mathbb{R}^{X_0}$ *из* (2.4.21).

Доказательство теоремы 2.4.4 опускаем, поскольку оно представляет из себя симбиоз доказательств теорем 2.4.2 и 2.4.3. Отметим лишь, что при доказательстве условия (2.2.6) теоремы 2.2.1 на векторных подпространствах $\operatorname{pr}_n X_0$ при $n \in \mathbb{N}$ в случае выполнения условия (ii) нужно использовать теорему Хёрмандера об огибающей из Введения в части импликации II1⇒II2.

**Замечание 2.4.1.** Это замечание относится ко всем четырём теоремам 2.4.1–2.4.4. Заключение этих теорем о возможности представления (2.4.5) для векторов $x$ из векторного подпространства $X_0$ с помощью утверждений типа теорем о минимаксе можно распространить на векторы $x \in X$, представимые в виде точных верхних границ возрастающих последовательностей векторов из $X_0$ [8], [32, 2.5]. Доказательство этого перехода пока довольно объёмно. Полное изложение возможности такого распространения представления (2.4.5) на точные верхние границы возрастающих последовательностей из $X_0$ намечается обосновать в ином месте.

# Глава 3

# Применения в теории функций

## 3.1 Где возникают огибающие?

Кратко остановимся на схемах применения двойственных описаний верхних огибающих из главы 1.1 в комплексном анализе. В основном следуем изложению таких схем в [27]– [33], [57] и в наиболее близкой форме в [35].

Всюду во этом разделе $D$ — *область* (открытое связное подмножество) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или $n$-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартной евклидовой топологией, $n \in \mathbb{N}$. Через $\operatorname{Hol}(D)$, $\operatorname{Mer}(D)$, $\operatorname{har}(D)$, $\operatorname{plhar}(D)$, $\operatorname{sbh}(D)$ и $\operatorname{plsbh}(D)$ обозначаем классы соответственно *голоморфных, мероморфных, гармонических, плюригармонических, субгармонических* и *плюрисубгармонических функций* на $D$. Последние два класса по определению содержат функцию $\boldsymbol{-\infty}$, тождественно равную $-\infty$. При этом $\operatorname{sbh}(D) = \operatorname{plsbh}(D)$ и $\operatorname{har}(D) = \operatorname{plhar}(D)$ в размерности $n = 1$.

Для $S \subset \mathbb{C}^n$ различаем $C_{\mathbb{R}}(S)$ и $C_{\mathbb{C}}(S)$ — классы непрерывных вещественнозначных и соответственно комплекснозначных функций.

Всюду во введении $\mathsf{Z}$ — главное аналитическое множество в $D$, т.е. нулевое множество некоторой ненулевой функции $g_{\mathsf{Z}} \in \operatorname{Hol}(D)$, заданное вместе с функцией кратности нулей, или с дивизором нулей, функции $g_{\mathsf{Z}}$. При этом и дивизор нулей обозначаем той же буквой $\mathsf{Z}$.

В случае $n = 1$ часто удобно мыслить $\mathsf{Z}$ как распределение, вообще говоря, повторяющихся точек $\{\mathsf{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для которой порядок нумерации не важен, а имеет значение только число повторений точки в ней. Если $\mathsf{Z}$ — последовательность всех нулей (корней) функции $f \in \operatorname{Hol}(D)$, то каждая точка $\mathsf{z} \in D$ повторяется $\mathsf{Z}$ в столько раз, какова кратность нуля (корня) функции $f$ в точке $\mathsf{z}$. При этом полагаем $\operatorname{Zero}_f := \mathsf{Z}$. Отношения и операции для множеств (последовательностей) нулей понимаются как в [27]–[33].

Различные задачи комплексного анализа сводятся в существенной своей части к построению или доказательству существования (точной) огибающей — верхней или нижней — из определенного класса функций на $D$ или на подмножестве $S \subset D$. Отметим некоторые из них в подходящей трактовке.

### 3.1.1 Нетривиальность весового класса

По этому подразделу см. [28, § 10], [32, 1.1]. При каких условиях на *функцию-мажоранту* (*весовую функцию, вес*) $M\colon D \to \mathbb{R}_{\pm\infty}$ найдется ненулевая функция $f \in \operatorname{Hol}(D)$ с ограничением $\ln|f| \leqslant M$ на $D$? Другими словами, вопрос состоит в исследовании условий нетривиальности класса функций

$$\operatorname{Hol}(D, M) := \Bigl\{ f \in \operatorname{Hol}(D) \Bigm| \ln|f| \leqslant M + \operatorname{const} \ \text{ на } D \Bigr\},$$

т.е. условий, при которых $\mathrm{Hol}(D, M) \neq \{0\}$. Зачастую достаточно убедиться в нетривиальности выпуклого множества плюрисубгармонических функций

$$\bigl\{h \in \mathrm{plsbh}(D) \bigm| h \leqslant M \text{ на } D\bigr\}, \tag{3.1.1}$$

т.е. доказать существование функции $h \neq -\boldsymbol{\infty}$ из этого класса, а затем для такой функции $h \leqslant M$ попытаться построить голоморфную функцию $f \not\equiv 0$, удовлетворяющую оценке

$$\ln |f| \leqslant \check{h} \leqslant \check{M},$$

где $\check{h}$ и $\check{M}$ — некоторые незначительные увеличения соответственно функций $h$ и $M$. При этом существование такой функции $f$ можно доказать при помощи решений $\overline{\partial}$- или $\partial\overline{\partial}$-задачи с оценками (см. [28, § 9], [61, IIIA], [2, теорема 1], [36, теорема 3, следствия 1–3]) в духе Л. Хёрмандера [54, гл. IV] или же путем аппроксимации функции $h$ логарифмом модуля голоморфной функции. Правда, последний аппроксимационный способ представляется нам не соответствующим постановке задачи и в данной тематике излишним, поскольку здесь требуется только минорирование функции $h$, а не её аппроксимация.

### 3.1.2 Описание нулевых множеств

По этому подразделу наряду с [35] см. [28, § 8], [30], [40], [32, 1.2], [15], [16]. Пусть $\mathsf{Z}$ — нулевое множество некоторой функции $g_{\mathsf{Z}} \in \mathrm{Hol}\,(D)$. Если $D$ — односвязная при $n = 1$ или звёздная относительно точки при $n > 1$ область, то $\mathsf{Z}$ — *нулевое множество для класса* $\mathrm{Hol}(D, M)$ тогда и только тогда, когда найдется плюригармоническая функция $h \in \mathrm{plhar}(D)$, для которой выполнено неравенство

$\ln|g_{\mathsf{Z}}| + h \leqslant M$. Это связано с тем, что $h \in \mathrm{plhar}(D)$ для односвязной при $n = 1$ или звёздной относительно точки при $n > 1$ области $D$ в том и только том случае, когда имеет место представление $h = \mathrm{Re}\, f$ для некоторой $f \in \mathrm{Hol}(D)$, или $h = \ln|e^f|$ [60, предложение 2.2.13]. Другими словами, $\mathsf{Z}$ — нулевое множество для $\mathrm{Hol}(D, M)$, если и только если непуст класс

$$\Bigl\{h \in \mathrm{plhar}(D) \Bigm| h \leqslant M - \ln|g_{\mathsf{Z}}| \text{ на } D\Bigr\}. \tag{3.1.2}$$

Некоторые подходы подобного рода возможны и для конечносвязных областей $D \subset \mathbb{C}$ [30], [58], но при этом приходиться заменить функции $h$ и $M$ на их весьма малые изменения $\check{h}$ и $\check{M}$.

### 3.1.3 Описание нулевых подмножеств

По этому подразделу наряду с [35] см. [28, § 11]–[33], [40], [8], [39], [59]. В обозначениях предыдущего подраздела задача состоит в нахождении голоморфной функции $f \neq 0$, для которой $g_{\mathsf{Z}} f \in \mathrm{Hol}(D, M)$, т.е. справедливо ограничение $\ln|g_{\mathsf{Z}} f| \leqslant M$, или $\ln|f| \leqslant M - \ln|g_{\mathsf{Z}}|$. Аналогично предыдущим подразделам, вопрос вновь сводится к нетривиальности класса

$$\Bigl\{h \in \mathrm{plsbh}(D) \Bigm| h \leqslant M - \ln|g_{\mathsf{Z}}| \text{ на } D\Bigr\}. \tag{3.1.3}$$

Эта постановка имеет двойственные выходы на проблемы аппроксимации в пространствах функций, прежде всего экспоненциальными системами, на существование для голоморфных функций голоморфных функций-мультипликаторов, «погашающих» их рост, и др. [61], [28, § 10], [33].

### 3.1.4 Представление мероморфных функций

По этому подразделу наряду с [35] см. [28, § 12], [30], [32, 1.4], [57]. Пусть $Q = q_1/q_2$ — мероморфная функция в области $D$ и $q_1, q_2 \in \operatorname{Hol}(D)$, $q_1, q_2 \neq 0$. Задача состоит в возможности представления функции $Q \in \operatorname{Mer}(D)$ в виде отношения двух функций из класса $\operatorname{Hol}(D, M)$, возможно *без общих нулей.* Решение ее наиболее естественно искать в терминах функций $M$ и $U_Q := \max\bigl\{\ln|q_1|, \ln|q_2|\bigr\}$ или $U_Q := \ln\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}$ в связи с известными определениями различных вариантов характеристики Неванлинны функции $Q$ именно через $U_Q$. При этом задачу можно в несколько ослабленной форме переформулировать как поиск условий, при которых класс

$$\bigl\{h \in \operatorname{plsbh}(D) \bigm| h \leqslant M - U_Q \text{ на } D\bigr\} \tag{3.1.4}$$

или класс (при требовании «без общих нулей»)

$$\bigl\{h \in \operatorname{plhar}(D) \bigm| h \leqslant M - U_Q \text{ на } D\bigr\} \tag{3.1.5}$$

нетривиален.

### 3.1.5 Комплексная теория потенциала

По этому разделу см. [65]– [67], [60]. Основные объекты, такие, как (плюри)гармонические меры, функции Грина и им подобные, (максимальные) решения задачи Дирихле и пр., на которые опираются применения этой теории, строятся как верхняя огибающая специальных, чаще всего выпуклых и ограниченных сверху некоторой функцией-мажорантой $M$, семейств (плюри)субгармонических функций.

### 3.1.6 Теория равномерных алгебр

Многочисленные применения в этой теории нашла теорема двойственности Эдвардса [49], [51, 1.2]. Конкретнее, пусть $H$ — некоторый выпуклый конус вещественнозначных полунепрерывных сверху функций на некотором компактном топологическом пространстве $K$ со значениями в $\mathbb{R}_{-\infty}$ и $H$ содержит все константы. Через $J_a(H)$ обозначим класс *мер Йенсена* в точке $a \in K$ относительно $H$, а именно: положительных мер Радона $\mu$ на $K$, удовлетворяющих условию

$$h(a) \leqslant \int h \,\mathrm{d}\mu \quad \text{для всех } \; h \in H. \tag{3.1.6}$$

По одной из теорем Эдвардса из [49, 2] *для любой полунепрерывной снизу функции* $x \in \mathbb{R}_{+\infty}^K$

$$\sup \left\{ h(a) \;\middle|\; h \in H,\; h \leqslant x \right\} = \inf \left\{ \int x \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \mu \in J_a(H) \right\}. \tag{3.1.7}$$

Отсюда, в частности, следует, что *множество*

$$\{h \mid h \in H,\; h \leqslant x\}$$

*непусто тогда и только тогда, когда хотя бы для одной точки* $a \in K$ *конечна правая часть в* (3.1.7).

### 3.1.7 Связь с задачами 1–3 из подраздела 1.2.3

Трактовки проблем из 3.1.1–3.1.4, касающиеся условий нетривиальности классов (3.1.1)–(3.1.5), можно сформулировать в следующей общей форме. Пусть $H$ — выпуклый конус или, более общó, выпуклое множество в векторной решетке $X$ с отношением порядка $\leqslant$. *Для каких*

$X_0 \subset X$ *при всех* $x \in X_0$ *множество* $\{h \in H \mid h \leqslant x\}$ *непустое*? Если $q\colon X \to \mathbb{R}$ — некоторая функция на $X$, то *это множество непустое тогда и только тогда, когда выполнено соотношение*[1]

$$-\infty < \sup\{q(h) \mid h \in H,\ h \leqslant x\} \overset{(2.3.1)}{=} \operatorname{spf}_{H,q}(x). \quad (3.1.8)$$

Собственно, это и есть частный случай задачи 3 из подраздела 1.2.3. Если удаётся получить равенство вида (3.1.7), где в роли $q$ выступает мера Дирака $\delta_a(h) = h(a)$ в точке $a$, то это решает в определённом смысле частные случаи задач 1 и 2. В частности, в таком случае соотношение (3.1.8) с $q := \delta_a$ выполнено, если и только если

$$-\infty < \inf\left\{\int x \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \mu \in J_a(H)\right\},$$

где inf в правой части берётся по действиям на $x \in X_0$ всевозможных выметаний меры Дирака в точке $a$, т.е. ростка $\operatorname{spr}(\delta_a; H, X_0, \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X)$, определённого в подразделе 2.3.2, определение 2.3.2.

### 3.1.8 Некоторые дополнения к предшествующим определениям и обозначениям

**Множества, топология, порядок.** Для $n, m \in \mathbb{N}$ аффинные пространства $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ наделяются стандартной евклидовой нормой-модулем $|\cdot|$. Полагаем $\mathbb{R}^m_\infty := (\mathbb{R}^m)_\infty$, $\mathbb{C}^n_\infty := (\mathbb{C}^n)_\infty$, $\mathbb{C}_\infty := (\mathbb{C}^1)_\infty$ — одноточечные компактификации Александрова; $|\infty| := +\infty$.

[1] Напоминаем, что $\sup \emptyset := -\infty$ и $\inf \emptyset := +\infty$ для пустого множества $\emptyset$.

При необходимости $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n_\infty$ отождествляем соответственно с $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}^{2n}_\infty$ (над $\mathbb{R}$). Далее, когда возможно, обозначения вводятся и определения даются только для $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^m_\infty$. Для подмножества $S \subset \mathbb{R}^m_\infty$ через $\operatorname{clos} S$, $\operatorname{int} S$ и $\partial S$ обозначаем соответственно *замыкание, внутренность* и *границу* $S$ в $\mathbb{R}^m_\infty$. (Под)область в $\mathbb{R}^m_\infty$ — открытое связное подмножество в $\mathbb{R}^m_\infty$. Для $S_0 \subset S \subset \mathbb{R}^m_\infty$ пишем $S_0 \Subset S$, если $\operatorname{clos} S_0$ — *компактное подмножество* в $S$ в топологии, индуцированной с $\mathbb{R}^m_\infty$ на $S$. Для $r \in \mathbb{R}^+_{+\infty}$ и $x \in \mathbb{R}^m$ полагаем $B(x,r) := \bigl\{x' \in \mathbb{R}^m \bigm| |x'-x| < r\bigr\}$ — открытый шар радиуса $r$ с центром $x$, $B(r) := B(0,r)$ и $B(x,+\infty) = \mathbb{R}^m$; $B(\infty,r) := \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x| > 1/r\}$ и $B(\infty,+\infty) := \mathbb{R}^m_\infty \setminus 0$. При $r \leqslant 0$ естественно $B(0,r) := \emptyset$. При $r > 0$ полагаем $\overline{B}(\cdot,r) := \operatorname{clos} B(\cdot,r)$ — замкнутые шары, но $\overline{B}(x,0) := \{x\}$ и при $r < 0$ естественно $\overline{B}(\cdot,r) := \emptyset$. *Положительность* всюду понимается, в соответствии с контекстом, как $\geqslant 0$, а $> 0$ — *строгая положительность*. Аналогично для *отрицательности*. Открытые (замкнутые с непустой внутренностью) шары строго положительного радиуса с центром $x \in \mathbb{R}^m_\infty$ образуют открытую (соответственно замкнутую) базу окрестностей точки $x \in \mathbb{R}^m_\infty$.

**Функции.** Для произвольной функции $f\colon X \to Y$ допускаем, что не для всех $x \in X$ определено значение $f(x) \in Y$. *Функция $f$ расширенная числовая,* если ее образ — подмножество в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$.

Для открытого подмножества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ через $\operatorname{har}(\mathcal{O})$ обозначаем векторное пространство над $\mathbb{R}$ *гармонических* (аффинных при $m = 1$) в $\mathcal{O}$ функций; $\operatorname{sbh}(\mathcal{O})$ — выпуклый конус над $\mathbb{R}^+$ *субгармонических* (выпуклых при

$m = 1$) в $\mathcal{O}$ функций. Функцию, *тождественно равную* $-\infty$ на $\mathcal{O}$, обозначаем символом $\boldsymbol{-\infty} \in \operatorname{sbh}(\mathcal{O})$; $\operatorname{sbh}_*(\mathcal{O}) := \operatorname{sbh}(\mathcal{O}) \setminus \boldsymbol{-\infty}$. Для $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n$ через $\operatorname{Hol}(\mathcal{O})$ обозначаем векторное пространство над $\mathbb{C}$ *голоморфных* функций на $\mathcal{O}$.

При $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ класс $C^p$ состоит из числовых функций на открытых подмножествах с непрерывными (частными) производными до порядка $p$ включительно.

Через $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ обозначаем *функции евклидова расстояния* между парами точек, между точкой и множеством, между множествами в $\mathbb{R}^m_\infty$. По определению

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\cdot,\emptyset) &=: \operatorname{dist}(\emptyset,\cdot) := \inf\emptyset := +\infty =: \operatorname{dist}(x,\infty)\\ &=: \operatorname{dist}(\infty,x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^m; \quad \operatorname{dist}(\infty,\infty) := 0.\end{aligned}$$

**Меры.** Далее $\operatorname{Meas}^+(S)$ — класс *положительных борелевских мер* на борелевских подмножествах $S \subset \mathbb{R}^m_\infty$ со значениями в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ и конечных на компактах из $S$, $\operatorname{Meas}(S) := \operatorname{Meas}^+(S) - \operatorname{Meas}^+(S)$ — класс *зарядов;* $\operatorname{Meas}_{\mathrm{cmp}}(S)$ — подкласс зарядов в $\operatorname{Meas}(S)$ с компактным *носителем* $\operatorname{supp}\nu \Subset S$. Для $x \in \mathbb{R}^m_\infty$ и $0 < r \in \mathbb{R}_+$ полагаем $\mu(x,r) := \mu\bigl(B(x,r)\bigr)$. Меру Рисса функции $u \in \operatorname{sbh}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$, чаще всего обозначаем как

$$\begin{gathered}\varDelta_u := \frac{1}{s_{m-1}\max\{1, m-2\}}\,\triangle u \in \operatorname{Meas}^+(\mathcal{O}),\\ \text{где } s_{m-1} := \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\end{gathered} \tag{3.1.9}$$

— площадь $(m-1)$-мерной единичной сферы $\partial B(1)$ в $\mathbb{R}^m$, $\triangle$ — *оператор Лапласа,* действующий в смысле теории распределений, или обобщённых функций, а $\Gamma$ — гамма-функция Эйлера. Такие меры $\varDelta_u$ — меры Радона, т.е. определяют линейный положительный непрерывный и ограниченный функционал на пространстве $C_0(\mathcal{O})$ непрерывных финитных функций на $\mathcal{O}$.

В частности, $\varDelta_u(S) < +\infty$ для каждого измеримого по $\varDelta_u$ подмножества $S \Subset \mathcal{O}$. При $u = \boldsymbol{-\infty} \in \operatorname{sbh}(\mathcal{O})$ по определению полагаем $\varDelta_{-\boldsymbol{\infty}}(S) := +\infty$ для всех $S \subset \mathcal{O}$.

Через $\lambda_m \in \operatorname{Meas}^+(S)$ обозначаем сужения *меры Лебега* на собственные борелевские подмножества $S \subset \mathbb{R}^m$; $\delta_x \in \operatorname{Meas}^+(S)$ — *мера Дирака в точке* $x \in S$, т.е. $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$ и $\delta_x\bigl(\{x\}\bigr) = 1$. В обозначении меры Лебега индекс $m$ часто будем опускать. Во включении $\operatorname{Meas}_\infty(\mathcal{O}) \subset \operatorname{Meas}(\mathcal{O})$ с открытым множеством $\mathcal{O}$, первое множество $\operatorname{Meas}_\infty(S)$ состоит из всех мер $\mu$ с бесконечно дифференцируемой плотностью, т.е. $\mathrm{d}\mu = f\,\mathrm{d}\lambda$, где $f$ из класса $C^\infty$ на $\mathcal{O}$.

**Определение 3.1.1** (вариация определения 2.3.2)**.** Пусть $D$ — подобласть в $\mathbb{R}^m$, $H \subset \operatorname{sbh}(D)$, $\nu \in \operatorname{Meas}^+(D)$, $\mathcal{M} \subset \operatorname{Meas}^+(D)$. Говорим, что мера $\mu \in \mathcal{M}$ — *линейное выметание меры $\nu$ относительно $H$ в $\mathcal{M}$,* и пишем

$$\nu \prec_{H,\mathcal{M}} \mu, \quad \text{если} \int h\,\mathrm{d}\nu \leqslant \int h\,\mathrm{d}\mu \quad \forall h \in H. \tag{3.1.10}$$

При $\nu = \delta_x$, $x \in D$, линейные выметания $\mu \in \mathcal{M}$ меры Дирака $\delta_x$ относительно $H$ в $\mathcal{M}$ называют *мерами Йенсена для точки $x \in D$,* если выбрано $H := \operatorname{sbh}_*(D)$ и $\mathcal{M} = \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ (см. и (3.1.6)).

Для числа $c \in \mathbb{R}$ говорим, что аффинная функция

$$\mu + c := \mu + c \cdot \mathbf{1} \in \mathcal{M} + \mathbb{R}\mathbf{1}$$

— *аффинное выметание меры* $\nu$ *относительно* $H$ *в* $\mathcal{M}+\mathbb{R}\mathbf{1}$, и пишем

$$\nu \preccurlyeq_{H,\mathcal{M}} \mu + c, \text{ если } \int h \,\mathrm{d}\nu \leqslant \int h \,\mathrm{d}\mu + c \quad \forall h \in H. \tag{3.1.11}$$

Нижние индексы $H, \mathcal{M}$ в $\prec_{H,\mathcal{M}}$ и $\preccurlyeq_{H,\mathcal{M}}$ опускаем и пишем соответственно просто $\prec$ и $\preccurlyeq$, если в формулировках утверждений или же из контекста ясно каковы $H$ и $\mathcal{M}$.

Очевидно, если $\nu \prec \mu$, то $\nu \preccurlyeq \mu + c$ для $c \in \mathbb{R}^+$ в (3.1.11).

**Нули голоморфных функций** [18, § 11], [19], [68], [6], [33], [42, гл. 1] Пусть $D$ — подобласть в $\mathbb{C}^n_\infty$, $0 \neq f \in \mathrm{Hol}(D)$.

*Дивизором нулей* функции $f$ называем функцию $\mathrm{Zero}_f \colon D \to \mathbb{N}_0$, равную кратности нуля функции $f$ в каждой точке $z \in D$. Для $f = 0 \in \mathrm{Hol}(D)$ по определению $\mathrm{Zero}_0 \equiv +\infty$ на $D$. В главе 3 далее всюду

$$\boxed{D \neq \emptyset \ \text{ — область в } \mathbb{R}^m \text{ или в } \mathbb{C}^n.}$$

## 3.2 (Плюри)субгармоническая нижняя огибающая

### 3.2.1 Основной результат для выпуклых подмножеств субгармонических функций

**Предложение 3.2.1** (частный случай предложения 3.2.1, см. и [28, предложение 7.1]). *Пусть* $H \subset \mathrm{sbh}_*(D)$ *непустое и ненулевая мера* $\nu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ *такова, что*

$$-\infty < \int h \,\mathrm{d}\nu \quad \textit{для всех функций } h \in H. \tag{3.2.1}$$

*Пусть* $\mathcal{M} \subset \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ *и расширенная числовая функция* $F$ *на* $D$ *локально универсально измеримая для* $\mathcal{M}$*, т.е. для любого компакта* $K \subset D$ *сужение* $F\,\big|_K$ *является* $\mu\,\big|_K$*-измеримой функцией для всех* $\mu \in \mathcal{M}$*. Если существует функция* $h \in H$*, для которой выполнено неравенство* $h \leqslant F$ *на* $D$*, то*

$$-\infty \overset{(3.1.10)}{<} \inf\left\{ \int F\,d\mu \;\middle|\; \nu \prec \mu \right\}. \tag{3.2.2l}$$

$$-\infty \overset{(3.1.11)}{<} \inf\left\{ \int F\,d\mu + c \;\middle|\; \nu \preccurlyeq \mu + c \right\}, \tag{3.2.2a}$$

Теорема 3.2.1 ниже, в определенной степени обратная к предложению 3.2.1, и является основным результатом раздела 3.2.

Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность субгармонических в $D$ функций, (равномерно по $k$) локально ограниченных сверху (т.е. на компактах) в $D$. Через $\limsup_k^* u_k$ будем обозначать полунепрерывную сверху регуляризацию (поточечного) верхнего предела последовательности $(u_k)$, которая также является субгармонической функцией. При этом $\limsup_k^* u_k \in \mathrm{sbh}_*(D)$, если $\limsup_n u_n(x) \not\equiv -\infty$ на $D$, и $\lambda_m$-п. в. совпадает с $\limsup_k u_k$ [6, Приложение I]. Поэтому $\limsup_k u_k$ и $\limsup_k^* u_k$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(D, \lambda_m)$ для $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{sbh}_*(D)$, локально ограниченных сверху, можно не различать.

Функция $f$ *строго положительная* (соответственно *строго отрицательная*) на $D$, если $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$) для каждой точки $x \in D$. Положительная функция $f\colon D \to \mathbb{R}^+$ *локально отделена от нуля*, если $\inf\limits_{x\in K} f(x) > 0$ для любого компакта $K \Subset D$. Очевидно, полунепрерывная снизу строго положительная функция на $D$ локально отделена от нуля.

Для сглаживания функций и мер операцией свертки $*$ и её «скользящей» версией будет использована аппроксимативная единица $a\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$, зависящая только от $|x|$, со свойствами

$$\begin{gathered} a(x) \equiv 0 \text{ при } |x| \geqslant 1, \quad a \in C^\infty, \\ \int_{\mathbb{R}^m} a(x)\,\mathrm{d}\lambda_m(x) = 1. \end{gathered} \tag{3.2.3}$$

В шаре $B(r)$, $r > 0$, эта функция задаётся как

$$a_r(x) \overset{(3.2.3)}{:=} c_r a\Bigl(\frac{1}{r}x\Bigr), \quad c_r \in \mathbb{R}^+, \quad \int_{\mathbb{R}^m} a_r\,\mathrm{d}\lambda_m = 1, \tag{3.2.4}$$

а соответствующая ей мера $\alpha^{(r)} \in \operatorname{Meas}^+(\mathbb{R}^m)$ через её плотность как

$$\mathrm{d}\alpha^{(r)} \overset{(3.2.4)}{:=} a_r\,\mathrm{d}\lambda_m, \quad \operatorname{supp}\alpha_r \subset \overline{B}(r). \tag{3.2.5}$$

Рассмотрим строго положительную отделенную от нуля функцию

$$r\colon D \to \mathbb{R}^+, \quad r(x) < \operatorname{dist}(x, \partial D) \quad \forall x \in D. \tag{3.2.6}$$

Тогда для каждой точки $x \in D$ определена мера

$$\alpha_x^{(r(x))} \in \operatorname{Meas}^+\bigl(B(x, r(x))\bigr)$$

с носителем $\operatorname{supp}\alpha_x^{(r(x))} \subset D$, полученная сдвигом меры $\alpha^{(r(x))}$ в точку $x$:

$$\alpha_x^{(r(x))}(S) := \alpha^{(r(x))}(S - x).$$

**Теорема 3.2.1.** *Пусть* $\emptyset \neq H \subset \operatorname{sbh}_*(D)$, $F$ — *расширенная числовая функция из* $L^1_{\mathrm{loc}}(D) := L^1_{\mathrm{loc}}(D, \lambda)$, *а мера* $\nu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ *ненулевая. Допустим, что*

(c) *для любых компакта* $K \subset D$ *и* $c \in \mathbb{R}$ *существует* $h \in H$, *удовлетворяющая неравенству* $h \leqslant c$ *на* $K$,

*а также выполнено одно из следующих двух условий:*

(a) *для любой локально ограниченной сверху последовательности функций* $(h_k) \subset H$ *имеем* $\limsup_k^* h_k \in H$, *если только при этом* $\limsup_k h_k(x) \not\equiv -\infty$ *на* $D$;

(b) *множество* $H$ *секвенциально замкнуто в* $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$.

*Рассмотрим пересечение*

$$\boxed{\mathcal{M} := \mathrm{Meas}^+_\infty(D) \bigcap \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_0),} \tag{3.2.7}$$

*где область* $U_0$ *такова, что*

$$\operatorname{supp} \nu \subset U_0 \Subset D. \tag{3.2.8}$$

I. *Если* $H$ *— выпуклый конус, содержащий отрицательную функцию, и выполнено соотношение*

$$-\infty \overset{(3.1.10)}{<} \inf\biggl\{ \int F \,\mathrm{d}\mu \biggm| \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathcal{M} \biggr\}, \tag{3.2.9}$$

*то для любой положительной локально отделённой от нуля функции* (3.2.6) *найдутся некоторая строго положительная функция* $\widehat{r} \leqslant r$ *класса* $C^\infty$ *на* $D$, *постоянная* $C \in \mathbb{R}$ *и функция* $h \in H$, *для которых*

$$\begin{aligned} &h(x) \leqslant F^{*\widehat{r}}(x) + C \quad \textit{при всех } x \in D, \\ &\textit{где} \quad F^{*\widehat{r}}(x) := \int\limits_{B(\widehat{r}(x))} F(x+y)\,\mathrm{d}\alpha^{(\widehat{r}(x))}(y). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

II. *Если $H$ — выпуклое множество и $0 \in H$, то при условии*

$$-\infty \overset{(3.1.11)}{<} \inf\left\{\int F\,\mathrm{d}\mu + c \;\middle|\; \nu \preccurlyeq \mu + c, \right. \\ \left. \mu \in \mathcal{M},\ c \in \mathbb{R}^+\right\} \tag{3.2.11}$$

*для любой положительной локально отделённой от нуля функции* (3.2.6) *найдутся такая же, как в п.* I, *функция $\widehat{r} \leqslant r$ на $D$, постоянная $C \in \mathbb{R}$ и функция $h \in H$, для которых выполнено* (3.2.10).

*Доказательство.* По условию (3.2.8) согласно выбору $U_0$ всегда найдутся «промежуточная» регулярная для задачи Дирихле область $U_1$ в $D$ с кусочно гладкой границей $\partial U_1$, для которой

$$\emptyset \neq \operatorname{supp} \nu \subset U_0 \Subset U_1 \Subset D. \tag{3.2.12}$$

**Лемма 3.2.1.** *Для положительной локально отделённой от нуля функции* (3.2.6) *найдётся строго положительная класса $C^\infty$, а значит, и отделённая от нуля функция $\widehat{r} \leqslant r$ на $D$ с*

$$\bigcup_{x \in S} B\bigl(x, \widehat{r}(x)\bigr) \Subset D \quad \text{для любого } S \Subset D, \\ \left(\bigcup_{x \in D \setminus U_1} B\bigl(x, \widehat{r}(x)\bigr)\right) \bigcap U_0 = \emptyset. \tag{3.2.13}$$

Элементарное, но довольно трудоемкое доказательство этой леммы опускаем. По лемме 3.2.1 сразу можем считать, что уже изначально функция $r$ обладает свойствами функции $\widehat{r}$, указанными в лемме 3.2.1 и теореме 3.2.1, п. I. При этом соглашении для любой меры

$$\mu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D), \quad \operatorname{supp}\mu \subset D \setminus U_1, \tag{3.2.14}$$

определён интеграл семейства мер $\left\{\alpha_x^{(r(x))}\right\}_{x\in D}$ по мере $\mu$ [5], записываемый далее как

$$\mu^{*r} := \int \alpha_x^{(r(x))}\,\mathrm{d}\mu(x) \in \operatorname{Meas}^+_\infty(D) \bigcap \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_0) \subset \mathcal{M}, \tag{3.2.15}$$

где принадлежность классу $\operatorname{Meas}^+_\infty(D)$ обеспечивается построением мер $\alpha_x^{(r(x))}$ после (3.2.4)–(3.2.5) через аппроксимативную единицу из (3.2.3), а также ввиду соглашения о принадлежности функции $r$ классу $C^\infty$, а принадлежность классу $\operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_0)$ основана на (3.2.12) и соотношениях (3.2.13) леммы 3.2.1. При этом мера $\mu^{*r}$ по её определению (3.2.15) действует на функцию $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ по правилу

$$\begin{aligned}\int F\,\mathrm{d}\mu^{*r} &\overset{(3.2.15)}{=} \int F\,\mathrm{d}\int \alpha_x^{(r(x))}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &:= \int \int\limits_{|y|<r(x)} F(x+y)\,\mathrm{d}\alpha^{(r(x))}(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\overset{(3.2.9)}{=} \int F^{*r}\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}\tag{3.2.16}$$

**Лемма 3.2.2.** *Пусть $\mu \in \mathcal{M}_1 = \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1)$ — линейное (соответственно $\mu + c \in \mathcal{M}_1 + c\mathbf{1}$ — аффинное) выметание меры $\nu$ относительно $H \subset \operatorname{sbh}_*(D)$ в $\mathcal{M}_1$ (соответственно в $\mathcal{M}_1 + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$) в смысле определения 3.1.1 и соотношения (3.1.10) (соответственно (3.1.11)), т.е.*

*$\nu \prec \mu$ (соответственно $\nu \preccurlyeq \mu + c$) в $\mathcal{M}_1$ (соответственно в $\mathcal{M}_1 + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$). Тогда в обозначении* (3.2.15) *имеем $\nu \prec \mu^{*r}$ (соответственно $\nu \preccurlyeq \mu^{*r} + c$) в $\mathcal{M}$ (соответственно в $\mathcal{M} + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$), где $\mathcal{M}$ из* (3.2.7).

*Доказательство леммы* 3.2.2. Каждая мера $\alpha^{(r)}$ из (3.2.5) — это мера Йенсена для 0 в $\operatorname{sbh}_*\bigl(\overline{B}(r')\bigr)$ при любом $r' > r$. Отсюда при условии $\nu \prec \mu$ в $\mathcal{M}_1$ доказываемой леммы имеем

$$\int h \,\mathrm{d}\nu \leqslant \int h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int \int\limits_{|y|<r(x)} h(x+y)\,\mathrm{d}\alpha^{(r(x))}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \overset{(3.2.16)}{=} \int h\,\mathrm{d}\mu^{*r},$$

что даёт $\nu \prec \mu^{*r}$ в $\mathcal{M}$ ввиду (3.2.14)–(3.2.15). При условии $\nu \preccurlyeq \mu + c$ в $\mathcal{M}_1 + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$ из доказываемой леммы для меры Йенсена $\alpha^{(r(x))}$ для нуля имеем

$$\int h \,\mathrm{d}\nu \leqslant \int h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + c \leqslant \int \int\limits_{|y|<r(x)} h(x+y)\,\mathrm{d}\alpha^{(r(x))}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + c \overset{(3.2.16)}{=} \int h\,\mathrm{d}\mu^{*r} + c,$$

что даёт $\nu \preccurlyeq \mu^{*r} + c$ в $\mathcal{M} + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$ ввиду (3.2.14)–(3.2.15). $\square$

В условиях п. I из (3.2.9) ввиду (3.2.16) по лемме 3.2.2

получаем

$$
\begin{aligned}
-\infty < \inf &\left\{ \int F \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathcal{M} \right\} \\
&\leqslant \inf \left\{ \int F \,\mathrm{d}\mu^{*r} \;\middle|\; \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathcal{M}_1 \right\} \\
&\overset{(3.2.16)}{=} \inf \left\{ \int F^{*r} \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathcal{M}_1 \right\}, \\
&\qquad \text{где } \mathcal{M}_1 = \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_1). \qquad (3.2.17)
\end{aligned}
$$

В условиях п. II из (3.2.11) ввиду (3.2.16) согласно лемме 3.2.2 следует

$$
\begin{aligned}
-\infty < \inf &\left\{ \int F \,\mathrm{d}\mu + c \;\middle|\; \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathcal{M},\ c \in \mathbb{R}^+ \right\} \\
&\leqslant \inf \left\{ \int F \,\mathrm{d}\mu^{*r} + c \;\middle|\; \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathcal{M}_1,\ c \in \mathbb{R}^+ \right\} \\
&\overset{(3.2.16)}{=} \inf \left\{ \int F^{*r} \,\mathrm{d}\mu + c \;\middle|\; \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathcal{M}_1,\ c \in \mathbb{R}^+ \right\}, \\
&\qquad \text{где } \mathcal{M}_1 = \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_1). \qquad (3.2.18)
\end{aligned}
$$

Функция $F^{*r}$ в правых частях (3.2.17) и (3.2.18) непрерывна и даже из класса $C^\infty$, поскольку $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ и по соглашению $r$ из класса $C^\infty$. Временно заменим функцию $F^{*r}$ на функцию

$$
F^{*r}_{\mathrm{bal}} := \begin{cases} F^{*r} & \text{на } D \setminus U_1, \\ \textit{гармоническое продолжение } F^{*r} & \\ \textit{с границы } \partial U_1 \textit{ внутрь } U_1 & \text{на } U_1. \end{cases} \qquad (3.2.19)
$$

При выполнении (3.2.17) или (3.2.18) ввиду

$$
\mu \in \mathcal{M}_1 = \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_1)
$$

имеем соответственно

$$-\infty < \inf\left\{\int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathcal{M}_1\right\} \tag{3.2.20l}$$

или

$$-\infty < \inf\left\{\int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\,\mathrm{d}\mu + c \;\middle|\; \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathcal{M}_1,\ c \in \mathbb{R}^+\right\}. \tag{3.2.20a}$$

Пусть теперь $\mu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$. Рассмотрим классическое выметание $\mu^{\mathrm{bal}}$ меры $\mu$ из $U_1$ [12]:

$$\mu^{\mathrm{bal}} := \begin{cases} \mu\,\big|_{D\setminus \operatorname{clos} U_1} & \text{на } D\setminus \operatorname{clos} U_1,\\ \textit{выметание из } \operatorname{clos} U_1 \textit{ меры} & \\ \mu\,\big|_{\operatorname{clos} U_1} \textit{ на границу } \partial U_1 & \text{на } \operatorname{clos} U_1. \end{cases} \tag{3.2.21}$$

Из определения (3.2.21) следует $\operatorname{supp} \mu^{\mathrm{bal}} \Subset D \setminus U_1$ и для непрерывной функции $F^{*r}_{\mathrm{bal}}$ из (3.2.19) в силу её гармоничности в $U_1$ по определению классического выметания меры из [12] имеем

$$\int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\,\mathrm{d}\mu = \int F^{*r}\,\mathrm{d}\mu^{\mathrm{bal}}. \tag{3.2.22}$$

При этом если $\nu \prec \mu$ (соответственно $\nu \preccurlyeq \mu + c$) в $\mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ (соответственно в $\mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D) + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$), то имеем $\nu \prec \mu^{\mathrm{bal}}$ (соответственно $\nu \preccurlyeq \mu^{\mathrm{bal}} + c$) в $\mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1)$ (соответственно в $\mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1) + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$). Отсюда и из (3.2.20) в силу (3.2.22) получаем соответственно

$$-\infty \overset{(3.2.20l)}{<} \inf\left\{\int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)\right\} \tag{3.2.23l}$$

или

$$-\infty \overset{(3.2.20a)}{<} \inf\Biggl\{ \int F_{\mathrm{bal}}^{*r}\,\mathrm{d}\mu + c \;\Bigg|\; \nu \preccurlyeq \mu + c, \\ \mu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D),\, c \in \mathbb{R}^+ \Biggr\}. \tag{3.2.23a}$$

Положим теперь

$$X := L^1_{\mathrm{loc}}(D), \quad X_0 := C_{\mathbb{R}}(D) \subset X, \quad q_1 = q := \nu \tag{3.2.24}$$

и соответственно

$$\begin{aligned} &H \subset \mathrm{sbh}_*(D) \text{ — выпуклые конус или множество;}\\ &L = \mathrm{lin}^+ \mathbb{R}^X \quad \text{или} \quad L = \mathrm{aff}^+ \mathbb{R}^X. \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

При этом $X$ можно трактовать как приведённый правильный проективный предел векторных решёток (Фреше) $L^1(D_n)$ с естественным отношением порядка $\leqslant$ поточечно п. в. — пример 2.1.4 с представлением (2.1.9). Здесь исчерпание области $D$ областями $D_n$ можно начинать с области $D_1 \supset \operatorname{supp} \nu$ (см. замечание 2.1.1).

Далее удобно случаи выпуклых конуса $H$ и множества $H$ рассмотреть раздельно.

**I.** $H$ **— выпуклый конус** При условии (a) теоремы 3.2.1 используем следствие 2.4.1 из теоремы 2.4.1, а при условии (b) — топологическую теорему 2.4.3. Условие (iii-iv) следствия 2.4.1 составляет содержание условия (a) теоремы 3.2.1, а условие (b) теоремы 3.2.1 требуется в теореме 2.4.3. Условие (c) теоремы 3.2.1 влечёт за собой выполнение как условия (ii) теоремы 2.4.1, так и условия (i) теоремы 2.4.3. В рамках условия (a) теоремы 3.2.1 для $H \subset \mathrm{sbh}_*(D)$ как условие (v) теоремы 2.4.1, так и условие

(iii) теоремы 2.4.3 входят в перечень основных свойств субгармонических функций. То, что $H$ содержит отрицательную функцию означает, что $H\cap(-X^+)\neq\emptyset$. В частности, выполнено условие (i) теоремы 2.4.1. Таким образом, при выборе условия (a) в рамках теоремы 3.2.1 выполнены все условия следствия 2.4.1 из теоремы 2.4.1, а при выборе условия (b) в рамках теоремы 3.2.1 выполнены все условия топологической теоремы 2.4.3 в дополненной усиленной версии с $H\cap(-X^+)\neq\emptyset$. Следовательно, выполнено заключение (2.4.5), которое в рассматриваемой конкретной ситуации может быть записано для любой непрерывной функции $f\in X_0\overset{(3.2.24)}{=}C_{\mathbb R}(D)$ как

$$\begin{aligned}\operatorname{spf}_{H,q}(f)&\overset{(2.3.1)}{:=}\sup\left\{\int h\,\mathrm d\nu\;\middle|\;H\ni h\leqslant f\right\}\\&=\inf\Biggl\{l(f)\;\Biggm|\;l\in\operatorname{lin}^+\mathbb R^X;\int h\,\mathrm d\nu\leqslant l(g)\\&\qquad\text{при всех } h\in H,\ h\leqslant g,\ g\in C_{\mathbb R}(D)\Biggr\}\\&=\inf\Bigl\{l(f)\;\Bigm|\;l\in\operatorname{lin}^+\mathbb R^X,\ q\prec_H^{X_0}l\Bigr\}\\&\overset{(2.3.9)}{=:}\inf\bigl(\operatorname{spr}(\nu;H,X_0,\operatorname{lin}^+\mathbb R^X)(f)\bigr)\\&\qquad\text{для любой непрерывной } f\in C_{\mathbb R}(D).\end{aligned}\tag{3.2.26}$$

Но по следствию 2.1.1 можем $\operatorname{lin}^+\mathbb R^X$ отождествить с $\operatorname{Meas}^+_{\rm cmp}(D)$, что, впрочем, в рамках (3.2.24) и (3.2.25) давно известно и ранее. Кроме того, отметим, что по определению 3.1.1 линейного выметания меры и определению 2.3.2 абстрактного выметания и ростка в (2.3.9) в данной конкретной ситуации

$$\operatorname{spr}(\nu;H,X_0,\operatorname{lin}^+\mathbb R^X)=\bigl\{\mu\in\operatorname{Meas}^+_{\rm cmp}(D)\bigm|\nu\prec\mu\bigr\}.$$

Отсюда и из (3.2.26)

$$\sup\left\{\int h\,\mathrm{d}\nu \,\middle|\, H \ni h \leqslant f\right\}$$
$$= \inf\left\{\int f\,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, \nu \prec \mu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)\right\} \quad \forall f \in C_{\mathbb{R}}(D).$$

Применяя последнее к непрерывной функции $F^{*r}_{\mathrm{bal}}$ из (3.2.19) согласно (3.2.23l) получаем

$$\sup\left\{\int h\,\mathrm{d}\nu \,\middle|\, H \ni h \leqslant F^{*r}_{\mathrm{bal}}\right\}$$
$$= \inf\left\{\int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, \nu \prec \mu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)\right\} \overset{(3.2.23l)}{>} -\infty$$

Следовательно, существует функция $h \in H$, которая удовлетворяет неравенству $h \leqslant F^{*r}_{\mathrm{bal}}$ на $D$. Так как функции

$$F^{*r}_{\mathrm{bal}} \in C_{\mathbb{R}}(D), \quad F^{*r} \in C_{\mathbb{R}}(D)$$

совпадают в $D \setminus U_1$, то для некоторой достаточно большой постоянной $C \in \mathbb{R}$ имеем

$$F^{*r}_{\mathrm{bal}} \leqslant F^{*r} + C \quad \text{на } D. \tag{3.2.27}$$

Это завершает доказательство для п. I.

**II.** $H$ — **выпуклое множество** При условии (a) теоремы 3.2.1 используем теорему 2.4.2, а при условии (b) — топологическую теорему 2.4.4. Условие (iii-iv) следствия 2.4.1, требуемое в теореме 2.4.2, составляет содержание условия (a) теоремы 3.2.1, а условие (b) теоремы 3.2.1 требуется в теореме 2.4.4. Условие (c) теоремы 3.2.1 влечёт за собой выполнение как условия (ii) теоремы 2.4.1, требуемое в теореме 2.4.2, так и условия (i) теоремы 2.4.3, требуемое в теореме 2.4.4. В рамках условия (a) теоремы 3.2.1 для $H \subset \operatorname{sbh}_*(D)$ как условие (v) теоремы 2.4.1, требуемое в теореме 2.4.2, так и условие (iii) теоремы 2.4.3, требуемое в теореме 2.4.4, входят в перечень основных свойств субгармонических функций. При всём этом $0 \in H$. Таким образом, при выборе условия (a) в рамках теоремы 3.2.1 выполнены все условия теоремы 2.4.2, а при выборе условия (b) в рамках теоремы 3.2.1 выполнены все условия топологической теоремы 2.4.4 в дополненной усиленной версии с $0 \in H$ и $q_1(0) = \int 0 \,\mathrm{d}\nu = 0$. Следовательно, выполнено заключение (2.4.5), которое в рассматриваемой конкретной ситуации может быть записано для любой непрерывной функции $f \in X_0 \overset{(3.2.24)}{=} C_{\mathbb{R}}(D)$ как

$$
\begin{aligned}
\operatorname{spf}_{H,q}(f) &\overset{(2.3.1)}{:=} \sup\left\{ \int h \,\mathrm{d}\nu \;\middle|\; H \ni h \leqslant f \right\} \\
&= \inf\Biggl\{ a(f) \;\Bigg|\; a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X;\ \int h \,\mathrm{d}\nu \leqslant a(g) \\
&\qquad \text{при всех } h \in H,\ h \leqslant g,\ g \in C_{\mathbb{R}}(D) \Biggr\} \\
&= \inf\left\{ a(f) \;\middle|\; a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X,\ q \prec_H^{X_0} a \right\} \\
&\overset{(2.3.9)}{=:} \inf\bigl(\operatorname{spr}(\nu; H, X_0, \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X)(f)\bigr) \\
&\qquad \text{для всех непрерывных } f \in C_{\mathbb{R}}(D). \qquad (3.2.28)
\end{aligned}
$$

Но по следствию 2.1.2 можно $\operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$ отождествить с

$$\operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D) + \mathbf{1} \cdot \mathbb{R}^+$$

в рамках (3.2.24) и (3.2.25). Кроме того, отметим, что по определению 3.1.1 аффинного выметания меры и определению 2.3.2 абстрактного выметания и ростка в (2.3.9) в данной конкретной ситуации

$$\begin{aligned}&\operatorname{spr}(\nu; H, X_0, \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X)\\&\overset{(2.4.21)}{=} \Bigl\{\mu + c\cdot\mathbf{1} \Bigm| \mu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D),\ c \in \mathbb{R}^+,\ \nu \preccurlyeq \mu + c\Bigr\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.2.28) для всех $f \in C_{\mathbb{R}}(D)$

$$\begin{aligned}\sup\Bigl\{\int h\,\mathrm{d}\nu \Bigm| H \ni h \leqslant f\Bigr\}&\\ = \inf\Bigl\{\int f\,\mathrm{d}\mu + c \Bigm| \nu \preccurlyeq \mu + c,&\\ \mu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D),\ c \in \mathbb{R}^+\Bigr\}.&\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Применяя (3.2.29) к непрерывной функции $F^{*r}_{\mathrm{bal}}$, из (3.2.19) согласно (3.2.23a) получаем

$$\begin{aligned}\sup\Bigl\{\int h\,\mathrm{d}\nu \Bigm| H \ni h \leqslant F^{*r}_{\mathrm{bal}}\Bigr\}&\\ = \inf\Bigl\{\int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\,\mathrm{d}\mu + c \Bigm| \nu \preccurlyeq \mu + c,&\\ \mu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D),\ c \in \mathbb{R}^+\Bigr\} \overset{(3.2.23a)}{>} -\infty&\end{aligned}$$

Следовательно, существует функция $h \in H$, которая удовлетворяет неравенству $h \leqslant F^{*r}_{\mathrm{bal}}$ на $D$. Так как для некоторого $C \in \mathbb{R}$ имеем (3.2.27), это завершает доказательство для п. II. □

**Замечание 3.2.1.** Если $H$ из теоремы 3.2.1 — *конус,* содержащий строго отрицательную полунепрерывную сверху функцию на $D$, то условие (c) теоремы 3.2.1 выполнено автоматически.

В заключение подраздела приведём простые примеры выпуклых конусов и множеств в $\operatorname{sbh}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^m$ или $D \subset \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих всем условиям теоремы 3.2.1. Эти примеры легко получаются на основе известных свойств выпуклых, (плюри)субгармонических и (плюри)гармонических функций (см. также [28, примеры 7.1–7.4]).

**Примеры. 1.** Для произвольной области $D \subset \mathbb{R}^m$ — это выпуклые конусы $H$, равные $\operatorname{sbh}_*(D)$, $\operatorname{har}(D)$, $\operatorname{conv} \mathbb{R}^D$ в случае выпуклости $D$.

**2.** Для области $D \subset \mathbb{C}^n$ — это выпуклые конусы $H$, равные $\operatorname{plsbh}_*(D) := \operatorname{plsbh}(D) \setminus \boldsymbol{-\infty}$, $\operatorname{plhar}(D)$.

**3.** Пусть $C$ — некоторый выпуклый конус непрерывных положительных функций на $D \subset \mathbb{R}^m$ или на $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда для любого конуса $H$ из предыдущих пунктов 1 и 2 их подмножества

$$\Bigl\{h \in H \Bigm| \exists f \in C, h \leqslant f \text{ на } D\Bigr\} \tag{3.2.30}$$

— выпуклые конусы, удовлетворяющие условиям части I теоремы 3.2.1.

**4.** Пусть $C$ — некоторое выпуклое множество непрерывных положительных функций на $D \subset \mathbb{R}^m$ или на $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда множества функций (3.2.30) — выпуклые подмножества, удовлетворяющие условиям части II теоремы 3.2.1.

**Замечание 3.2.2.** Отметим, что как в п. 4, так и в п. 3 можно рассматривать классы функций $C$, определённых только на части $S \subset D$, с изменениями «$h \leqslant f$ *на* $S$» в определениях классов (3.2.30), но при этом придётся накладывать на $S$ некоторые условия, связанные, например, с принципом максимума, чтобы верхние регуляризации верхних пределов последовательностей функций из $H$, ограниченных сверху на $S$ функциями из $C$, не принимали значений $+\infty$ и принадлежали $H$. Такого рода выпуклые конусы использовались, например, в [55].

Кроме того, многие инвариантные относительно определённых преобразований области $D$ выпуклые подконусы и выпуклые подмножества конусов $H$ из пунктов 1 и 2 могут удовлетворять условиям теоремы 3.2.1 (чётные, периодические, инвариантные относительно конформных и биголоморфных автоморфизмов псевдовыпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ и т. д., и т. п.). Это тема отдельного исследования и предполагается рассмотреть её в ином месте.

### 3.2.2 Одна версия для применений

Для применений к проблемам 3.1.1–3.1.4 из раздела 3.1 будет отдельно рассмотрен случай функции вида $F := M - u$, где $u$ — некоторая (плюри)субгармоническая функция. Следующее следствие несколько уточняет и обобщает результаты с подобной функцией $F = M - u$ из наших работ [9], [24]– [33], [56].

**Следствие 3.2.1.** *Пусть* $H \subset \operatorname{sbh}_*(D)$, $u \in \operatorname{sbh}_*(D)$, $M \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, $M(D) \subset \mathbb{R}_{\pm\infty}$ *и фиксированы*

$$\begin{gathered} 0 \neq \nu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D), \\ \operatorname{supp} \nu \overset{(3.2.8)}{\subset} U_0 \Subset D, \ U_0 \text{ — \textit{область}.} \end{gathered} \tag{3.2.31}$$

I. *Пусть выполнено* (3.2.1), *функция* $M$ *локально универсально измеримая для некоторого множества* *мер*[2] $\mathcal{M} \subset \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$. *Если существует функция* $h \in H$, *удовлетворяющая неравенству*

$$u + h \leqslant M \text{ на } D, \tag{3.2.32}$$

*то найдется постоянная* $C \in \mathbb{R}$, *для которой*

$$\int u \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int M \,\mathrm{d}\mu + C \quad \text{при всех } \nu \prec \mu \in \mathcal{M}, \tag{3.2.33l}$$

$$\int u \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \mathrm{d}\mu + c + C \quad \text{при всех } \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathcal{M},\ c \in \mathbb{R}^+. \tag{3.2.33a}$$

II. *Пусть выполнено условие* (c) *и одно из условий* (a) *или* (b) *из теоремы* 3.2.1,

$$\mathcal{M} \overset{(3.2.7)}{:=} \mathrm{Meas}^+_{\infty}(D) \bigcap \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_0),$$

*а* $r \geqslant 0$ — *локально отделённая от нуля функция со свойствами из* (3.2.6).

1. *Пусть* $H$ — *выпуклый конус, содержащий отрицательную функцию, и для некоторой постоянной* $C \in \mathbb{R}$ *имеет место* (3.2.33l). *Тогда найдутся строго положительная функция* $\widehat{r} \leqslant r$ *класса* $C^\infty$ *на* $D$, *постоянная* $\mathrm{const} \in \mathbb{R}$ *и функция* $h \in H$, *для которых (ср. с* (3.2.32)*)*

$$u + h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \mathrm{const} \quad \text{на } D. \tag{3.2.34}$$

*Кроме того, часто можно избавиться от участия функции* $\widehat{r}$ *в правой части* (3.2.34)*:*

[2] Для этого достаточно, например, полунепрерывности (сверху или снизу) функции $M$.

(i) *если функция* $M$ *непрерывна на* $D$, *то в* (3.2.34) *можно заменить* $M^{*\widehat{r}}$ *на* $M$, *что отличается от* (3.2.32) *лишь дополнительным слагаемым* $+\operatorname{const}$ *в правой части;*

(ii) *если* $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$, *то в* (3.2.34) *можно заменить* $M^{*\widehat{r}}$ *на усреднение* $M$ *по сферам*

$$S_M\bigl(x, r(x)\bigr) \underset{x\in D}{:=} \frac{1}{s_{m-1} r^{m-1}(x)} \int\limits_{\partial B(x,r(x))} M(y)\,\mathrm{d}\sigma(y), \tag{3.2.35}$$

*где* $s_{m-1}$ — *площадь единичной сферы из* (3.1.9), *а* $\mathrm{d}\sigma$ — *элемент площади поверхности сферы* $\partial B\bigl(x, r(x)\bigr)$.

2. *Пусть* $H$ — *выпуклое множество,* $0 \in H$, *и для некоторой постоянной* $C \in \mathbb{R}$ *имеет место* (3.2.33a). *Тогда найдутся строго положительная функция* $\widehat{r} \leqslant r$ *класса* $C^\infty$ *на* $D$, *постоянная* $\operatorname{const} \in \mathbb{R}$ *и функция* $h \in H$, *для которых выполнено* (3.2.34). *Кроме того, можно избавиться от участия функции* $\widehat{r}$ *в правой части* (3.2.34) *как в* II(1)i *и* II(1)ii.

*Доказательство.* В доказательстве полагаем $F := M - u$.

I. Функция $F$ локально универсально измеримая для $\mathcal{M}$, поскольку $u \in \operatorname{sbh}_*(D)$ полунепрерывна сверху. По предложению 3.2.1 из (3.2.2l) и (3.2.2a) получаем соответственно (3.2.33l) и (3.2.33a).

II1. Выполнены все условия теоремы 3.2.1 в части I, откуда ввиду $F^{*\widehat{r}}=M^{*\widehat{r}}-u^{*\widehat{r}}$ получаем

$$u^{*\widehat{r}}+h\overset{(3.2.10)}{\leqslant}M^{*\widehat{r}}+\mathrm{const}\quad \text{на } D \\ \text{для некоторой функции } h\in H. \tag{3.2.36}$$

Мера $\alpha^{(r(x))}$ — это мера Йенсена, вследствие чего $u\leqslant u^{*\widehat{r}}$ на $D$ и получаем неравенство (3.2.34).

Если $M\in C(D)$, то $M$ равномерно непрерывна на компактах из $D$. Поэтому изначально можно выбрать локально отделённую от нуля функцию $r>0$ из (3.2.6) столь малой, что

$$\sup_{|y-x|\leqslant r(x)} M(y)\leqslant M(x)+1\quad \text{для всех } x\in D.$$

Отсюда $M^{*\widehat{r}}\leqslant M+1$ на $D$ и имеет место усиление II(1)i.

Если $M\in \mathrm{sbh}_*(D)$, то значение усреднения $M^{*\widehat{r}}(x)$ не превышает (см.[3] [3, предложение 3]) усреднения $S_M\bigl(x,\widehat{r}(x)\bigr)\leqslant S_M\bigl(x,r(x)\bigr)$ ввиду возрастания по радиусу усреднений (3.2.35).

II2. Выполнены все условия теоремы 3.2.1 в части II, откуда получаем (3.2.36). Дальше рассуждения дословно те же, что и при доказательстве II1 после (3.2.36). □

[3]Это утверждение доказано для субгармонических функция на $\mathbb{C}$, но доказательство без труда переносится на субгармонические функции в окрестности $\overline{B}\bigl(x,\widehat{r}(x)\bigr)\subset\mathbb{R}^m$.

## 3.3 Применения к голоморфным функциям

Для области $D \subset \mathbb{C}^n$ и *расширенной числовой функции* $M$ на $D$ рассматриваем весовые классы

$$\operatorname{Hol}(D, M) := \left\{ f \in \operatorname{Hol}(D) \;\middle|\; \sup_{z \in D} \frac{|f(z)|}{\exp M(z)} < +\infty \right\}. \qquad (3.3.1)$$

Далее всюду в этом подразделе 3.3 рассматриваются

$$\boxed{\mathcal{M} \overset{(3.2.7)}{:=} \operatorname{Meas}^+_\infty(D) \cap \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_0),}$$

$r \geqslant 0$ — произвольная локально отделённая от нуля функция из (3.2.6), *фиксированные* мера $\nu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ и область $U_0$ удовлетворяют условиям (3.2.31), а $M \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. При этом в рамках определения 3.1.1 линейные выметания $\prec$ рассматриваются в $\mathcal{M}$ и аффинные выметания $\preccurlyeq$ в $\mathcal{M} + \mathbb{R}\mathbf{1}$ относительно выпуклых конусов $H$, которые конкретно указываются в каждом утверждении.

### 3.3.1 К нетривиальности весовых классов голоморфных функций

**Теорема 3.3.1.** *Пусть* $D$ *— псевдовыпуклая область,* $H = \operatorname{plsbh}_*(D)$*. Если*

$$-\infty \overset{(3.2.33l)}{<} \inf \left\{ \int M \, \mathrm{d}\mu \;\middle|\; \nu \prec \mu \in \mathcal{M} \right\} \qquad (3.3.2)$$

*то найдётся строго положительная функция* $\widehat{r} \leqslant r$ *класса* $C^\infty$ *на* $D$*, для которой при любом числе* $a > 0$

*для весовой функции*

$$\widetilde{M}(z) := \inf_{0<d<\min\bigl\{1,\operatorname{dist}(z,\partial D)\bigr\}} \left(B_{M^{*\widehat{r}}}(z,d) + n\ln\frac{1}{d}\right) \\ +(n+a)\ln\bigl(2+|z|\bigr), \tag{3.3.3}$$

*зависящей только от $M$, $\widehat{r}$ и $a$, где*

$$B_M(z,d) := \frac{n!}{\pi^n d^{2n}} \int\limits_{B(z,d)} M \,\mathrm{d}\lambda \tag{3.3.4}$$

*— усреднение функции $M$ по шару $B(z,d)$, класс $\operatorname{Hol}\bigl(D,\widetilde{M}\,\bigr)$ не тривиален, т.е. содержит ненулевую функцию.*

*Если $M\in C(D)$, то функцию $\widehat{r}$ можно убрать, заменив $M^{*\widehat{r}}$ в правой части (3.3.3) на $M$.*

*Если $M\in \operatorname{sbh}_*(D)$, то для любой локально отделённой от нуля функции $d\colon D\to\mathbb{R}_*^+$ со свойствами*

$$d(z) < \min\bigl\{1,\operatorname{dist}(z,\partial D)\bigr\} \quad \textit{при всех } z\in D, \\ A := \sup_{z\in D}\left(\frac{1}{d(z)}\sup_{z'\in B(z,d(z))} d(z')\right) < +\infty \tag{3.3.5}$$

*вместо функции $\widetilde{M}$ из (3.3.3) можно использовать функцию*

$$\widetilde{M}(z) \underset{z\in D}{:=} B_M\bigl(z,d(z)\bigr) \\ + n\ln\frac{1}{d(z)} + (n+a)\ln\bigl(2+|z|\bigr). \tag{3.3.6}$$

*Доказательство.* По следствию 3.2.1, часть II1, для $u=0$ из условия (3.3.2), соответствующего (3.2.33l), найдется функция $h\in \operatorname{plsbh}_*(D)$, с которой выполнено (3.2.34), т.е.

$$h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \mathrm{const} \quad \text{на } D. \tag{3.3.7}$$

**Теорема A** ( [2, теорема 1]). *Для псевдовыпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ и $h \in \operatorname{plsbh}_*(D)$ для любого числа $a > 0$ найдется ненулевая функция $f \in \operatorname{Hol}(D)$, удовлетворяющая оценке*

$$\begin{aligned} \ln\bigl|f(z)\bigr| \leqslant B_h(z,d) + n\ln\frac{1}{d} \\ + (n+a)\ln\bigl(1+|z|+d\bigr) \\ \text{для всех } z \in D \text{ и } d \in \bigl(0, \operatorname{dist}(z,\partial D)\bigr). \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Применим усреднение по шарам $B(z,d)$ к обеим частям неравенства (3.3.7) с добавками двух последних слагаемых из правой части (3.3.8) при дополнительном ограничении $d < 1$. Тогда по теореме A существует ненулевая функция $f \in \operatorname{Hol}(D, \widetilde{M})$ с функцией $\widetilde{M}$ из (3.3.3). Вариация теоремы 3.3.1 для $M \in C(D)$ следует из части II(1)i следствия 3.2.1. В случае $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$ следует воспользоваться частью II(1)ii следствия 3.2.1 при $r = \frac{1}{A}d$ для функции $d$ из (3.3.5). При этом несложные технические выкладки позволяют выбрать $\widetilde{M}$ как в (3.3.6). □

### 3.3.2 К описанию нулевых множеств

**Теорема 3.3.2.** *Пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ односвязная при $n = 1$ и звёздная относительно некоторой точки $z_0 \in D$ при $n > 1$, т.е. для любой точки $z \in D$ отрезок $[z_0, z]$ лежит в $D$. Пусть $H = \operatorname{plhar}(D)$, $\nu := \delta_{z_0}$ — мера Дирака в точке $z_0 \in D$, $\mathsf{Z}$ — дивизор нулей некоторой ненулевой функции $f_{\mathsf{Z}} \in \operatorname{Hol}(D)$, т.е. $\operatorname{Zero}_{f_{\mathsf{Z}}} = \mathsf{Z}$. Если для некото-*

*рой постоянной* $C \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\int \ln|f_{\mathsf{Z}}|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int M\,\mathrm{d}\mu + C \qquad \text{при всех } \delta_{z_0} \prec \mu \in \mathcal{M}, \tag{3.3.9}$$

*то найдутся строго положительная функция* $\widehat{r} \leqslant r$ *класса* $C^\infty$ *на* $D$ *и функция* $f \in \mathrm{Hol}(D, M^{*\widehat{r}})$ *с дивизором нулей* $\mathrm{Zero}_f = \mathsf{Z}$. *Если дополнительно* $M \in C(D)$, *то можно выбрать такую функцию* $f$ *с* $\mathrm{Zero}_f = \mathsf{Z}$ *из* $\mathrm{Hol}(D, M)$. *Если* $M \in \mathrm{sbh}_*(D)$, *то такую* $f$ *можно выбрать из* $\mathrm{Hol}(D, M^{*r})$.

*Доказательство.* По следствию 3.2.1, часть II1, для $u = \ln|f_{\mathsf{Z}}|$ из условия (3.3.9), соответствующего (3.2.33l), найдется плюригармоническая функция $h \in \mathrm{plhar}(D)$, с которой выполнено (3.2.34), т.е.

$$\ln|f_{\mathsf{Z}}| + h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \mathrm{const} \quad \text{на } D. \tag{3.3.10}$$

Для плюригармонической функции $h \in \mathrm{plhar}(D)$ на найдётся функция $g \in \mathrm{Hol}(D)$ [60, предложение 2.2.13], для которой $\mathrm{Re}\, g = h$. Тогда функция $f := f_{\mathsf{Z}} e^g$ ввиду (3.3.10) искомая. Уточнения или упрощения для $M \in C(D)$ и $M \in \mathrm{sbh}_*(D)$ следуют соответственно из части II(1)i следствия 3.2.1 и из $M^{*\widehat{r}} \leqslant M^{*r}$. □

### 3.3.3 К описанию нулевых подмножеств

**Теорема 3.3.3.** *Пусть область* $D \subset \mathbb{C}^n$ *псевдовыпуклая,* $H = \mathrm{plsbh}_*(D)$, *положительная функция* $\mathsf{Z} \leqslant \mathrm{Zero}_{f_0}$ *на* $D$, *где* $\mathrm{Zero}_{f_0}$ — *дивизор нулей некоторой ненулевой функции* $f_0 \in \mathrm{Hol}(D)$. *Если для некоторой постоянной* $C \in \mathbb{R}$

*имеем*

$$\int \ln|f_0|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int M\,\mathrm{d}\mu + C \qquad \text{при всех } \nu \prec \mu \in \mathcal{M}, \tag{3.3.11}$$

*то найдутся строго положительная функция* $\widehat{r} \leqslant r$ *класса* $C^\infty$ *на* $D$ *и ненулевая* $g \in \mathrm{Hol}\bigl(D, \widetilde{M}\bigr)$, *где* $\widetilde{M}$ *из* (3.3.3), *с дивизором нулей* $\mathrm{Zero}_g \geqslant \mathsf{Z}$ *на* $D$. *Если дополнительно* $M \in C(D)$, *то можно выбрать такую функцию* $g \neq 0$ *с* $\mathrm{Zero}_g \geqslant \mathsf{Z}$ *из* $\mathrm{Hol}(D, M)$. *Если* $M \in \mathrm{sbh}_*(D)$, *то для любой локально отделённой от нуля функции* $d\colon D \to \mathbb{R}^+_*$, *удовлетворяющей условиям* (3.3.5), *можно выбрать такую ненулевую* $g \in \mathrm{Hol}\bigl(D, \widetilde{M}\bigr)$ *с* $\widetilde{M}$ *из* (3.3.6) *и* $\mathrm{Zero}_g \geqslant \mathsf{Z}$.

*Доказательство.* По следствию 3.2.1, часть II1, для субгармонической $u := \ln|f_0|$ из условия (3.3.11), соответствующего (3.2.33l), найдется функция $h \in \mathrm{plsbh}_*(D)$, с которой выполнено (3.2.34):

$$\ln|f_0| + h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \mathrm{const} \quad \text{на } D. \tag{3.3.12}$$

По теореме A существует ненулевая функция $f \in \mathrm{Hol}(D)$, удовлетворяющая (3.3.8). Применим усреднение по шарам $B(z,d)$ к обеим частям неравенства (3.3.12) с добавками двух последних слагаемых из правой части (3.3.8) при дополнительном ограничении $d < 1$. Тогда ввиду субгармоничности $\ln\bigl|f_0(z)\bigr| \leqslant B_{\ln|f_0|}(z,d)$ при всех $z \in D$ и функция $g := f_0 f$ — требуемая. Вариация теоремы 3.3.3 для $M \in C(D)$ следует из части II(1)i следствия 3.2.1. В случае $M \in \mathrm{sbh}_*(D)$ следует воспользоваться частью II(1)ii следствия 3.2.1 при $r = \frac{1}{A}d$ для функции $d$

из (3.3.5). При таком выборе некоторые технические выкладки позволяют выбрать $\widetilde{M}$ как в (3.3.6). $\square$

### 3.3.4 К представлению мероморфных функций

**Теорема 3.3.4.** *Пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ псевдовыпукла и*

$$
\begin{gathered}
Q = \frac{q_1}{q_2} \in \operatorname{Mer}(D), \quad q_1, q_2 \in \operatorname{Hol}(D) \setminus 0, \\
U_Q := \left[\begin{matrix} \max\bigl\{\ln|q_1|, \ln|q_2|\bigr\}, \\ \ln\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}. \end{matrix}\right.
\end{gathered} \tag{3.3.13}
$$

*Если $H := \operatorname{plsbh}_*(D)$ и для некоторого $C \in \mathbb{R}$ имеем*

$$
\int U_Q \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int M \,\mathrm{d}\mu + C \quad \text{при всех } \nu \prec \mu \in \mathcal{M}, \tag{3.3.14}
$$

*то найдутся строго положительная $\widehat{r} \leqslant r$ класса $C^\infty$ на $D$ и ненулевые $g_1, g_2 \in \operatorname{Hol}\bigl(D, \widetilde{M}\bigr)$, где $\widetilde{M}$ из (3.3.3), представляющие $Q = g_1/g_2$. Если $M \in C(D)$, то можно выбрать эти голоморфные функции $g_1, g_2 \neq 0$, представляющие $Q = g_1/g_2$, из $\operatorname{Hol}(D, M)$. Если $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$, то для любой локально отделённой от нуля функции $d\colon D \to \mathbb{R}^+_*$, удовлетворяющей (3.3.5), можно выбрать $g_1, g_2 \in \operatorname{Hol}\bigl(D, \widetilde{M} \setminus 0\bigr)$ с $\widetilde{M}$ из (3.3.6) и $Q = g_1/g_2$.*

*Доказательство.* По следствию 3.2.1, часть III1, для функции $u := U_Q \in \operatorname{sbh}_*(D)$ из условия (3.3.14), соответствующего (3.2.33l), найдется функция $h \in \operatorname{plsbh}_*(D)$, с которой выполнено (3.2.34):

$$
U_Q + h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \text{const} \quad \text{на } D. \tag{3.3.15}
$$

По теореме A существует ненулевая функция $f \in \operatorname{Hol}(D)$, удовлетворяющая (3.3.8). Применим усреднение по шарам $B(z,d)$ к обеим частям неравенства (3.3.15) с добавками двух последних слагаемых из правой части (3.3.8) при дополнительном ограничении $d < 1$. Тогда ввиду субгармоничности $U_Q(z) \leqslant B_{U_Q}(z,d)$ при всех $z \in D$ и получаем неравенство $U_Q + \ln|f| \leqslant \widetilde{M} + \mathrm{const}$ на $D$ для функции $\widetilde{M}$ из (3.3.3). Отсюда при любом из двух выборов функции $U_Q$ в (3.3.13) имеем

$$\left.\begin{matrix} \max\bigl\{\ln|q_1|, \ln|q_2|\bigr\} + \ln|f| \\ \ln\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2} + \ln|f| \end{matrix}\right] \leqslant \widetilde{M} + \mathrm{const} \quad \text{на } D.$$

и функции

$$\begin{cases} g_1 & := q_1 f, \\ g_2 & := q_2 f, \end{cases} \qquad \frac{g_1}{g_2} = \frac{q_1 f}{q_2 f} = \frac{q_1}{q_2} = Q, \tag{3.3.16}$$

— искомые. Вариация теоремы 3.3.1 для $M \in C(D)$ следует из части II(1)i следствия 3.2.1. В случае $M \in \mathrm{sbh}_*(D)$ следует воспользоваться частью II(1)ii следствия 3.2.1 при $r = \frac{1}{A}d$ для функции $d$ из (3.3.5). При этом простые выкладки позволяют выбрать $\widetilde{M}$ как в (3.3.6). □

**Теорема 3.3.5.** *Пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ односвязная при $n = 1$ и звёздная относительно некоторой точки $z_0 \in D$ при $n > 1$. Пусть $H := \operatorname{plhar}(D)$, $\nu := \delta_{z_0}$, $Q$ и $U_Q$ — функции из (3.3.13). Если для некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$ имеем*

$$\int U_Q \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int M \,\mathrm{d}\mu + C \qquad \text{при всех } \delta_{z_0} \prec \mu \in \mathcal{M}, \tag{3.3.17}$$

*то найдутся строго положительная* $\widehat{r} \leqslant r$ *класса* $C^\infty$ *на* $D$ *и функция* $f \in \operatorname{Hol}(D)$*, не обращающаяся в нуль на* $D$*, для которой выполнено* (3.3.16)*,* $g_1, g_2 \in \operatorname{Hol}(D, M^{*\widehat{r}})$ *и, в частности,* $\operatorname{Zero}_{g_1} = \operatorname{Zero}_{q_1}$*,* $\operatorname{Zero}_{g_2} = \operatorname{Zero}_{q_2}$*. Если дополнительно* $M \in C(D)$*, то можно выбрать такую пару функций* $g_1, g_2$ *из* $\operatorname{Hol}(D, M)$*. Если* $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$*, то такие* $g_1, g_2$ *можно выбрать из* $\operatorname{Hol}(D, M^{*r})$*.*

*Доказательство.* По следствию 3.2.1, часть II1, для субгармонической $u = U_Q$ из условия (3.3.17), соответствующего (3.2.33l), найдется функция $h \in \operatorname{plhar}(D)$, с которой выполнено (3.2.34), т.е. (3.3.15). Для плюригармонической функции $h$ в $D$ найдётся функция $g \in \operatorname{Hol}(D)$ [60, предложение 2.2.13], для которой $\operatorname{Re} g = h$. Тогда для функции $f := e^g$ функции $g_1, g_2$ вида (3.3.16) согласно (3.3.15) искомые. Уточнения/упрощения для $M \in C(D)$ и $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$ следуют соответственно из части II(1)i следствия 3.2.1 и из $M^{*\widehat{r}} \leqslant M^{*r}$. □

### 3.3.5 Заключительные замечания

Мы не использовали здесь применительно к голоморфным функциям следствие 3.2.1 в части II2 для выпуклого множества $H$, а также её часть I. Содержательное применение последней части дано нами в [33], [37] (см. также библиографию в них). Здесь мы также не применяли аппарат потенциалов Йенсена, двойственных к мерам Йенсена, теории голоморфных потоков Е. М. Полецкого вкупе с голоморфными и полиномиальными дисками. Эти и другие подходы будут рассмотрены в ином месте.

# Глава 4

# Однородные функции

В этой главе рассматриваются задачи существования и построения верхней и нижней огибающей для произвольной функции со значениями из пополнения упорядоченного множества S по некоторому классу функций со значениями из S только для простейшего случая класса однородных функций. Затрагиваются лишь порядково-алгебраические версии без привлечения топологии [38].

## 4.1 Определение, примеры и свойства однородных функций

Пусть $(H, \cdot)$ — *полугруппа с мультипликативной формой записи,* т.е. множество с ассоциативной бинарной операцией $\cdot : H^2 \to H$, или $\cdot : (h_1, h_2) \mapsto h_1 \cdot h_2 =: h_1 h_2$, $h_1, h_2 \in H$.

Множество $X$ — $H$*-множество,* если на множестве $X$ определено действие полугруппы $H$ (слева). Другими словами, на $X$ задана операция умножения (слева) на элементы полугруппы $H$ по правилу $(h, x) \mapsto hx \in X$, $h \in H$, $x \in X$, с *аксиомой ассоциативности*

`Ax0.` $h_1(h_2 x) = (h_1 h_2)x$ *для любых* $x \in X$ *и* $h_1, h_2 \in H$.

Если $H$ — полугруппа с *единичным элементом* 1, т.е. *моноид,* то определение $H$-множества $X$ дополняем ещё одной аксиомой единичного элемента

$\mathtt{Ax1}$. $1x := 1 \cdot x = x$ *для любого элемента* $x \in X$.

Пусть $(\mathtt{H}, \cdot)$ — ещё одна, вообще говоря, другая полугруппа $\mathtt{H}$ с другой операцией умножения

$$\cdot : (h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2 \in \mathtt{H} \quad \text{для } h_1, h_2 \in \mathtt{H}.$$

**Определение 4.1.1.** Пусть $X$ — $H$-множество, а $\mathrm{S}$ — $\mathtt{H}$-множество, а также $\mathfrak{h}$ — гомоморфизм полугруппы $H$ в полугруппу $\mathtt{H}$. Функцию $f\colon X \to \mathrm{S}$ будем называть $\mathfrak{h}$-*однородной,* если

$$f(hx) = \mathfrak{h}(h) f(x) \text{ \textit{для любых} } x \in X \text{ \textit{и} } h \in H. \qquad \text{(hg)}$$

Множество всех $\mathfrak{h}$-однородных функций $f \in \mathrm{S}^X$ на $X$ обозначаем через $\mathfrak{h}\text{-}\mathrm{hg}\,(X)$.

Всюду далее $H$ и $\mathtt{H}$ — как минимум *полугруппы,* а $\mathfrak{h}\colon H \to \mathtt{H}$ — *гомоморфизм полугрупп,* $X$ — $H$-*множество,* $\mathrm{S}$ — $\mathtt{H}$-*множество,* а при использовании множества $\mathfrak{h}\text{-}\mathrm{hg}\,(X)$ часто не указываем $H$-множество $X$, т.е. пишем просто $\mathfrak{h}$-hg. Кроме того, *всюду далее* в определениях и, как следствие, в утверждениях, фигурирует только образ $\mathfrak{h}(H) \subset \mathtt{H}$ полугруппы $H$. Поэтому, не умаляя общности, можем всюду считать, что $\mathfrak{h}$ — *эпиморфизм полугрупп.* При этом в случае, когда $(H, \cdot, 1)$ ещё и *группа,* то гомоморфный образ группы $H$ в полугруппе $\mathtt{H}$ можно рассматривать как группу с $\mathtt{1} := \mathfrak{h}(1)$ и $\bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)^{-1} := \mathfrak{h}(h^{-1})$, $h \in H$. Таким образом, в случае *группы* $H$, не умаляя общности, можем считать *группой* и $\mathtt{H} = \mathfrak{h}(H)$. Далее J — множество индексов произвольной природы. Примеры 4.1.1–4.1.7 относятся к классическим видам однородных функций.

**Пример 4.1.1.** Пусть $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus 0$ — *«проколотая» вещественная ось*, $H = \mathtt{H} = (\mathbb{R}_*, \cdot, 1)$ — мультипликативная группа с обычным умножением $\cdot$. При фиксированном $p \in \mathbb{Z}$ определён гомоморфизм $\mathfrak{h}\colon r \underset{r\in\mathbb{R}_*}{\longmapsto} r^p$. Пусть при каждом $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ множество $C_\mathrm{j}$ — экземпляр вещественной оси $\mathbb{R}$ и при различных $\mathrm{j}_1 \neq \mathrm{j}_2$ каждые два экземпляра множеств $C_{\mathrm{j}_1}$ и $C_{\mathrm{j}_2}$ имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{R}$. Полагаем $\mathrm{S} := \mathbb{R}$, а

$$X := \bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}} C_\mathrm{j}. \tag{4.1.1}$$

Здесь $\mathfrak{h}$-однородные функции — это *однородные степени p функции.*

**Пример 4.1.2.** Пусть $\mathbb{R}^+_* := \mathbb{R}^+ \setminus 0$; $H = \mathtt{H} = (\mathbb{R}^+_*, \cdot, 1)$ — мультипликативная группа строго положительных чисел. При фиксированном $p \in \mathbb{R}$ определён гомоморфизм $\mathfrak{h}\colon r \mapsto r^p$, $r \in \mathbb{R}^+_*$. Пусть при каждом $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ множество $C_\mathrm{j}$ — экземпляр *положительного луча* $\mathbb{R}^+$ и каждые $C_{\mathrm{j}_1}$ и $C_{\mathrm{j}_2}$ при $\mathrm{j}_1 \neq \mathrm{j}_2$ имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{R}^+$.

Рассматриваем $S := \mathbb{R}^+$, а $X$ построенное как в (4.1.1). В этих соглашениях $\mathfrak{h}$-однородные функции — это *положительно однородные степени p функции* [13, Однородная функция].

**Пример 4.1.3.** $H = (\mathbb{R}_*, \cdot, 1)$, $\mathtt{H} = (\mathbb{R}^+_*, \cdot, 1)$ — мультипликативные группы; при фиксированном $p \in \mathbb{R}$ гомоморфизм $\mathfrak{h}\colon r \underset{r\in\mathbb{R}_*}{\longmapsto} |r|^p$; $X$ такое же, как в Примере 4.1.1, а $\mathrm{S} := \mathbb{R}^+$ такое же, как в Примере 4.1.2. В таком случае уже $\mathfrak{h}$-однородные функции — это *абсолютно однородные степени $p$ функции.*

**Пример 4.1.4.** Здесь $r_0, \mathtt{r}_0 \in \mathbb{R}^+_*$; $p \in \mathbb{Z}$;

$$H = \left\{ r_0^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathtt{H} = \left\{ \mathtt{r}_0^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

— мультипликативные циклические группы; гомоморфизм $\mathfrak{h}\colon r^n \mapsto \mathtt{r}_0^{np}$, $n \in \mathbb{Z}$; $X$ и $\mathrm{S}$ такие же, как в Примере 4.1.2. При этом $\mathfrak{h}$-однородные функции — это *ограниченно (относительно $H$) однородные степени $p$ функции* [69].

**Пример 4.1.5.** Пусть $n \in \mathbb{N}$; $H = \bigl((\mathbb{R}^+_*)^n, \cdot, (1, \cdots, 1)\bigr)$ — группа с покомпонентным умножением векторов, $\mathtt{H} = \bigl(\mathbb{R}^+_*, \cdot, 1\bigr)$. При фиксированном $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ определён гомоморфизм

$$\vec{r} := (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^+_*)^n = H, \quad \mathfrak{h}(\vec{r}\,) := \prod_{k=1}^{n} r_k^{p_k} \in \mathbb{R}^+_* = \mathtt{H},$$

$X := \mathbb{R}^n$ — векторы-столбцы $\vec{x} \in X$ и $\vec{r} \cdot \vec{x}$ — скалярное произведение, $\mathrm{S} := \mathbb{R}$. Здесь $\mathfrak{h}$-однородные функции — это *положительно однородные степени $\vec{p}$ функции $n$ переменных* [13, Однородная функция].

**Пример 4.1.6.** Пусть $\mathbb{C}$ — поле *комплексных чисел*, $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus 0$ — *проколотая комплексная плоскость.* $H = (\mathbb{C}_*, \cdot, 1)$, $\mathtt{H} = \bigl(\mathbb{R}^+_*, \cdot, 1\bigr)$ — группы, а при фиксированном $p \in \mathbb{R}$ рассматриваем гомоморфизм $\mathfrak{h}\colon z \underset{z \in \mathbb{C}_*}{\longmapsto} |z|^p$. Пусть при $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ множество $C_{\mathrm{j}}$ — экземпляр комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и каждые $C_{\mathrm{j}_1}$ и $C_{\mathrm{j}_2}$ при $\mathrm{j}_1 \neq \mathrm{j}_2$ имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{C}$; $X$ построено как в (4.1.1), $\mathrm{S} := \mathbb{C}$. В таком случае $\mathfrak{h}$-однородные функции — это *комплексно однородные степени $p$ функции* [6, гл. 1, § 3].

**Пример 4.1.7.** Пусть $H = \bigl((\mathbb{C}_*)^n, \cdot, (1, \cdots, 1)\bigr)$ с покомпонентным умножением, $\mathtt{H} = \bigl(\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1\bigr)$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ — мультииндекс, для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^n$ положим $\mathfrak{h}(z) := |z|^{\vec{p}} := |z_1|^{p_1} \dots |z_n|^{p_n}$; $X := \mathbb{C}^n$, $\mathrm{S} := \mathbb{C}$. При этом $\mathfrak{h}$-однородные функции — *комплексно однородные степени $\vec{p}$ функции $n$ комплексных переменных;* ср. с [6, гл. 1, § 3].

Приведём пример с разными операциями в $H$ и $\mathtt{H}$.

**Пример 4.1.8.** Группы $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$, $p \in \mathbb{R}$, изоморфизм $\mathfrak{h} := \exp^p \colon x \mapsto e^{px}$, $x \in \mathbb{R}$; $X = \mathbb{R} = \mathrm{S}$; функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ из класса $\exp^p\text{-}\mathrm{hg}(\mathbb{R})$, если и только если $f(h + x) = e^{ph} f(x)$ для всех $h, x \in \mathbb{R}$.

Другие общие примеры можно строить для произвольной группы преобразований $H$ области определения $X$ функций $f \in \mathrm{S}^X$, действия-суперпозиции $(h, f) \mapsto f \circ h$, голоморфизма $\mathfrak{h}$ из $H$ в некоторую, вообще говоря, другую группу $\mathtt{H}$ преобразований множества $X$. При этом $f \in \mathfrak{h}\text{-}\mathrm{hg}\,(X)$, если и только если $f \circ h = f \circ \bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)$ для всех $h \in H$. Частный случай — классы функций, инвариантные относительно группы преобразований $H$, когда в роли группы $\mathtt{H}$ — тривиальная одноточечная группа, состоящая тождественного преобразования $\mathrm{id}_X$ множества $X$, с очевидным гомоморфизмом $\mathfrak{h}(h) = \mathrm{id}_X$ для всех $h \in H$. Возможности дальнейшего развития этого общего примера, Примера 4.1.8 в части различных $H$ и $\mathtt{H}$ и операций на них, да и классических Примеров 4.1.1–4.1.7 поистине неисчерпаемы.

**Определение 4.1.2.** $\mathtt{H}$-множество $\mathrm{S}$ называем *упорядоченным,* если оно снабжено отношением порядка $\leqslant$ с аксиомой согласованности

Ax2. *Для любых* $\mathrm{s}_1, s_2 \in \mathrm{S}$ *и* $\mathtt{h} \in H$ *из неравенства* $\mathrm{s}_1 \leqslant s_2$ *следует неравенство* $\mathtt{h}\mathrm{s}_1 \leqslant \mathtt{h}\mathrm{s}_2$.

Всюду далее S — *порядково полное упорядоченное* H-*множество.*

Распространим понятие $\mathfrak{h}$-однородной функции на функции $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$. Для этого доопределим сначала действия H на точные грани в пополнении $\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$. Если изначально существуют $\inf \mathrm{S} \in \mathrm{S}$ и/или $\sup \mathrm{S} \in \mathrm{S}$, то необходимости в этом нет. Иначе *для любого* $\mathtt{h} \in H$ полагаем

[↓] $\mathtt{h} \cdot \inf \mathrm{S} := \inf \mathrm{S} \in \mathrm{S}_{\downarrow} \subset \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$, *если* $\inf \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$;

[↑] $\mathtt{h} \cdot \sup \mathrm{S} := \sup \mathrm{S} \in \mathrm{S}^{\uparrow} \subset \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$, *если* $\sup \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$.

Таким образом, H-множество S можно расширить до H-*множества* $\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$. При этом для любой функции $f \colon X \to \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$ корректно условие (hg) определения 4.1.1, которое теперь можно дословно распространить и на такие функции $f$. При этом постоянные функции

$$\inf \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X : x \underset{x \in X}{\longmapsto} \inf \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \qquad \sup \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X : x \underset{x \in X}{\longmapsto} \sup \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$$

всегда $\mathfrak{h}$-однородны.

**Определение 4.1.3.** Множество $\mathfrak{h}$-однородных функций $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ со значениями в H-множестве $\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$ в рамках соглашений [↓] и [↑] обозначаем через $\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}(X)$. Далее при использовании такого множества часто не указываем $H$-множество $X$, т.е. пишем просто $\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$.

Во всех Примерах 4.1.2–4.1.7 на множестве S можно задать естественный порядок, при котором S становится уже порядково полным $\mathbb{R}_*^+$-множеством, а $\mathrm{S}_\downarrow^\uparrow$ — упорядоченное $\mathbb{R}_*^+$-множество. Например, при $\mathrm{S} := \mathbb{C}$ в Примерах 4.1.6–4.1.7 можно ввести «покомпонентный» порядок: $z_1 \leqslant z_2$ означает, что $\operatorname{Re} z_1 \leqslant \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 \leqslant \operatorname{Im} z_2$, а $\mathbb{C}_\downarrow^\uparrow$, где Re и Im — операции выделения действительной и мнимой части, получается из $\mathbb{C}$ добавлением двух символов

$$\begin{aligned} (-\infty) + i(-\infty) &:= \inf \mathbb{C}, \\ (+\infty) + i(+\infty) &:= \sup \mathbb{C}; \\ r\big((\pm\infty) + i(\pm\infty)\big) &\underset{r\in\mathbb{R}_*^+}{:=} (\pm\infty) + i(\pm\infty). \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

## 4.2 Верхние и нижние границы

Потребуется элементарная

**Лемма 4.2.1.** *Пусть* $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{S}_\downarrow^\uparrow$, $\mathtt{h} \in \mathtt{H}$. *Тогда*

$$\sup_{\mathrm{s}\in S_0} \mathtt{h}\mathrm{s} \leqslant \mathtt{h} \sup_{\mathrm{s}\in S_0} \mathrm{s}, \quad \mathtt{h} \inf_{\mathrm{s}\in S_0} \mathrm{s} \leqslant \inf_{\mathrm{s}\in S_0} \mathtt{h}\mathrm{s}. \tag{4.2.3}$$

*Если же* $\mathtt{H}$ *— группа, то в этих двух неравенствах можно поставить знак равенства.*

*Доказательство.* Для $\mathrm{s} \in \mathrm{S}_0$ из $\mathrm{s} \leqslant \sup_{\mathrm{s}\in S_0} \mathrm{s}$ и аксиомы $\mathtt{Ax2}$ сразу следует $\mathtt{h}\mathrm{s} \leqslant \mathtt{h} \sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} \mathrm{s}$, откуда

$$\sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} \mathtt{h}\mathrm{s} \leqslant \mathtt{h} \sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} \mathrm{s}. \tag{4.2.4}$$

Аналогично для inf. Если $\mathtt{H}$ — группа, то для sup в $\mathrm{S}_\downarrow^\uparrow$ имеем также

$$\begin{aligned} \mathtt{h} \sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} \mathrm{s} &\overset{\mathtt{Ax1}}{=} \mathtt{h} \sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} 1\mathrm{s} = \mathtt{h} \sup_{\mathrm{s}\in S_0} (\mathtt{h}^{-1}h)\mathrm{s} \overset{\mathtt{Ax0}}{=} \mathtt{h} \sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} \mathtt{h}^{-1}(\mathtt{h}\mathrm{s}) \\ &\overset{(4.2.4)}{\leqslant} \mathtt{h}\Big(\mathtt{h}^{-1} \sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} \mathtt{h}\mathrm{s}\Big) \overset{\mathtt{Ax0}}{=} (\mathtt{h}\mathtt{h}^{-1}) \sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} \mathtt{h}\mathrm{s} = \sup_{\mathrm{s}\in \mathrm{S}_0} \mathtt{h}\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Аналогично для inf. $\square$

В дополнение к Определениям 4.1.1–4.1.3 дадим

**Определение 4.2.1.** Функцию $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$ называем $\mathfrak{h}$-*полуоднородной снизу (соответственно сверху) если имеем* $f(hx) \leqslant \mathfrak{h}(h)f(x)$ (*соответственно* $\mathfrak{h}(h)f(x) \leqslant f(hx)$) *для всех* $x \in X$ *и* $h \in H$. Множество всех таких функций обозначаем как $\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}(X)$ (соответственно $\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}(X)$). При этом множество $X$ часто не указываем. Очевидно,

$$\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow} \cap \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow} = \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}.$$

**Предложение 4.2.1.** *Если* $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ *или* $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}$, *то соответственно* $\sup F \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ *или* $\inf F \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}$.

*В частности, если* $\mathtt{H}$ — *это группа, то из* $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$ *следует как* $\sup F \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$, *так и* $\inf F \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$.

*Доказательство.* Для $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ при

$$F(x) := \bigl\{ f(x) \bigm| f \in F \bigr\}$$

имеем

$$\begin{aligned}
(\sup F)(hx) = \sup_{f\in F} f(hx) \leqslant \sup_{f\in F} \mathfrak{h}(h) f(x) \\
= \sup\bigl\{\mathfrak{h}(h)\mathrm{s} \colon \mathrm{s} \in F(x)\bigr\} \\
\Bigl| \text{Лемма 4.2.1 с } \mathrm{S}_0 := F(x) \Bigr| \\
\overset{(4.2.3)}{\leqslant} \mathfrak{h}(h) \sup\bigl\{\mathrm{s} \bigm| \mathrm{s} \in F(x)\bigr\} = \mathfrak{h}(h)(\sup F)(x).
\end{aligned}$$

Здесь в случае $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$ первый знак неравенства $\leqslant$ можно заменить на равенство, а когда $\mathtt{H}$ — группа, и следующий знак $\leqslant$ поменять на знак $=$. Аналогично для inf. Предложение 4.2.1 доказано. $\square$

Для $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$ в обозначениях этой главы и подраздела 1.2.2 всегда существуют участвующие ниже нижние и верхние огибающие

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} \leqslant \underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}} \leqslant \underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}} \leqslant f \\ \leqslant \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}}_{f} \leqslant \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}}_{f} \leqslant \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}}_{f}\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

на $X$, где в случае $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$ всюду можно поставить равенства.

Из Предложения 4.2.1 и определений легко получаем

**Следствие 4.2.1.** *Для $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$ всегда*

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}}\,, \underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}}\,, \underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}} \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}\,, \\ \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}}_{f}\,, \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}}_{f}\,, \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}}_{f} \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}\,,\end{aligned}$$

*а если* $\mathtt{H}$ *— группа, то*

$$\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}}\,, \underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}}\,, \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}}_{f}\,, \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}}_{f} \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}\,.$$

Это Следствие 4.2.1 сразу решает Задачу 1 из подраздела 1.2.3 для ряда классов $L$ полуоднородных функций:

**Теорема 4.2.1.** *Пусть $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$. Справедливы утверждения*

[l] $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}} = f$ *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}$.

[u] $f = \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}}_{f}$ *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}$.

*Если* $\mathtt{H}$ *— группа, то эквивалентны три соотношения:* 1) $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$; 2) $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}} = f$; 3) $f = \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}}_{f}$.

Случай класса $L = \mathfrak{h}\text{-hg}$ потребует дополнительных сведений.

**Замечание 4.2.1.** При доказательстве [l]–[u] дополнительные условия на полугруппы $H$ и $\mathtt{H}$ не накладываются. В случае же $\ = \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$ в Теореме 4.2.1 именно для возможности использования Предложения 4.2.1 и Леммы 4.2.1 предполагалось, что $\mathtt{H}$ — группа.

## 4.3 Орбиты и стационарные элементы

### 4.3.1 Элементарные свойства орбит

**Определение 4.3.1.** Для элемента $x$ из $H$-множества $X$ определяется его *орбита*

$$\mathrm{orb}_X(x) := H \cdot x =: Hx := \big\{hx \;\big|\; h \in \ H\big\}.$$

Элемент $x \in X$ *стационарный*, если $\mathrm{orb}_X(x) = \{x\}$.

Одно из элементарных *основных свойств орбит* — в случае *группы* $H$ орбиты не зависят от выбора представителя и либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть $\mathtt{H}$ — группа, а $\mathrm{S}$, как и прежде, $\mathtt{H}$-множество. Тогда для любых $\mathrm{s} \in \mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}$ в рамках соглашений [↓] и [↑] после Определения 4.1.2 определены орбиты $\mathrm{orb}_{\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}}(\mathrm{s})$, а также стационарные элементы в $\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}$. В частности, элементы $\inf \mathrm{S} \in \mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}$ при $\inf \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ и $\sup \mathrm{S} \in \mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}$ при $\sup \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ — стационарные.

Пусть $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$. Тривиально проверяется

1) $f\big(\mathrm{orb}_X(x)\big) \subset \mathrm{orb}_{\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}} f(x)$; *в частности, если* $f(x)$ — *стационарный элемент в* $\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}$, *то* $f\big(\mathrm{orb}_X(x)\big) = \{f(x)\}$;

2) *если* $\mathfrak{h}$ — *эпиморфизм, то* $f\big(\mathrm{orb}_X(x)\big) = \mathrm{orb}_{\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}} f(x)$ *и*

*для стационарного элемента* $x \in X$ *элемент* $f(x)$ *стационарный в* $\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$.

Так, для $\mathrm{S} := \mathbb{R}$ в $\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$ с $-\infty := \inf \mathbb{R}$, $+\infty := \sup \mathbb{R}$ и $\mathtt{H} := \mathbb{R}_{*}^{+}$ — пять орбит $\big\{\{-\infty\}, -\mathbb{R}^{+}\backslash 0, \{0\}, \mathbb{R}^{+}\backslash 0, \{+\infty\}\big\}$ и три стационарных элемента $\{-\infty, 0, +\infty\}$, а для $\mathrm{S} := \mathbb{C}$ и $\mathtt{H} := \mathbb{R}_{*}^{+}$ орбиты — это $\{0\}$, два элемента $(\pm\infty) + i(\pm\infty)$ из (4.1.2) или любой из лучей $\big\{re^{i\theta} \bigm| r \in \mathbb{R}^{+} \setminus 0\big\} \subset \mathbb{C}$ со всевозможными $\theta \in (-\pi, \pi]$, а стационарных элементов тоже три: $\{0\}$ и $(\pm\infty) + i(\pm\infty)$.

### 4.3.2 Расщепление функции по орбитам

Пусть $H$ — *группа.* По Основному свойству орбит, отмеченному в Определении 4.3.1, $H$-множество $X$ можно представить в виде объединения

$$X = \bigcup_{\mathrm{j} \in \mathrm{J}} \mathrm{orb}_X(x_{\mathrm{j}}), \quad \mathrm{J} \text{ — множество идексов,} \tag{4.3.6}$$

*не пересекающихся орбит* $\mathrm{orb}_X(x_{\mathrm{j}})$ с выбранными по аксиоме выбора *представителями* $x_{\mathrm{j}} \in \mathrm{orb}_X(x_{\mathrm{j}})$. Тогда каждую орбиту $\mathrm{orb}_X(x_{\mathrm{j}})$ можно рассматривать как $H$-множество, а произвольная функция $f \in (\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ однозначно определяется своими сужениями

$$f_{\mathrm{j}} := f\ \big|_{\mathrm{orb}_X(x_{\mathrm{j}})}, \quad \mathrm{j} \in \mathrm{J}. \tag{4.3.7}$$

Более того, каждая функция $f \in \mathfrak{h}\text{-}\mathrm{hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$ полностью определяется своими значениями $f(x_{\mathrm{j}})$, поскольку может быть однозначно продолжена на всю орбиту $\mathrm{orb}_X(x_{\mathrm{j}})$ по правилу

$$f(hx_{\mathrm{j}}) := \mathfrak{h}(h) f(x_{\mathrm{j}}), \quad h \in H. \tag{4.3.8}$$

Следующий результат решает Задачу 1 для $L = \mathfrak{h}\text{-}\mathrm{hg}$.

**Теорема 4.3.1.** *Пусть $H$ и $\mathtt{H}$ — группы, $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$. Справедливы следующие три утверждения.*

[l] $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = f$, *если и только если выполнено одно из следующих взаимоисключающих двух условий:*

[l1] $f(X) \subset \mathrm{S}^{\uparrow}$ *и* $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$,

[l2] $\inf \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ *и* $f = \inf \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X$ *на* $X$.

[u] $f = \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}}_{f}$, *если и только если выполнено одно из следующих взаимоисключающих двух условий:*

[u1] $f(X) \subset \mathrm{S}_{\downarrow}$ *и* $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$,

[u2] $\sup \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ *и* $f = \sup \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X$ *на* $X$.

[lu] $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = f = \overline{\mathrm{env}}^{\mathfrak{h}\text{-hg}}_{f}$, *если и только если* $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$.

*Доказательство.* Утверждение [lu]=[l]$\cap$[u] следует из [l] и [u]. Утверждение [u] доказывается так же, как и [l], которое и докажем.

Сначала необходимость. Если $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = f$, $\inf \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$, а $f$ принимает значение $\inf \mathrm{S}$ хотя бы раз, то множество функций $l \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией $f$, пусто. Следовательно, по Определению 1.2.1 имеем $f = \inf \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X$. Пусть теперь $\inf \mathrm{S} \in \mathrm{S}$ или функция $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$ нигде не принимает значение $\inf \mathrm{S}$, что означает выполнение условия $f(X) \subset \mathrm{S}^{\uparrow}$. Тогда по Следствию 4.2.1 в части, когда $\mathtt{H}$ — группа, имеем $f = \underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$, т.е. [l1].

Теперь достаточность. Если выполнено [l2], то множество функций $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией $f = \inf \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X$, пусто. Отсюда по Определению 1.2.1 нижняя огибающая $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}}$ всюду на $X$ принимает значение $\inf \mathrm{S}$, т.е. в этом случае $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = \inf \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X$.

Допустим теперь, что выполнено [l1]. Пусть $x_0 \in X$ и $\mathrm{s}_0 \in \mathrm{S}$ — произвольный элемент, для которого $\mathrm{s}_0 \leqslant f(x_0)$. Будем пользоваться расщеплением функции $f$ по непересекающимся орбитам, описанном в (4.3.6)–(4.3.7). Здесь мы уже пользуемся тем, что $H$ — *<u>группа</u>*. Найдётся индекс $\mathrm{j}_0$, для которого $x_0 \in \mathrm{orb}_X(x_{\mathrm{j}_0})$. Поскольку в этом случае $\mathrm{orb}_X(x_0) = \mathrm{orb}_X(x_{\mathrm{j}_0})$, то, используя переиндексацию, можем считать, что $x_{\mathrm{j}_0} = x_0$. Для каждой из остальных орбит $\mathrm{orb}_X(x_\mathrm{j})$ с $\mathrm{j} \neq \mathrm{j}_0$ выберем, вновь используя аксиому выбора, произвольный элемент $\mathrm{s}_\mathrm{j} \in \mathrm{S}$, удовлетворяющий условию $\mathrm{s}_\mathrm{j} \leqslant f(x_\mathrm{j})$. Построение функции $l \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемой функцией $f = \inf \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X$, а также удовлетворяющей условию $l(x_0) = \mathrm{s}_0 \leqslant f(x_0)$, проведём по схеме (4.3.8), а именно: положим $l(x_\mathrm{j}) = \mathrm{s}_\mathrm{j}$ для всех $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ и продолжим $l$ с элемента $x_\mathrm{j}$ на всю орбиту $\mathrm{orb}_X(x_\mathrm{j})$ по правилу $l(hx_\mathrm{j}) := \mathfrak{h}(h)l(x_\mathrm{j}) = \mathfrak{h}(h)\mathrm{s}_\mathrm{j}$, $h \in H$. Построенная функция $l \in \mathfrak{h}\text{-hg}$ минорирует функцию $f$, откуда, в силу произвола в выборе $\mathrm{s}_0 \in \mathrm{S}$ с $\mathrm{s}_0 \leqslant f(x_0)$, получаем $\sup\left\{l(x_0) \;\middle|\; l \in \mathfrak{h}\text{-hg}\,,\ l \leqslant f \text{ на } X\right\} = f(x_0)$. По Определению 1.2.1 это, ввиду произвола в выборе элемента $x_0 \in X$, означает, что имеет место равенство $\underline{\mathrm{env}}^f_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = f$, что и требовалось. $\square$

**Замечание 4.3.1.** На *полугруппы* $H$ и $\mathtt{H}$ при доказательстве необходимости накладывалось только одно дополнительное условие: $\mathtt{H}$ — *группа*. Напротив, при доказательстве достаточности применялось тоже только одно дополнительное условие, но другое: $H$ — *группа*, из которого, впрочем, следует, что $\mathtt{H} = \mathfrak{h}(H)$ — группа.

## 4.4 Задача 2 для однородных функций

### 4.4.1 Регуляризованные миноранта и мажоранта

Наряду с (4.2.5) дадим ещё один способ конструирования миноранты и мажоранты функции $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$. Для этого, в предположении, что $\mathtt{H}$ — это *группа*, определим возрастающие на $(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$ функции $f \mapsto f_{\wedge}$ и $f \mapsto f^{\vee}$, $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$, действующие по правилу

$$
\begin{aligned}
f_{\wedge}(x) &\underset{x\in X}{:=} \inf_{h\in H} \big(\mathfrak{h}(h)\big)^{-1} f(hx),\\
f^{\vee}(x) &\underset{x\in X}{:=} \sup_{h\in H} \big(\mathfrak{h}(h)\big)^{-1} f(hx)
\end{aligned}
$$

— соответственно *регуляризованные миноранта* и *мажоранта* функции $f$. Очевидно,

$$
f_{\wedge} \leqslant f \leqslant f^{\vee} \quad \text{на } X \text{ для } \textit{моноида } H.
$$

.

**Замечание 4.4.1.** Любую полугруппу $H$ без единичного элемента можно превратить в моноид, просто присоединив формальный единичный элемент 1 и определив $1h := h =: h1$ для всех $h \in H$. При этом, очевидно, гомоморфизм $\mathfrak{h}$ корректно продолжается на моноид $H \cup \{1\}$ по правилу $\mathfrak{h}(1) = \mathtt{1} \in H$ — здесь группа.

**Предложение 4.4.1.** *Всегда* $f_{\wedge} \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}$ *и* $f^{\vee} \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}$. *Если же, в дополнение,* $H$ *— группа, то* $f_{\wedge}, f^{\vee} \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$.

*Доказательство.* Для произвольного $h_0 \in H$ имеем

$$f_\wedge(h_0x) = \inf_{h\in H}\bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)^{-1} f\bigl(h(h_0x)\bigr)$$
$$= \inf_{h\in H}\mathfrak{h}(h_0)\bigl(\mathfrak{h}(h)\mathfrak{h}(h_0)\bigr)^{-1} f\bigl((hh_0)x\bigr)$$
$$= \inf_{h\in H}\mathfrak{h}(h_0)\bigl(\mathfrak{h}(hh_0)\bigr)^{-1} f\bigl((hh_0)x\bigr).$$

В этом месте применим Лемму 4.2.1 при

$$\mathrm{S}_0 := \Bigl\{\mathfrak{h}(hh_0)\bigr)^{-1} f\bigl((hh_0)x\bigr) \Bigm| h \in H\Bigr\}$$

с $\mathfrak{h}(h_0)$ вместо $\mathtt{h}$ и продолжим равенства как

$$f_\wedge(h_0x) = \mathfrak{h}(h_0)\inf_{h\in H}\bigl(\mathfrak{h}(hh_0)\bigr)^{-1} f\bigl((hh_0)x\bigr)$$
$$= \mathfrak{h}(h_0)\inf_{h\in Hh_0}\bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)^{-1} f(hx)$$
$$\geqslant \mathfrak{h}(h_0)\inf_{h\in H}\bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)^{-1} f\bigl((h)x\bigr) = \mathfrak{h}(h_0)f_\wedge(x)$$

ввиду $Hh_0 := \bigl\{hh_0 \bigm| h \in H\bigr\} \subset H$ для всех $x \in X$. Отсюда сразу следует $f_\wedge \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}$.

Если же $H$ — *группа,* то $Hh_0 = H$ и последний знак неравенства $\geqslant$ здесь можно заменить на $=$.

Аналогично рассматривается и $f^\vee$. □

**Замечание 4.4.2.** Из доказательства нетрудно видеть, что для выполнения $f_\wedge \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$ достаточно, чтобы в $H$ существовали правый единичный элемент и правый обратный для любого элемента из $H$. Для $f^\vee \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$ то же самое, но с левыми.

### 4.4.2 Огибающие по однородным функциям

Следующий результат решает Задачу 2 из подраздела 1.2.3 для различных классов $L$ уже однородных функций.

**Теорема 4.4.1.** *Пусть $H$, $\mathtt{H}$ — группы, $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$. Тогда*

I. $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}} = f_{\wedge} \leqslant f \leqslant f^{\vee} = \underline{\mathrm{env}}_{f}^{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}$ *на $X$.*

II. $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = f_{\wedge}$ *на $X$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух взаимоисключающих условий:*

II1. $f_{\wedge}(X) \subset \mathrm{S}^{\uparrow}$*;*

II2. $\inf \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ *и* $f_{\wedge} = \inf \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ *на $X$.*

III. $f^{\vee} = \underline{\mathrm{env}}_{f}^{\mathfrak{h}\text{-hg}}$ *на $X$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух взаимоисключающих условий:*

III1. $f^{\vee}(X) \subset \mathrm{S}_{\downarrow}$*;*

III2. $\sup \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ *и* $f^{\vee} = \sup \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ *на $X$.*

*Доказательство.* I. Для функции $f$ рассмотрим её регуляризованную миноранту $f_{\wedge} \leqslant f$. По Предложению 4.4.1 и Определению 1.2.3 имеем $f_{\wedge} \leqslant \underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}$ на $X$. Кроме того, для произвольной функции $l \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$, мажорируемой функцией $f$, при всех $x \in X$ по Определению 4.1.3 имеем

$$l(x) = \bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)^{-1} l(hx) \overset{\mathtt{Ax2}}{\leqslant} \bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)^{-1} f(hx) \quad \text{для всех } h \in H.$$

Отсюда

$$l(x) \leqslant \inf_{h \in H} \bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)^{-1} f(hx) = f_{\wedge}(x) \quad \text{для всех } x \in X.$$

Это означает, что $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}} \leqslant f_{\wedge}$ на $X$, и доказывает I для $f_{\wedge}$. Аналогично устанавливается равенство для $f^{\vee}$ из I.

II. *Необходимость.* Если $\inf \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ и $f_{\wedge}(x_0) = \inf \mathrm{S}$, то, ввиду доказанного в предыдущем п. I, $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} \leqslant f_{\wedge}$

на $X$, т.е. $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}}(x_0) = \inf \mathrm{S}$. Отсюда множество функций $l \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией $f$, а значит и $f_\wedge$, пусто и $\inf \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X = \underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = f_\wedge$. В противном случае остаётся только ситуация II2, т.е. $f_\wedge(X) \subset \mathrm{S}^{\uparrow}$.

*Достаточность.* Если выполнено II2, то из п. I сразу следует $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} \leqslant f_\wedge = \inf \left(\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow}\right)^X$ на $X$, что и нужно.

Пусть теперь $f_\wedge(X) \subset \mathrm{S}^{\uparrow}$. По Предложению 4.4.1 получаем $f_\wedge \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}_{\uparrow}$, т.е. выполнено условие [l1] Теоремы 4.3.1 для функции $f_\wedge$ вместо $f$. Следовательно, по Теореме 4.3.1 имеем $\underline{\mathrm{env}}^{f}_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = f_\wedge$ на $X$.

III доказывается аналогично. □

## 4.5 Локализуемость (полу)однородных функций

Для произвольной функции $f \in (\mathrm{S}^{\uparrow}_{\downarrow})^X$ определено умножение (слева) функции $f$ на элементы $\mathtt{h} \in H$, а именно: $\mathtt{h}f \colon x \mapsto \mathtt{h}f(x)$, $x \in X$.

**Предложение 4.5.1.** *Если полугруппа* $\mathtt{H}$ *коммутативна, то для любого элемента* $\mathtt{h} \in H$ *из* $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}$ *(соответственно* $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$*) следует* $\mathtt{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}$ *(соответственно* $\mathtt{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$*). В частности, для* $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$ *получаем* $\mathtt{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$.

*Доказательство.* Если $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}$, то в силу коммутативности $\mathtt{H}$ получаем

$$(\mathtt{h}f)(hx) \leqslant \mathtt{h}\mathfrak{h}(h)f(x) = \mathfrak{h}(h)\mathtt{h}f(x) = \mathfrak{h}(h)(\mathtt{h}f)(x)$$

при любых $x \in X$ и $h \in H$. Аналогично для $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$. Отсюда заключение и для $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$. □

Покажем, что при определённых ограничениях на (полу)группу $H$ условия (полу)однородности можно проверять лишь для порождающей части $H$. Напомним, что подмножество $H' \subset H$ *порождает полугруппу* $H$, если множество всех конечных произведений вида $h_1 \cdots h_n$ с $h_k \in H'$ при каждом $k = 1, \ldots, n$ совпадает с $H$, и *порождает группу* $H$, если множество всех конечных произведений того же вида, но с $h_k \in H'$ или $h_k^{-1} \in H'$ при каждом $k = 1, \ldots, n$, — это в точности группа $H$.

**Теорема 4.5.1.** *Пусть $f \in (\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Если для любой неодноточечной орбиты $\mathrm{orb}_X(\cdot)$ из (4.3.6)–(4.3.8) найдётся подмножество $H' \subset H$, порождающее полугруппу $H$, с которым*

$$f(hx) \leqslant \mathfrak{h}(h) f(x) \tag{4.5.9}$$

*для всех $h \in H'$ и $x \in \mathrm{orb}_X(\cdot)$, то (4.5.9) выполнено для всех $h \in H$ и $x \in X$. Аналогично при замене $\leqslant$ в (4.5.9) на $\geqslant$ или $=$.*

*Если для любой неодноточечной орбиты $\mathrm{orb}_X(\cdot)$ найдётся подмножество $H' \subset H$, порождающее группу $H$, с которым $f(hx) = \mathfrak{h}(h) f(x)$ для всех $h \in H'$ и $x \in \mathrm{orb}_X(\cdot)$, то $f \in \mathfrak{h}\text{-}\mathrm{hg}_{\uparrow}^{\downarrow}(X)$.*

*Доказательство.* Пусть сначала $H$ — полугруппа. Тогда в условиях Теоремы 4.5.1 для произвольного $h \in H$ найдутся $h_1, \ldots, h_n \in H'$, $n \in \mathbb{N}$, с которыми $h = h_1 \cdots h_n$. Отсюда

$$\begin{aligned} f(hx) = f(h_1 \cdots h_n x) &\overset{\mathtt{Ax2},(4.5.9)}{\leqslant} \mathfrak{h}(h_1) \cdot f(h_2 \cdots h_n x) \\ &\overset{\mathtt{Ax2},(4.5.9)}{\leqslant} \cdots \overset{\mathtt{Ax2},(4.5.9)}{\leqslant} \mathfrak{h}(h_1) \cdots \mathfrak{h}(h_n) f(x) \\ &= \mathfrak{h}(h_1 \cdots h_n) f(x) = \mathfrak{h}(h) f(x) \end{aligned}$$

для любых $h \in H$ в произвольной орбите $\mathrm{orb}_X(\cdot) \ni x$, а значит и любых $x \in X$, что и требуется.

Для $\geqslant$ и $=$ аналогично.

Пусть теперь $H$ — группа, а значит и $\mathtt{H} = \mathfrak{h}(H)$ — группа. Для фиксированной орбиты $\mathrm{orb}\,(\cdot)$ с соответствующим порождающим $H$ множеством $H'$ рассмотрим элемент $h \in H$, для которого $h^{-1} \in H'$. Тогда для $x \in \mathrm{orb}\,(\cdot)$ имеем

$$f(x) = f(h^{-1}hx) = \mathfrak{h}(h^{-1})f(hx) = \bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)^{-1}f(hx),$$

т.е. $f(hx) = \bigl(\mathfrak{h}(h)\bigr)f(x)$ для любых $x \in \mathrm{orb}_X(\cdot)$ и $h^{-1} \in H'$. Таким образом, выполнено (4.5.9) с равенством $=$ вместо неравенства $\leqslant$ для всех $h$ из множества $H' \cup (H')^{-1} \subset H$, *порождающего $H$ как полугруппу.* Остаётся воспользоваться доказанным до этого. $\square$

**Пример 4.5.1.** При $H = \mathbb{R}_*^+$ с обычной структурой мультипликативной группы достаточно проверять $\mathfrak{h}$-однородность на сколь угодно коротких непустых открытых интервалах $(r_1, r_2) \subset \mathbb{R}_*^+$, поскольку, как легко показать, любой такой интервал порождает группу $\mathbb{R}_*^+$.

**Замечание 4.5.1.** Содержательные утверждения по Задаче 3 для классов $L$ (полу)однородных функций легко следуют из Теорем 4.2.1, 4.3.1, 4.4.1. Другие варианты решения этой Задачи, не опирающиеся на эти Теоремы, нам пока неизвестны. В какой мере установленные в главе 4 результаты для группы $H$ могут быть перенесены на полугруппы $H$ — остаётся неясным. Скорее всего всегда есть контрпримеры.

Дальнейшие перспективы развития представленных исследований об огибающих из гл. 1, 2, 4 — рассмотрение $L$-огибающих для других классов $L$, как-то: (полу=суб- или супер-)аддитивных функций, с условиями типа выпуклости–вогнутости, связанных с операциями $\sup$ или $\inf$ (идемпотентные, или тропические, версии) и проч. Возможны вариации и в рамках структуры множества $X$ — теоретико-множественной, алгебраической, топологической, геометрической, порядковой и пр. Объём возможных таких исследований необозрим. При этом представляется важным изучение подобных вопросов для функций со значениями именно в пополнении (расширении) $\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}$ в связи с применениями как в теории функций, что в некоторой мере отражено в гл. 3, так и в теории оптимизации [48], [73]–[74].

# Список литературы


[1] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С., *Упорядоченные векторные пространства*, Наука, СО, Новосибирск, 1978.

[2] Байгускаров Т. Ю., Хабибуллин Б. Н., “Голоморфные миноранты плюрисубгармонических функций”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:1 (2016), 76–79.

[3] Байгускаров Т. Ю., Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н., “Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост”, *Алгебра и анализ*, **28**:2 (2016), 1–33.

[4] Букур Й., Деляну А., *Введение в теорию категорий и функторов*, Мир, М., 1972.

[5] Бурбаки Н., *Интегрирование. Меры, интегрировани мер*, Наука, М., 1967.

[6] Груман Л., Лелон П., *Целые функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1989.

[7] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах*, Гостехиздат, М., 1950.

[8] Картак В. В., Хабибуллин Б. Н., “Двойственное представление функционалов на проективных пределах векторных решеток”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского, **38**, Казан. мат. об-во, Казань, 2009, 146–148.

[9] Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н., “Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **200**:9 (2009), 95–126.

[10] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., *Субдифференциальное исчисление и приложения*, Наука, М., 2007.

[11] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М., *Двойственность Минковского и ее приложения*, Наука, Новосибирск, 1976.

[12] Ландков Н. С., *Основы современной теории потенциала*, Наука, Москва, 1966.

[13] *Математическая энциклопедия*, т. I–V, Советская энциклопедия, М., 1977.

[14] Мейер П., *Вероятность и потенциалы*, Мир, М., 1973, 326 с.

[15] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, “К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II”, *Функц. анализ и его прил.*, **53**:1 (2019), 84–87.

[16] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, “Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на ее рост”, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, № 5, 55–61.

[17] Ревенко А. В., “О продолжении линейных функционалов”, *Укр. мат. вісн.,*, **6**:1 (2009), 113–125; *Ukr. Math. Bull.*, **6**:1 (2009), 109–119.

[18] Ронкин Л. И., *Элементы теории аналитических функций многих переменных*, Наукова думка, Киев, 1977.

[19] Ронкин Л. И., “Целые функции”, *Комплексный анализ. Многие переменные–3*, Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направления, **9**, ВИНИТИ, М., 1986, 5–36.

[20] Себаштьян-и-Силва Ж., “О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях”, *Математика*, **1**:1 (1957), 60–77.

[21] Тихомиров В. М., “Выпуклый анализ”, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундаментальные направления, **14**, ВИНИТИ, М., 1987, 5–101.

[22] Хабибуллин Б. Н., “Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. I”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:1 (1992), 173–178.

[23] Хабибуллин Б. Н., “Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. II. Алгебры функций конечного $\lambda$-типа”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:3 (1992), 186–191.

[24] Хабибуллин Б. Н., “Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:1 (1993), 129–146.

[25] Хабибуллин Б. Н., “Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного порядка”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:3 (1993), 70–91.

[26] Хабибуллин Б. Н., “Двойственное представление суперлинейных функционалов”, *В сб.: «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения,численные методы и*

*приложения. Часть I. Комплексный анализ.»*, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 1996, 122–131 https://www.researchgate.net/publication/308961070.

[27] Хабибуллин Б. Н., "Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:4 (2001), 205–224.

[28] Хабибуллин Б. Н., "Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 167–190.

[29] Хабибуллин Б. Н., "Теоремы единственности для голоморфных функций и выметание", *В кн.: Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование*, ИПМИ ВНЦ РАН, РГУ, ЮРГУЭС, Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ, 2006, 118–132. https://www.researchgate.net/publication/308972192.

[30] Хабибуллин Б. Н., "Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты", *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 121–160.

[31] Хабибуллин Б. Н., "Нули голоморфных функций с ограничениями на рост в области", *В кн.: Математический форум. Исследования по математическому анализу. Итоги науки*, **3**, ЮФО, ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, 2009, 282–291 https://www.researchgate.net/publication/308972565.

[32] Хабибуллин Б. Н., "Применения в комплексном анализе двойственного представления функционалов на векторных решетках", *В кн.: Математический форум. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Итоги науки. Юг России*, **4**, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, 2010, 102–116 https://www.researchgate.net/publication/308972704.

[33] Хабибуллин Б. Н., *Полнота систем экспонент и множества единственности*, Издание 4-е, допол., РИЦ БашГУ, Уфа, 2012 http://www.researchgate.net/publication/271841461.

[34] Хабибуллин Б. Н., "Аналоги теоремы Хана-Банаха для (полу)групп: построение нижней огибающей", *В кн.: Материалы Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения».*, Казанский (При-

волжский) федеральный университет, Казань, 2014, 75–76 https://www.researchgate.net/publication/309312339.

[35] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллина Э. Б., “Порядковые версии теоремы Хана—Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций”, *Комплексный анализ. Математическая физика*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **162**, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 93–135; Khabibullin B. N., Rozit A. P., Khabibullina E. B., “Order versions of the Hahn–Banach theorem and envelopes. II. Applications to function theory”, *Journal of Mathematical Sciences*, **257**:3 (2021), 366–409.

[36] Хабибуллин Б. Н., Байгускаров Т. Ю., “Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции”, *Матем. заметки*, **99**:4 (2016), 588–602.

[37] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., “К распределению нулевых множеств голоморфных функций”, *Функц. анализ и его прил.*, **52**:1 (2018), 26–42.

[38] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллин Ф. Б., “Порядковые версии теоремы Хана—Банаха и огибающие. I. Однородные функции”, *В кн.: Математический форум (Итоги науки. Юг России). Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и математическому моделированию*, **10**, ЮМИ ВНЦ РАН, РСО–А., Цей–Владикавказ, 2016, 226–243 https://www.researchgate.net/publication/308984521.

[39] Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., “К распределению нулевых множеств голоморфных функций. III. Теоремы обращения”, *Функц. анализ и его прил.*, **53**:2 (2019), 42–58.

[40] Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю., “Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I, II”, *Алгебра и анализ*, **20**:1 (2008), 146–236.

[41] Хабибуллин Ф. Б., Хабибуллина Э. Б., “К теореме Хана – Банаха”, *В сб. трудов: VI Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании». Математика.*, **1**, РИЦ БашГУ., Уфа, 2013, 101–106. http://matem.anrb.ru/bsuconf/2013/sbornik_2013_matem.pdf.

[42] Чирка Е. М., *Комплексные аналитические множества.*, Наука, М., 1985.

[43] Шефер Х., *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.

[44] Aliprantis C. D., Border K. C., *Infinite Dimensional Analysis,*, 3rd edn., Springer, Heidelberg, 2006.

[45] Anger B., Lembcke J. "Hahn – Banach Type Theorems for Hypolinear Functionals", *Math. Ann.*, **209** (1974), 127–151.

[46] Borwein J. M., Vanderwerff J. D. *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples.*, Cambridge University Press, N. Y., 2010.

[47] Buskes G., "The Hahn – Banach theorem surveyed.", *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **CCCXXVII** (1993), 1–49.

[48] Dinha N., Ernst E., Lópezc M. A., Volled M., "An approximate Hahn – Banach theorem for positively homogeneous functions", *Optimization: A Journal of Math. Programming and Operations Research*, **64**:5 (2013), 1321–1328.

[49] Edwards D. A. "Choquet boundary theory for certain spaces of lower semicontinuous functions", *Function Algebras. In: Proceedings of the International Symposium on Function Algebras*, Scott, Foresman and Company, Chicago, 1966, 300–309.

[50] Fuchssteiner B., Lusky W., *Convex Cones*, North Holland Math. Stud. Notas de Math., **56**, North Holland, Amsterdam, 1981.

[51] Gamelin T. W., *Uniform Algebras and Jensen Measures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.

[52] Gogus N. G., Perkins T. L., Poletsky E. A., "Non-compact versions of Edwards' Theorem", *Positivity*, **17** (2013), 459–473.

[53] Hörmander L., "Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace lokalement convexe", *Arkiv för Math.*, **3**:2 (1955), 180–186.

[54] Hörmander L., *Notions of Convexity*, Progr. Math., **127**, Birkhäser, Boston, 1994.

[55] Khabibullin B. N., "Variant of a problem on the representation of a meromorphic function as a quotient of entire functions", *Compl. Variables and Elliptic Equations*, **37**:1 (1998), 371–384.

[56] Khabibullin B. N., "Dual approach to certain questions for weighted spaces of holomorphic functions", *Entire Functions in*

*Modern Analysis* (Tel-Aviv, 1997), Israel Math. Conf. Proc., **15**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 2001, 207–219.

[57] Khabibullin B. N., “The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results”, *Journal of Math, Physics, Analysis, Geometry*, **9**:2 (2002), 146–167.

[58] Khabibullin B. N., “Generalizations of Nevanlinna’s theorems”, *Matematychni Studii*, **34**:2 (2010), 197–206.

[59] Khabibullin B. N., Khabibullin F. B., “Necessary and Sufficient Conditions for Zero Subsets of Holomorphic Functions with Upper Constraints in Planar Domains”, *Lobachevskii Jour. of Math.*, **42**:4 (2021), 800–810.

[60] Klimek M., *Pluripotential theory*, London Math. Soc. Monogr., **6**, Clarendon Press, NY, 1991.

[61] Koosis P. Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin., 1996.

[62] Lubyshev V. F., “On dual representation of a mapping on a projective limit of vector lattice”, *В кн.: Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых.*, Сборник трудов. Математика, **III**, ООО «ИдельИнвест», Уфа, 2005, 64–70.

[63] Narici L., “On the Hahn–Banach theorem”, *Proc. II Int. School “Advanced Courses of Mathematical Analysis II,” Spain, 20–24 September 2004*, Granada, 2004, 87–122.

[64] Narici L., Beckenstein L., “The Hahn–Banach theorem: the life and times”, *Topology Appl.*, **2–3** (1997), 193–217.

[65] Poletsky E. A., “Plurisubharmonic functions as solutions of variational problems”, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **52**, 1991, 163–171.

[66] Poletsky E. A., “Holomorphic Currents”, *Indiana Univ. Math. Jour.*, **42**:1 (1993), 85–144.

[67] Poletsky E. A., Sigurdsson R., “Dirichlet problems for plurisubharmonic functions on compact sets”, *Math. Zeitschrift.*, **271**:3–4 (2012), 877–892.

[68] Ronkin L. I., *Functions of Completely Regular Growth.*, Math. and Its Appl. (Soviet Series), Kluver Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London, 1992.

[69] Schlude K., “Bemerkung zu beschränkt homogenen Funktionen”, *Elemente der Mathematik*, **54** (1999), 30–31.

[70] Simons S., “Extended and sandwich versions of the Hahn – Banach Theorem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **21** (1968), 112–122.

[71] Simons S., *From Hahn – Banach to Monotonicity*, Lect. Notes in Math., **1963**, Springer Science+Business Media B.V., Berlin, 2008.

[72] Weston J. D., “A note on the extension of linear functionals”, *Amer. Math. Monthly.*, **67**:5 (1960.), 444–445.

[73] Zălinesku C., “On zero duality gap and the Farkas lemma for conic programming”, *Math. OperRes.*, **33** (2008), 991–1001..

[74] Zălinesku C., “Hahn – Banach extension theorems for multifunctions revisited”, *Math. Methods Oper. Res.*, **68** (2008), 493–508.

[70] Simons S., "Extended and sandwich versions of the Hahn – Banach Theorem", *J. Math. Anal. Appl.*, **21** (1968), 112–122.

[71] Simons S., *From Hahn – Banach to Monotonicity*, Lect. Notes in Math., **1963**, Springer Science+Business Media B.V., Berlin, 2008.

[72] Weston J. D., "A note on the extension of linear functionals", *Amer. Math. Monthly.*, **67**:5 (1960.), 444–445.

[73] Zălinesku C., "On zero duality gap and the Farkas lemma for conic programming", *Math. OperRes.*, **33** (2008), 991–1001..

[74] Zălinesku C., "Hahn – Banach extension theorems for multifunctions revisited", *Math. Methods Oper. Res.*, **68** (2008), 493–508.

*Научное издание*

**ХАБИБУЛЛИН Булат Нурмиевич**

**ОГИБАЮЩИЕ
В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ**

**Монография**

*Монография публикуется в авторской редакции.
За достоверность информации, изложенной в монографии, ответственность несет автор. Мнение издательства может не совпадать с мнением автора.*

*Лицензия на издательскую деятельность*
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 06.12.2021 г. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 8,05. Уч.-изд. л. 8,4.
Тираж 500 экз. (1-й завод 28 экз.). Изд. № 123. Заказ 404.

*Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*