Р. Н. Гарифуллин, Р. И. Ямилов, Модифицированные серии интегрируемых дискретных уравнений на квадратной решетке с нестандартной симметрийной структурой, *ТМФ*, 2020, том 205, номер 1, 23–40

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9899

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 205, № 1
октябрь, 2020

Р. Н. Гарифуллин[*,†], $\boxed{\textbf{Р. И. Ямилов}}$[*]

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ СЕРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ С НЕСТАНДАРТНОЙ СИММЕТРИЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

В недавней работе авторов была построена серия интегрируемых дискретных автономных уравнений на квадратной решетке с нестандартной структурой высших симметрий. Здесь построены модифицированные серии с использованием дискретных неточечных преобразований. Используются как необратимые линеаризуемые преобразования, так и неточечные преобразования, обратимые на решениях дискретного уравнения. В результате получены серии новых примеров дискретных уравнений вместе с их высшими симметриями и мастер-симметриями. Построенные высшие симметрии дают новые интегрируемые примеры пяти- и семиточечных дифференциально-разностных уравнений вместе с их мастер-симметриями. В случае дискретных уравнений метод построения необратимых линеаризуемых преобразований при помощи законов сохранения рассматривается, по-видимому, впервые.

Ключевые слова: дискретное уравнение, высшая симметрия, мастер-симметрия, дифференциально-разностное уравнение, необратимое преобразование.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9899

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была представлена бесконечная серия дискретных уравнений вида

$$(u_{n,m+1}+1)(u_{n,m}-1)=\beta_N(u_{n+1,m+1}-1)(u_{n+1,m}+1), \tag{1}$$

Работа Р. Н. Гарифуллина выполнена в рамках программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1421/1 к соглашению № 075-02-2020-1421.

[*]Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия.
E-mail: rustem@matem.anrb.ru

[†]Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

где $n, m \in \mathbb{Z}$ – дискретные независимые переменные, $u_{n,m}$ – неизвестная функция двух дискретных переменных. Уравнения серии нумеруются натуральным числом N, а коэффициенты β_N являются корнями из единицы: $\beta_N^N = 1$, $N \geqslant 1$.

Чтобы разделять уравнения с разными N, мы рассматриваем примитивные корни из единицы. Ясно, что $\beta_1 = 1$. При $N > 1$ примитивные корни определяются следующим образом:

$$\beta_N^N = 1, \qquad \beta_N^j \neq 1, \qquad 1 \leqslant j < N. \tag{2}$$

В частности,

$$\beta_1 = 1, \qquad \beta_2 = -1, \qquad \beta_3 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta_4 = \pm i, \tag{3}$$

т. е. в двух последних случаях имеются два примитивных корня, соответствующих знакам $+$ и $-$. Для любого $N > 2$ существуют как минимум два примитивных корня: $\beta_N = e^{\pm 2i\pi/N}$. Таким образом, мы рассматриваем серию уравнений вида (1), в которых коэффициенты β_N являются примитивными корнями N-й степени из единицы.

Уравнения серии (1) являются интегрируемыми в том смысле, что они имеют бесконечные иерархии высших симметрий и законов сохранения так же, как и L–A-пары. Среди этих симметрий и законов сохранения можно выделить бесконечные иерархии автономных уравнений.

Аналогичные серии неавтономных дискретных уравнений рассматривались в работе [2]. Серии дискретных уравнений, интегрируемых по Дарбу, и уравнений типа Бюргерса изучались в работах [3], [4].

При помощи неточечных преобразований мы получаем в этой статье новые серии дискретных уравнений вместе с высшими симметриями. Для простоты мы ограничимся несколькими простейшими высшими симметриями в каждом из направлений.

Как показано в работе [1], высшие симметрии первого и второго порядка в направлении m для любого уравнения серии (1) имеют вид

$$\partial_{t_1} u_{n,m} = \beta_N^n (u_{n,m}^2 - 1)(u_{n,m+1} - u_{n,m-1}), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_2} u_{n,m} = \beta_N^{2n} (u_{n,m}^2 - 1)\big[&(u_{n,m+1}^2 - 1)(u_{n,m+2} + u_{n,m}) - \\ &- (u_{n,m-1}^2 - 1)(u_{n,m} + u_{n,m-2}) - 4(u_{n,m+1} - u_{n,m-1})\big].\end{aligned} \tag{5}$$

В каждом порядке имеется аналогичная высшая симметрия в направлении m. Структура этих симметрий такова, что уравнение (1) с номером N обладает автономными высшими симметриями порядков kN, $k \in \mathbb{N}$.

В направлении n структура высших симметрий нестандартна. Вид и порядок простейшей симметрии в этом направлении зависит от числа N. Простейшая высшая симметрия уравнения серии (1) с $N = 1$ имеет первый порядок:

$$\partial_{\theta_1} u_{n,m} = (u_{n,m}^2 - 1)\left(\frac{a_{n+1}}{u_{n+1,m} + u_{n,m}} - \frac{a_n}{u_{n,m} + u_{n-1,m}}\right), \tag{6}$$

где $a_n = b + cn$, а b, c – произвольные постоянные.

При $N = 2$ простейшая высшая симметрия имеет второй порядок:

$$\begin{aligned}\partial_{\theta_2} u_{n,m} =&(u_{n,m}^2 - 1)(T_n - 1)\left(\frac{a_{n+1}(u_{n+1,m} + u_{n,m})}{U_{n,m}} + \frac{a_n(u_{n-1,m} + u_{n-2,m})}{U_{n-1,m}}\right),\\ U_{n,m} =&(u_{n+1,m} + u_{n,m})(u_{n,m} + u_{n-1,m}) - 2(u_{n,m}^2 - 1).\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь функция a_n имеет вид $a_n = b_n + cn$, где c – константа, а $b_n \equiv b_{n+2}$ – произвольная двухпериодическая функция от n. Ее можно представить в виде $b_n = b^{(1)} + b^{(2)}(-1)^n$ с двумя произвольными постоянными $b^{(1)}$, $b^{(2)}$. Оператор сдвига вдоль направления n обозначен здесь через T_n: $T_n h_{n,m} = h_{n+1,m}$.

Простейшая высшая симметрия уравнения (1) с $N = 3$ имеет третий порядок:

$$\begin{aligned}\partial_{\theta_3} u_{n,m} &= (u_{n,m}^2 - 1)(T_n - 1)\left(\frac{a_{n+2}V_{n,m}}{U_{n,m}} + \frac{a_n W_{n,m}}{U_{n-2,m}} + (T_n + 1)\frac{a_{n+1}Z_{n,m}}{U_{n-1,m}}\right),\\ V_{n,m} &= \beta_3^2(u_{n+1,m}^2 - 1) + u_{n+1,m}(u_{n+2,m} - u_{n-1,m}) - u_{n+2,m}u_{n-1,m} + 1,\\ W_{n,m} &= \beta_3(u_{n-2,m}^2 - 1) + u_{n-2,m}(u_{n-1,m} + u_{n-3,m}) + u_{n-1,m}u_{n-3,m} + 1,\\ Z_{n,m} &= (u_{n+1,m} + u_{n,m})(u_{n-1,m} + u_{n-2,m}),\\ U_{n,m} &= \beta_3^2(u_{n+1,m}^2 - 1)(u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \beta_3(u_{n,m}^2 - 1)(u_{n+2,m} + u_{n+1,m}) +\\ &\quad + (u_{n+1,m}u_{n,m} + 1)(u_{n+2,m} + u_{n-1,m}) +\\ &\quad + (u_{n+1,m} + u_{n,m})(u_{n+2,m}u_{n-1,m} + 1).\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь β_3 – один из двух примитивных корней из единицы, показанных в (3). Функция a_n задается формулой $a_n = b_n + cn$, где c – константа, а $b_n \equiv b_{n+3}$ – произвольная трехпериодическая функция. Она может быть представлена в виде $b_n = b^{(1)} + b^{(2)}\beta_3^n + b^{(3)}\beta_3^{2n}$, где $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ – произвольные постоянные.

Каждая из формул (6)–(8) содержит автономную симметрию, соответствующую $a_n \equiv 1$. Случай $a_n = n$ играет роль мастер-симметрии для соответствующего дискретного уравнения (1). Формулы (6)–(8) при любом фиксированном m определяют интегрируемые дифференциально-разностные уравнения при $c = 0$ и их мастер-симметрии при $a_n = n$.

При помощи неточечных преобразований мы получаем из формул (6)–(8) новые примеры автономных пяти- и семиточечных дифференциально-разностных уравнений вместе с их мастер-симметриями.

Неточечные преобразования, которые мы используем для построения модифицированных серий и высших симметрий, делятся на два типа. К первому типу относятся дискретные необратимые линеаризуемые преобразования, введенные в работе [5], которые строятся при помощи специальных законов сохранения. В случае дискретных уравнений используемый здесь метод построения линеаризуемых преобразований при помощи законов сохранения является, по-видимому, новым.

Ко второму типу относятся неточечные преобразования, обратимые на решениях дискретного уравнения [6], [7]. В случае высших симметрий и соответствующих им дифференциально-разностных уравнений такие преобразования приводят к необратимым преобразованиям типа Миуры или сложно-линеаризуемым преобразованиям.

В разделе 2 мы рассматриваем дискретные необратимые линеаризуемые преобразования. Сначала мы излагаем процедуру построения таких преобразований при помощи специальных законов сохранения и схему построения модифицированных дискретных уравнений и соответствующих высших симметрий. Затем в результате применения этого метода мы получаем четыре модифицированные серии дискретных уравнений вместе с простейшими высшими симметриями. В разделе 3 мы используем неточечные преобразования, обратимые на решениях дискретного уравнения. Это позволяет нам построить еще две модификации вместе с высшими симметриями и мастер-симметриями.

2. ЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Следуя работе [5], где обсуждаются дифференциально-разностные уравнения, мы вводим понятие линеаризуемого преобразования. Мы будем рассматривать в этом разделе преобразования первого порядка, которые линеаризуются при помощи точечных преобразований. Такое преобразование в направлении n может быть записано в виде

$$U_{n,m} = F_{n,m}[(T_n - 1)G_{n,m}(V_{n,m})], \tag{9}$$

где $F'_{n,m}(x) \neq 0$ и $G'_{n,m}(x) \neq 0$ для любых n, m. Используя очевидные неавтономные точечные замены $U_{n,m}$ и $V_{n,m}$, мы можем привести такое преобразование к виду

$$\widehat{U}_{n,m} = (T_n - 1)\widehat{V}_{n,m},$$

который представляет собой простейшее линейное преобразование.

Композиции таких преобразований также называются линеаризуемыми [5]. В случае, когда композиция состоит из преобразований разных направлений, мы получаем сложно-линеаризумое преобразование (см. пример (65) в п. 3.1). Заметим, что преобразования типа Миуры к линеаризуемым не относятся [5]. Пример такого преобразования представлен в п. 3.2 (см. (75)).

В направлении m линеаризуемые преобразования первого порядка, рассматриваемые в этом разделе, имеют аналогичный вид:

$$U_{n,m} = F_{n,m}[(T_m - 1)G_{n,m}(V_{n,m})],$$

где через T_m обозначен оператор сдвига вдоль направления m: $T_m h_{n,m} = h_{n,m+1}$.

2.1. Построение простейших линеаризуемых преобразований. Предположим, что уравнение (1) имеет закон сохранения вида

$$(T_m - 1)p_{n,m}(u_{n,m}) = (T_n - 1)q_{n,m}(u_{n,m+1}, u_{n,m}), \tag{10}$$

где $p'_{n,m}(x) \neq 0$ для любых n, m, т. е. функция $p_{n,m}(x)$ обратима при всех n, m. Можно ввести новую неизвестную функцию $v_{n,m}$:

$$p_{n,m}(u_{n,m}) = (T_n - 1)r_{n,m}(v_{n,m}), \tag{11}$$

где $r'_{n,m}(x) \neq 0$ для любых n, m. Это соотношение дает явную формулу для $u_{n,m}$:

$$u_{n,m} = p^{-1}_{n,m}[(T_n - 1)r_{n,m}(v_{n,m})]. \tag{12}$$

Подставляя в (10) функцию (12) и интегрируя по дискретной переменной n, т. е. применяя обратный оператор $(T_n - 1)^{-1}$, мы получаем дискретное уравнение для неизвестной функции $v_{n,m}$:

$$
\begin{aligned}
&(T_m - 1)r_{n,m}(v_{n,m}) = \\
&\qquad = q_{n,m}\big(p^{-1}_{n,m+1}[(T_n - 1)r_{n,m+1}(v_{n,m+1})], p^{-1}_{n,m}[(T_n - 1)r_{n,m}(v_{n,m})]\big).
\end{aligned} \tag{13}
$$

Дискретное уравнение (13) преобразуется линеаризуемой заменой (12) в уравнение (1).

Выбор функции $r_{n,m}$ в замене (11) соответствует неавтономному точечному преобразованию неизвестной функции $v_{n,m}$. Из-за интегрирования по n в соотношении (13) должна была возникнуть функция интегрирования ω_m. Она убирается за счет выбора $r_{n,m}$. Кроме того, мы выбираем функцию $r_{n,m}$ так, чтобы упростить замену (12) и уравнение (13).

Высшие симметрии дискретного уравнения (13) в направлении n находятся из (11) (см. [5]). Как показывает, например, метод диагонализации L–A-пар [8], функция $p_{n,m}(u_{n,m})$ оказывается плотностью закона сохранения не только дискретного уравнения (1), но и его высших симметрий (6)–(8) с $c = 0$. В силу таких высших симметрий мы имеем

$$
D_{\theta_j} p_{n,m}(u_{n,m}) = (T_n - 1)h^{(j)}_{n,m}(u_{n+j-1,m}, u_{n+j-2,m}, \dots, u_{n-j,m}), \qquad j = 1, 2, 3. \tag{14}
$$

Дифференцируя (11) по θ_j и интегрируя по n, мы находим

$$
r'_{n,m}(v_{n,m}) D_{\theta_j} v_{n,m} = h^{(j)}_{n,m} + \widetilde{\omega}^{(j)}_m, \tag{15}
$$

где все функции вида $u_{n+k,m}$ заменяются функциями $v_{n+k,m}$ в силу (12). Используя условие совместности дискретного уравнения (13) и уравнения (15), мы уточняем функцию интегрирования $\widetilde{\omega}^{(j)}_m$.

Для мастер-симметрий (6)–(8) с $a_n = n$ мы переписываем функцию $D_{\theta_j} p_{n,m}(u_{n,m})$ в терминах $v_{n+k,m}$ при помощи (12) и на примерах получаем представление вида

$$
D_{\theta_j} p_{n,m}(u_{n,m}) = (T_n - 1)\tilde{h}^{(j)}_{n,m}(v_{n+j,m}, v_{n+j-1,m}, \dots, v_{n-j,m}). \tag{16}
$$

Это представление позволяет найти новую мастер-симметрию так же, как в случае (14).

Для получения высших симметрий дискретного уравнения (13) в направлении m мы запишем (13) в виде

$$
(T_m - 1)r_{n,m}(v_{n,m}) = q_{n,m}(u_{n,m+1}, u_{n,m}). \tag{17}
$$

Дифференцируя по t_j, $j = 1, 2$, в силу (4), (5) мы получаем

$$
(T_m - 1)D_{t_j} r_{n,m}(v_{n,m}) = s^{(j)}_{n,m}(u_{n,m+j+1}, u_{n,m+j}, \dots, u_{n,m-j}). \tag{18}
$$

Избавляясь в правой части этого соотношения от функций $u_{n,m+k}$ при помощи (12), получаем зависимость от $v_{n,m+k}, v_{n+1,m+k}$. Используя дискретное уравнение (13), приводим это соотношение к виду

$$
(T_m - 1)[r'_{n,m}(v_{n,m}) D_{t_j} v_{n,m}] = \tilde{s}^{(j)}_{n,m}(v_{n+1,m}, v_{n,m+j+1}, v_{n,m+j}, \dots, v_{n,m-j}). \tag{19}
$$

В рассматриваемых ниже примерах получается, что зависимость фунции $\tilde{s}_{n,m}^{(j)}$ от $v_{n+1,m}$ исчезает и эта фунция принадлежит образу оператора $T_m - 1$. Интегрируя по m соотношение (19), получаем дифференциально-разностное уравнение для $v_{n,m}$ с функцией интегрирования $\widehat{\omega}_n^{(j)}$. Для этого уравнения проверяем не только совместность с дискретным уравнением (13), но и замену (12). При этом уточняется функция $\widehat{\omega}_n^{(j)}$.

В случае закона сохранения, симметричного (10), который имеет вид

$$(T_n - 1)p_{n,m}(u_{n,m}) = (T_m - 1)q_{n,m}(u_{n+1,m}, u_{n,m}), \tag{20}$$

где $p'_{n,m}(x) \neq 0$ для любых n, m, используется приведенная выше схема с точностью до перестановки $n \leftrightarrow m$.

2.2. Первая модификация. Все дискретные уравнения серии (1) имеют закон сохранения вида (10):

$$(T_m - 1)(\beta_N^n u_{n,m}) = (T_n - 1)\left[-\frac{1}{2}\beta_N^n (u_{n,m+1} - 1)(u_{n,m} + 1)\right]. \tag{21}$$

Делаем замену переменных $\beta_N^n u_{n,m} = (T_n - 1)(\beta_N^n v_{n,m})$, которая записывается в виде (12) следующим образом:

$$u_{n,m} = \beta_N v_{n+1,m} - v_{n,m}. \tag{22}$$

При помощи (13) мы получаем дискретное уравнение для $v_{n,m}$:

$$(\beta_N\, v_{n+1,m+1} - v_{n,m+1} - 1)(\beta_N\, v_{n+1,m} - v_{n,m} + 1) + 2(v_{n,m+1} - v_{n,m}) = 0. \tag{23}$$

Выпишем для уравнения (23) четыре высшие симметрии, которые сводятся к (4)–(7) преобразованием (22). В направлении m мы имеем следующие симметрии для любого N:

$$\partial_{t_1} v_{n,m} = -2\beta_N^n (v_{n,m+1} - v_{n,m})(v_{n,m} - v_{n,m-1}), \tag{24}$$

$$\partial_{t_2} v_{n,m} = 4\beta_N^{2n} (v_{n,m+2} - v_{n,m-2})(v_{n,m+1} - v_{n,m})(v_{n,m} - v_{n,m-1}), \tag{25}$$

соответствующие (4) и (5). Связь (17), которая используется для построения этих высших симметрий, имеет следующую форму:

$$2(v_{n,m} - v_{n,m+1}) = (u_{n,m+1} - 1)(u_{n,m} + 1). \tag{26}$$

В направлении n при $N = 1$, $\beta_N = 1$ получаем симметрию первого порядка, соответствующую (6):

$$\partial_{\theta_1} v_{n,m} = -a_n \frac{(v_{n+1,m} - v_{n,m})(v_{n,m} - v_{n-1,m}) + 1}{v_{n+1,m} - v_{n-1,m}} + c v_{n,m}, \tag{27}$$

где $a_n = b + cn$, как в (6). При $N = 2$, $\beta_N = -1$ высшая симметрия второго порядка, соответствующая (7), имеет вид

$$\begin{aligned}\partial_{\theta_2} v_{n,m} &= [(v_{n+1,m} + v_{n,m})^2 - 1] \times \\ &\quad\times \left(a_{n+1}\frac{v_{n+2,m} + v_{n,m} + 2v_{n-1,m}}{V_{n,m}} - a_n \frac{v_{n,m} + 2v_{n-1,m} + v_{n-2,m}}{V_{n-1,m}}\right) + \\ &\quad+ (b_n - b_{n+1})(v_{n+1,m} + v_{n,m}) + c(v_{n,m} - v_{n+1,m}), \\ V_{n,m} &= (v_{n+2,m} + v_{n,m})(v_{n+1,m} + v_{n-1,m}) + 2(v_{n+2,m}v_{n,m} + v_{n+1,m}v_{n-1,m} + 1),\end{aligned} \tag{28}$$

где $a_n = b_n + cn$, как в (7).

Уточняя функции интегрирования $\widetilde{\omega}_m^{(j)}, \widehat{\omega}_n^{(j)}$, возникающие при построении этих высших симметрий, мы во всех случаях приходим к добавке вида $\nu\beta_N^{-n}$ с произвольным постоянным коэффициентом ν, которую мы опускаем. Это сделано по следующей причине: дискретное уравнение (13) очевидным образом инвариатно относительно однопараметрической группы преобразований $v_{n,m} \to v_{n,m} + \tau\beta_N^{-n}$, соответствующей точечной симметрии $\partial_\tau v_{n,m} = \beta_N^{-n}$. Эта точечная симметрия объясняет наличие вышеупомянутой добавки в высших симметриях.

Заметим, что при $N = 2$ автономное дискретное уравнение (23) имеет в обоих направлениях автономные высшие симметрии второго порядка. Симметрия (25) становится автономной, так как $\beta_2 = -1$, а среди симметрий (28) имеется автономный частный случай с $b_n \equiv 1$, $c = 0$.

2.3. О новизне примеров, построенных в этой работе. Дискретное уравнение (23) с $N = 1$, т. е. $\beta_N = 1$, совпадает с уравнением (T4) (табл. 1, с. 17) в работе [9] с точностью до замены переменных $v_{n,m} = -2u_{m,n} + m$. Остальные уравнения серии (23) являются, по-видимому, новыми. То же самое верно для остальных модифицированных серий дискретных уравнений. Все уравнения серий являются новыми, за исключением случая $N = 1$ в некоторых из них.

При каждом фиксированном n высшие симметрии в направлении m (24) и (25) представляют собой одну из известных модификаций уравнения Вольтерра и ее высшую симметрию. Полная классификация интегрируемых уравнений типа Вольтерра была проведена в работе [10] (см. подробности в обзоре [11]). Симметрия (24) соответствует частному случаю уравнения (V6) из списка уравнений типа Вольтерра работы [11]. Все остальные высшие симметрии в направлении m, выписанные ниже, соответствуют дифференциально-разностным уравнениям аналогичной природы, причем все трехточечные примеры принадлежат тому же списку из работы [11].

При каждом фиксированном m высшая симметрия в направлении n (27) определяет интегрируемое дифференциально-разностное уравнение при $b = 1$, $c = 0$ и его мастер-симметрию при $b = 0$, $c = 1$. Это дифференциально-разностное уравнение является частным случаем уравнения (V4) с $\nu = 0$ из [11]. Для всех уравнений вида (V4) с $\nu = 0$ в работе [12] построены мастер-симметрии с явной зависимостью от своего времени (см. более подробное изложение в [13], раздел 4.3). В частности, в нашем случае мастер-симметрия имеет вид

$$\partial_\tau v_n = -\frac{n}{\tau + 1}\frac{(v_{n+1} - v_n)(v_n - v_{n-1}) + (\tau + 1)^2}{v_{n+1} - v_{n-1}}, \tag{29}$$

где мы для краткости опустили индекс m. В отличие от (29), мастер-симметрия, полученная из (27), не имеет зависимости от своего времени и позволяет строить высшие симметрии не только для дифференциально-разностного уравнения, но и для дискретного уравнения (23) с $N = 1$. Кроме того, она возникает естественным образом при построении высших симметрий дискретного уравнения[1)].

В других примерах высшие симметрии в направлении n, соответствующие $N = 1$ в дискретном уравнении, в частном случае $b = 1$, $c = 0$ определяют известные дифференциально-разностные уравнения типа Вольтерра из [11]. Мастер-симметрии, соответствующие случаю $b = 0$, $c = 1$, также большей частью известны.

При фиксированном m высшая симметрия (28) определяет интегрируемое пятиточечное автономное дифференциально-разностное уравнение при $b_n \equiv 1, c = 0$, его неавтономную симметрию при $b_n = (-1)^n$, $c = 0$ и мастер-симметрию при $b_n \equiv 0$, $c = 1$. Уравнение и мастер-симметрия являются, по-видимому, новыми.

Остальные высшие симметрии в направлении n, представленные ниже и соответствующие случаям $N = 2$ и $N = 3$ в дискретных уравнениях, порождают примеры пяти- и семиточечных дифференциально-разностных уравнений. Условие $b_n \equiv 1$, $c = 0$ выделяет среди них автономные интегрируемые случаи. Для каждого из них мы автоматически получаем одну или две неавтономные симметрии и мастер-симметрию. Все примеры такого рода, включая неавтономные уравнения и мастер-симметрии, являются, по-видимому, новыми, за исключением двух отмеченных ниже пятиточечных автономных уравнений.

2.4. Вторая модификация. Все дискретные уравнения серии (1) имеют закон сохранения вида

$$(T_m - 1)\log\frac{u_{n,m}+1}{u_{n,m}-1} = (T_n - 1)\log\Big(\beta_N^n(u_{n,m+1}-1)(u_{n,m}+1)\Big). \tag{30}$$

Для упрощения нового дискретного уравнения (13) выберем функцию $r_{n,m}$ в соотношении (11) следующим образом: $r_{n,m} = \log w_{n,m} + m\log 4$, где $w_{n,m}$ – новая неизвестная функция. Тогда из (11) получаем

$$\frac{u_{n,m}+1}{u_{n,m}-1} = \frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}}, \tag{31}$$

т. е. в явном виде мы имеем преобразование

$$u_{n,m} = \frac{w_{n+1,m}+w_{n,m}}{w_{n+1,m}-w_{n,m}}. \tag{32}$$

Дискретное уравнение (13) на $w_{n,m}$ можно записать следующим образом:

$$(w_{n+1,m+1} - w_{n,m+1})(w_{n+1,m} - w_{n,m}) = \beta_N^n w_{n+1,m}w_{n,m}. \tag{33}$$

Мы получили серию модифицированных дискретных уравнений с одним неавтономным коэффициентом β_N^n. Первое уравнение этой серии, соответствующее $N = 1$, в переменной $u_{n,m} = (-1)^n w_{m,n}$ совпадает с (T6) из [9].

[1)] Не вдаваясь в подробности, отметим, что имеется связь между этими мастер-симметриями, т. е. пример, полученный из (27), существенно новым не является.

Связь (17), которая используется для построения высших симметрий в направлении m, имеет вид

$$4\frac{w_{n,m+1}}{w_{n,m}} = \beta_N^n(u_{n,m+1}-1)(u_{n,m}+1). \tag{34}$$

Обе симметрии в этом направлении оказываются автономными:

$$\frac{1}{4}\partial_{t_1} w_{n,m} = w_{n,m+1} + \frac{w_{n,m}^2}{w_{n,m-1}}, \tag{35}$$

$$\frac{1}{16}\partial_{t_2} w_{n,m} = w_{n,m+2} + \frac{w_{n,m+1}^2}{w_{n,m}} + \frac{2w_{n,m+1}w_{n,m}}{w_{n,m-1}} + \frac{w_{n,m}^3}{w_{n,m-1}^2} + \frac{w_{n,m}^2}{w_{n,m-2}}. \tag{36}$$

В направлении n при $N=1$, $\beta_N=1$ получаем симметрию первого порядка, соответствующую (6):

$$\partial_{\theta_1} w_{n,m} = -a_n\frac{(w_{n+1,m}-w_{n,m})(w_{n,m}-w_{n-1,m})}{w_{n+1,m}-w_{n-1,m}} + cmw_{n,m}, \tag{37}$$

где $a_n = b + cn$, как в (6). Автономный частный случай $b=1$, $c=0$ этой симметрии является инвариантным относительно дробно-линейных преобразований $w_{n,m}$ (или мёбиус-инвариантным). Это не что иное, как хорошо известная шварциан-версия цепочки Вольтерра.

Удобно ввести обозначения из [14] (раздел 4):

$$\begin{aligned} Y_{n,m} &= \frac{(w_{n+1,m}-w_{n,m})(w_{n,m}-w_{n-1,m})}{w_{n+1,m}-w_{n-1,m}},\\ X_{n,m} &= \frac{(w_{n+1,m}-w_{n,m})(w_{n-1,m}-w_{n-2,m})}{(w_{n+1,m}-w_{n-1,m})(w_{n,m}-w_{n-2,m})}. \end{aligned} \tag{38}$$

Тогда уравнение (37) легко записывается в терминах $Y_{n,m}$. При $N=2$, $\beta_N=-1$ высшая симметрия второго порядка, соответствующая (7), имеет вид

$$\partial_{\theta_2} w_{n,m} = Y_{n,m}\left(\frac{a_{n+1}}{2X_{n+1,m}-1} + \frac{a_n}{2X_{n,m}-1}\right) + 2cmw_{n,m}, \tag{39}$$

где $a_n = b_n + cn$, как в (7). Очевидно, что при $c=0$ она является мёбиус-инвариантной относительно $w_{n,m}$, как и (37). Фиксируя переменную m, мы видим, что с точностью до растяжения θ_2 автономный случай $b_n\equiv 1$, $c=0$ совпадает с известным уравнением (32) из работы [14]. Для этого уравнения здесь найдены неавтономная симметрия (39) с $b_n=(-1)^n$, $c=0$ и мастер-симметрия, соответствующая $b_n\equiv 0$, $c=1$. Кроме того, дискретное уравнение (33) с $N=2$, совместное с симметрией (39), задает для этого известного уравнения автопреобразование Беклунда (см. подробности в разделе 4.1 работы [13]).

При $N=3$ высшая симметрия третьего порядка, соответствующая (8), имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_{\theta_3} w_{n,m} = Y_{n,m}&\left(\frac{a_{n+2}(W_{n+2,m}+\beta_3)}{\beta_3 W_{n+1,m}-W_{n+2,m}} + \frac{a_{n+1}(\beta_3-1)}{\beta_3 W_{n,m}-W_{n+1,m}} - \frac{a_n(\beta_3 W_{n-1,m}+1)}{\beta_3 W_{n-1,m}-W_{n,m}}\right)+\\ &+3cmw_{n,m}, \qquad W_{n,m}=3X_{n,m}-1, \end{aligned} \tag{40}$$

где $X_{n,m}, Y_{n,m}$ – функции, определенные в (38), а β_3 и $a_n = b_n + cn$ определяются, как в уравнении (8). Очевидно, что при фиксированном m и $c = 0$ уравнение (40) является мёбиус-инвариантным. Оно содержит три коммутирующих частных случая, выделенных условиями $b_n \equiv 1$, $b_n = \beta_3^n$ и $b_n = \beta_3^{2n}$. Первый из них является новым автономным семиточечным мёбиус-инвариантным интегрируемым уравнением. Случай $b_n \equiv 0$, $c = 1$ задает мастер-симметрию для всех трех уравнений. Уравнение (33) с $N = 3$ задает для них автопреобразование Беклунда.

2.5. Третья модификация. Начнем с уравнений (33), которые при любом N имеют закон сохранения

$$(T_n - 1)\big[(-1)^{n+m}\log w_{n,m}\big] = (T_m - 1)\big[(-1)^{n+m}\log(\beta_N^{-n/2}(w_{n,m} - w_{n+1,m}))\big]. \quad (41)$$

Этот закон сохранения имеет вид (20) и формула, симметричная (11), такова:

$$(-1)^{n+m}\log w_{n,m} = (T_m - 1)\big[(-1)^{n+m+1}\log z_{n,m}\big]. \quad (42)$$

Она приводит к простому линеаризуемому преобразованию

$$w_{n,m} = z_{n,m+1}z_{n,m}, \quad (43)$$

которое позволяет получить следующее дискретное уравнение:

$$z_{n,m+1}z_{n,m} - z_{n+1,m+1}z_{n+1,m} = \beta_N^{n/2} z_{n+1,m}z_{n,m}. \quad (44)$$

Соотношение для построения высших симметрий в направлении n имеет вид

$$\beta_N^{n/2} z_{n,m}z_{n+1,m} = w_{n,m} - w_{n+1,m}. \quad (45)$$

Недостатком уравнения (44) является наличие полуцелых степеней числа β_N, что неудобно для исследований. Используя неавтономное точечное преобразование $z^{\mathrm{new}}_{n,m} = \beta_N^{n(n-1)/4} z_{n,m}$, мы приводим его к виду, аналогичному (33):

$$z_{n,m+1}z_{n,m} - \beta_N^{-n} z_{n+1,m+1}z_{n+1,m} = z_{n+1,m}z_{n,m}. \quad (46)$$

Это дискретное уравнение при $\beta_N = 1$ не является новым, так как после преобразования $u_{n,m} = i^{n-m} z_{m,n}$ оно совпадает с (T7) с $c_2 = 0$ из работы [9].

Соотношения (43) и (45), необходимые для построения высших симметрий, переписываются следующим образом:

$$w_{n,m} = \beta_N^{-n(n-1)/2} z_{n,m+1}z_{n,m}, \qquad \beta_N^{-n(n-1)/2} z_{n,m}z_{n+1,m} = w_{n,m} - w_{n+1,m}. \quad (47)$$

Заметим, что в них также нет полуцелых степений β_N, так как число $n(n-1)/2$ всегда целое.

Две высшие симметрии дискретного уравнения (46) в направлении m независимо от номера N имеют вид

$$\frac{1}{4}\partial_{t_1} z_{n,m} = \frac{z_{n,m+1}z_{n,m}}{z_{n,m-1}}, \quad (48)$$

$$\frac{1}{16}\partial_{t_2} z_{n,m} = \frac{z_{n,m+2}z_{n,m+1}}{z_{n,m-1}} + \frac{z_{n,m+1}^2 z_{n,m}}{z_{n,m-1}^2} + \frac{z_{n,m+1}z_{n,m}^2}{z_{n,m-1}z_{n,m-2}}. \quad (49)$$

При $N = 1$, $\beta_N = 1$ получаем из (37) высшую симметрию первого порядка в направлении n:

$$2\partial_{\theta_1} z_{n,m} = -a_n z_{n,m} \frac{z_{n+1,m} - z_{n-1,m}}{z_{n+1,m} + z_{n-1,m}} + c z_{n,m}\left(m - \frac{1}{2}\right), \tag{50}$$

где $a_n = b + cn$, как в (6). После неавтономного растяжения $z^{\text{new}}_{n,m} = i^n z_{n,m}$ это уравнение при любом фиксированном m совпадает с известным уравнением из [11], мастер-симметрия которого также известна [12], [13].

При $N = 2$, $\beta_N = -1$ высшая симметрия в направлении n второго порядка, полученная из (39), имеет вид

$$\begin{aligned}
&\partial_{\theta_2} z_{n,m} = \\
&= z_{n,m}\Bigg(\frac{a_n}{1 + (-1)^n (z_{n+1,m}(z_{n-2,m} - (-1)^n z_{n,m}))/(z_{n-1,m}(z_{n-2,m} + (-1)^n z_{n,m}))} - \\
&\quad - \frac{a_{n+1}}{1 + (-1)^n (z_{n-1,m}(z_{n+2,m} - (-1)^n z_{n,m}))/(z_{n+1,m}(z_{n+2,m} + (-1)^n z_{n,m}))} + \\
&\quad + cm + \frac{b_{n+1} - b_n}{2}\Bigg),
\end{aligned} \tag{51}$$

где $a_n = b_n + cn$, как в (7). Чтобы избавиться от коэффициента $(-1)^n$, мы используем неавтономное точечное преобразование $z^{\text{new}}_{n,m} = i^{-(n-1)^2/2-1/4} z_{n,m}$ и получаем

$$\begin{aligned}
\partial_{\theta_2} z_{n,m} = z_{n,m}\Bigg(&\frac{a_n}{1 - (z_{n+1,m}(z_{n-2,m} - z_{n,m}))/(z_{n-1,m}(z_{n-2,m} + z_{n,m}))} - \\
&- \frac{a_{n+1}}{1 - (z_{n-1,m}(z_{n+2,m} - z_{n,m}))/(z_{n+1,m}(z_{n+2,m} + z_{n,m}))} + cm + \frac{b_{n+1} - b_n}{2}\Bigg).
\end{aligned} \tag{52}$$

Так как здесь c – постоянная, а b_n – произвольная двухпериодическая функция, то при каждом фиксированном m мы имеем три случая: автономное дифференциально-разностное уравнение при $a_n \equiv 1$, его симметрию при $a_n = (-1)^n$ и их общую мастер-симметрию при $a_n = n$.

В этом случае второе соотношение из (47) принимает вид

$$z_{n,m} z_{n+1,m} = w_{n,m} - w_{n+1,m}, \tag{53}$$

и при фиксированном m оно связывает дифференциально-разностные уравнения (39) и (52). При $a_n \equiv 1$ уравнение (52) становится автономным, и оно связано автономным преобразованием (53) с известным автономным уравнением (39) с $a_n \equiv 1$. Преобразование (53) является линеаризуемым, но неявным в обоих направлениях [5].

2.6. Четвертая модификация. Правую и левую части соотношения (26) можно обозначить через $y_{n,m}$, введя таким образом новую неизвестную функцию. Как следует из (4) и (24), она удовлетворяет уравнению

$$\partial_{t_1} y_{n,m} = \beta_N^n y_{n,m}(y_{n,m+1} - y_{n,m-1}), \tag{54}$$

которое является уравнением Вольтерра при любом фиксированном n. Это естественно, так как одно из заданных здесь преобразований

$$y_{n,m} = (u_{n,m+1} - 1)(u_{n,m} + 1) \tag{55}$$

есть не что иное, как известное преобразование модифицированного уравнения Вольтерра в уравнение Вольтерра. Другое преобразование

$$y_{n,m} = 2(v_{n,m} - v_{n,m+1}),$$

связывающее (24) с (54), известно так же, как и (55) (см., например, обзор [11]). Обозначая в соотношении (34) правую и левую части через $\beta_N^n y_{n,m}$, мы снова получаем связи между (35) и (4) с тем же самым уравнением (54).

Подобного результата можно ожидать от соотношения (53). Здесь мы покажем, что преобразование

$$y_{n,m} = w_{n,m} - w_{n+1,m}, \tag{56}$$

полученное из (53), позволяет вывести из дискретного уравнения (33) еще одну модификацию вместе с высшими симметриями. Заметим, что, в отличие от (22), (32), (43), преобразование (56) имеет другое направление в том смысле, что позволяет выразить явным образом новую неизвестную функцию $y_{n,m}$ через функцию $w_{n,m}$.

Преобразование (56) позволяет без труда переписывать высшие симметрии в направлении n. Симметрии (37) и (39) принимают вид

$$\partial_{\theta_1} y_{n,m} = y_{n,m}^2 \left(\frac{a_{n+1}}{y_{n+1,m} + y_{n,m}} - \frac{a_n}{y_{n,m} + y_{n-1,m}} \right) + c(m-1) y_{n,m}, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\theta_2} y_{n,m} = & -y_{n,m}^2 \left(\frac{a_{n+2}(y_{n+2,m} - y_{n+1,m})}{\Upsilon_{n+1,m}} + \frac{a_{n+1}(y_{n+1,m} - y_{n-1,m})}{\Upsilon_{n,m}} + \right. \\ & \left. + \frac{a_n(y_{n-1,m} - y_{n-2,m})}{\Upsilon_{n-1,m}} \right) + 2c(m-1) y_{n,m}, \\ \Upsilon_{n,m} = & \ (y_{n+1,m} + y_{n,m})(y_{n,m} + y_{n-1,m}) - 2 y_{n+1,m} y_{n-1,m}, \end{aligned} \tag{58}$$

где функции a_n такие же, как в (6) и (7). При желании можно переписать и высшую симметрию (40).

Новое дискретное уравнение для функции $y_{n,m}$ и его высшие симметрии в направлении m будут содержать квадратные корни. Однако нам важен тот факт, что преобразование (56) позволяет их построить.

Перепишем дискретное уравнение (33) при помощи преобразования (56) в виде квадратного уравнения для неизвестной функции $w_{n,m}$:

$$y_{n,m+1} y_{n,m} = \beta_N^n (w_{n,m} - y_{n,m}) w_{n,m}. \tag{59}$$

Введем обозначение

$$\Theta_{n,m} = 1 + 4\beta_N^{-n} \frac{y_{n,m+1}}{y_{n,m}}, \tag{60}$$

тогда решение (59) запишется в виде

$$w_{n,m} = \frac{y_{n,m}}{2} \left(1 + \sqrt{\Theta_{n,m}}\,\right), \tag{61}$$

где $\sqrt{\Theta_{n,m}}$ – любая из ветвей функции квадратного корня. Применяя к соотношению (61) оператор $1 - T_n$, получаем новое дискретное уравнение

$$y_{n+1,m}\left(1 + \sqrt{\Theta_{n+1,m}}\,\right) + y_{n,m}\left(1 - \sqrt{\Theta_{n,m}}\,\right) = 0. \tag{62}$$

Для нахождения простейшей высшей симметрии в направлении m, продифференцируем преобразование (56) по t_1 в силу симметрии (35). Затем в правой части полученного выражения исключим функции $w_{n+1,m+1}$, $w_{n+1,m}$, $w_{n+1,m-1}$ в силу преобразования (56), а потом $w_{n,m}, w_{n,m-1}$ – в силу (61). Получим высшую симметрию

$$\partial_{t_1} y_{n,m} = 2\beta_N^n y_{n,m}\big(\sqrt{\Theta_{n,m}}\,\sqrt{\Theta_{n,m-1}} - 1\big). \tag{63}$$

Точечное преобразование $y_{n,m} = e^{\hat{y}_{n,m}}$ позволяет получить в терминах $\hat{y}_{n,m}$ симметрию, которая при каждом фиксированном n имеет вид известного уравнения (V6) из работы [11].

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОБРАТИМЫЕ НА РЕШЕНИЯХ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ

В этом разделе мы строим для дискретных уравнений неточечные преобразования, обратимые на решениях этих дискретных уравнений. Для высших симметрий дискретных уравнений такие преобразования порождают преобразования типа Миуры или сложно-линеаризуемые преобразования [5]. При этом мы используем метод, разработанный в [6], [7] для дискретных и полудискретных уравнений. Другая версия этого метода, предназначенная для построения преобразований типа Миуры, представлена в [15], [16].

В результате мы получаем еще две модификации серии (1) дискретных уравнений вместе с их высшими симметриями.

3.1. Первая модификация. Перепишем дискретное уравнение (1) в виде

$$\frac{u_{n,m} - 1}{u_{n+1,m} + 1} = \beta_N \frac{u_{n+1,m+1} - 1}{u_{n,m+1} + 1}. \tag{64}$$

Это представление позволяет ввести новую неизвестную функцию $v_{n,m}$ следующим образом:

$$v_{n,m+1} = \frac{u_{n,m} - 1}{u_{n+1,m} + 1}, \qquad v_{n,m} = \beta_N \frac{u_{n+1,m} - 1}{u_{n,m} + 1}. \tag{65}$$

Полученные выражения можно разрешить относительно старых неизвестных $u_{n,m}$, $u_{n+1,m}$:

$$\begin{aligned} u_{n,m} &= \frac{v_{n,m+1}v_{n,m} + 2\beta_N v_{n,m+1} + \beta_N}{\beta_N - v_{n,m+1}v_{n,m}}, \\ u_{n+1,m} &= \frac{v_{n,m+1}v_{n,m} + 2v_{n,m} + \beta_N}{\beta_N - v_{n,m+1}v_{n,m}}. \end{aligned} \tag{66}$$

Записывая последние выражения в одной точке $u_{n+1,m}$, получаем новое дискретное уравнение. Оно существенно упрощается, если его переписать в терминах $(u_{n+1,m} - 1)/(u_{n+1,m} + 1)$:

$$\frac{v_{n,m}(v_{n,m+1} + 1)}{v_{n,m} + \beta_N} = \frac{v_{n+1,m+1}(v_{n+1,m} + \beta_N)}{\beta_N(v_{n+1,m+1} + 1)}.$$

Еще одна эквивалентная форма записи имеет вид

$$(v_{n+1,m} + \beta_N)(1 + \beta_N v_{n,m}^{-1}) = \beta_N(v_{n,m+1} + 1)(1 + v_{n+1,m+1}^{-1}). \tag{67}$$

Мы видим, что модифицированное уравнение (67) получается из (1) при помощи преобразования (65), которое обратимо на решениях дискретного уравнения (1). Обратное преобразование имеет вид (66). Заметим, что при $\beta_N = 1$ ничего нового не получается, так как точечное преобразование

$$\hat{v}_{n,m} = \frac{1 - v_{n,m}}{1 + v_{n,m}} \tag{68}$$

приводит к дискретному уравнению, которое после замены переменных $n \leftrightarrow m$ становится уравнением (1) с $\beta_N = 1$.

Обратимое преобразование (65) позволяет переписывать регулярным образом высшие симметрии [7]. Так, из симметрий (4) и (5) уравнения (1) мы получаем две простейшие высшие симметрии в направлении m для нового дискретного уравнения (67):

$$\begin{gathered}\partial_{t_1} v_{n,m} = 4\beta_N^{n+1} v_{n,m}(v_{n,m}+1)(v_{n,m}+\beta_N)\frac{v_{n,m+1}-v_{n,m-1}}{V_{n,m+1}V_{n,m}},\\ V_{n,m} = v_{n,m}v_{n,m-1} - \beta_N,\end{gathered} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_2} v_{n,m} = 16\beta_N^{2n+2}(v_{n,m}+1)(v_{n,m}+\beta_N)\Bigg[&-\frac{v_{n,m}(v_{n,m+1}+1)(v_{n,m+1}+\beta_N)}{V_{n,m+2}V_{n,m+1}^2} +\\ &+\frac{v_{n,m}(v_{n,m-1}+1)(v_{n,m-1}+\beta_N)}{V_{n,m}^2 V_{n,m-1}} - \frac{v_{n,m+1}+v_{n,m}+\beta_N+1}{V_{n,m+1}^2} +\\ &+\frac{v_{n,m}+v_{n,m-1}+\beta_N+1}{V_{n,m}^2} + \frac{\beta_N(v_{n,m}+1)(v_{n,m}+\beta_N)(v_{n,m+1}-v_{n,m-1})}{V_{n,m+1}^2 V_{n,m}^2}\Bigg].\end{aligned} \tag{70}$$

Отметим, что точечное преобразование $v_{n,m}^{\text{new}} = (\sqrt{\beta_N} - v_{n,m})/(\sqrt{\beta_N} + v_{n,m})$ переводит симметрию (69) в известное уравнение вида (V2) из работы [11] при любом фиксированном n.

Перейдем к симметриям в направлении n и рассмотрим сначала случай $N = 1$. Высшая симметрия, полученная из (6) и затем переписанная в терминах $\hat{v}_{n,m}$ из (68), принимает при любом фиксированном m вид модифицированного уравнения Вольтерра с известной мастер-симметрией [17]:

$$4\partial_{\theta_1}\hat{v}_{n,m} = (\hat{v}_{n,m}^2 - 1)(a_{n+2}\hat{v}_{n+1,m} - a_n\hat{v}_{n-1,m}), \qquad a_n = b + cn. \tag{71}$$

Простейшая высшая симметрия при $N = 2$, полученная из (7), имеет вид

$$\begin{gathered}\partial_{\theta_2} v_{n,m} = v_{n,m}(1 - T_n^2)\left(a_{n+1}\frac{v_{n,m}-1}{\widehat{V}_{n,m}} - a_n\frac{v_{n-2,m}+1}{\widehat{V}_{n-1,m}}\right) - 2cv_{n,m},\\ \widehat{V}_{n,m} = v_{n,m}v_{n-1,m} - v_{n,m} + v_{n-1,m} + 1,\end{gathered} \tag{72}$$

где a_n определяется, как в (7). Для каждого фиксированного m, она порождает при $a_n \equiv 1$ пятиточечный аналог модифицированного уравнения Вольтерра. С другой стороны, этот случай $a_n \equiv 1$ является новым примером автономного дифференциально-разностного уравнения с неавтономной симметрией $a_n = (-1)^n$ и мастер-симметрией $a_n = n$.

Каждое из преобразований (65) преобразует высшую симметрию (7) в (72) напрямую, поскольку они полностью определены на прямой n так же, как и симметрии.

В этом их отличие от преобразований (66), которые связывают те же симметрии, только на решениях дискретного уравнения (67). В отличие от преобразований, рассмотренных в разделе 2, преобразования (65) линеаризуются более сложным образом. Например, первое из них является композицией преобразований:

$$v_{n,m+1} = \frac{y_{n+1,m}}{y_{n,m}}, \qquad y_{n,m} = z_{n,m} - z_{n-1,m}, \qquad u_{n,m} = \frac{z_{n-1,m} + z_{n,m}}{z_{n-1,m} - z_{n,m}}. \tag{73}$$

Они являются линеаризуемыми, так как с точностью до сдвига T_n легко записываются в виде (9).

Теми же самыми сложно-линеаризуемыми преобразованиями (65) высшая симметрия (8) связана с симметрией

$$\begin{gathered}
\partial_{\theta_3} v_{n,m} = v_{n,m}(T_n^2 - 1)\Bigg[a_{n+2}\beta_3 \frac{v_{n+1,m}v_{n,m} + \beta_3 v_{n+1,m} + v_{n,m} + \beta_3^2}{\widetilde{V}_{n,m}} + \\
+ a_{n+1}\beta_3^2 \frac{(v_{n,m} + \beta_3)(v_{n-2,m} + 1)}{\widetilde{V}_{n-1,m}} + \\
+ a_n \frac{v_{n-2,m}v_{n-3,m} + \beta_3 v_{n-2,m} + v_{n-3,m} + 1}{\widetilde{V}_{n-2,m}}\Bigg] - 3cv_{n,m}, \\
\widetilde{V}_{n,m} = (v_{n+1,m} + 1)(v_{n,m} + \beta_3^2)(v_{n-1,m} + \beta_3) + (\beta_3 + 2)(v_{n-1,m} - v_{n+1,m}),
\end{gathered} \tag{74}$$

где коэффициенты a_n, c, β_3 такие же, как в (8). Здесь при каждом фиксированном m содержатся один автономный семиточечный аналог модифицированного уравнения Вольтерра, две его неавтономные коммутирующие симметрии и одна мастер-симметрия.

Как и уравнение (23), уравнение (67) является автономной модификацией автономного дискретного уравнения (1). Как и в случае уравнения (1), можно показать, что оно является примером автономного дискретного уравнения с двумя иерархиями автономных высших симметрий. Например, при $N = 2$ и $\beta_N = -1$ простейшими автономными высшими симметриями являются симметрии (70) и (72) с $a_n \equiv 1$, которые оказываются пятиточечными.

3.2. Вторая модификация. Обозначим правую и левую части дискретного уравнения (67) через $3\beta_N / w_{n,m+1}$ и из этих двух равенств получаем формулы

$$w_{n,m} = \frac{3v_{n+1,m}}{(v_{n+1,m} + 1)(v_{n,m} + 1)}, \qquad w_{n,m+1} = \frac{3\beta_N v_{n,m}}{(v_{n+1,m} + \beta_N)(v_{n,m} + \beta_N)}. \tag{75}$$

Они определяют преобразование $v_{n,m}, v_{n+1,m}$ в $w_{n,m}, w_{n,m+1}$, обратимое на решениях дискретного уравнения (67). Как и в случае (65), мы можем построить в терминах $w_{n,m}$ новое дискретное уравнение и его высшие симметрии по обоим направлениям. Однако обратное преобразование содержит квадратные корни, поэтому дискретное уравнение и симметрии в направлении m также будут содержать квадратные корни. Формулы (75) обеспечивают явные рациональные преобразования для симметрий в направлении n, которые также оказываются рациональными. Мы выпишем в основном такие симметрии, а соответствующее дискретное уравнение покажем только в одном важном случае.

В отличие от преобразований (65), мы имеем здесь не линеаризуемые преобразования, а преобразования типа Миуры. Действительно, в терминах $\hat{v}_{n,m}$ из соотношений (68) и

$$\check{v}_{n,m} = \frac{\beta_N - v_{n,m}}{\beta_N + v_{n,m}} \tag{76}$$

мы имеем

$$w_{n,m} = -\frac{3}{4}(\hat{v}_{n+1,m} - 1)(\hat{v}_{n,m} + 1), \qquad w_{n,m+1} = -\frac{3}{4}(\check{v}_{n+1,m} + 1)(\check{v}_{n,m} - 1). \tag{77}$$

Это известные дискретные преобразования Миуры, связывающие уравнение Вольтерра и его известную модификацию, и они получены здесь при помощи точечных преобразований функции $v_{n,m}$.

В случае $N = 1$, $\beta_N = 1$, используя первое из преобразований (77), мы получаем из симметрии (71), записанной в терминах $\hat{v}_{n,m}$, следующую высшую симметрию в направлении n:

$$-3\partial_{\theta_1} w_{n,m} = w_{n,m}(a_{n+3}w_{n+1,m} - a_n w_{n-1,m} + cw_{n,m} - 3c), \qquad a_n = b + cn. \tag{78}$$

Способ переписывания дифференциально-разностных уравнений при помощи таких преобразований объясняется в приложении A.2 в работе [18]. При любом фиксированном m симметрия (78) представляет собой уравнение Вольтерра с его известной мастер-симметрией [19].

Если $N = 2$, т. е. $\beta_N = -1$, мы получаем из симметрии (72) при помощи первого из преобразований (75) следующую высшую симметрию:

$$\partial_{\theta_2} w_{n,m} = w_{n,m}(T_n+1)\left[\frac{a_{n+3}w_{n,m}}{2w_{n+1,m} - 3} - \frac{a_n w_{n-1,m}}{2w_{n-2,m} - 3} + \frac{1}{2}(T_n - 1)\left(a_n - \frac{3a_{n+1}}{2w_{n-1,m} - 3}\right)\right], \tag{79}$$

где коэффициент a_n определяется, как в (7).

Мы можем получить известное уравнение в терминах

$$\widetilde{w}_{n,m} = -\frac{3}{2w_{n,m} - 3}. \tag{80}$$

Симметрия (79) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} -2\partial_{\theta_2}\widetilde{w}_{n,m} = (\widetilde{w}_{n,m} - 1)\Bigg[& a_{n+4}\frac{\widetilde{w}_{n+2,m}(\widetilde{w}_{n+1,m} - 1)\widetilde{w}_{n,m}}{\widetilde{w}_{n+1,m}} - \\ & - a_n \frac{\widetilde{w}_{n,m}(\widetilde{w}_{n-1,m} - 1)\widetilde{w}_{n-2,m}}{\widetilde{w}_{n-1,m}} - \\ & - a_{n+3}\widetilde{w}_{n+1,m} + a_{n+1}\widetilde{w}_{n-1,m} + (a_n - a_{n+2})\widetilde{w}_{n,m}\Bigg]. \end{aligned} \tag{81}$$

В частном случае $a_n \equiv 1$ при любом фиксированном m она является пятиточечным аналогом уравнения Вольтерра. Это уравнение ранее было найдено в [14] (уравнение (39) в указанной работе), оно совпадает с нашим с точностью до растяжения θ_2 и $\widetilde{w}_{n,m}$. В статье [20] отмечено, что оно играет ключевую роль для специального класса дифференциально-разностных уравнений.

Формула (81) с тем же фиксированным m дает для этого уравнения неавтономную симметрию при $a_n = (-1)^n$ и мастер-симметрию при $a_n = n$. Кроме того, мы можем выписать для этого известного уравнения соответствующее дискретное уравнение, задающее автопреобразование Беклунда:

$$\begin{aligned}&\frac{\widetilde{w}_{n+1,m+1}-1}{\widetilde{w}_{n+1,m+1}(\widetilde{w}_{n+1,m}+1)}(\Theta_{n+1,m}-\widetilde{w}_{n+1,m+1}+\widetilde{w}_{n+1,m}+2)+\\&\qquad+\frac{\widetilde{w}_{n+1,m}-1}{\widetilde{w}_{n+1,m}(\widetilde{w}_{n,m+1}-1)}(\Theta_{n,m}+\widetilde{w}_{n,m+1}-\widetilde{w}_{n,m}-2)=4,\\&\Theta_{n,m}=\sqrt{4\widetilde{w}_{n,m+1}\widetilde{w}_{n,m}+(\widetilde{w}_{n,m+1}+\widetilde{w}_{n,m}+2)^2}.\end{aligned}\tag{82}$$

При $N = 3$ мы можем построить семиточечный аналог уравнения Вольтерра. Используя первое из преобразований (75), мы получаем из (74) высшую симметрию

$$\begin{aligned}3\partial_{\theta_3}w_{n,m}&=w_{n,m}(1+T_n)\big[A_{n,m}+(1-T_n)(w_{n-1,m}B_{n,m})\big],\\A_{n,m}&=a_{n+4}\frac{\beta_3w_{n+1,m}w_{n,m}}{W_{n+2,m}}-a_{n+2}\frac{(\beta_3+1)w_{n,m}w_{n-1,m}}{W_{n,m}}+\\&\qquad+a_n\frac{w_{n-1,m}w_{n-2,m}}{W_{n-2,m}}-3c\left(w_{n,m}-\frac{3}{2}\right),\\B_{n,m}&=a_{n+2}\frac{2\beta_3+1}{W_{n,m}}-a_{n+1}\frac{\beta_3+2}{W_{n-1,m}}+a_n,\\W_{n,m}&=\beta_3w_{n-1,m}-w_{n,m}+1-\beta_3,\end{aligned}\tag{83}$$

где коэффициенты a_n, c, β_3 определяются, как в (8). Если зафиксировать m, мы получаем из симметрии (83) указанный выше аналог при $a_n \equiv 1$, его неавтономные коммутирующие симметрии при $a_n = \beta_3^n$ и $a_n = \beta_3^{2n}$, а также мастер-симметрию при $a_n = n$.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Р. Н. Гарифуллин, Р. И. Ямилов, “Необычная серия автономных дискретных интегрируемых уравнений на квадратной решетке”, *ТМФ*, **200**:1 (2019), 50–71.

[2] R. N. Garifullin, I. T. Habibullin, R. I. Yamilov, “Peculiar symmetry structure of some known discrete nonautonomous equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:23 (2015), 235201, 27 pp., arXiv: 1501.05435.

[3] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, “Examples of Darboux integrable discrete equations possessing first integrals of an arbitrarily high minimal order”, *Уфимск. матем. журн.*, **4**:3 (2012), 177–183.

[4] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, “On series of Darboux integrable discrete equations on square lattice”, *Уфимск. матем. журн.*, **11**:3 (2019), 100–109.

[5] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, D. Levi, “Non-invertible transformations of differential-difference equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:37 (2016), 37LT01, 12 pp.

[6] S. Ya. Startsev, “On non-point invertible transformations of difference and differential-difference equations”, *SIGMA*, **6** (2010), 092, 14 pp.

[7] Р. И. Ямилов, “Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Беклунда”, *ТМФ*, **85**:3 (1990), 368–375.

[8] А.В. Михайлов, “Формальная диагонализация схем Лакса–Дарбу”, *Модел. и анализ информ. систем*, **22**:6 (2015), 795–817.

[9] D. Levi, R.I. Yamilov, “Generalized symmetry integrability test for discrete equations on the square lattice”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:14 (2011), 145207, 22 pp., arXiv: 1011.0070.

[10] Р.И. Ямилов, “О классификации дискретных эволюционных уравнений”, *УМН*, **38**:6(234) (1983), 155–156.

[11] R. Yamilov, “Symmetries as integrability criteria for differential difference equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:45 (2006), R541–R623.

[12] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, “Симметрийный подход к проблеме интегрируемости”, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.

[13] D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna, R. Yamilov, “On Miura transformations and Volterra–type equations associated with the Adler–Bobenko–Suris equations”, *SIGMA*, **4** (2008), 077, 14 pp.

[14] В.Э. Адлер, “Интегрируемые Мёбиус-инвариантные эволюционные цепочки второго порядка”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:4 (2016), 13–25.

[15] R.I. Yamilov, “On the construction of Miura type transformations by others of this kind”, *Phys. Lett. A*, **173** (1993), 53–57.

[16] R.I. Yamilov, “Construction scheme for discrete Miura transformations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27**:20 (1994), 6839–6851.

[17] H. Zhang, G. Tu, W. Oevel, B. Fuchssteiner, “Symmetries, conserved quantities and hierarchies for some lattice systems with soliton structure”, *J. Math. Phys.*, **32**:7 (1991), 1908–1918.

[18] R.N. Garifullin, R.I. Yamilov, D. Levi, “Classification of five-point differential-difference equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:12 (2017), 125201, 27 pp., arXiv: 1610.07342.

[19] W. Oevel, H. Zhang, B. Fuchssteiner, “Mastersymmetries and multi-Hamiltonian formulations for some integrable lattice systems”, *Progr. Theor. Phys.*, **81**:2 (1989), 294–308.

[20] В.Э. Адлер, “Интегрируемые семиточечные дискретные уравнения и эволюционные цепочки второго порядка”, *ТМФ*, **195**:1 (2018), 27–43.

Поступила в редакцию 4.03.2020,
после доработки 4.03.2020,
принята к публикации 3.04.2020