

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УНЦ РАН
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКУЛЛЫ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УФИМСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ**

*Сборник тезисов
(г. Уфа, 27 – 30 сентября 2016 г.)*

**УФА
РИЦ БашГУ
2016**

УДК 51
ББК 22.1
У88

*Сборник издан при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ),
проект № 16-01-20632-г,
и Федерального агентства научных организаций
(ФАНО России)*

*Печатается по решению института математики
с вычислительным центром УНЦ РАН
и факультета математики и информационных технологий БашГУ.
Протокол № 4 от 16.09.2016 г.*

Ответственный редактор:
канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник
Р.Н. Гарифуллин

Уфимская международная математическая конференция:
У88 сборник тезисов (г. Уфа, 27 – 30 сентября 2016 г.)
/ отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. – 210 с.
ISBN 978-5-7477-4173-7

В сборнике представлены тезисы докладов участников Уфимской
международной математической конференция.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-7477-4173-7

© БашГУ, 2016

**INSTITUTE OF MATHEMATICS
WITH COMPUTER CENTER OF RAS
M. AKMULLAH BASHKIR STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY
BASHKIR STATE UNIVERSITY**

**UFA INTERNATIONAL MATHEMATICAL
CONFERENCE
BOOK OF ABSTRACTS**

September 27 - 30, 2016

UFA - 2016

UDC 51
BBK 22.1

*The Conference is sponsored
by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR)
Grant № 16-01-20632
and The Federal Agency of Scientific Organizations
(FASO Russia)*

Ufa International Mathematical Conference. Book of Abstracts

Ufa, Russia: RITS BashSU, 2016. – 210 p.

ISBN 978-5-7477-4173-7

The book contains abstracts of the talks at Ufa International Mathematical Conference.

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 51
BBK 22.1

ISBN 978-5-7477-4173-7

© BashSU, 2016

Классические операторы в весовых банаховых пространствах голоморфных функций

Абанин А.В.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

В докладе будет представлен новый подход к изучению классических операторов (дифференцирования, интегрирования и др.) и их динамических свойств в весовых пространствах голоморфных функций, разработанный автором совместно с Фам Чонг Тиеном и основанный на использовании канонических весов (см. [1]). По сравнению с предыдущими результатами аналогичного характера (см. [2]), он позволяет проводить исследования в случае областей и весов общего вида. Более того, за счет развитых методов и полученных с их помощью результатов полностью решена исследовавшаяся ранее задача об описании классов радиальных весов, для которых классические операторы непрерывны в соответствующих весовых пространствах. Установлены также новые, более удобные для применений, описания некоторых классов радиальных весов, используемых в решении ряда задач теории весовых пространств голоморфных функций (см. [3]), и решена проблема описания инвариантных подпространств исследуемых операторов. Часть из перечисленных результатов будет опубликована в статье [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01404).

- [1] Abanin A.V., Pham Trong Tien. Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some of its applications // *Studia Math.* 2010. V. 200. P. 279–295.
- [2] Harutyunyan A., Lusky W. On the boundedness of the differentiation operator between weighted spaces of holomorphic functions // *Studia Math.* 2008. V. 184. P. 233–247.
- [3] Domański P., Lindström M. Sets of interpolation and sampling for weighted Banach spaces of holomorphic functions // *Ann. Polon. Math.* 2002. V. 79. P. 233–264.

- [4] Abanin A.V., Pham Trong Tien. Differentiation and integration operators on weighted spaces of holomorphic functions // Math. Nachr. (принята к печати).

О континууме точных решений системы Эйлера Абенев М.М.

Казахстанский инженерно-технологический университет, г.Алматы,
Казахстан

Здесь дается описание класса массовых сил, когда система уравнений Эйлера допускает точные решения. Рассмотрим систему уравнений Эйлера в бесконечной области $G = R^3 \times [0, \infty)$:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F}(t, x, y, z) \quad (1)$$

с условием неразрывности:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2)$$

Пусть: $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ - разрешающие параметры системы Эйлера. Это - действительные или комплексные скаляры, $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \neq 0, \alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, связанные следующими соотношениями:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha(\beta_0\beta + \gamma_0\gamma) - \alpha_0(\beta^2 + \gamma^2)}{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2} \quad (3)$$

$$\beta_1 = \frac{\beta_0(\alpha^2 - \gamma^2) - \beta(\alpha_0\alpha - \gamma_0\gamma)}{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2} \quad (4)$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_0(\alpha^2 - \beta^2) - \gamma(\alpha_0\alpha - \beta_0\beta)}{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2} \quad (5)$$

Далее, пусть $u = (u_0(t, x, y, z), u_1, u_2, u_3) \in M_A(G)$ - допустимая регулярная функция [1], $\Phi(t, x, y, z) \in C^\infty(G)$ - произвольная функция, исчезающая на бесконечности. Введем обозначения: $\frac{\delta t}{T} = t_1, \frac{\alpha x}{L} = x_1, \frac{\beta y}{L} = y_1, \frac{\gamma z}{L} = z_1$. Теперь, если U_0, L, T -характерные для данного течения скорость, размер и время, то определим компоненты массовых сил так:

$$F_1(t, x, y, z) = \frac{\alpha_0 U_0}{T} \frac{\partial \psi(t_1, x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi(t, x, y, z)}{\partial x} \quad (6)$$

$$F_2(t, x, y, z) = \frac{\beta_0 U_0}{T} \frac{\partial \psi(t_1, x_1, y_1, z_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi(t, x, y, z)}{\partial y} \quad (7)$$

$$F_3(t, x, y, z) = \frac{\gamma_0 U_0}{T} \frac{\partial \psi(t_1, x_1, y_1, z_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi(t, x, y, z)}{\partial z} \quad (8)$$

Здесь:

$$\psi(t_1, x_1, y_1, z_1) = \delta u_0(t_1, x_1, y_1, z_1) + \frac{\alpha_1 \alpha}{2} u_1^2 + \frac{\beta_1 \beta}{2} u_2^2 + \frac{\gamma_1 \gamma}{2} u_3^2 \quad (9)$$

Теорема. Для любого вектора массовых сил вида (6)-(8), система (1)-(2) имеет точное решение: скорость - $(V_1, V_2, V_3) \in C^\infty(G)$ (компоненты скорости исчезают на бесконечности) и функцию давления - $P \in C^\infty(G)$ (ограниченная функция). Это решение имеет следующий вид:

$$V_1(t, x, y, z) = U_0 \alpha_1 u_1 \left(\frac{\delta t}{T}, \frac{\alpha x}{L}, \frac{\beta y}{L}, \frac{\gamma z}{L} \right) \quad (10)$$

$$V_2(t, x, y, z) = -U_0 \beta_1 u_2 \left(\frac{\delta t}{T}, \frac{\alpha x}{L}, \frac{\beta y}{L}, \frac{\gamma z}{L} \right) \quad (11)$$

$$V_3(t, x, y, z) = -U_0 \gamma_1 u_3 \left(\frac{\delta t}{T}, \frac{\alpha x}{L}, \frac{\beta y}{L}, \frac{\gamma z}{L} \right) \quad (12)$$

$$P(t, x, y, z) = P_\infty + \rho \Phi + \frac{\alpha_0 \alpha - \beta_0 \beta - \gamma_0 \gamma}{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2} \rho U_0^2 \psi \quad (13)$$

Формулы (10) - (13) дают континуум точных решений (1) -(2). Аналогичный результат, с некоторыми изменениями, справедлив и для системы уравнений Навье - Стокса.

- [1] Абенов М.М. Решения системы уравнений Навье - Стокса. Алматы.: Изд-во К-2, 2013.

**О 2-порожденности подмодулей в модуле целых функций
экспоненциального типа и полиномиального роста на
вещественной оси**

Абузярова Н.Ф.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Обозначим через $\mathcal{P}(a; b)$ индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\{P_k\}$, каждое пространство P_k состоит из всех целых функций φ , для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1 + |z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + iy,$$

$[a_1; b_1] \subseteq [a_2; b_2] \subseteq \dots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{P}(a; b)$ есть локально-выпуклое пространство типа (LN^*) и топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$; всякий элемент φ пространства $\mathcal{P}(a; b)$ является целой функцией вполне регулярного роста при порядке 1, индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси $i[c_\varphi; d_\varphi] \subset i(a; b)$.

Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a; b)$ – *замкнутый подмодуль*, то есть замкнутое подпространство, инвариантное относительно умножения на z ; $c_{\mathcal{J}} = \inf_{\varphi \in \mathcal{J}} c_\varphi$, $d_{\mathcal{J}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{J}} d_\varphi$, $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$ – *индикаторный отрезок* подмодуля $\mathcal{J}$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$ положим $n_\varphi(\lambda) = 0$, если $\varphi(\lambda) \neq 0$, и $n_\varphi(\lambda) = m$, если λ – нуль φ кратности m . *Дивизор подмодуля* $\mathcal{J}$ определяется формулой $n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min_{\varphi \in \mathcal{J}} n_\varphi(\lambda)$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит все функции $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$, удовлетворяющие условиям: 1) $n_\varphi(z) \geq n_{\mathcal{J}}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; 2) индикаторная диаграмма функции φ содержится в множестве $i[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ называется *m -порожденным*, если для некоторых $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \overline{\{p_1 \varphi_1 + \dots + p_m \varphi_m, \quad p_1, \dots, p_m \in \mathbb{C}[z]\}}.$$

Теорема. Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a; b)$ – слабо локализуемый подмодуль и $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \subset (a; b)$. Тогда $\mathcal{J}$ – 2-порожденный подмодуль.

Сформулированная теорема обобщает теорему 4 из [1].

- [1] Н.Ф. Абузярова. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций.* // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 510–513.

Hardy type inequalities with variable upper limit

Abylayeva A.M.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev Str. 2,
010008 Astana, KAZAKHSTAN,
abylayeva_b@mail.ru

Let $0 < p, q < \infty$, $I = (a, b)$, $0 \leq a < b \leq \infty$, $0 < \alpha < 1$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Let $W : I \rightarrow R$ be a strictly increasing and locally absolutely continuous function on I . Suppose that $\frac{dW(x)}{dx} \equiv w(x)$ almost every $x \in I$ and $W(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} W(t) > -\infty$.

Let $v : I \rightarrow I$ be a non-negative locally integrable function on I and $\varphi : I \rightarrow I$ be a strictly increasing locally absolutely continuous function with the property:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x) = b, \quad \varphi(x) \leq x, \quad \forall x \in I.$$

Consider the operator in the form

$$K_{\alpha, \varphi} f(x) = \int_a^{\varphi(x)} \frac{f(s)w(s)ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}}, \quad x \in I, \quad (1)$$

from $L_{p,w} = L_{p,w}(I)$ to $L_{q,v} = L_{q,v}(I)$, where $L_{p,w}$ is the space of measurable functions $f : I \rightarrow R$ for which the functional

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_a^b |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

is finite.

First main result reads:

Theorem 1. Let $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$. Then the operator (1) is bounded from $L_{p,w}$ to $L_{q,v}$ if and only if

$$A = \sup_{t \in I} \left(\int_t^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} W^{\frac{1}{p'}}(\varphi(t)) < \infty.$$

Moreover, $\|K_{\alpha,\varphi}\| \approx A$.

Our next main result reads:

Theorem 2. Let $0 < q < p < \infty$, $p > \frac{1}{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Then the operator (1) is bounded from $L_{p,w}$ to $L_{q,v}$ if and only if

$$B = \left(\int_a^b \left(\int_t^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{q}{p-q}} W^{\frac{q(p-1)}{p-q}}(\varphi(t)) \frac{v(t) dt}{W^{q(1-\alpha)}(t)} \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Moreover, $\|K_{\alpha,\varphi}\| \approx B$.

Выборки из метрической проекции для солнц в трехмерных пространствах

Алимов А.Р.

МГУ имени М.В. Ломоносова, г.Москва, Россия

Мы следуем определениям, данным в обзоре [1].

Для подмножества $\emptyset \neq M$ линейного нормированного пространства X точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \emptyset$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$. Множество $M \subset X$ называется *солнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно, строгой солнечности) для M . “Солнца” обладают важными характеристическими признаками. Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса. Эти свойства стоят в одном ряду с известными теоремами отделимости выпуклых множеств по посредством полупространств (критерий Колмогорова).

И. Г. Царьков (см. [1]) установил, что в конечномерном банаховом пространстве множество существования с полунепрерывной снизу мет-

рической проекцией является B -ациклическим солнцем. Мы устанавливаем следующий результат.

Теорема. Пусть M – замкнутое множество с полунепрерывной снизу (непрерывной) метрической проекцией в банаховом пространстве X_n , $n \leq 3$. Тогда M – солнце, B -стягиваемо, B -ретракт и на M существует непрерывная выборка из метрической проекции.

- [1] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, №1 (427). С. 3–84

**Сведение спектральных задач для самосопряженных
операторов к изучению резольвенты оператора
Штурма-Лиувилля
Ахмерова Э.Ф.**

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В работе рассматриваются возмущенные операторы вида $H = H^0 + V$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Самосопряженный оператор H^0 имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$) и соответствующие собственные проекторы P_k , причем $\inf_{k \geq 1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$.

Обозначим через $R^0(\lambda)$ резольвенту оператора H^0 . Пусть $d_n = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1})/2$ и существует последовательность ρ_n , такая, что

$$0 < \rho_n \leq d_n, \quad \inf_{n \geq 2} \rho_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\lambda - \lambda_n| \leq \rho_n} \|R_n^0(\lambda)V\| = 0,$$

где $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - P_n(\lambda_n - \lambda)^{-1}$. Тогда известно, что оператор H замкнут в области определения H^0 и имеет дискретный спектр. Согласно рассуждениям работы [1], спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + P_n V P_n - P_n V R_n(\lambda) V P_n,$$

где $R_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R_n^0(\lambda)V]^k R_n^0(\lambda)$.

Таким образом, задача асимптотического разложения собственных чисел возмущенного оператора $H = H^0 + V$ сводится к исследованию

поведения части $R_n^0(\lambda)$ резольвенты невозмущенного оператора в окрестности $\lambda = \lambda_n$. Изучение резольвенты $R_n^0(\lambda)$ (в литературе часто принято называть приведенная резольвента) не такая уж легкая задача, тем более если речь идет о дифференциальных операторах в частных производных. В работе [2] для дифференциальных операторов $2n$ -го порядка с условиями Дирихле были получены представления приведенных резольвент и показано, что задача сводится к изучению приведенной резольвенты оператора Штурма-Лиувилля с такими же условиями. В данной работе показывается, что этот метод применим и для других краевых условий. Для дифференциальных операторов $2n$ -го порядка с периодическими краевыми условиями получена формула регуляризованного следа. В качестве примера также рассматриваются дифференциальные операторы в частных производных, получены представления резольвент этих операторов и формулы регуляризованных следов.

- [1] Ахмерова Э.Ф., Муртазин Х.Х. *Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов* // Докл. РАН. 2003. Т. 388, № 6. С. 731-733.
- [2] Ахмерова Э.Ф. *Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов $2m$ -го порядка* // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 6. С. 833-844.

Асимптотические решения задачи конвективной диффузии в следе за каплей с учётом объёмной химической реакции

Ахметов Р.Г.

Башкирский государственный педагогический университет им. М.

Акмуллы, e-mail: akhmetovrg@rambler.ru

Рассматривается стационарная конвективная диффузия около капли при наличии объемной химической реакции. Аналогичные и более сложные задачи исследовались во многих работах. Задачи такого рода возникают в химической технологии. В докладе предполагается дать обзор основных результатов автора по данной теме. Для задачи стационарной

конвективной диффузии около сферической капли при наличии объемной химической реакции построено асимптотическое решение по малому параметру в следе за каплей. Малый параметр соответствует большим числам Пекле.

- [1] Гупало Ю. П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука. 1985. 336 стр.
- [2] Ахметов Р.Г. Асимптотика решения задачи конвективной диффузии с объемной химической реакцией в следе за частицей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 46. N. 5 . 2006. Стр. 834-847.
- [3] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989 . 336 стр.

Identification of Boundary Conditions from Eigenvalues

Akhtyamov A.M.

Bashkir State University, Ufa, Russia

e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

If the beam-ends are inaccessible to visual observation, the question arises of whether it is possible to determine the type and parameters of their fastening from sound vibrations induced by impact on the beam. In this connection, a possible statement of the problem is as follows: to identify the type (clamping, free support, elastic support, elastic fixing, floating fixing, or free end) and parameters of fastening (the stiffness coefficients of springs for elastic fixing) on both ends of a homogeneous beam from its natural frequencies. Similar problems were considered in [1, 2, 3]. Unlike these and similar publications, the present work is devoted to the determination of the type and parameters of fastening, rather the shape of the domain or the objects size, position, state, or source terms.

The problem under consideration also differs from the classical inverse spectral problems. In the latter (see, e.g., [4, 5, 6] and the literature cited therein), it is necessary to reconstruct the coefficients in a differential equations and in boundary conditions. However, the initial data used in cited publications

for reconstructing the boundary conditions included several spectra or other spectral data (e.g., the spectral function, the Weyl function, or the so-called weighting numbers), rather than a single spectrum (as in present work). In addition, the main objective of these publications was the reconstruction of the coefficients in the equation, rather than in the boundary conditions. The aim of this talk is to reconstruct the boundary conditions of a spectral problem with known coefficients of the equation from part of the spectrum.

The work continues the authors studies concerned with the identifications of the boundary conditions [6, 7]. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Academy of Sciences of the Republic Bashkortostan, project no. 14-01-97010-r_Povolzhe-a.

- [1] Kac M. Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. 1966. Vol. 73. №4. P. 1–23.
- [2] Qunli W. U., Fricke F. Determination of the size of an object and its location in a cavity by eigenfrequency shifts // Nat. Conf. Publ./ Inst. Eng. Austral, 1990. № 9. P. 329–333.
- [3] Frikha S., Coffignal G., Trolle J. L. Boundary condition identification using condensation and inversio // J. Sound and Vib. 2000. Vol. 233. № 3. P. 495–514.
- [4] Marchenko V.A. Sturm-Liouville Operators and their Applications. Basel: Birkhauser, 1986.
- [5] Levitan B.M. Inverse Sturm-Liouville Problems. VNU Science Press. Zeist. 1987.
- [6] Akhtyamov A.M. Theory of Identification of the Boundary Conditions and its Applications. Moscow: Fizmatlit, 2009.
- [7] Akhtyamov A. M., Kumushbaev R. R. Identification of the Polynomial in Nonseparated Boundary Conditions by One Eigenvalue // Differential Equations. 2016. Vol. 52. No. 5. P. 672675.

Проблема идентификации типов закрепления трубопровода по собственным частотам.

Ахтямов А.М., Шагиев В.Р.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

e-mail: shagiev-vadim@mail.ru

Рассматриваются колебания трубопровода с жидкостью. Ранее было показано, что если жидкость не течёт по трубопроводу, то по всем собственным частотам изгибных колебаний трубопровода вид закрепления трубопровода определяется однозначно с точностью до перестановок закреплений на его концах. Если рассматривать только неупругие типы закреплений: заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец, – возникает 16 вариантов закреплений трубопроводов. В [1]–[2] было показано, что вариант, когда трубопровод на одном конце закреплён заделкой, а на другом свободен, и вариант (свободное опирание)–(плавающая заделка) можно идентифицировать всего лишь по одной ненулевой собственной частоте. Остальные 12 вариантов определяются по одной ненулевой собственной частоте и информации, является ли ноль собственным значением конкретного случая.

Добавив к рассмотрению упругие закрепления, количество собственных частот, необходимых для решения обратной задачи, возрастает. Рассмотрим к примеру случай, в котором краевые условия выглядят так:

$$\begin{aligned} U_1(X) = X'''(0) = 0, \quad U_2(X) = -X'(0) + 0.5252 \cdot X''(0) = 0, \\ \text{Левый конец} \\ U_3(X) = X(1) + 0.00098 \cdot X'''(1) = 0, \\ U_4(X) = X'(1) + 0.1342 \cdot X''(1) = 0. \text{ Правый конец} \end{aligned} \tag{1}$$

В таблице 1 приведём сравнение собственных частот этого случая со случаем (заделка)–(свободный конец).

Как видно из таблицы 1, два различных вида закрепления имеют три одинаковые собственные частоты. Все наши вычисления выполнены с точностью в 40 знаков после запятой, различия между частотами w_1 , w_2 , w_3 проявляются на 35–38 знаке после запятой, что считается несущественным.

Авторами показано, что среди всех видов закреплений, в том числе и упругих, когда жидкость не течёт по трубопроводу, закрепления

Таблица 1: Сравнение собственных частот

	Заделка-свободный конец	Упругие закрепления
w_1	3.641309	3.641309
w_2	21.72958	21.72958
w_3	61.32403	61.32403
w_4	120.4921	123.1256
w_5	199.4298	205.1523

(заделка)-(свободный конец) и (свободное опирание)-(плавающая заделка) можно однозначно идентифицировать по четырём собственным частотам, а для идентификации остальных видов закреплений требуется большее количество частот.

- [1] Ахтямов А. М., Шагиев В. Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21. № 1. С. 21-26.
- [2] Ахтямов А. М., Шагиев В. Р. Собственные частоты неупругих видов закреплений трубопроводов. // Мавлютовские чтения: материалы Российской научно-техн. конф.: в 7 т. Т. 3. /редкол.: Жернаков В.С. и Павлов В.П. – Уфа: Изд-во УГАТУ, 21-24 марта 2016. – С. 38-42.

О гиперциклических операторах в пространствах последовательностей

Ахтямов Н.Т.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа,
Россия

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для каждого $m \in \mathbb{N}$:

- 1). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty$;
- 2). $\exists A > 0 \forall m \in \mathbb{N} \exists B_m \geq 0$:

$$\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x) \geq A \ln(1 + \|x\|) - B_m, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

3). для любого $m \in \mathbb{N}$ найдётся число $d_m > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ с $|\xi_j| \leq 1$ ($j = 1, \dots, n$)

$$\varphi_{m+1}(x + \xi) \leq \varphi_m(x) + d_m.$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$A(\varphi_m) = \{f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}, p_m(f) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \frac{|f(\alpha)|}{e^{\varphi_m(\alpha)}} < \infty\}.$$

Пусть A_φ – проективный предел пространств $A(\varphi_m)$.

Определение. Линейный непрерывный оператор T на сепарабельном локально выпуклом пространстве X называют *гиперциклическим*, если существует точка $x \in X$ такая, что её орбита $Orb\{x, T\} = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ плотна в X .

Теорема. Любой линейный непрерывный оператор на A_φ , коммутирующий со сдвигами и не являющийся кратным тождественному оператору, является гиперциклическим.

Об интегрируемости некоторых матричных уравнений

Баландин С.П.

Уфимский государственный авиационный технический университет,
г.Уфа, Россия

Тест Пенлеве–Ковалевской для проверки интегрируемости основан на поиске решения с подвижными полюсами и без подвижных точек ветвления или существенных особенностей. Его можно применить к матричным уравнениям. Впервые матричный аналог первого уравнения из списка Пенлеве рассмотрен в статье [1]. Попытка обобщения, предпринятая в [2], показала отсутствие новых интегрируемых случаев. Единственным интегрируемым матричным аналогом P_1 является введенное в [1] для матриц $n \times n$ уравнение

$$U'' = 6U^2 + zU + A,$$

включающее произвольную постоянную матрицу A в качестве параметра, через z обозначена независимая комплексная переменная. Найденное

в виде матричного формального ряда Лорана решение содержит требуемое число $2n^2$ произвольных констант. Отметим, что скалярное уравнение P_1 получается стандартной симметричной редукцией уравнения Кортевега–де Вриза. Таким же образом матричное КдВ

$$V_t = V_{xxx} - 6(VV_x + V_xV)$$

редуцирует матричный аналог P_1 , который является условием совместности линейной пары уравнений Лакса.

Аналогично исследуется матричный аналог второго уравнения из списка Пенлеве, по форме совпадающий со скалярным уравнением. Рассмотрено также его обобщение, включающее дополнительные члены уравнения.

Русскоязычное изложение методики теста Пенлеве–Ковалевской и его разнообразные приложения подробно описаны в монографии [3].

- [1] S.P. Balandin, V.V. Sokolov. On the Painlevé test for non-Abelian equations. 1998 Phys. Lett. A 246 No3-4 267
- [2] С.П. Баландин, И.Ю. Черданцев. Матричные аналоги первого уравнения Пенлеве 2011 Уфимский матем. журнал Т.3 No4 21
- [3] Кудряшов А.Н. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

О геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков

Банару Г.А.

Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Россия

К 90-летию со дня рождения Н.В. Степанова (1926–1991)

В сентябре 2016 года исполняется 90 лет со дня рождения известного советского геометра Николая Васильевича Степанова, профессора, доктора физико-математических наук. Последние 10 лет своей жизни Н.В.

Степанов заведовал кафедрой геометрии Смоленского государственного педагогического института им. К. Маркса (теперь этот вуз именуется Смоленским государственным университетом). Научная работа Н.В. Степанова была связана в основном с мехматом Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Московским математическим обществом.

Н.В. Степанов работал над общей геометрической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Им опубликовано более 40 работ по этой тематике. Наиболее полно его результаты представлены в двух обзорах [1], [2].

В докладе некоторые построения и результаты Н.В. Степанова будут проиллюстрированы на примере обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков [3], [4], [5], [6]. Будет показана связь теории, разработанной Н.В. Степановым, с результатами других известных отечественных геометров [7].

Будет представлен и ряд новых результатов автора, также относящихся к геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков. В основном, эти результаты имеют отношение к группам преобразований, относительно которых уравнения инвариантны, а также к расслоенным пространствам со связностью, которые присоединены к уравнениям. Эти результаты получены с использованием методов, разработанных Н.В. Степановым и другими отечественными специалистами.

- [1] Степанов Н.В. Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1977. Т. 8. С. 47–66.
- [2] Степанов Н.В. Геометрия дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1981. Т. 12. С. 127–164.
- [3] Банару Г.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения 3-го порядка с 6-мерной и 7-мерной группами точечных симметрий // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1994. №3. С. 31–36.

- [4] Банару Г.А. О проективной связности, допускаемой обыкновенным дифференциальным уравнением пятого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 1996. №2. С. 3–9.
- [5] Banaru G.A. A note on third-order ordinary differential equations // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2002. Т. 39. №2. С. 65–70.
- [6] Banaru G.A. Some remarks on groups of pointwise symmetries of third-order ordinary differential equations // Studia Univ. Babes-Bolyai. Math. 2002. V. 47. №1. P. 3–10.
- [7] Евтушик Л.Е. Геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования в семинаре Лаптева–Васильева при Московском университете (1980–1992 гг.) // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2002. Т. 11. С. 24–81.

Minimal completions of lattices and its applications in FCA

Basheyeva A.O.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Abstract: To reduce or correct the big formal concept lattices to lattices with well studied properties is usual problem of the Theory of Formal Concept Analysis. From the point view of the Lattice Theory and Formal Concept Analysis it is natural to correct given lattice to lattice with a well studied properties without losing relations (order) between elements. Doing this we will extend a given lattice to other lattice guiding by the following two principles of completions:

- complected lattice should preserve partial order of the given lattice,
- complected lattice should have the well-known properties,
- the difference between a given lattice and its complected lattice should be "difficult to distinguish".

The measure of "difficult to distinguish" is defined.

The main purpose of the paper is to continue studies that were started in the paper [1] and to present one approach of completion of a given finite

lattice to lattice with some properties of Boolean lattices for its applications to concept lattices. The existence of such completion for every finite lattice and any properties of Boolean lattices is easy fact. Using these fact, properties of geometric lattices and database of suppressors from [2] we construct minimal co-atomistic geometric completion of lattice of plant viruses' suppressors.

- [1] Satekbayeva A., Basheyeva A., Nurakunov A., and Tussupov J. P-completions of lattices and its Applications to Formal Concept Analyses, International journal of mathematical models and methods in applied sciences, 8(2014), 199-202.
- [2] Rustem T. Omarov and Herman B. Scholtof (2012), "Biological Chemistry of Virus-Encoded Suppressors of RNA Silencing: An Overview", Methods in Molecular Biology, Springer Science+Business Media, LLC, 2012.

**О τ -компактности произведения τ -измеримых операторов,
присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана
Бикчентаев А.М.**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань,
Россия

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, I – единица $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ – решетка проекторов $\mathcal{M}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Множество $\tilde{\mathcal{M}}$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций. Через $\mu_t(X)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in \tilde{\mathcal{M}}$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X): (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(I - P) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество τ -компактных операторов $\tilde{\mathcal{M}}_0 = \{X \in \tilde{\mathcal{M}} : \mu_\infty(X) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(X) = 0\}$ является идеалом в $\tilde{\mathcal{M}}$. Множество элементарных операторов $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \{X \in \mathcal{M} : \mu_t(X) = 0 \text{ для некоторого } t > 0\}$ является идеалом в $\mathcal{M}$.

Мы продолжаем исследования, начатые в [1]–[4]. Нами получены неравенства для перестановок произведений τ -измеримых операторов. Эти неравенства применены для получения 1) новых субмажоризаций (по Харди–Литтлвуду–Полиа) произведений τ -измеримых операторов; 2) достаточного условия ортогональности некоторых неотрицательных τ -измеримых операторов.

Установлены достаточные условия τ -компактности произведений самосопряженных τ -измеримых операторов. Получен критерий τ -компактности произведения неотрицательного τ -измеримого оператора с произвольным τ -измеримым оператором. Приведен пример, показывающий существенность неотрицательности одного из сомножителей. Заметим, что компактность произведения операторов естественным образом возникает в классической теореме о подъеме идемпотента с алгебры Калкина (Lifting of Idempotents Theorem).

Из известного свойства перестановок имеем: неотрицательный оператор $A \in \mathcal{M}$ элементарен тогда и только тогда, когда элементарен A^p для всех $p > 0$. Нами показано, что аналогичная картина имеет место и для произведения неотрицательных операторов $A, B \in \mathcal{M}$: элементарность оператора AB эквивалентна элементарности операторов $A^p B^r$ для всех $p, r > 0$.

Получены приложения полученных результатов к симметричным пространствам на $(\mathcal{M}, \tau)$. Результаты являются новыми и для $*$ -алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \text{tr}$. В этом случае $\tilde{\mathcal{M}}_0$ и $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ совпадают с идеалами компактных операторов и конечномерных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Имеем

$$\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s -чисел оператора X ; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$.

- [1] А.М. Бикчентаев, “О нормальных τ -измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана”, *Матем. заметки*, **96:3** (2014), 350–360.

- [2] А.М. Бикчентаев, “К теории τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана”, *Матем. заметки*, **98**:3 (2015), 337–348.
- [3] A. Bikchentaev, “Integrable products of measurable operators”, *Lobachevskii J. Math.*, **37**:4 (2016), 397–403.
- [4] А.М. Бикчентаев, “О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана”, *Тр. МИАН*, **293** (2016), 73–82.

Обратные спектральные задачи для системы Дирака с интегральным запаздыванием

Бондаренко Н.П., Бутерин С.А.

Самарский университет, Самара, Россия; Саратовский
государственный университет, Саратов, Россия

Работа посвящена системе Дирака с интегральным запаздыванием следующего вида:

$$By' + \int_0^x M(x-t)y(t) dy = \lambda y, \quad (1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} M_1(x) & M_2(x) \\ M_3(x) & M_4(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

где $M_k(x)$, $k = \overline{1, 4}$ — комплекснозначные функции, λ — спектральный параметр. Рассмотрим краевые задачи L_1 и L_2 для системы (1) с краевыми условиями

$$L_1: \quad y_1(0) = y_1(\pi) = 0,$$

$$L_2: \quad y_1(0) = y_2(\pi) = 0,$$

соответственно. Исследуются обратные спектральные задачи, состоящие в восстановлении матричной функции $M(x)$ по спектрам краевых задач L_1 и L_2 . Изучены три случая:

1. $M_1 = M_4 = p$, $M_2 = -M_3 = q$, $(\pi - x)p(x) \in L_2(0, \pi)$, $(\pi - x)q(x) \in L_2(0, \pi)$.

Обратная задача 1. Дан спектр краевой задачи L_1 , построить функции p и q (см. [1]).

2. $M_1 = -M_4 = p$, $M_2 = -M_3 = q$, $p(x) \in L_2(0, \pi)$, $(\pi - x)q(x) \in L_2(0, \pi)$.

Обратная задача 2. Дан спектр краевой задачи L_1 , построить функции p и q .

3. $M_k(x)$, $k = \overline{1, 4}$ — произвольные комплекснозначные функции из $L_2(0, \pi)$, такие что $(\pi - x)(M_1(x) + M_4(x)) \in W_2^1[0, \pi]$, $(\pi - x)(M_2(x) - M_3(x)) \in W_2^1[0, \pi]$.

Обратная задача 3. Даны два спектра краевых задач L_1 и L_2 , построить функции $M_k(x)$, $k = \overline{1, 4}$.

Для всех трех обратных задач получены теоремы единственности, конструктивные алгоритмы их решения, а также необходимые и достаточные условия разрешимости. Метод исследования основан на сведении обратных задач к системам нелинейных интегральных уравнений, аналогичных уравнению, получаемому для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным запаздыванием (см. [2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014K) и грантов РФФИ (проекты 15-01-04864 и 16-01-00015).

- [1] Bondarenko N., Buterin S. On Recovering the Dirac Operator with an Integral Delay from the Spectrum. Res. Math., published online (2016), 1–9.
- [2] Buterin S.A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator. Res. Math. 50 (2007), no.3-4, 73–181.

Дифференциальное уравнение описывающее гемодинамику в кровеносных сосудах

Борд Е.Е., Хе А.К., Панарин В.А., Орлов К.Ю., Черевко А.А.

Новосибирский государственный университет,

Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН,

Новосибирский НИИ патологии кровообращения

им. акад. Е.Н. Мешалкина

Рассматривается математическая модель поведения гемодинамических величин в кровеносных сосудах головного мозга человека. Модель имеет вид уравнения нелинейного осциллятора и строится на основе клинических данных, полученных во время нейрохирургических операций. На основе большого массива клинических данных выявляются и изучаются характерное поведение и бифуркации гемодинамических величин.

Аномалии сосудистой системы головного мозга, такие как аневризмы и артерио-венозные мальформации, ведут к нарушению правильного кровотока, и как следствие, к угрозе для пациента. Поэтому с медицинской точки зрения важно знать реакцию сосудов на изменение кровотока. В тоже время по этическим соображениям невозможно изучать эту реакцию экспериментально. Целью работы является получение информации о характерном поведении интегральных характеристик кровотока в окрестности патологий на основе построенной математической модели.

Модель строится на основе данных о зависимостях от времени скорости и давления, измеренных во время нейрохирургических операций специальным датчиком внутри кровеносных сосудов вблизи патологии. Для выявления характерного поведения этих величин использована модель обобщённого уравнения Ван дер Поля – Дуффинга:

$$q'' + f(q)q' + g(q) = ku(t), \quad (1)$$

функции $f(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2$, $g(q) = b_1q + b_2q^2 + b_3q^3$ в (1) являются аналогами демпфирования и упругой силы. Величины $q = q(t)$ и $u = u(t)$ представляют собой нормированные (безразмерные) значения давления и скорости кровотока соответственно. Коэффициенты уравнения определяются методами теории обратных задач на основе клинических данных

для каждого пациента индивидуально. Таким образом, эти коэффициенты характеризуют особенности кровотока вблизи патологии.

Показано, что решение уравнения, построенного по отрезку клинических данных длиной 5 секунд, хорошо совпадает с клиническими данными на временах порядка десятков минут.

Для анализа зависимости поведения решения уравнения (1) от заданных параметров использовалось нелинейное обобщение диаграмм Найквиста (ДН). Анализ выполнялся посредством замены правой части (1) на гармоническую функцию, а в качестве параметров использовались ее амплитуда и частота. Было проанализировано около 300 случаев, соответствующих различным пациентам и различным положениям измерительного датчика в сосудистой сети.

Показано, что построенные ДН разбиваются на несколько классов. Диаграммы переходят из класса в класс в определенном порядке с увеличением амплитуды правой части. Найдена зависимость характерного поведения решения от формы ДН и проанализированы приводящие к смене типа ДН бифуркации решений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №14-35-00020 и гранта НШ-8146.2016.1.

- [1] A A Cherevko, A V Mikhaylova, A P Chupakhin, I V Ufimtseva, A L Krivoschapkin, K J Orlov. Relaxation oscillation model of hemodynamic parameters in the cerebral vessels *Journal of Physics: Conference Series* 2016
- [2] A A Cherevko, E E Bord, A K Khe, V A Panarin, K J Orlov, A P Chupakhin. Using non-linear analogue of Nyquist diagrams for analysis of the equation describing the hemodynamics in blood vessels near pathologies *Journal of Physics: Conference Series* 2016

**Оценка начальных масштабов для слоев с малыми
случайными отрицательно определенными возмущениями**

Борисов Д.И.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Башкирский государственный педагогический университет

им. М. Акмуллы, г. Уфа, Россия

Университет Градца Кралове, Градец Кралове, Чешская Республика

Пусть $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $x = (x', x_{n+1})$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n+1}$, соответственно, $n \geq 1$, Π – многомерный слой $\Pi := \{x : 0 < x_{n+1} < d\}$, $d > 0$. Через Γ обозначим периодическую решетку с ячейкой периодичности $\square'$. Положим $\square := \square' \times (0, d)$.

Через $\mathcal{L}(t)$, $t \in [-t_0, t_0]$, $t_0 = \text{const} > 0$, обозначим семейство линейных операторов из $H^2(\square)$ в $L_2(\square)$ следующего вида:

$$\mathcal{L}(t) := t\mathcal{L}_1 + t^2\mathcal{L}_2 + t^3\mathcal{L}_3(t).$$

Здесь $\mathcal{L}_i : H^2(\square) \rightarrow L_2(\square)$ – ограниченные линейные операторы и оператор $\mathcal{L}_3(t)$ дополнительно предполагается ограниченным по $t \in [-t_0, t_0]$ и удовлетворяющим условию

$$\|(\mathcal{L}_3(t_2) - \mathcal{L}_3(t_1))u\|_{L_2(\square)} \leq C|t_2 - t_1|\|u\|_{W_2^2(\square)}$$

для всех $u \in W_2^2(\square)$ с константой C , не зависящей от u , t_1 , t_2 .

Пусть $u \in H^2(\Pi)$. Ясно, что $u \in H^2(\square)$ и функция $\mathcal{L}_i u$ определена корректно как элемент $L_2(\square)$. Продолжим функцию $\mathcal{L}_i u$ нулём вне $\square$; данное продолжение является элементом $L_2(\Pi)$. В таком смысле далее мы рассматриваем операторы $\mathcal{L}_i$ как действующие из $H^2(\Pi)$ в $L_2(\Pi)$.

Основной объект нашего исследования – это оператор

$$\mathcal{H}^\varepsilon(\omega) := -\Delta + V_0 + \mathcal{L}^\varepsilon(\omega), \quad \mathcal{L}^\varepsilon(\omega) := \sum_{k \in \Gamma} \mathcal{S}(k) \mathcal{L}(\varepsilon \omega_k) \mathcal{S}(-k)$$

в Π . Здесь ε – малый положительный параметр, $V_0(x) = V_0(x_{n+1})$ – измеримый ограниченный потенциал, $\mathcal{S}(k)$ – оператор сдвига: $(\mathcal{S}(k)u)(x) = u(x' + k, x_{n+1})$. Через $\omega = (\omega_k)$, $k \in \Gamma$, обозначим бесконечную последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в $[-b_-, b_+]$, $b_- \leq 0 \leq b_+$. На $\partial\Pi$ ставится краевое условие Дирихле.

На операторы $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2, 3$, накладывается ряд условий, означающих, край спектра возмущенного оператора $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$ находится левее края спектра оператора $\mathcal{H}^0$.

Наш основной результат – оценки начальных масштабов для оператора $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$. А именно, выписаны общие предположения для операторов $\mathcal{L}_i$, гарантирующие возможность доказать данные оценки, что является первым шагом в доказательстве спектральной локализации для нашего оператора. Так как операторы $\mathcal{L}_i$ абстрактные и общего вида, они покрывают многочисленные частные примеры случайных гамильтонианов, как новые, так и ранее известные.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00078).

Особенности относительного роста выпуклых функций

Брайчев Г.Г.

Московский педагогический государственный университет, г. Москва,
Россия

Сравнение бесконечно больших функций дает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, функция $g(x)$ положительна и дифференцируема на нем, причем $g'(x) > 0$. Пусть, далее, при всех $x \in (a, b)$ выполнено условие

$$m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M. \quad (1)$$

Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$M c_1(\theta) \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq M c_2(\theta), \quad x \in (a, b), \quad \text{где } \theta = \frac{m}{M} \quad \text{и}$$

$$c_1(\theta) = \inf_{x \in (a, b)} \frac{1}{g'(x)} \sup_{a < t < x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{t - x},$$

$$c_2(\theta) = \sup_{x \in (a, b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{b > t > x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{t - x}.$$

Вопрос сравнения убывающих бесконечно малых функций решает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, функция $g(x)$ положительна и дифференцируема на нем, причем $g'(x) < 0$. Пусть, далее, при всех $x \in (a, b)$ выполнено условие (1). Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$M d_1(\theta) \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq M d_2(\theta), \quad x \in (a, b), \quad \text{где } \theta = \frac{m}{M} \quad \text{и}$$

$$d_1(\theta) = \inf_{x \in (a, b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{b > t > x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{t - x},$$

$$d_2(\theta) = \sup_{x \in (a, b)} \frac{1}{g'(x)} \sup_{a < t < x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{t - x}.$$

Приведем несколько простых иллюстраций к приведенным теоремам. Теорема 1 утверждает, что для производной всякой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq M, \quad x \in (0, +\infty),$$

выполняется двусторонняя оценка

$$2 M \left(1 - \sqrt{1 - m/M}\right) \leq \frac{f'(x)}{x} \leq 2 M \left(1 + \sqrt{1 - m/M}\right), \quad x \in (0, +\infty).$$

Теорема 2 гарантирует, что производная любой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m \leq x f(x) \leq M, \quad x \in (0, +\infty),$$

подчинена оценке

$$\left(\sqrt{M} - \sqrt{M - m}\right)^2 \leq (-x^2) f'(x) \leq \left(\sqrt{M} + \sqrt{M - m}\right)^2, \quad x \in (0, +\infty).$$

Теоремы 1 и 2 утверждают, что для производной любой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m \leq \frac{f(x)}{e^{\rho x}} \leq M, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \left(m \leq \frac{f(x)}{e^{-\rho x}} \leq M, \quad x \in (-\infty, +\infty)\right)$$

выполняется двусторонняя оценка

$$\xi_1 \rho M \leq \frac{f'(x)}{e^{\rho x}} \leq \xi_2 \rho M, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\left(\xi_1 \rho M \leq \frac{(-f'(x))}{e^{-\rho x}} \leq \xi_2 \rho M, \quad x \in (-\infty, +\infty)\right),$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения $\xi \ln \frac{e}{\xi} = \frac{m}{M}$, $\xi_1 \leq 1 \leq \xi_2$.

On the asymptotic behavior of solutions of vector Sturm-Liouville equations

Braeutigam I.N.

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
Arkhangelsk, Russia
e-mail: irinadolgih@rambler.ru

Let $I := [0, +\infty)$ and $L_n^2(I)$ be the Hilbert space of equivalence classes of all complex-valued n -vector functions Lebesgue measurable on I for which the sum of the squared absolute values of coordinates is Lebesgue integrable on I . Assume that Q_0 and P_1 are Hermitian matrix functions of order n with Lebesgue measurable entries on I and $\|P_1\|^2, \|Q_0\|^2$ are locally Lebesgue integrable, $\|\cdot\|$ is a matrix norm. Let also $\Phi := P_1 + iQ_0$ and $\tilde{\Phi} := P_1 - iQ_0$.

We consider the block matrix

$$F = \begin{pmatrix} \Phi & I_n \\ -\tilde{\Phi}\Phi & -\tilde{\Phi} \end{pmatrix},$$

where I_n is the $n \times n$ identity matrix. We note here that all entries of F belong to the space $L_{loc}^1(I)$. Using the matrix F , we can define the quasi-derivatives of given vector function $y \in AC_{loc}(I)$, assuming

$$y_F^{[0]} := y, \quad y_F^{[1]} := y' - \Phi y, \quad y_F^{[2]} := (y_F^{[1]})' + \tilde{\Phi} y_F^{[1]} + \tilde{\Phi} \Phi y,$$

provided that $y_F^{[1]} \in AC_{loc}(I)$ and a quasi-differential expression

$$l_F[y](x) := -y_F^{[2]}(x), \quad x \in I.$$

If we interpret the derivative $'$ in the sense of distributions, then we can remove all the brackets in the expression $y_F^{[2]}$ and the quasi-differential expression $l_F[y]$ in terms of distributions can be written as

$$l_F[y] = -y'' + i((Q_0 y)' + Q_0 y') + P_1' y. \quad (1)$$

Such expressions are discussed in details, for instance, in [1].

The asymptotic behavior at infinity of solutions of ordinary differential equations is already a long time in the focus of many mathematicians (see, for example, [2]).

Here we consider a method to obtain the principal term of the asymptotics of a fundamental system of solutions of the equation $l_F[y] = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. The following theorem holds.

Theorem. Suppose that in (1) the matrix functions $P_1(x)$ and $Q_0(x)$ such that $\|P_1(x)\|, \|Q_0(x)\| \in L_1(I) \cap L_2(I)$. Then the equation $l_F[y] = \lambda y$ has a fundamental system of solutions

$$y_j = e^{-\sqrt{-\lambda}x}(c_j + o(1)), j = 1, \dots, n, \quad y_j = e^{\sqrt{-\lambda}x}(c_j + o(1)), j = n+1, \dots, 2n,$$

where c_j and c_{n+j} ($j = 1, 2, \dots, n$) are linear independent systems of n -dimensional vectors.

Corollary. The minimal closed symmetric operator L generated by $l_F[y]$ in $L_n^2(I)$ has deficiency numbers $n_- = n_+ = n$.

We also note here that if we put in (1) $Q_0 = O$, O is the zero matrix and $P_1 = V(x)$, $V(x)$ is a real-valued, symmetric matrix function of order n , we obtain some new results about the principal term of the asymptotics at infinity of the fundamental system of solutions of the system $-y'' + V'y = \lambda y$.

Research supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation and the German Service for Academic Exchange (DAAD) in the framework of the program “Mikhail Lomonosov” (no. 1.728.2016/DAAD).

- [1] Mirzoev K.A., Safonova T.A. On the deficiency index of the vector-valued Sturm–Liouville operator // Mathematical Notes, 2016, 99:2, 290–303.
- [2] Eastham M.S.P. The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems. Applications of the Levinson Theorem. Clarendon Press, Oxford, 1989.

Обратные спектральные задачи с неполными данными.

Валеев Н.Ф.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

П1. В пространстве $L_2(0; 1)$ рассматривается самосопряженный оператор Штурма–Лиувилля L порожденный дифференциальным выраже-

нием:

$$ly = -\frac{d^2}{dx^2}y + Q(x)y, \quad 0 < x < 1,$$

и граничными условиями $y(0) = y(1) = 0$.

Пусть $\lambda_1(Q) < \lambda_2(Q) < \dots < \lambda_j(Q) < \dots$ собственные значения (зависимые от потенциала $Q = Q(x)$), занумерованные с учетом кратностей в порядке возрастания. Для оператора L изучается следующая постановка обратной спектральной задачи:

Пусть даны m вещественных чисел $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$ m натуральных чисел $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots < k_m$, и потенциал $Q_0(x)$. Требуется найти минимум функционала $G(Q) = \|Q(x) - Q_0(x)\|$, $Q \in L_2(0; 1)$ при условии

$$\lambda_{k_j}(Q) = \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Упорядоченные наборы чисел $\vec{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ и $\vec{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ будем называть упорядоченными спектральными данными. Таким образом, в данной постановке спектральные данные состоят не только m -чисел, но и их порядковых номеров.

Сформулированная постановка задачи возникает в математических моделях построения объекта с заданными частотно-резонансными характеристиками. Этим задачам посвящено большое количество работ, см., например, работы ([1],[2]) и библиографию к ней.

П2. В работе получены необходимые и достаточные условия существования изолированных решений обратной спектральной задачи.

Показано, что минимальное значение функционала достигается на потенциалах вида

$$Q(x) = Q_0(x) + \sum_{j=1}^m s_j |y_j(x)|^2$$

-решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d^2}{dx^2}y_j + Q(x)y_j(x) = \mu_j y_j, \quad y_j(0) = y_j(1) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

$$Q(x) = Q_0(x) + \sum_{j=1}^m s_j |y_j(x)|^2.$$

- [1] T.Moody, G. H. Golub Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications, 406 p, Oxford University Press, 2005.

- [2] Грэхем М. Л. Глэдвелл, Обратные задачи теории колебаний. (2008), Изд-во РХД, Москва-Ижевск 610 с.

Об асимптотике спектра оператора Штурма–Лиувилля с комплексным логарифмическим потенциалом

Валиуллина Л.Г.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В работе [1] было показано, что для любого оператора вида $T = T_0 + V$, где $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p (p > 0)$, $VT_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, при некотором дополнительном условии тауберова типа на функцию распределения $N(T_0, r)$ справедлива формула

$$N(T, r) \sim N(T_0, r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} D(T_0) &= \{y \in L^2(0, +\infty) : y' \in AC[0, +\infty), \\ &\quad -y'' + e^{i\theta}(\ln x)y \in L^2(0, +\infty), \quad y(0) = 0\}, \\ T_0 y &= -y'' + e^{i\theta}(\ln x)y, \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta < \pi$. Известно [2], что спектр оператора T_0 дискретен и имеет асимптотику

$$\lambda_k \sim e^{i\theta} \ln k, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Оператор T_0 несамосопряжен, а его резольвента не принадлежит $\mathfrak{S}_p$ ни при каком $p > 0$, то есть для T_0 не выполняются ни одно из условий теоремы Келдыша. Тем не менее, для T_0 существует класс возмущений, сохраняющих асимптотику (1).

Теорема Пусть V — оператор умножения на функцию $V(z)$, которая

1) аналитична в угле $U = \{z : -\theta/2 < \arg z < 0\}$ и имеет непрерывное продолжение в любой конечной точке границы U ,

2) $V(z) = o(\ln z)$, $z \rightarrow \infty$, равномерно по $\arg z \in [-\theta/2, 0]$.

Тогда оператор $T_0 + V$ имеет дискретный спектр и для его собственных значений справедлива формула

$$\mu_k \sim e^{i\theta} \ln k, \quad k \rightarrow +\infty.$$

- [1] Келдыш М. В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений*// ДАН СССР. Т. 77. № 1. 1951. С. 11–14.
- [2] Лидский В. Б. *Несамосопряженный оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром* // Тр. ММО. Т. 9. 1960. С. 45–79.

О внутренней гладкости решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка

Вильданова В.Ф.

Башкирский государственный педагогический университет им.
М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

Исследуются свойства гладкости внутри рассматриваемой области решений нелинейного эллиптического уравнения второго порядка $(a_i(x, \nabla u))_{x_i} = 0$. При условии однородности уравнения доказано, что эти свойства аналогичны установленным А.К.Гуциным для линейного равномерно эллиптического уравнения.

- [1] Гуцин А. К. О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка. Сиб. матем. журн., 46:5 (2005), 1036–1052.

Квантовое хеширование для конечных абелевых групп

Васильев А.В.

Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

Данная работа посвящена обобщению предложенного нами ранее метода квантового хеширования [1]. Предлагаемый подход позволяет конструировать квантовую хеш-функцию для произвольной конечной абелевой группы на основе ее неприводимых представлений. Учитывая необходимость обеспечения криптографических свойств квантового хеширо-

вания, предлагаемая нами функция оказывается асимптотически оптимальной по размеру получаемых квантовых хеш-кодов.

Предлагаемая обобщенная квантовая хеш-функция основана на так называемых множествах с ε -отклонением (в англоязычной литературе — ε -biased set). Данный комбинаторный объект имеет ряд важных приложений в различных областях, таких как дерандомизация, теория графов, теория чисел и т.д. Приведем его определение согласно [2].

Пусть G — это конечная абелева группа. Следовательно, ее неприводимые представления одномерны и совпадают с характерами. Обозначим их χ_a , пронумеровав элементами группы $a \in G$.

Определение. Множество $B = \{b_1, b_2, \dots, b_d\} \subseteq G$ называется множеством с ε -отклонением, если для любого нетривиального характера χ_a

$$\frac{1}{|B|} \left| \sum_{j=1}^{|B|} \chi_a(b_j) \right| \leq \varepsilon.$$

Как было доказано в [3], существует такое множество с ε -отклонением, что его размер имеет порядок $O\left(\frac{\log |G|}{\varepsilon^2}\right)$, а в статье [2] приводится явная конструкция такого множества.

Для дальнейших построений зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$ и положим, что $B \subseteq G$ является множеством с ε -отклонением размера $O\left(\frac{\log |G|}{\varepsilon^2}\right)$.

Определение. Классически-квантовой будем называть функцию, значениями которой являются единичные векторы из пространства $(\mathcal{H}^2)^{\otimes s} = \mathcal{H}^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^{2^s} = 2^s$ -мерного гильбертова пространства, описывающего состояния s квантовых бит.

Определение. Определим классически-квантовую функцию $\psi_B : G \rightarrow (\mathcal{H}^2)^{\otimes \log |B|}$ следующим образом:

$$|\psi_B(a)\rangle = \frac{1}{\sqrt{|B|}} \sum_{j=1}^{|B|} \chi_a(b_j) |j\rangle.$$

Как нами было показано ранее [1], основными свойствами квантовой криптографической хеш-функции являются эффективная вычислимость, устойчивость к восстановлению прообраза и устойчивость к коллизиям, причем все эти свойства тесно связаны. Анализ показывает

наличие всех этих свойств у функции ψ_B . Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Функция ψ_B является криптографической квантовой хеш-функцией.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-07-00878, 15-37-21160).

- [1] Ablayev F. M., Vasiliev A. V. Cryptographic quantum hashing // Laser Physics Letters. — 2014. — Vol. 11, No. 2. — P. 025202.
- [2] Chen S., Moore C., Russell A. Small-bias sets for nonabelian groups // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques. — 2013. — Vol. 8096. — P. 436–451.
- [3] Alon N., Roichman Y. Random Cayley graphs and expanders // Random Structures & Algorithms. — 1994. — Vol. 5, No. 2. — P. 271–284.

О порядках ряда Дирихле с нерегулярным распределением показателей в полуполосах

Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский государственный университет,
г.Уфа, Россия

Для всюду сходящихся рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad (1)$$

обычно вводится понятие R -порядка — аналог обычного порядка для степенных рядов. Как известно, это понятие естественным образом переносится и на ряды Дирихле (1), абсолютно сходящиеся лишь в некоторой полуплоскости.

Пусть ряд (1) абсолютно сходится в полуплоскости $\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\}$, а $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \leq a, \sigma < 0\}$. Величина

$$\rho_s = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \quad M_s(\sigma) = \max_{|t-t_0| \leq a} |F(\sigma + it)| \quad (\sigma < 0),$$

называется порядком функции F в полуполосе $S(a, t_0)$. Пусть $\Lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$, $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$, $0 < \psi(r) \uparrow 1$, $[1 - \psi(r)] \ln \ln r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Положим $D(t) = \Lambda(t)t^{-1}$, $\psi_1(r) = \min_{\lambda_1 \leq t \leq r} D(t)$, $\psi_2(r) = \max_{r \leq t} D(t)$.

Пишем $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, если [1]:

1) существует конечный предел $\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda(r)r^{-1} \ln r$;

2) $\psi_2(r) - \psi_1(r) = O[(1 - \psi(r)) \ln^{-1} r]$ при $r \rightarrow \infty$.

Например, $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, если выполняется условие 1), и $n\lambda_n^{-1} \downarrow$ при $n \rightarrow \infty$. В [1] доказано, что если $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, то порядки ρ_1 и ρ_2 в любых полуполосах $S(a_i, t_i)$ ($a_i > 0$, $i = 1, 2$) равны.

Пусть K — класс функций $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h(0) = 0$, $h(t) \uparrow \infty$, $h(t)t^{-1} \downarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,

$$R = \left\{ h \in K : h(x) \ln \frac{x}{h(x)} = o\left(\frac{x}{\ln x}\right), x \rightarrow \infty \right\}.$$

R -плотностью последовательности Λ называется

$$G(R) = \inf_{h \in R} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \quad \omega(t) = [t, t + h(t)),$$

где $\mu_\Lambda(\omega(t))$ — число точек $\lambda \in (\Lambda \cap \omega(t))$. Через $D(R)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел b ($0 < b < \infty$), таких, что: существует $\Gamma = \{\mu_n\}$ ($0 < \mu_n \uparrow \infty$, $\Lambda \subset \Gamma$, причем $|M(t) - bt| \leq h(t)$ ($t > 0$) для некоторой функции $h \in R$, $M(t) = \sum_{\mu_n \leq t} 1$. Как известно, $D(R) = G(R)$ [2].

Теорема. Если $G(R) < \infty$, то при $a > G(R)$ порядки функции F в любых полуполосах $S(a, t_0)$ равны.

Теорема обобщает и усиливает результат из [1]: если $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, то $G(R) = 0$, однако, обратное не имеет места.

Данная теорема допускает обобщение на случай так называемого k -порядка по Ритту в полуполосе.

[1] Гайсин А. М. Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 5. С. 660–669.

- [2] Гайсин А. М., Сергеева Д. И. Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределения показателей II // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49. № 2. С. 280–298.

Универсальное условие аналитической квазианалитичности

Гайсин Р.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, $M_n > 0$ ($n \geq 0$),

$$H(D, M_n) = \{f \in H(D) : \sup_{z \in D} |f^{(n)}(z)| \leq c_f A^n M_n \quad (n \geq 0)\}.$$

Лемма. Если область D является слабо равномерной, то все производные функции $f \in H(D, M_n)$ продолжаются до непрерывных в $\overline{D}$ функций.

Более ограничительное понятие *равномерной области* использовалось в ряде работ Лехто (Lehto O.). Односвязную ограниченную область D называем *слабо равномерной*, если существует постоянная b такая, что любую пару точек $z_1, z_2 \in D$ можно соединить дугой $\alpha \subset D$ со свойством

$$|\alpha| \leq b |z_1 - z_2| \quad (|\alpha| — \text{длина } \alpha).$$

Пусть D — слабо равномерная область. Тогда класс Карлемана $H(D, M_n)$ называется *квазианалитическим в точке* $z_0 \in \partial D$, если в данном классе нет функции f , такой, что $f^{(n)}(z_0) = 0$ ($n \geq 0$), но $f(z) \not\equiv 0$.

Как известно, задача о квазианалитичности класса $H(\Delta_\gamma, M_n)$ для угла $\Delta_\gamma = \{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\}$ ($1 < \gamma < \infty$) впервые была поставлена и решена Р.Салинасом в 1955 г. Критерий квазианалитичности класса $H(K, M_n)$, где K — круг, позже был обнаружен Б.И. Коренблумом. Условие, необходимое и достаточное для квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в граничной точке произвольной выпуклой области D , установлено Р.С. Юлмухаметовым. Для областей достаточно общего вида (не обязательно выпуклых и даже односвязных), каждая из которых вблизи рассматриваемой граничной точки в некотором смысле близка к углу или сравнима с «двуугольниками», критерий типа

Данжуа-Карлемана доказан в [1]. Проблема квазианалитичности регулярного класса $H(D, M_n)$ для слабо равномерных областей $D \subset \mathbb{C}$ со спрямляемой границей в других терминах изучалась в статье [2].

Класс Карлемана $H(D, M_n)$ называется *регулярным*, если последовательность $\{M_n\}$ является регулярной, т.е. для чисел $m_n = \frac{M_n}{n!}$ ($n \geq 0$) выполняются свойства:

$$\text{а) } m_n^2 \leq m_{n-1}m_{n+1} \ (n \geq 1); \quad \text{б) } \sup_n \left(\frac{m_{n+1}}{m_n} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty; \quad \text{в) } m_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty, \ n \rightarrow \infty.$$

Здесь установлен в некотором смысле универсальный для всех слабо равномерных областей критерий квазианалитичности регулярных классов $H(D, M_n)$.

Теорема. Для того, чтобы для любой слабо равномерной области D со спрямляемой границей регулярный класс $H(D, M_n)$ был квазианалитичен в каждой граничной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty \quad (\text{условие Банга}); \quad 2) \int_0^d \ln \ln h(t) dt = \infty,$$

где $h(t) = \sup_{t>0} \frac{n!}{M_n t^n}$ (условие Левинсона).

Достаточность теоремы опирается на теорему Банга. Доказательство необходимой части теоремы основано на решении задачи Дирихле с неограниченной граничной функцией, где по существу использован один результат Берлинга об оценке гармонической меры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-01661).

- [1] Гайсин Р.А. Критерии квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для областей общего вида // Уфимский матем. журнал. 2013. Т. 5. № 3. С. 28–40.
- [2] Трунов К.В., Юлмухаметов Р.С. Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 2. С. 178–217.

Non-invertible transformations of differential-difference equations

Garifullin R.N., Yamilov R.I. and Levi D.

Institute of Mathematics, Ufa Scientific Center, RAS,
Department of Mathematics and Physics, Roma Tre University
rustem@matem.anrb.ru, RvYamilov@matem.anrb.ru,
decio.levi@roma3.infn.it

We discuss aspects of the theory of non-invertible transformations of differential-difference equations and, in particular, the notion of Miura type transformation. We introduce the concept of non-Miura type linearizable transformation and we present techniques which allow one to construct simple linearizable transformations and might help one to solve classification problems. This theory is illustrated by the example of a new integrable differential–difference equation depending on 5 lattice points, interesting from the viewpoint of the non-invertible transformation which relate it to an Itoh-Narita-Bogoyavlensky equation.

Краевые и нелокальные задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области

Гималтдинова А.А., Курман К.В.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа,
Россия,

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного
университета, г.Стерлитамак, Россия

Для уравнения

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + (\operatorname{sgn} x)u_{yy} = 0 \quad (1)$$

в области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, изучаются следующие краевые и нелокальные задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ такую, что:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \quad (3)$$

$$u(-1, y) = u(1, y) = 0, \quad y \in [-\alpha; \beta], \quad (4)$$

$$u_y(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u_y(x, \beta) = \varphi(x), \quad x \in (-1; 1), \quad (5)$$

где $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$, φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(-1) = \varphi(1) = \psi(-1) = \psi(1) = 0$.

Задача 2. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2), (3), (5) и

$$u_x(-1, y) = u_x(1, y) = 0, \quad y \in (-\alpha; \beta).$$

Задача 3. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и

$$u_x(-1, y) = u_x(1, y), \quad u(-1, y) = 0, \quad y \in (-\alpha; \beta),$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u(x, \beta) = \varphi(x), \quad x \in [-1; 1].$$

В настоящей работе впервые для уравнения (1) с двумя внутренними перпендикулярными линиями изменения типа аналогично [1] изучены задачи 1 – 3 в прямоугольной области D . Найдены собственные значения соответствующих спектральных задач. Для каждой из задач 1 – 3 установлен критерий единственности, и решение задачи в виде суммы ряда по биортогональной системе функций. При доказательстве существования решения поставленных задач возникла так называемая «проблема малых знаменателей», которая создает трудности при обосновании сходимости построенного ряда в классе функций (2). При определенных ограничениях на параметры α, β доказаны леммы об отделимости малых знаменателей от нуля.

- [1] Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Доклады Академии наук. 2015. Т. 460. № 3. С. 260-265.

Решение систем ОДУ при помощи задачи факторизации Голубчик И.З.

Башкирский государственный педагогический университет
им.М.Акумулы, г.Уфа, Россия

Пусть $G = C_{n \times n}$ — алгебра $n \times n$ матриц над полем комплексных чисел C , $H = G[\lambda, \lambda^{-1}]$ — алгебра полиномов Лорана над G , $H_+ = \bigoplus_{i \geq 0} G \cdot \lambda^i$, $H_- = \bigoplus_{i < 0} G \cdot \lambda^i$, a — постоянная матрица из G , $L = \lambda \cdot a + q$, q — переменная матрица из G , $M = P(\lambda, \lambda^{-1}, L)$ — полином от L, λ, λ^{-1} ; $M = M_+ - M_-$, где $M_+ \in H_+$, $M_- \in H_-$.

Тогда матричное лаксово уравнение

$$\delta_t L = [L, M_+] \quad (1)$$

решается при помощи задачи факторизации (см. [1, с.145]).

В нашей работе рассмотрен случай пример, когда a и q зависят дополнительно от малого параметра ε . Пусть $n = 3m$, $a = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} E_m & 0 \\ c & 0 & \varepsilon^{-1} E_m \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где c, d — постоянные матрицы размера $m \times m$ и $M = \sum_{k \in T} \varepsilon^{2k} \cdot \lambda^{-3k+1} \cdot \alpha_k L^{3k} + \beta \varepsilon \lambda^{-1} \cdot L^4$, где α_k и β — постоянные числа, не зависящие от ε , T — конечное множество. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (1) для конкретных c, d, α_k, β имеет интересные редукции.

- [1] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский. Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. Ижевск: РХД, 2003, 351 с.

Разрешимость в конечном виде фуксовых систем с малыми показателями на $\mathbb{C}P^n$

Гонцов Р.Р.

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН,
г.Москва, Россия

Рассматриваются пфаффовы системы типа Фукса на $\mathbb{C}P^n (= \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}P^{n-1})$

$$dy = \omega y, \quad \omega = \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{l_i} dl_i, \quad y(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^p, \quad (1)$$

где B_i – постоянные $p \times p$ матрицы, l_i – линейные (аффинные) функции на $\mathbb{C}^n$, множество нулей которых определяет множество особенностей системы. Бесконечно удаленная гиперповерхность $H_\infty = \mathbb{C}P^{n-1}$ не является особой, если и только если $\sum_{i=1}^m B_i = 0$.

Системы предполагаются вполне интегрируемыми (голономными), что подразумевает наличие фундаментальной матрицы Y в окрестности неособой точки $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i=1}^m \{l_i = 0\}$, а также выполнение соотношения $\omega \wedge \omega = 0$. Разрешимость системы в обобщенных квадратурах означает, что все элементы y_{ij} матрицы Y принадлежат некоторому обобщенному расширению Лиувилля F поля $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$ рациональных функций:

$$\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n) = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = F, \quad y_{ij} \in F,$$

где каждое дифференциальное поле $F_{i+1} = F_i \langle x_i \rangle$ есть элементарное расширение поля F_i с помощью присоединения элемента x_i , который является либо алгебраическим над F_i , либо интегралом над F_i (т. е. все $\frac{\partial x_i}{\partial z_j} \in F_i$), либо экспонентой интеграла над F_i (т. е. все $\frac{\partial \ln x_i}{\partial z_j} \in F_i$).

Согласно результатам, полученным А.Г.Хованским [1, гл. 7, теор. 4.15], в случае достаточно малых по модулю матриц B_i разрешимость системы в обобщенных квадратурах эквивалентна одновременной треугольности (в некотором базисе) всех матриц B_i . В докладе планируется обсудить некоторые уточнения данного критерия, относящиеся, в основном, к одномерному случаю:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{B_i}{z - a_i} \right) y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p. \quad (2)$$

Теорема 1 ([2]). Пусть показатели $\beta_i^1, \dots, \beta_i^p$ (собственные значения матрицы B_i) в каждой особой точке a_i системы (2) удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re} \beta_i^j > -1/n(p-1), \quad j = 1, \dots, p, \quad (3)$$

а также все разности $\beta_i^j - \beta_i^l \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Тогда разрешимость этой системы в обобщенных квадратурах эквивалентна треугольности всех матриц B_i (в некотором общем базисе).

Теорема 1а. Утверждение теоремы 1 имеет место и в случае, если условия (3) заменить на

$$\left| \operatorname{Re} \beta_i^j - \operatorname{Re} \beta_i^l \right| < 1/n(p-1), \quad j, l = 1, \dots, p.$$

Заметим, что при $n > 1$ в случае нормальных пересечений особых гиперплоскостей $\{l_i = 0\}$, голономность системы (1) эквивалентна попарной коммутируемости матриц B_i . Следовательно, в этом случае голономная система всегда разрешима в квадратурах – её фундаментальная матрица имеет вид $Y = l_1^{B_1} \dots l_m^{B_m}$. Таким образом, при $n > 1$ нетривиальность вопроса о разрешимости системы (1) в обобщенных квадратурах имеет место только в случае ненормальных пересечений особых гиперплоскостей $\{l_i = 0\}$.

Предположим, все гиперплоскости $\{l_i = 0\}$ пересекаются в одной точке (например, в нуле, т. е. $l_i(0) = 0$), и $\sum_{i=1}^m B_i = 0$. Если все векторы $\operatorname{grad} l_i$ лежат в одной плоскости (что всегда имеет место при $n = 2$), то система (1) разрешима в обобщенных квадратурах тогда и только тогда, когда разрешима система (2) (при некоторых a_i).

- [1] Хованский А.Г. Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: МЦНМО, 2008.
- [2] Вьюгин И.В., Гонцов Р.Р. К вопросу о разрешимости в квадратурах фуксовых систем. УМН. Т. 67(3), 2012, 183–184.

Об аналитической структуре формальных решений уравнений Пенлеве

Горючкина И.В.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г.Москва,
Россия

Рассматривается шестое уравнение Пенлеве (PVI)

$$y'' = \frac{(y')^2}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) - y' \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) + \quad (1)$$

$$+ \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left[a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right],$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, x и y – комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Это уравнение имеет три особые точки независимой переменной $x = 0, 1, \infty$, и группу автоморфизмов (симметрии) уравнения, переводящих особые точки уравнения друг в друга. Те формальные решения уравнения (1) в окрестности точки $x = 0$, из которых с помощью симметрий уравнения получаются все остальные его формальные решения в окрестности всех трех его особых точек, называются *базовыми* формальными решениями шестого уравнения Пенлеве. Все базовые формальные решения PVI имеют вид $y = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) x^{s_k}$, где $0 \leq s_k \in \mathbb{R}$, $s_{k+1} > s_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$, $\varphi_k(x)$ – это многочлены Лорана или формальные ряды Лорана с конечной главной частью от $\ln^{-1} x$ или $x^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Среди формальных решений шестого уравнения Пенлеве имеются *степенные* ($\varphi_k(x)$ – многочлены Лорана от $x^{i\theta}$), *степенно-логарифмические* ($s_k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_k(x)$ – многочлены Лорана от $\ln^{-1} x$), *сложные* ($s_k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_k(x)$ – ряды Лорана от $\ln^{-1} x$) и *экзотические* ($s_k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_k(x)$ – ряды Лорана от $x^{i\theta}$) [1]. Все степенные разложения решений PVI сходятся в окрестностях особых точек. Нас интересуют аналитические свойства экзотических формальных решений PVI. Коэффициент $\varphi_0(x)$ – это рациональная функция от $x^{i\theta}$, вычисленная явно в [1]. Каждый коэффициент $\varphi_k(x) = \hat{\varphi}_k(\xi) \in \mathbb{C}((\xi))$ с $k \geq 1$ после перехода к переменной $\xi = x^{i\theta}$ удовлетворяет линейному ОДУ

$$Q_2(\xi)u'' + Q_{1k}(\xi)u' + Q_{0k}(\xi)u = P_k(\xi), \quad (2)$$

где $Q_2(\xi)$, $Q_{1k}(\xi)$, $Q_{0k}(\xi)$ – полиномы от функции $\hat{\varphi}_0(\xi)$ и ее производных, а $P_k(\xi)$ – это полином от предыдущих коэффициентов $\hat{\varphi}_0(\xi), \dots, \hat{\varphi}_{k-1}(\xi)$ и их производных. Отметим, что даже уравнение на коэффициент $\hat{\varphi}_1(\xi)$ занимает страницу машинописного текста и не решается явно.

Утверждение 1. Коэффициент $\varphi_1(x)$ – является рациональной функцией от $x^{i\theta}$.

Утверждение 2. Каждое уравнение (2) имеет особые точки $\xi = 0, \infty, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}^*$, в каждой из которых линейный дифференциальный оператор его однородной части фуксов.

Заметим, что согласно общим свойствам линейных дифференциальных уравнений все решения уравнений (2) могут иметь особенности только в точках $\xi = 0, \infty, a_1, a_2, a_3, a_4$.

Утверждение 3. Все формальные ряды Лорана $\hat{\varphi}_k(\xi)$ сходятся в некоторой проколотой окрестности точки $\xi = 0$.

Гипотеза. Все коэффициенты $\varphi_k(x)$ – это рациональные функции от $x^{i\theta}$.

Известно, что PVI имеет двухпараметрическое (неформальное) решение с асимптотиками в виде рациональных функций от $x^{i\theta}$, $\theta \neq 0$, в окрестности всех особых точек ($x = 0, 1, \infty$) уравнения. Нули и полюсы настоящего решения сосредоточены в областях, в которых лежат нули и полюсы этих асимптотик (т. е. в зеркальных секторах с вершинами в особых точках с бисектриссами, на которых накапливаются полюса этих асимптотик). В работе [2] исследуются положения нулей и полюсов двухпараметрического решения PVI. Результаты этой и проделанной автором работы согласуются.

Работа выполнена при поддержке гранта IV.1.1 ОМН РАН.

- [1] Брюно А.Д., Горючкина И.В. Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды ММО. 2010. Т. 71. С. 6–118.
- [2] Guzzetti D. A Review on The Sixth Painlevé Equation // Constr. Approx. 2015. V. 41. No. 3. P. 495–527.

Matrices with simple spectra and Weierstrass polynomials arising in estimations of tensor ranks

Gumerov R.N.

Kazan Federal University, Russia

The report is concerned with a simultaneous approximation of a finite number of matrices by diagonalizable matrices with simple eigenvalues. Moreover, for a given tuple of matrix functions, it is required that the product of their values at the approximating matrices has a simple spectrum.

Various problems on approximations of tuples of matrices and linear operators by finite collections of those elements with some extra nice properties have a considerable history. They are closely connected with interesting questions in algebra, functional analysis and topology (see, e.g., [1]).

Initially our work was motivated by the interest in studying approximations of elements in tensor products of Banach spaces and applications of Weierstrass polynomials to topological groups and their mappings ([2]–[4]), in particular, to perturbations in the matrix groups. By Weierstrass polynomials we mean algebraic polynomials over Banach algebras consisting of continuous functions.

Let $\mathbb{F}$ denote either the field of complex numbers or the field of real numbers. As usual, $\mathbb{N}$ stands for the set of natural numbers. In what follows, $k, n \in \mathbb{N}$. The linear space of all square $n \times n$ matrices $M_n(\mathbb{F})$ over the field $\mathbb{F}$ is endowed with an arbitrary norm $\|\cdot\|$ which generates the same metric topology. The space $M_n(\mathbb{F})$ with the ordinary matrix multiplication is a Banach algebra. The topological group of all invertible matrices in $M_n(\mathbb{F})$ is denoted by $GL_n(\mathbb{F})$. It is called *the general linear group of degree n* . An *eigenvalue* of a matrix is said to be *simple* if its algebraic multiplicity equals one. The *spectrum* of a matrix is said to be *simple* provided that all eigenvalues of a given matrix are simple. Sometimes the matrices with simple spectra are called *generic*. Recall that a mapping $f : X \rightarrow Y$ between two topological spaces is said to be *open*, if for any open set O in X the image set $f(O)$ is open in Y .

Finite matrix systems and products of matrix functions arise naturally in contexts of tensors, or multi-dimensional arrays, especially in connection with bounds on tensor ranks. A part of motivation for the following proposition comes from [5] where nontrivial estimations for tensor ranks of inverse matrices

are given. In the report we shall discuss these results and notions involving in their proofs.

Proposition([6]). Let $f_j : GL_n(\mathbb{F}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}), j = 1, 2, \dots, k$, be a collection of self-mappings containing an open mapping. Let $A_1, A_2, \dots, A_k$ be arbitrary matrices in $M_n(\mathbb{F})$. Then for any $\varepsilon > 0$ there exist matrices $A_{1\varepsilon}, A_{2\varepsilon}, \dots, A_{k\varepsilon}$ in $GL_n(\mathbb{F})$ with simple spectra such that

$$\|A_1 - A_{1\varepsilon}\| < \varepsilon, \|A_2 - A_{2\varepsilon}\| < \varepsilon, \dots, \|A_k - A_{k\varepsilon}\| < \varepsilon,$$

and the product matrix $f_1(A_{1\varepsilon})f_2(A_{2\varepsilon}) \dots f_k(A_{k\varepsilon})$ has a simple spectrum as well.

Corollary. Let $p, q \in \{-1, 1\}$. Let $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ and $\varepsilon > 0$. Then there exist invertible matrices A_ε and B_ε belonging to the ε -neighborhoods of A and B , respectively, such that $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ and $A_\varepsilon^p B_\varepsilon^q$ have simple spectra.

- [1] Davidson K., Szarek S. Local operator theory, random matrices and Banach spaces. In Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol. I. P. 317–366, North–Holland, Amsterdam, 2001.
- [2] Gumerov R.N. On finite-sheeted covering mappings onto solenoids. Proc. Amer. Math. Soc. 133, 2771–2778 (2005).
- [3] Gumerov R. N. Weierstrass polynomials and coverings of compact groups. Sib. Mat. Zh. 54(2), 320–324 (2013). English transl.: Sib. Math. J. 54(2), 243–246 (2013).
- [4] Gumerov R. N. Characters and coverings of compact groups. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 58(4), 11–17 (2014). English transl.: Russian Math. 58(4), 7–13 (2014).
- [5] Tyrtysnikov E. E. Tensor ranks for the inversion of tensor-product binomials. J. Comput. Appl. Math. 234(11), 3170–3174 (2010).
- [6] Gumerov R.N., Vidunov S.I. Approximation by matrices with simple spectra. Lobachevskii J. Math. 37(3), 240–243 (2016).

О формальной асимптотике двукратного собственного значения сингулярно возмущенной краевой задачи Дирихле для оператора Ламэ

Давлетов Д.Б.

БГПУ им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Пусть Ω и ω — связные ограниченные области в $\mathbb{R}^3$ с бесконечно дифференцируемыми границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Не ограничивая общности будем считать, что начало координат лежит в Ω и ω . Обозначим $\omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} : \mathbf{x}\varepsilon^{-1} \in \omega\}$, $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$. Под Δ^* будем понимать оператор Ламэ:

$$\Delta^* := \Delta + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \nabla \operatorname{div},$$

где Δ — оператор Лапласа, $\lambda, \mu > 0$ — постоянные Ламэ. Рассматривается следующая сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения в области с малой полостью:

$$-\Delta^* \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon. \quad (1)$$

Для (1) назовем предельной краевую задачу:

$$-\Delta^* \psi_0(\mathbf{x}) = \lambda_0 \psi_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \psi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Известно (см., например, [1]), что существуют счетные множества собственных значений краевых задач (1) и (2), все собственные значения вещественны.

В работе [2] доказано, что если собственное значение предельной краевой задачи (2) кратности M , то к нему сходится M собственных значений возмущенной краевой задачи (1) с учетом их совокупной кратности.

Предполагается, что λ_0 — двукратное собственное значение предельной краевой задачи (2), $\|\psi_\varepsilon(\mathbf{x})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = 1$, $\|\psi_0(\mathbf{x})\|_{L_2(\Omega)} = 1$.

Рассматривается случай наиболее общего положения:

$$|\psi_0^{(1)}(0)| + |\psi_0^{(2)}(0)| \neq 0. \quad (3)$$

Собственные вектор-функции $\psi_0^{(j)}$, $j = 1, 2$ выбраны так, что

$$\psi_0^{(1)}(0) \neq \mathbf{0}, \quad \psi_0^{(2)}(0) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Используя метод согласования асимптотических разложений [3], [4] показано, что если λ_0 – двукратное собственное значение предельной краевой задачи (2), а $\psi_0^{(1)}$ и $\psi_0^{(2)}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные вектор-функции, удовлетворяющие условию (3) и выбранные в соответствии с (4), то существуют два простых собственных значения $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\lambda_{\varepsilon,2}$ возмущенной краевой задачи (1), сходящиеся к λ_0 , и они имеют формальные асимптотики:

$$\begin{aligned}\lambda_{\varepsilon}^{(1)} &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(1)} + \dots, \\ \lambda_{\varepsilon}^{(2)} &= \lambda_0 + \varepsilon^3 \lambda_3^{(2)} + \dots,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \left(\psi_0^{(1)} \right)^T (\mathbf{0}) C_1(\omega, \lambda, \mu) \psi_0^{(1)}(\mathbf{0}) > 0, \\ \lambda_3^{(2)} &= \frac{1}{\pi} \left(\nabla \psi_0^{(2)} \right)^T (\mathbf{0}) C_3(\omega, \lambda, \mu) \nabla \psi_0^{(2)}(\mathbf{0}) > 0,\end{aligned}$$

T – знак транспонирования, $\nabla \psi_0^{(2)}$ – 3×3 -матрица с компонентами

$$\left\{ \frac{\partial \left(\psi_0^{(2)}(x) \right)_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j=\overline{1,3}},$$

$C_1(\omega, \lambda, \mu)$ и $C_3(\omega, \lambda, \mu)$ – 3×3 положительно определенные матрицы, которые зависят от геометрии области ω и постоянных Ламэ λ, μ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-31-00066 мол-а).

- [1] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. - М.: МГУ, 1990. – 311 С.
- [2] Давлетов Д.Б. Сингулярно возмущенная краевая задача Дирихле для стационарной системы линейной теории упругости // Известия вузов. Математика. 2008. N 12. С. 7-16.
- [3] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1989. – 336 С.

- [4] *Гадыльшин Р. Р.* Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. 2003. Т. 5. С 3-32.

**Тауберовы теоремы для голоморфных функций
ограниченного аргумента**

Дрожжинов Ю.Н.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия

Под тауберовыми теоремами сравнения понимают теоремы, в которых по заданному асимптотическому поведению отношения интегральных преобразований двух (обобщенных) функций делается заключение об асимптотическом поведении отношения других интегральных преобразований этих функций. В качестве одной из функций сравнения в таких теоремах используется так называемая *допустимая*, (вообще говоря, обобщенная) функция. Типичной одномерной тауберовой теоремой сравнения для неотрицательных мер является тауберова теорема М.В. Келдыша. В докладе будет приведена многомерная тауберова теорема сравнения. В качестве допустимых функций в ней используются обобщенные функции преобразования Лапласа которых имеют ограниченный аргумент. В частности, преобразование Лапласа фундаментальных решений гиперболических относительно острого конуса операторов имеют ограниченный аргумент. Таким образом, гиперболические операторы относительно конуса, а также их фундаментальные решения с носителями в соответствующем конусе, могут служить допустимыми функциями в тауберовых теоремах сравнения.

- [1] Ю.Н. Дрожжинов, Б.И. Завьялов. Тауберовы теоремы сравнения и гиперболические операторы с постоянными коэффициентами, Уфимский математический журнал, 7:3, (2015), 50–56.
- [2] Ю.Н. Дрожжинов. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. УМН, в печати

Кинк-примесные взаимодействия в модели синус-Гордона с учётом внешней силы и затухания

**Екомасов Е.Г., Кудрявцев Р.В., Гумеров А.М.,
Абакумова Н.Н.**

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Уравнение синус-Гордона (УСГ) является одним из самых известных уравнений, имеющих солитонные решения [1]. Солитон — уединённая волна, сохраняющая свою форму и скорость при движении и столкновениях с другими уединёнными волнами. Солитоны модифицированного УСГ (МУСГ) моделируют различные локализованные динамические возбуждения физических систем [1] [2], например: движение дислокаций в кристаллах, динамику доменных границ в магнетиках, процессы в джозефсоновских сверхпроводящих контактах, поведение волн зарядовой плотности, движение локальных конформационных возмущений вдоль молекулы ДНК и др. Взаимодействие кинков МУСГ с точечными и протяженными примесями может приводить к возбуждению «примесной» моды и к таким резонансным эффектам, как отражение кинка от притягивающего потенциала [1] - [4]. Используя метод коллективных переменных с учётом внешней силы и диссипации были получены уравнения движения для координаты центра кинка и амплитуды примесной моды в модели синус-Гордона для случая одной или двух точечных примесей. Для изучения резонансной динамики кинков так же была разработана программа, реализующая высокую точность численного решения МУСГ. Проведено исследование поведения системы при различных значениях параметров. Для случая одной и двух разных примесей были численно найдены все возможные сценарии кинк-примесных взаимодействий. Полученные аналитические результаты качественно совпадают с численными результатами исследования кинк-примесных взаимодействий.

- [1] Ed. by J. Cuevas-Maraver, P.G. Kevrekidis, and F. Williams. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-energy Physics. Springer, 2014.

- [2] Шамсутдинов М.А., Ломакина И.Ю., Назаров В.Н., Харисов А.Т., Шамсутдинов Д.М. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М.: Наука, 2009.
- [3] Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Закирьянов Ф. К., Кудрявцев Р. В. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 3, с. 481–495.
- [4] Екомасов Е.Г., Гумеров А.М., Кудрявцев Р.В. Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101, вып. 12, с. 935-939.

Особенности построения регулярного асимптотического решения сингулярно возмущенной системы Вольтерра 2-го рода

Елисеев А.Г.

Научный исследовательский университет «МЭИ», г.Москва, Россия

Рассмотрим сингулярно возмущенную интегральную систему Вольтерра 2-го рода

$$\varepsilon u(t, \varepsilon) + \int_0^t K(t, s)u(s, \varepsilon)ds = h(t). \quad (1)$$

При изучении асимптотического решения (1), как правило, переходят к эквивалентной сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системе:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) + A(t)u(t, \varepsilon) + \int_0^t B(t, s)u(s, \varepsilon)ds = \dot{h}(t) \\ u(0, \varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $A(t) = K(t, t)$, $B(t, s) = \dot{K}(t, s)$. При $\varepsilon = 0$ система (2) переходит в систему Вольтерра 2-го рода:

$$A(t)u(t) + \int_0^t B(t, s)u(s)ds = \dot{h}(t). \quad (3)$$

Обозначим $T_0(t, s) = P_A(t)B(t, s)$, $\bar{T}_0(t) = T_0(t, t)$. Возможны следующие случаи:

1) $r(A(t)) \equiv n < m$.

В этом случае $\exists A^{-1}(t)$ и $x(t) = R^{-1}(t)A^{-1}(t)f(t)$, где $R(t) = I + \int_0^t A^{-1}(t)B(t, s) \cdot ds$.

2) $r(\bar{T}_0(t)) \equiv n < m$. В этом случае $\exists \bar{T}_0^{-1}(t)$ и $x(t) = R^{-1}(t)\bar{T}_0^{-1}(t)\dot{f}_0(t)$.

3) $r(A(t)) \equiv m < n$, $r(A(t)) \equiv m \Leftrightarrow P_A(t) \equiv 0$. В этом случае система (3) всегда разрешима и эквивалентна

$$x(t) + \int_0^t A^{-1}(t)B(t, s)x(s)ds = A^{-1}(t)f(t) + \pi_A(t)u(t),$$

где $\pi_A(t)u(t)$ — произвольная вектор-функция.

4) Общий случай. $r(A(t)) \equiv r_A < \min(m, n)$, $r(\bar{T}_0(t)) \equiv r_0 < m - r_A$.

Устанавливая разрешимость системы (3), на i -м итерационном шаге получим

$$\begin{cases} \bar{T}_i(t)x(t) + \int_0^t \dot{\bar{T}}_i(t, s)x(s)ds = \dot{f}_i(t), \\ f_i(0) = 0, \quad r(\bar{T}_i(t)) \equiv r_i \leq m - r_A - r_0 - \dots - r_{i-1}. \end{cases} \quad (4)$$

И так далее. В силу конечномерности пространства и целочисленности ранга существует такое k , что $r(\bar{T}_k(t)) \equiv 0$ или $\bar{T}_k(t) \equiv 0$.

Возможны два случая:

1) $\dot{T}(t, s) \equiv 0$. Тогда условие разрешимости $f_k(t) \equiv 0$ и

$$x(t) = R_{k-1}^{-1}(t)T_{k-1}^{-1}(t)\dot{f}_{k-1}(t) + R_{k-1}^{-1}(t)\pi_{\bar{T}_{k-1}}(t)u(t).$$

2) $\bar{T}_k(t) \equiv 0$, $\dot{T}_k(t, s) \neq 0$.

Из этих условий следует, что $T_k(t, s) = \frac{(t-s)^p}{p!}D_k(t, s)$ и

$$D(t, t)x(t) + \int_0^t E(t, s)x(s)ds = f(t),$$

где $r(D(t, t)) \equiv 1$, которое решается, например, с помощью резольвенты. Получив решение, совершая обратный ход, мы получим решение исходной системы интегральных уравнений.

**Об индексах дефекта двучленного минимального
дифференциального оператора четвертого порядка с
нерегулярными коэффициентами**

Ескермесулы А.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана,
Казахстан
e-mail: aleke1410@gmail.com

Рассматривается в пространстве $L_2(0, \infty)$ минимальный неполуограниченный дифференциальный оператор L_0 [1], [2], порожденный дифференциальным выражением

$$ly = y^{(4)} + (q(x) + h(x))y, \quad x \in (0; \infty), \quad (1)$$

где $q(x) \in C^{(2)}[0; +\infty)$ функция, удовлетворяющая условиям Титчмарша-Левитана[3], $h(x)$ -быстро осциллирующая вещественная функция.

В работе [4] были получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения $ly = \lambda y$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $Im \lambda \neq 0$.

Обозначим

$$\mu(x, \lambda) = \sqrt[4]{q(x) - \lambda}, \quad \mu_0(x, \lambda) = \sqrt[4]{1 - \frac{\lambda}{q(x)}}.$$

$$\varphi(\xi, \lambda) = \frac{h(x)}{4q(x)\mu_0^3}, \quad \omega(\xi, \lambda) = \frac{q'(x)}{8(q(x) - \lambda)q^{\frac{1}{4}}(x)}, \quad x = \nu(\xi).$$

$$\left| \int_{\xi}^{\infty} \varphi(s, \lambda) ds \right| < \infty, \quad (2)$$

$$\varphi_1(\xi, \lambda) = \int_{\xi}^{\infty} \varphi(s, \lambda) ds, \quad \varphi_1(\xi, \lambda)\omega(\xi, \lambda) \in L_1(0, \infty). \quad (3)$$

$$\varphi_2(\xi, \lambda) = \int_{\xi}^{\infty} \varphi_1(s, \lambda) ds, \quad \varphi_2^2(\xi, \lambda) \in L_1(0, \infty), \quad (4)$$

$$\varphi_3(\xi, \lambda) = \int_{\xi}^{\infty} \varphi_2(s, \lambda) ds, \quad \varphi_3(\xi, \lambda) \in L_1(0, \infty). \quad (5)$$

Theorem 1. Пусть выполнены:

- a) $|q(x)| > cx^{\frac{4}{3}+\varepsilon}$ при $x \rightarrow +\infty$, где $0 < \varepsilon < 1$;
- b) $q'(x), q''(x)$ – не меняют знак при достаточно большом $R > 0$ для $|x| \geq R$;
- c) $q'(x) = o(q^{\zeta}(x))$ при $x \in (0; \infty)$, где $0 < \zeta < \frac{5}{4}$,

и выполнены следующие условия (2), (3), (4), (5). Тогда индексы дефекта дифференциального оператора L_0 есть

- a) $(3, 3)$, если $q(x) > 0$ при $x \rightarrow +\infty$,
- b) $(2, 2)$, если $q(x) < 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

- [1] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
- [2] Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1979. – 400 с.
- [3] Муртазин Х.Х, Султанаев Я.Т. К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма–Лиувилля// Математические заметки.– 1980. –т.28:4, с.545-553
- [4] Валеев Н.Ф., Ескермесулы А., Назирова Э.А. Об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами// Математический журнал ИМММ КН РК. 2016. Т. 16, № 1. С. 58-76.

Некоторые особенности изгибаний стержня при сильном продольном сжатии

Ершов А.А., Сулейманов Б.И.

Институт механики и Математики УрО РАН, г.Екатеринбург;

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматриваются некоторые типичные процессы изгибаний стержня при сильном продольном сжатии. Соответствующее динамическое уравнение изгибаний рассматривается как возмущение двумерного уравнения Лапласа с малым параметром при производной четвертого порядка по одной из переменных. Установлено, что для данных процессов расширяющиеся области быстрых нарастаний изгибаний начинаются в малых окрестностях точек сингулярностей решений предельного уравнения Лапласа. Начальные стадии этих нарастаний описаны с помощью интеграла Харди.

Исследование первого из авторов над исследованием данной проблемы выполнена за счет гранта РФФИ (проект 15-11-10018).

Гиперболические уравнения лиувиллевого типа специального класса

Жибер А.В., Юрьева А.М.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Основопологающие идеи в изучении проблемы интегрирования уравнений в частных производных гиперболического типа восходят к классическим работам Лапласа, Дарбу, Гурса, Вессио и др.

Для полной классификации нелинейных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

необходимо провести классификацию (см. [1]) уравнений специального класса

$$u_{xy} = \frac{p - \bar{\varphi}_u}{\bar{\varphi}_{u_y}} u_x + \frac{q}{\bar{\varphi}_{u_y}} \sqrt{u_x} \quad (1)$$

здесь p, q - функции переменных x, y, u , а $\bar{\varphi}$ - переменных x, y, u, u_y .

Отметим (см. [2], [3], [4]), что интегрируемые уравнения Лэне

$$u_{xy} = \left(\frac{u_y}{u-x} + \frac{u_y}{u-y} \right) u_x + \frac{u_y}{u-x} \sqrt{u_x}$$

и

$$u_{xy} = 2 \left[[(u+Y)^2 + u_y + (u+Y)\sqrt{(u+Y)^2 + u_y}] \right. \\ \left. \times \left[\frac{\sqrt{u_x} + u_x}{u-x} - \frac{u_x}{\sqrt{(u+Y)^2 + u_y}} \right], Y = Y(y) \right]$$

содержатся в классе уравнений (1).

В данной работе получены необходимые и достаточные условия, при которых уравнения (1) обладают y -интегралом второго порядка.

- [1] Жибер А.В., Соколов В.В. Точно итегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа, Успехи матем. наук. 2001. Т.56. №1(337). С.63-106.
- [2] Laine M.E. Sur J'application de la methode de Darboux aux equations $s = f(x, y, z, p, q)$. Comptes rendus. V.182, 1926. P.1126-1127
- [3] Капцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 182 с.
- [4] Капцов О.В. О проблеме классификации Гурса. Программирование. 2012. №2. С.68-71.

Эскиз теории роста функций, голоморфных в многомерном торе

Завьялов М.Н., Маергойз Л.С.

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Класс $H(\mathbb{T}^n)$ функций, голоморфных в многомерном торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{C}_*^n$, где $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n > 1$, является естественным расширением класса целых функций многих переменных. Интерес к этому классу объясняется современными исследованиями по анализу на торических многообразиях [1], [2]. Структура функций класса $H(\mathbb{T}^n)$ исследовалась в [3], где

рассматривались и показатели их роста. В докладе излагаются свойства характеристик роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$, их связь с коэффициентами разложения в ряд Лорана, существование элементов класса с показателями роста, обладающих заданными свойствами. Проводится сравнительный анализ этих результатов и аналогичных утверждений теории роста целых функций многих переменных. Формулируются возникающие проблемы. Содержание доклада служит дополнением к § 1 обзора теории целых функций многих переменных [4].

- [1] Хованский А.Г. Многогранники Ньютона (разрешение особенностей). Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1983. С. 207-239.
- [2] Fulton W. Introduction to Toric Varieties. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1993.
- [3] Маергойз Л.С. Расширения класса целых функций многих переменных и смежные вопросы // Сибирский матем. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1137-1159.
- [4] Ронкин Л.С. Целые функции. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 9. Комплексный анализ—многие переменные—3. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5-36.

О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка

Зикиров О.С.

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
г.Ташкент, Узбекистан

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < h\}$ рассматривается уравнение в частных производных третьего порядка

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) u_{xy} + Lu = f(x, y), \quad (1)$$

где α, β - заданные постоянные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а L - линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + a_1(x, y)u_x + b_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u.$$

Для уравнения (1) изучается следующая нелокальная задача: *требуется найти в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным*

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и нелокальным интегральным условиям

$$\int_0^l u(x, y)dx = \varphi_1(y), \quad \int_0^l xu(x, y)dx = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

здесь $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ - заданные функции, такие, что

$$\int_0^l \psi_1(x)dx = \varphi_1(0), \quad \int_0^l x\psi_1(x)dx = \varphi_2(0).$$

В работе методом функции Римана доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения изучаемой задачи.

Об одной задаче оператора свертки на левой полуплоскости

Зименс К.Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет,
г. Уфа, Россия

Пусть $\eta > 0$, $D = \{z : \operatorname{Re} z < \eta\}$, $H(D)$ - пространство аналитических функций в области D с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(D)$ - сопряженное к $H(D)$ пространство. Пусть $F \in H^*(D)$, $\varphi(z) = (F, e^{zt})$ - преобразование Лапласа функционала F , через D_1 обозначим сопряженную диаграмму функции $\varphi(z)$. Положим, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста.

Введем оператор свертки. По определению $M_\varphi[f(z)] = (F, f(z+t))$, где $f \in H(D)$. Будем считать, что D_2 такая полуплоскость, которая удовлетворяет $D_1 + D_2 = D$. Рассмотрим оператор свертки $M_\varphi[\psi \cdot f(z)]$, $\psi \in H(D)$. Он действует линейно и непрерывно из $H(D)$ в $H(D_2)$.

Для оператора M_φ рассмотрим следующую задачу Валле Пуссена. Пусть в каждой точке μ_k задан конечный набор комплексных чисел $a_{kj}, j = 0, 1, \dots, s_k - 1$. Необходимо найти функцию $u(z) \in \text{Ker} M_\varphi$ такую, что $u^{(j)}(\mu_k) = a_{kj}$. Такая задача решалась ранее на пространстве целых функций, например, в работах [1], [2].

Теорема 1. *Задача Валле Пуссена в ядре оператора M_φ разрешима тогда и только тогда, когда сюръективен оператор $M_\varphi[\psi \cdot]$ в $H(D_2)$.*

Теорема 2. *Пусть нули $\psi \in H(D)$ μ_k кратности s_k такие, что $\mu_k \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \eta$, $k = 1, 2, \dots$. Функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста и имеет бесконечно много положительных нулей λ_k . Тогда оператор $M_\varphi[\psi \cdot]$ будет сюръективен в $H(D_2)$.*

- [1] Напалков В.В., Нуятов А.А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки // Мат. сборник. – 2012. – Т. 203. – В. 2. – С. 77–86.
- [2] Напалков В.В., Нуятов А.А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле // ТМФ. – 2014. – Т. 180. – В. 2. – С. 264–271.

О бифуркациях периодических колебаний в двупараметрических гамильтоновых системах

Ибрагимова Л.С.

Башкирский государственный аграрный университет, г. Уфа, Россия

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (1)$$

зависящее от двух скалярных параметров α и β .

Правая часть $f(x, t, \alpha, \beta)$ является гладкой по совокупности переменных и T -периодической по t функцией. Пусть система (1) при всех значениях (α, β) имеет точку равновесия $x = 0$, т.е. $f(0, t, \alpha, \beta) \equiv 0$. Обозначим через $A(t, \alpha, \beta) = f'_x(0, t, \alpha, \beta)$ матрицу Якоби вектор-функции

$f(x, t, \alpha, \beta)$, вычисленную в точке $x = 0$. Наряду с (1) будем рассматривать линейную T -периодическую систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x, \quad x \in R^N. \quad (2)$$

Предположим, что N – четно и система (2) является гамильтоновой.

Обозначим через $V(\alpha, \beta)$ матрицу монодромии линейной системы (2). Пусть при некоторых $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ матрица $V_0 = V(\alpha_0, \beta_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i\omega_0}$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 .

В этом случае точка $x = 0$ является негиперболическим состоянием равновесия системы (1) при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$, а значение (α_0, β_0) – точкой бифуркации этой системы. В докладе обсуждаются новые достаточные признаки основных сценариев бифуркаций системы (2).

- [1] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972. 720 с.
- [2] Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Музафаров С.М., Нуров И.Д. Бифуркация Андронова-Хопфа со слабоосциллирующими параметрами. // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 39-44.

О динамике оператора Поммье

Иванова О.А., Мелихов С.Н.

Южный Федеральный университет, г. Ростов-на-Дону; Южный
математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

Пусть g_0 — целая (в $\mathbb{C}$) функция такая, что $g_0(0) = 1$. Ассоциируем с g_0 оператор Поммье

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g'_0(0)f(0), & t = 0, \end{cases}$$

f — целая функция. Если $g_0 \equiv 1$, то D_{0,g_0} — оператор сдвига влево последовательности тейлоровских коэффициентов функции f . Рассматривается оператор D_{0,g_0} , действующий (линейно и непрерывно) в некотором счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых функций. В докладе идет речь о следующих задачах, связанных с динамикой оператора D_{0,g_0} как в общем случае, так и в конкретных ситуациях:

- 1) Описание коммутанта D_{0,g_0} в кольце всех линейных непрерывных операторов в E .
- 2) Характеризация циклических векторов оператора D_{0,g_0} в E и собственных замкнутых D_{0,g_0} -инвариантных подпространств E .
- 3) Исследование алгебры $(E', \otimes)$, где E' — топологическое сопряженное к E , а $\otimes$ — умножение в E' , задаваемое оператором сдвига для D_{0,g_0} .

Makarov's principle for the Bloch unit ball

Ivrii O., Kayumov I.R.

University of Helsinki, Kazan Federal University

The Bloch space consists of analytic functions in the unit disk for which

$$\|b\|_{\mathcal{B}} := \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |b'(z)| < \infty,$$

while a function b_0 belongs to the little Bloch space $\mathcal{B}_0$ if

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} (1 - |z|^2) |b'_0(z)| = 0.$$

Makarov's principle [1] is concerned with three characteristics of functions $b \in \mathcal{B}/\mathcal{B}_0$ that measure the growth of b near the unit circle:

- The *asymptotic variance*

$$\sigma^2(b) = \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi |\log(1-r)|} \int_{|z|=r} |b(z)|^2 |dz|. \quad (1)$$

- The LIL constant

$$C_{LIL}(b) = \operatorname{esssup}_{\theta \in [0, 2\pi)} \left\{ \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{|b(re^{i\theta})|}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log \log \log \frac{1}{1-r}}} \right\}. \quad (2)$$

- The *integral means spectrum*

$$\beta_b(\tau) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\log(1-r)|} \cdot \log \int_{|z|=r} |e^{\tau b(z)}| |dz|, \quad \tau \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

The above quantities are unrelated for general Bloch functions. Nevertheless, when one takes the supremum over natural classes of Bloch functions, the universal bounds coincide. We prove Makarov’s principle for the Bloch unit ball:

Theorem 1.

$$\Sigma_{\mathcal{B}}^2 := \sup_{\|b\|_{\mathcal{B}} \leq 1} \sigma^2(b) = \sup_{\|b\|_{\mathcal{B}} \leq 1} C_{LIL}^2(b) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{4}{|\tau|^2} \cdot \sup_{\|b\|_{\mathcal{B}} \leq 1} \beta_b(\tau).$$

We also give two different upper bounds for $\Sigma_{\mathcal{B}}^2$. The first upper bound is an explicit estimate, while the second upper bound is in terms of an analogous quantity associated to the unit ball of $\mathcal{B}/\mathcal{B}_0$ equipped with the “ L^∞ norm.”

Theorem 2.

$$\Sigma_{\mathcal{B}}^2 < \min(0.9, \Sigma^2).$$

Previously, it was known that $C_{LIL}(b) \leq \|b\|_{\mathcal{B}}$ which was first established by Pommerenke [2] in 1985 who used an iterative scheme involving Hardy’s identity.

- [1] O. Ivrii, *On Makarov’s principle in conformal mapping*, preprint, 2016.
<https://arxiv.org/abs/1604.05619>arXiv:1604.05619.
- [2] C. Pommerenke. *The growth of the derivative of a univalent function*, in: *The Bieberbach Conjecture* (West Lafayette, Ind. 1985), Mathematical Surveys and Monographs 21, Amer. Math. Soc., 1986, 143–152.

Критические значения применимости метода Нехари и обобщенное отношение Рэля

Ильясов Я.Ш.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Исследуются условия применимости метода многообразия Нехари для уравнений вида

$$D_u T(u) - \lambda D_u F(u) = 0, \quad u \in W$$

где W – банахово пространство, λ – вещественный параметр. В докладе будет показано, что критические значения параметра λ , определяющие интервалы применимости метода многообразий Нехари, находятся посредством вычисления критических значений соответствующего обобщенного отношения Рэля. Наряду с теоретическими результатами будут представлены конкретные примеры нелинейных уравнений с точным нахождением вариационных формулировок для критических значений применимости метода Нехари.

- [1] Y. Il'yasov, On extreme values of Nehari manifold method via nonlinear Rayleigh's quotient. arXiv preprint arXiv:1509.08019 (2015).

О безусловных базисах из экспонент в пространствах со степенным весом

Исаев К.П.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Нами рассматривается задача о существовании безусловных базисов из экспонент в гильбертовых пространствах

$$L_2(h) = \{f \in L_{\text{loc}}(-1, 1) : \|f\|^2 = \int_{-1}^1 |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt < \infty\},$$

где h — выпуклая функция на $(-1, 1)$.

В классическом случае, когда $h(t) \equiv 0$ система Фурье $\{e^{\pi ni}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис. Очевидно, что в других случаях ортонормированных базисов из экспонент в пространствах $L_2(h)$ не может быть. Понятие базиса Рисса введено в [1] и обозначает образ ортонормированного базиса при ограниченном обратимом операторе.

Базис $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$ в гильбертовом пространстве H называется безусловным базисом (см. [2]), если для некоторых постоянных $c, C > 0$ и для любого элемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Безусловный базис $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$ становится базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0 < \inf \|e_k\| \leq \sup \|e_k\| < \infty$.

В работе [3] доказано, что при определенных условиях регулярности роста весовой функции $h(t)$, если для любого $k \in \mathbb{N}$

$$e^{h(t)}(1 - |t|)^k \rightarrow \infty, \quad |t| \rightarrow 1,$$

то в пространстве $L_2(h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. Если для некоторого $\alpha < 0$

$$(1 - |t|)^{\alpha} = O(e^{h(t)}), \quad t \rightarrow \pm 1,$$

то в пространстве $L_2(h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

- [1] Бари Н. К. *О базисах в гильбертовом пространстве* // Доклады Академии наук. –1946. –Т. 54. –С. 383–386.
- [2] Никольский Н. К., Павлов Б. С., Хрущев С. В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* - Препринт ЛОМИ, Р-8-80.
- [3] Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах* // Уфимский математический журнал. –2011. –Т.3. –№1. –С.3–15.

Спектральная задача для ротора в неортогональной системе координат

Исламов Г.Г.

Институт математики, информационных технологий и физики
Удмуртского государственного университета, г. Ижевск, Россия

Для решения спектральной задачи для ротора $\mu \vec{F} = \text{rot } \vec{F}$ с ненулевым значением спектрального параметра μ линии и поверхности тока идентичны вихревым линиям и поверхностям, которые обладают определёнными свойствами структурной устойчивости, открытыми ещё Гельмгольцем [1] (см. также [2]–[4]). Спектральная задача для ротора в криволинейной системе координат (α, β, γ) с подвижным репером

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} \right), \quad \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

распадается на две хорошо изученные в литературе задачи: восстановление векторного поля (G_1, G_2, G_3) по его ротору

$$\frac{\partial G_3}{\partial \beta} - \frac{\partial G_2}{\partial \gamma} = \mu V \cdot F_1, \quad \frac{\partial G_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial G_3}{\partial \alpha} = \mu V \cdot F_2, \quad \frac{\partial G_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial G_1}{\partial \beta} = \mu V \cdot F_3,$$

и умножение матрицы на вектор: $(G_1, G_2, G_3) = (F_1, F_2, F_3)T(\alpha, \beta, \gamma)$. Здесь $T(\alpha, \beta, \gamma)$ есть симметричная матрица Грамма локального репера $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, $V = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3]$ — его ориентированный объём. При этом для решения спектральной задачи имеет место два разложения: по векторам подвижного репера $\vec{F} = F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + F_3 \vec{r}_3$ и векторам биортогонального к нему базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)T(\alpha, \beta, \gamma)^{-1}$ в следующем виде $\vec{F} = G_1 \vec{e}_1 + G_2 \vec{e}_2 + G_3 \vec{e}_3$. Легко понять, что у набора (G_1, G_2, G_3) не может быть двух нулевых координат одновременно. Однако, может быть ровно одна нулевая координата. В ортогональной системе этим же свойством обладает и набор (F_1, F_2, F_3) . Ситуацию в неортогональной системе криволинейных координат разъясняет следующая ниже теорема и замечание к ней.

Обозначим $u = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3$, $v = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3$, $w = \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_3$, $S = w \left(\frac{\partial(v/w)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(u/w)}{\partial \beta} \right) + v \frac{\partial(u/w)}{\partial \gamma} - u \frac{\partial(v/w)}{\partial \gamma}$.

Теорема. Пусть в каждой точке трёхмерной области Ω разность $\mu V - S$ отлична от нуля. Если в этой области компоненты F_1, F_2 равны нулю,

то и третья компонента F_3 решения спектральной задачи для ротора также будет равна нулю.

Замечание. Если выполнены дополнительные условия $\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{\partial v}{\partial \gamma}$, то $S = \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}$. Поэтому, если указанная в теореме разность $\mu V - S$ тождественно равна нулю в области Ω , то пара троек координат $(G_1, G_2, G_3) = (u, v, w), (F_1, F_2, F_3) = (0, 0, 1)$ даёт нетривиальное в Ω решение спектральной задачи для ротора.

Полученные результаты дополняют исследования по спектральной задаче для ротора других авторов (см., например, [5], [6]).

- [1] Гельмгольц Г. Основы вихревой теории: М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
- [2] Пуанкаре А. Теория вихрей: М.–Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2000.
- [3] Козлов В. В. Общая теория вихрей: М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.
- [4] Вилля Г. Теория вихрей: Л.–М.: ОНТИ, 1936.
- [5] Сакс Р. С. Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса // Уфимск. матем. журн., 2013, Т. 5, Вып. 2, 63–81.
- [6] Исламов Г. Г. Об одном классе векторных полей // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.–мат. науки, 2015, Т. 19, № 4, 680–696.

Аналог теоремы Келдыша для операторов, не близких к самосопряженным

Ишкин Х.К.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Согласно известной теореме Келдыша [1] любой оператор вида $T = T_0 + V$, где $T_0^* = T_0, T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p(p > 0), VT_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, имеет полную систему корневых векторов (СКВ) и при некотором дополнительном условии

$$N(T_0, r) \sim f(r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (1)$$

где функция f монотонна на $[R, +\infty)$, $R > 0$, и

$$\exists \gamma > 0 : \forall s > r \geq R \quad \frac{f(s)}{f(r)} < \left(\frac{s}{r}\right)^\gamma, \quad (2)$$

справедлива формула

$$N(T, r) \sim N(T_0, r), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Мы показываем, что утверждение теоремы Келдыша верно при гораздо более широких условиях на T_0 , которым удовлетворяют многие известные несамосопряженные дифференциальные операторы, не близкие к самосопряженным. При этом, конечно, на возмущение приходится накладывать дополнительное требование (2_V)).

Теорема Пусть оператор T_0 удовлетворяет следующим условиям:

1_T) $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p(p > 0)$ и спектр оператора T_0 локализован около луча $\arg \lambda = 0$ в следующем смысле: $\forall \varepsilon > 0$

$$N(T_0, r) \sim N(T_0, -\varepsilon, \varepsilon, r), \quad r \rightarrow +\infty,$$

где $N(T, \eta, \zeta, r)$ — число собственных значений оператора T_0 в секторе $\{\eta < \arg \lambda < \zeta, |\lambda| < r\}$;

2_T) существуют $\varepsilon_0 > 0$ и

$$\pi \geq |\varphi_0| > \begin{cases} \frac{2p\pi}{2(p+1)}, & p \notin \mathbb{N}, \\ \frac{(2p-1)\pi}{2p}, & p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

такие, что спектр T_0 в угле $U_0 = \{|\arg \lambda - \varphi_0| < \varepsilon_0\}$ конечен.

Тогда если оператор V ограничен относительно T_0 и

1_V) $\|V(T_0 - re^{i\beta})^{-1}\| \rightarrow 0, r \rightarrow +\infty$, равномерно по $|\beta - \varphi_0| \leq \varepsilon_0$,

2_V) спектр оператора $T = T_0 + V$ также локализован около луча $\arg \lambda = \varphi_0$,

3_V) существуют $R > 0$ и неубывающая на $[R, +\infty)$ функция f , удовлетворяющая (1) — (2), то справедлива формула (3).

- [1] Келдыш М. В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // ДАН СССР. Т. 77. № 1. 1951. С. 11–14.

**Численный метод решения обратных спектральных задач,
порожденных дискретными полуограниченными снизу
операторами**

Кадченко С.И., Закирова Г.А., Рязанова Л.С., Кадченко А.И.

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.

Носова, г. Магнитогорск, Россия

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск,
Россия

Пусть L дискретный полуограниченный снизу оператор, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Его собственные числа μ определяются при нахождении решений операторного уравнения

$$Lu = \mu u, \quad (1)$$

удовлетворяющие некоторым однородным граничным условиям.

Теорема 1. Если L — дискретный полуограниченный снизу оператор, действующий в сепарабельном пространстве H , то существует единственное решение задачи отыскания его собственных чисел.

Для вычислений μ воспользуемся методом Галеркина. Введем последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств $H_n \subseteq H$, которая полна в H . Пусть ортонормированные базисы пространств H_n известны и состоят из систем функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$. При этом все функции φ_k удовлетворяют краевым условиям задачи (1). Решение спектральной задачи (1) ищем в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k(n) \varphi_k.$$

Теорема 2. Если L — дискретный полуограниченный снизу оператор, действующий в сепарабельном пространстве H , и система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом H , то метод Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных чисел оператора L , построенный на этой системе функций, сходится. При этом приближенные значения $\tilde{\mu}$ собственных чисел μ оператора L находятся по формулам [1]

$$\tilde{\mu}_k(n) = (L\varphi_k, \varphi_k) + \delta_n, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\delta_n = \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_k(n-1) - \tilde{\mu}_k(n)]$, $\tilde{\mu}_k(n)$ — n -ые приближения по Галеркину к соответствующим собственным числам μ_k оператора L .

Приближенные собственные числа (1) могут быть найдены по формулам (2). Нетрудно показать, что

$$\mu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_k(n).$$

Пусть оператор L можно представить в виде $L = T + P$, где T — дискретный полуограниченный снизу оператор, P — ограниченный оператор, заданные в $L_2[a, b]$. Допустим, что известны собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T , которые занумерованы в порядке невозрастания по величине собственных чисел λ_k . Занумеруем собственные числа $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $T + P$ в порядке невозрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. В этом случае формулы (2) примут вид

$$\tilde{\mu}_k(n) = \lambda_k + \int_a^b v_k(s) P(v_k(s)) ds + \delta_n, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3)$$

На примере спектральной задачи Штурма — Лиувилля, порожденной оператором $T + P$, с использованием формул (3), разработаны алгоритмы восстановления значений оператора P в узлах дискретизации в случаях, когда P является оператором умножения на функцию $p(s)$ и интегральным оператором вида $Pu = \int_a^b y(s, z)u(z)dz$. Многочисленные расчеты показали высокую вычислительную эффективность разработанного метода.

- [1] Kadchcehko, S.I. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Applied Mathematical Sciences, Vol. 10. 2016, no 7, 323 - 329 HIKARI Ltd, www.m-hikari.com, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.510625>.

Нахождение собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов

Какушкин С.Н., Кадченко С.И.

Магнитогорский государственный технический университет, г.
Магнитогорск, Россия

Авторами был разработан неитерационный численный метод нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, названный методом регуляризованных следов (РС) [1]-[4]. В отличие от известных методов, в методе РС значения собственных функций можно вычислить по линейным формулам, зная собственные числа λ_k и собственные функции v_k невозмущенного оператора T и собственные числа μ_k возмущенного оператора $T + P$. Сложность применения метода заключается в нахождении сумм функциональных рядов „взвешенных“ поправок теории возмущений, которые можно найти лишь численно. Если норма возмущающего оператора меньше единицы, то приблизить суммы этих функциональных рядов можно суммируя „взвешенные“ поправки. В следующей теореме получены аналитические формулы нахождения значений сумм функциональных рядов „взвешенных“ поправок теории возмущений в узлах дискретизации без непосредственного суммирования его членов.

Теорема. Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения в D . Если функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ($x \in D$) образуют ортонормированный базис в H , то суммы функциональных рядов Релея-Шредингера находятся по формулам

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(p)}(m_0, x, y) = & \sum_{k=1}^{m_0} \left[\mu_k^p v_m(x) \bar{v}_m(y) - \lambda_k^p v_k(x) \bar{v}_k(y) - \right. \\ & - \mu_k^p \sum_{j,i=1}^{m-1} \left\{ \frac{\bar{V}_{im} \check{A}_{ij}^{(k)}}{\det \check{A}^{(k)}} v_m(x) \bar{v}_j(y) + \frac{V_{im} \check{A}_{ij}^{(k)}}{\det \check{A}^{(k)}} v_j(x) \bar{v}_m(y) \right\} + \\ & + \mu_k^p \sum_{j_1, j_2, i_1, i_2=1}^{m-1} \frac{V_{i_1 m} \bar{V}_{i_2 m} \check{A}_{i_1 j_1}^{(k)} \check{A}_{i_2 j_2}^{(k)}}{\det \check{A}^{(k)} \det \check{A}^{(k)}} v_{j_1}(x) v_{j_2}(y) \left. \right] + \delta_m^{(p)}(m_0, x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\left| \delta_m^{(p)}(m_0, x, y) \right| \leq \sum_{k=1}^{m_0} |\mu_k|^p \left[2|C| \cdot |\varepsilon_k^{(m)}| \sum_{j=1}^m |x_j^{(k)}| + |\varepsilon_k^{(m)}|^2 \right]$, $C = \max_{i=\overline{1,m}} |v_i(x)|$,

$$x_l^{(k)} = \begin{cases} -\frac{1}{\det \check{\mathbf{A}}^{(k)}} \sum_{i=1}^{m-1} V_{im} \check{A}_{il}^{(k)}, & l = \overline{1, m-1}; \\ 1, & l = m. \end{cases} \quad \varepsilon_k^{(m)} = u_k(x) - u_k^{(m)}(x),$$

$u_k^{(m)}(x)$ – приближение собственной функции $u_k(x)$ оператора $T + P$, $\check{\mathbf{A}}^{(k)} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, $m \in N$, $a_{ij} = V_{ij} + (\lambda_i - \mu_k) \delta_{ij}$, $V_{ij} = (Pv_i, v_j)$, $\check{A}_{ij}^{(k)}$ – алгебраические дополнения к элементам матрицы $\check{\mathbf{A}}^{(k)}$.

- [1] Кадченко, С. И. Численные методы нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия „Математическое моделирование и программирование“. – 2012. – №27 (286), вып. 13. – С. 45–57.
- [2] Кадченко, С. И. Алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия „Математическое моделирование и программирование“. – 2012. – №40 (299). – С. 83–88.
- [3] Кадченко, С. И. Нахождение значений первых собственных функций возмущенных дискретных операторов с простым спектром / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия „Математическое моделирование и программирование“. – 2012. – №5 (264), вып. 11. – С. 25–32.
- [4] Кадченко С.И. Численные методы регуляризованных следов спектрального анализа: монография / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин. - Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. - 206 с.

**(α, β) -выпуклые функции, их свойства и некоторые
применения**

Калинин С.И.

Вятский государственный университет, г. Киров, Россия

Доклад посвящается рассмотрению класса так называемых (α, β) -выпуклых функций. Опишем его.

Напомним, что непрерывная на промежутке l числовой прямой Ox функция $f : l \rightarrow \mathbf{R}$ называется выпуклой (строго выпуклой, выпуклой вниз, строго выпуклой вниз), если для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого числа λ , $\lambda \in (0; 1)$, выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (1)$$

В (1) выражение $\lambda a + (1 - \lambda)b$ есть взвешенное среднее арифметическое чисел a и b с весами λ и $1 - \lambda$, а выражение $\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ — аналогичное весовое среднее чисел $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что весовое среднее арифметическое положительных величин a и b с набором весов λ и $1 - \lambda$ есть значение взвешенного среднего степенного

$$F_{a,b}^{(\lambda, 1-\lambda)}(x) = \begin{cases} (\lambda a^x + (1 - \lambda)b^x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ a^\lambda b^{1-\lambda}, & x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

данных величин при $x = 1$ (первого порядка), при этом функция (2) при $x = 1$ имеет смысл при любых значениях a и b . Следовательно, в терминах взвешенного среднего степенного неравенство (1) можно переписать в виде

$$f(F_{a,b}^{(\lambda, 1-\lambda)}(1)) < F_{f(a), f(b)}^{(\lambda, 1-\lambda)}(1). \quad (3)$$

Отправляясь от (3), введем

Определение. Пусть $f : l \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная на промежутке l , $l \subseteq (0, +\infty)$, функция, принимающая в точках l положительные значения. Данную функцию условимся называть (α, β) -выпуклой на рассматриваемом промежутке, если для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого числа λ , $\lambda \in (0; 1)$, будет выполняться неравенство

$$f(F_{a,b}^{(\lambda, 1-\lambda)}(\alpha)) < F_{f(a), f(b)}^{(\lambda, 1-\lambda)}(\beta). \quad (4)$$

Сформулированное определение понятия (α, β) -выпуклой функции обобщает классическое определение выпуклой на промежутке функции, а также определение логарифмически выпуклой функции. Классическая выпуклость, согласно (3)–(4), есть $(1, 1)$ -выпуклость, а логарифмическая выпуклость — $(1, 0)$ -выпуклость.

В докладе обсуждаются свойства (α, β) -выпуклых функций, в частности аналог неравенства Иенсена, а также их применения в вопросах доказательства неравенств и решения уравнений. Кроме того, уделяется внимание некоторым геометрическим характеристикам (α, β) -выпуклости.

Приведем вид упомянутого аналога неравенства Иенсена для (α, β) -выпуклой функции при условии $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$:

$$f(\lambda_1 x_1^\alpha + \dots + \lambda_n x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\lambda_1 f^\beta(x_1) + \dots + \lambda_n f^\beta(x_n))^{\frac{1}{\beta}}. \quad (5)$$

В неравенстве (5) $x_1, \dots, x_n$ — произвольные числа из промежутка I , а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — набор положительных чисел, удовлетворяющий условию

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Авторезонанс в автономной системе

Калякин Л.А.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений, которая описывает взаимодействие двух слабо связанных нелинейных осцилляторов. Начальные данные таковы, что при отсутствии связи один из осцилляторов находится вдали от равновесия, а другой вблизи равновесия; при этом собственные частоты на соответствующих решениях близки. При этих условиях исследуется эффект захвата в резонанс, когда частоты связанных осцилляторов остаются близкими, а амплитуды колебаний значительно меняются со временем, в частности, второй осциллятор уходит далеко от равновесия. Выяснено, что в общей ситуации начальный этап захвата в резонанс описывается решением уравнения Пенлеве-II. Такое описание получено в асимптотическом приближении по малому параметру, который соответствует коэффициенту связи.

**Однолистность отображений полуплоскости на
полигональные области с неограниченным вращением
порядка $\ln^\alpha|t|, t \rightarrow \infty, \alpha \leq 1$**

Карабашева Э. Н., Шабалин П. Л.

КГАСУ, г. Казань, Россия

Проводится исследование однолистности структурной формулы конформного отображения верхней полуплоскости D на полигональную область D_z , ограниченную ломанными линиями L_z^1 и L_z^2 с бесконечным числом звеньев. Заданы две монотонные последовательности точек вещественной оси L t_k и t_{-k} сходящиеся к $+\infty, -\infty$, соответственно, прообразов угловых точек полигональной области при данном отображении и последовательности $\kappa_k\pi, \kappa_{-k}\pi$ углов поворота касательной при переходе через угловую точку. При некоторых ограничениях на последовательности точек t_k и последовательности чисел κ_k можно вывести формулу конформного отображения полуплоскости на полигональную область указанного вида. Полученная формула обобщает на случай бесконечного числа вершин классическую формулу Шварца-Кристоффеля. При сделанных предположениях, построенное отображение может оказаться неоднолистным. Поэтому возникает вопрос, при какой плотности распределения прообразов вершин на оси L обобщенный интеграл Шварца-Кристоффеля может оказаться однолистным. Доказано, что если функции

$$n_+^*(t) := \sum_{j=1}^k \kappa_j, t \in (t_k, t_{k+1}), \quad n_-^*(t) := \sum_{j=1}^k \kappa_{-j}, t \in (-t_{k-1}, t_{-k}),$$

удовлетворяют условию $n_\pm^*(t) = \Delta \ln^\alpha(t) + o(\ln^\alpha(t))$, где $t \rightarrow \infty$, и $\alpha \geq 1$ то существует бесконечно много последовательностей чисел, $\kappa_k\pi, \kappa_{-k}\pi$, при заданных точках t_k и t_{-k} , для которых отображение обобщенным интегралом Шварца-Кристоффеля будет однолистным. Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в работе [1].

Общая формула конформного отображения с описанными выше ограничениями, получена с использованием решения однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициента краевого условия, повлекшим двустороннее завихрение на бесконечности вида

$O(\ln^\alpha |t|)$, где $0 < \alpha \leq 1$. Такой метод построения конформного отображения, но в случае двустороннего завихрения на бесконечности вида $O(|t|^\alpha)$, представлен в работе Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина [2]. В [3] ими была рассмотрена задача построения отображения полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин в случае, когда сходятся ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j = \kappa^+, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{-j} = \kappa^-,$$

причем $\kappa^+ + \kappa^- < 3$.

- [1] Karabasheva E. N., Shabalin P. L. *Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices* // Lobachevskii Journal of Mathematics, April 2015, Volume 36, Issue 2, pp 144-153
- [2] Салимов Р. Б. Шабалин П. Л. *Обратная задача М.А. Лаврентьева об отображении полуплоскости на многоугольник в случае бесконечного числа вершин* // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10. – вып. 1. – С. 23– 31.
- [3] Салимов Р. Б. Шабалин П. Л. *Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин* // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 10. – С. 76–80.
- [4] Салимов Р. Б. Шабалин П. Л. *Одно обобщение формулы Шварца-Кристоффеля* // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 109–117.

**Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейного
оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом
пространстве**

Каримов О.Х.

Институт математики им.А.Джураева АН Республики Таджикистан

Разделимость дифференциальных выражений и соответствующие неравенства коэрцитивности исследованы во многих работах (см. [1]-[4] и имеющуюся там библиографию).

В докладе речь идёт о коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца в весовом пространстве.

Пусть $\rho(x)$ - положительная функция, определённая в R^n , l - некоторое натуральное число. Символом $L_{2,\rho}(R^n)^l$ - обозначим пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), \dots, u_l(x))$, $u_j(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$, $(j = \overline{1, l})$ с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{j=1}^l \int_{R^n} \rho(x) |u_j(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим оператор Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом

$$L[u] = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x),$$

где Δ —оператор Лапласа, а значения $V(x, \omega)$, $x \in R^n$, $\omega \in C^l$, являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми матрицами из $\text{End } C^l$.

Пусть весовая функция $\rho(x)$ принадлежит классу $C^1(R^n)$ и для всех $x \in R^n$,

$\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \dots, \xi_l + i\eta_l) \in C^l$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} \rho^{-\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \right\| \leq \sigma, \quad \sigma < 4.$$

Найдены условия на матрицу-функцию $V(x, \omega)$, при выполнении которых уравнение

$$-(\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x) \tag{1}$$

разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, и для всех решений $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W_{2,loc}^2(R^n)^l$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\begin{aligned} & \|(\Delta + k^2)u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \|V(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \\ & + \sum_{i=1}^n \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| \leq \\ & \leq M \|f(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\|, \end{aligned}$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

- [1] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения.-Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
- [2] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n .-Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.
- [3] Saleh Omram and Khaled A. Gepreel. Separation of the Helmholtz Partial Differential Equation in Hilbert Space. Adv.Studies Thetor. Phus., 2012. №9, v.6, pp. 399-410.
- [4] Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве.-Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2015, т.58, №8, с.665-673.

Голоморфная регуляризация сингулярных возмущений

Качалов В.И.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г.Москва,
Россия

Главное направление дальнейшего развития метода регуляризации С.А. Ломова [1] базируется на концепции псевдоаналитических (псевдо-голоморфных) решений нелинейных сингулярно возмущенных задач и,

в конечном итоге, должно привести к построению аналитической теории сингулярных возмущений. Метод голоморфной регуляризации [2] основан на утверждении, обобщающем теорему Пуанкаре о разложении: всякое сингулярно возмущенное уравнение при достаточно общих предположениях имеет голоморфные по малому параметру первые интегралы. Алгебраической основой метода являются коммутационные соотношения и эквивалентные им гомоморфизмы алгебр голоморфных функций различного числа комплексных переменных.

Обозначим через $\mathcal{A}_{z_0}$ алгебру голоморфных в точке z_0 функций одной комплексной переменной z , а через $\mathcal{A}_{z_0 w_0}$ алгебру голоморфных в точке $P_0(z_0, w_0)$ функций двух комплексных переменных z и w .

Теорема 1. Каждому дифференциальному уравнению с малым комплексным параметром ε

$$\varepsilon w' = f(z, w), \quad w(z_0, \varepsilon) = w_0, \quad (1)$$

и правой частью $f(z, w) \in \mathcal{A}_{z_0 w_0}$ и такой, что $f(z_0, w_0) \neq 0$ соответствует голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ семейство $\{H_f^\varepsilon\}$ непрерывных гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{A}_{z_0 w_0}$, удовлетворяющих коммутационному соотношению

$$H_f^\varepsilon[\varphi(z)] = \varphi(H_f^\varepsilon[z]) \quad \forall \varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}.$$

Образы этих гомоморфизмов состоят из первых интегралов $U(z, w, \varepsilon)$ уравнения (1), голоморфных в точке $Q_0(z_0, w_0, 0)$.

Замечание. Само же решение $w(z, \varepsilon)$ задачи Коши (1) определяется из общего интеграла $U(z, w, \varepsilon) = 0$ с помощью теоремы о неявной функции.

Теорема 2. Если $\varepsilon > 0$ и для некоторой функции $\varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}$ уравнение

$$\varphi'(z) \int_{z_0}^z \frac{dw_1}{f(z, w_1)} = \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}$$

имеет решение вида $w = W_0\left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}\right)$, ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ на некотором компакте T_{z_0} , содержащем точку z_0 , то решение $w(z, \varepsilon)$ является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ в глобальном смысле [2].

- [1] Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. 456 С.
- [2] Качалов В.И. Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С. 54–62.

Об одном классе функционалов, минимизируемых Φ-триангуляциями

Клячин В.А.

Волгоградский государственный университет, г.Волгоград, Россия

Для конечного множества $P \subset \mathbb{R}^n$ введем обозначение $T(P)$ для множества всех триангуляций P . Предположим, что на множестве всех симплексов определена некоторая неотрицательная непрерывная функция $f(S)$. Тогда всякой триангуляции $T \in T(P)$ можно сопоставить число

$$F(T) = \sum_{S \in T} f(S).$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство Φ выпуклых компактных множеств с не пустой внутренностью. Пусть S произвольный невырожденный симплекс. Определим *охватывающее* множество $B \in \Phi$ (если оно существует) из данного семейства как множество, чья граница содержит вершины симплекса (а, значит содержит весь симплекс в силу выпуклости). В общем случае таких охватывающих множеств из данного семейства Φ может быть несколько.

Определение 1. Рассмотрим произвольную триангуляцию конечно-го множества точек $P \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что эта триангуляция является Φ -триангуляцией, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность любого охватывающего множества B не содержит вершин других симплексов.

Заметим, что если семейство Φ представляет собой семейство всех шаров в $\mathbb{R}^n$, то вышеприведенное определение совпадает с определением триангуляции Делоне. В работе [1] было доказано существование Φ -триангуляции конечного множества точек при условии, что семейство Φ

обладает следующим свойством: для любого невырожденного симплекса S в семействе Φ существует и при том только одно охватывающее множество $B(S)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие на семейство выпуклых множеств является выполненным. В таком случае охватывающее множество будем обозначать через $B(S)$.

В настоящей статье доказывается

Теорема 1. *Φ -Триангуляция конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ имеет минимум значения функционала*

$$F(T) = \sum_{S \in T} |B(S)|,$$

где $|\cdot|$ обозначена мера Лебега.

Непосредственно из теоремы получаем

Следствие 1. *Триангуляция Делоне конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ имеет минимальное значение величины*

$$F(T) = \sum_{S \in T} R^2(S),$$

где $R(S)$ – радиус описанной окружности треугольника $S \in T$.

Отметим, что в работах [2] – [4] аналогичные утверждения были доказаны для классического случая триангуляции Делоне.

- [1] Клячин В.А. *Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества*, Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика., (2015) **28**, №3 с. 27 – 33. DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.3.3>.
- [2] Акопян А.В. *Экстремальные свойства триангуляции Делоне*, Труды ИСА РАН (2009). **46** 174 – 187.
- [3] Долбилин Н. П. , Мусин О. Р., Эдельсбруннер Г. *Об оптимальности функционалов на триангуляциях множеств Делоне*, УМН, **67:4(406)** (2012), 189 – 190.
- [4] Musin O.R. *Properties of the Delaunay triangulation*, Proceedings of the 1997 13th Annual Symposium on Computational Geometry. sponsors: ACM; editors: Anon. Nice, Fr, (1997), p. 424-426.

Об энтропийных решениях анизотропных эллиптических уравнений с нестандартными условиями роста

Кожевникова Л.М.

Стерлитамакский филиал БашГУ, г. Стерлитамак, Россия

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. Для анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с L_1 — правой частью рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, u, \nabla u))_{x_i} = a_0(x, u), \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$u(x) \Big|_{\partial\Omega} = \psi(x) \Big|_{\partial\Omega}. \quad (2)$$

В работе [1] для эллиптических уравнений $\Delta_p u = a_0(x, u)$ с L_1 — данными ($\sup_{|u|<c} a_0(x, u) \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$) было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием и доказаны его существование и единственность в произвольной области Ω . Изучению существования энтропийных решений задачи Дирихле в пространствах Орлича для изотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями второго порядка (Ω — ограниченная область) посвящена статья А. Бенкиране и Дж. Бенноуна [2].

Следует заметить, что в известных автору работах результаты установлены для энтропийных решений эллиптических задач в ограниченных областях (за исключением статьи [1]) с однородными граничными условиями. Автором доказаны теоремы существования и единственности энтропийного решения задачи Дирихле (1), (2) в анизотропном пространстве Соболева-Орлича без предположения ограниченности области Ω и гладкости ее границы.

- [1] Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Galluet, M. Pierre, J.L. Vazquez An L_1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equation. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. 1995. V. 22, № 2. P. 241–273.

- [2] A. Benkirane, J. Bennouna Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces. *Abstr. Appl. Anal.* 2002. V. 7, № 2. P. 85–102.

A Note on Derivative of the q -Extension of p -Adic Gamma Function.

Colakoglu Havare O. and Menken H.

Department of Mathematics, Mersin University, Turkey

e-mail: ozgecolakoglu@mersin.edu.tr; hmenken@mersin.edu.tr

The q -calculus and p -adic calculus has been developing fast and has great interest. In the present work we consider q -extension of p -adic gamma function. We obtain the derivative of the q -extension of p -adic gamma function. In addition, we investigate some interesting properties of the derivative of the q -extension of p -adic gamma function.

- [1] K. Koblitz, q -extension of the p -adic gamma function, *Transactions of the American Mathematical Society*, 260, 2:449-457, 1980.
- [2] Koblitz, N., q -extension of the p -adic gamma function II, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 273, No. 1, pp.111-129, 1982.
- [3] Schikhof, W. H., *Ultrametric Calculus: An Introduction to p -adic Analysis*, Cambridge University Pres, 1984.

Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта для операторов шестого порядка, порожденных произведением квазидифференциальных выражений

Конечная Н.Н., Сафонова Т.А., Тагирова Р.Н.

САФУ имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия

e-mail: n.konechnaya@narfu.ru, t.safonova@narfu.ru, tagirova rena@mail.ru

Пусть вещественнозначные функции $p(x), q(x), r(x), \sigma(x)$, определенные на $I := [1, +\infty)$, такие, что $p(x) \neq 0$ п.в. на I и $p^{-1}(x), q(x), r(x), \sigma^2(x) \in$

$L_{loc}^1(I)$. Определим матрицы F_1 и F_2 типа Шина-Зеттла равенствами

$$F_1 = \begin{pmatrix} r & p^{-1} \\ q & -r \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F_2 = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ \sigma^2 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Матрица F_1 известным образом порождает квазипроизводные $y_{F_1}^{[0]} := y$, $y_{F_1}^{[1]} := p(y' - ry)$ и симметрическое в смысле Лагранжа (формально самосопряженное) квазидифференциальное выражение второго порядка $l_{F_1}[y] := -(y_{F_1}^{[1]})' - ry_{F_1}^{[1]} + qy$ при условии, что $y_{F_1}^{[0]}, y_{F_1}^{[1]} \in AC_{loc}(I)$. Матрица F_2 также порождает квазипроизводные $y_{F_2}^{[0]} := y$, $y_{F_2}^{[1]} := y' - \sigma y$ и симметрическое в смысле Лагранжа квазидифференциальное выражение $l_{F_2}[y] := -(y_{F_2}^{[1]})' - \sigma(x)y_{F_2}^{[1]}(x) - \sigma^2(x)y(x)$ при условии, что $y_{F_2}^{[0]}, y_{F_2}^{[1]} \in AC_{loc}(I)$. В работе [2] показано, что выражение $l_{F_2}[y]$ можно рассматривать как выражение $-y'' + \sigma'y$, где $'$ всюду означает производную в смысле теории распределений.

Определим матрицы

$$G_1 = \begin{pmatrix} F_1 & M & O \\ O & F_1 & M \\ O & O & F_1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} F_2 & M & O \\ O & F_2 & M \\ O & O & F_2 \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} F_1 & M & O \\ O & F_2 & M \\ O & O & F_1 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} F_2 & M & O \\ O & F_1 & M \\ O & O & F_2 \end{pmatrix},$$

где O – нулевая матрица второго порядка, а M – матрица второго порядка, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного 1. Легко показать, что матрицы G_i ($i = 1, 2, 3, 4$) также являются матрицами типа Шина-Зеттла и, следовательно, порождают квазипроизводные $y_{G_i}^{[0]}, y_{G_i}^{[1]}, y_{G_i}^{[2]}, y_{G_i}^{[3]}, y_{G_i}^{[4]}, y_{G_i}^{[5]}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и симметрические квазидифференциальные выражения шестого порядка

$$\tau_1[y] = l_{F_1}^3[y], \quad \tau_2[y] = l_{F_2}^3[y], \quad \tau_3[y] = l_{F_1}l_{F_2}l_{F_1}[y], \quad \tau_4[y] = l_{F_2}l_{F_1}l_{F_2}[y]$$

соответственно (подробности см. [1]).

Доклад посвящен изучению асимптотического поведения на бесконечности некоторой фундаментальной системы решений каждого из уравнений

$$\tau_i[y] = \lambda y, \tag{1}$$

где $\lambda \in C$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Полученные асимптотические формулы применяются к решению задачи об индексе дефекта и характере спектра минимального замкнутого симметрического оператора L_0 , порожденного выражением $\tau_i[y]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) в пространстве $\mathcal{L}^2(I)$ интегрируемых по Лебегу с квадратом модуля функций на I . В частности, получен аналог теоремы С.А. Орлова об индексе дефекта (см. [3]) для операторов шестого порядка, порожденных уже произведением квазидифференциальных выражений второго порядка.

Второй автор поддержан Минобрнауки РФ (грант Президента РФ № МК-3941.2015.1) и РФФИ (гранты № 14-01-00349).

- [1] W.N. Everitt Linear ordinary quasi-differential expressions // Lecture notes for the Fourth International Symposium on Differential equations and Differential Geometry, Beijing, Peoples' Republic of China Department of Mathematics, University of Peking, 1986. pp. 1-28.
- [2] А.М. Савчук, А.А. Шкаликов Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки, 1999. Т. 66. № 3. С. 847-912.
- [3] С.А. Орлов Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР, 1953. 92/3. С. 483-486.

Лапласианы на гладких распределениях

Кордюков Ю.А.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Основная цель работы состоит в исследовании естественных геометрических дифференциальных операторов, ассоциированных с произвольным гладким распределением на гладком компактном многообразии.

Пусть M — связное гладкое компактное многообразие размерности n , наделенное гладкой положительной плотностью μ . Пусть H — гладкое распределение на M ранга p (другими словами, в каждой точке $x \in M$ выбрано p -мерное линейное подпространство H_x касательного пространства $T_x M$, гладко зависящее от x , и H — гладкое подрасслоение

касательного расслоения TM) и g — гладкое скалярное произведение на H . Определим дифференциал $d_H f$ функции $f \in C^\infty(M)$, ассоциированный с H , как ограничение ее дифференциала df на $H \subset TM$. Таким образом, $d_H f$ является гладким сечением двойственного расслоения H^* к H над M , $d_H f \in C^\infty(M, H^*)$, и мы получаем корректно определенный линейный дифференциальный оператор первого порядка $d_H : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M, H^*)$. Риманова метрика g на H и положительная гладкая плотность μ индуцируют скалярные произведения на пространствах $C^\infty(M)$ и $C^\infty(M, H^*)$, что позволяет определить оператор $d_H^* : C^\infty(M, H^*) \rightarrow C^\infty(M)$, сопряженный к d_H . Наконец, лапласиан Δ_H , ассоциированный с (H, g, μ) , является формально самосопряженным линейным дифференциальным оператором второго порядка на $C^\infty(M)$, задаваемым по формуле

$$\Delta_H = d_H^* d_H.$$

Если $X_k, k = 1, \dots, p$, — локальный ортонормированный базис в H , определенный на открытом подмножестве Ω в M , то ограничение оператора Δ_H на Ω задается формулой

$$\Delta_H|_\Omega = \sum_{k=1}^p X_k^* X_k.$$

Теорема. Лапласиан Δ_H , рассматриваемый как неограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(M, \mu)$ с областью определения $C^\infty(M)$, самосопряжен в существенном.

Эта теорема позволяет нам рассматривать более тонкие спектральные свойства оператора Δ_H . Прежде всего, отметим, что согласно спектральной теореме для произвольной существенно ограниченной измеримой функции φ на вещественной прямой определена функция $\varphi(\Delta_H)$ от оператора Δ_H как ограниченный линейный оператор в пространстве $L^2(M, \mu)$. Например, можно рассматривать такие операторы как резольвента $(\Delta_H - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, тепловые операторы $e^{-t\Delta_H}$, $t > 0$, волновые операторы $e^{it\sqrt{\Delta_H}}$, $t \in \mathbb{R}$, и т.п.

Рассмотрим $C^\infty(M)$ -модуль $C^\infty(M, TM)$ гладких векторных полей на M . Он является $C^\infty(M)$ -алгеброй Ли по отношению к скобке Ли.

Пусть $\mathcal{F}$ — $C^\infty(M)$ -подалгебра Ли алгебры $C^\infty(M, TM)$, порожденная пространством $C^\infty(M, H)$ гладких векторных полей на M , касательных к H . Преположим, что $\mathcal{F}$ как $C^\infty(M)$ -модуль конечно порожден. Тогда $\mathcal{F}$ определяет сингулярное слоение на M в смысле Стефана и Суссмана.

Теорема. При данных условиях для любой функции φ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ оператор $\varphi(\Delta_H)$ продолжается до ограниченного оператора из $H^s(\mathcal{F})$ в $H^t(\mathcal{F})$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, где $\{H^s(\mathcal{F}), s \in \mathbb{R}\}$ — шкала послойных пространств Соболева, ассоциированная с $\mathcal{F}$.

Другими словами, оператор $\varphi(\Delta_H)$ является послойно сглаживающим оператором по отношению к сингулярному слоению $\mathcal{F}$.

Доказательства приведенных выше теорем опираются на псевдодифференциальное исчисление на сингулярных слоениях, разработанное Андрулидакисом и Скандалисом [1], и субэллиптические оценки для оператора Δ_H в шкале $\{H^s(\mathcal{F})\}$.

- [1] I. Androulidakis, G. Skandalis, Pseudodifferential calculus on a singular foliation, J. Noncommut. Geom. **5** (2011), 125–152

Об осцилляторности полулинейных дифференциальных уравнений со знакопеременными коэффициентами

Кошкарлова Б.С., Кусаинова Л.К.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

В данной работе получены условия осцилляторности и неосцилляторности полулинейного дифференциального уравнения

$$\left(\rho(t) |y'(t)|^{p-2} y'(t)\right)' + q(t) |y(t)|^{p-2} y(t) = 0, \quad t \geq a > -\infty, \quad (1)$$

($1 < p < \infty$, $p \neq 2$) в случае, когда $q(\cdot)$ меняет знак в любой окрестности $+\infty$.

Ниже будем предполагать, что $q(\cdot)$ может быть представлена, как $q = u - v$, u, v положительные непрерывные на $I = [a, \infty)$ функции. Функция

$\rho > 0$ непрерывна на I и такая, что $\rho(t) |y'(t)|^{p-2}$ дифференцируема почти всюду для всех $y \in C^2(I)$.

Весовую пару (ρ, v) на I назовем допустимой, если функция

$$h^*(x) = h^*(x|\rho, v) = \sup \left\{ h > 0 : \left(\int_x^{x+h} \rho^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{p'}{p}} \int_x^{x+h} v(x) dx \leq 1 \right\} < \infty$$

для почти всех $x \geq a$. Пусть $\Delta^*(x) = [x, x + h^*(x)]$.

Положим $\Omega^*(x) = [x + \tau h^*(x), x + (1 - \tau) h^*(x)]$, $\tau = \frac{1}{\pi}$.

Теорема 1. Пусть (ρ, v) допустимая пара на I . Если существует такая последовательность точек $x_k \rightarrow \infty$, $(k \rightarrow \infty)$, что

$$\int_{\Omega^*(x_k)} u(x) dx \geq (1 + 2^{1-p}) \int_{\Omega^*(x_k)} v(x) dx,$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Пусть A наилучшая постоянная в неравенстве вложения $W_p^1(0, 1) \hookrightarrow C[0, 1]$.

Теорема 2. Пусть (ρ, v) допустимая пара на I . Если существует такое $T > a$, что почти всюду $x \geq T$

$$\int_{\Delta^*(x)} u(x) dx < \frac{1}{3A^p} \int_{\Delta^*(x)} v(x) dx,$$

то уравнение (1) неосцилляторно.

Критическая неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе

Кулаев Р.Ч.

ЮМИ ВНЦ РАН, СОГУ, г.Владикавказ, Россия

На графе-дереве Γ рассматривается однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1)$$

На ребрах графа уравнение порождается самосопряженным дифференциальным выражением четвертого порядка, описывающим упругие деформации изгиба стержня (см. [1, 2]), а в каждой внутренней вершине

графа заданы либо условия жесткого (см. [1]), либо шарнирного (см. [2, Гл. 8]) соединения стержней.

Пусть $a, b \in \partial\Gamma$ и γ_a – ребро примыкающее к вершине a . Для каждого $s \in \gamma_a \cup a$ введем в рассмотрение краевую задачу для уравнения (1) с краевыми условиями (при ориентации граничных ребер внутрь графа)

$$\begin{aligned} u(s) &= 0, & \vartheta(a)u'(s) - \beta(a)u''(s) &= 0, \\ u(b) &= 0, & \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) &= 1, \\ u(c) &= 0, & \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) &= 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\vartheta, \beta \geq 0$, $\vartheta + \beta > 0$. Обозначим через $v_s(x)$ решение задачи (2).

Теорема 1. Пусть $\xi \in \gamma_a$ и $v'_\xi(\xi) = v''_\xi(\xi) = 0$, $\text{sign } v_\xi(\xi + 0) > 0$. Тогда для всех $s \in \gamma_a \setminus (a, \xi)$ достаточно близких к точке ξ выполнено неравенство $\text{sign } v_s(s + 0) < 0$, а для всех $s \in (a, \xi)$ достаточно близких к точке ξ выполнено неравенство $\text{sign } v_s(s + 0) > 0$.

Для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с краевыми условиями

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 1, \quad \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus a. \quad (3)$$

Определение. Будем говорить, что уравнение (1) *критически неосциллирует* на графе Γ , если для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи (1), (3) с $\beta(\cdot) \equiv 0$ положительно на Γ и хотябы одно из этих решений имеет на $\partial\Gamma$ нуль кратности три.

Свойство критической неосцилляции обобщает понятие точного промежутка неосцилляции в классической теории (см. [3]). Из результатов [2] следует, что для уравнения с условиями только шарнирного сочленения во внутренних вершинах критичность неосцилляции не возникает. Если же в некоторой узловой вершине заданы условия жесткого соединения, то для такого уравнения критичность неосцилляции заключается в том, что даже незначительное изменение области задания уравнения приводит к тому, что оно перестает быть неосциллирующим. Причем потеря свойства неосцилляции происходит не только при „расширении“ графа, но и при его „уменьшении“ (см. [1, Пример 1]). Такой эффект не наблюдается в классической теории неосцилляции и, как показывает следующая теорема, имеет место только для графа не

гомеоморфного интервала.

Теорема 2. Если дифференциальное уравнение (1) слабо (сильно) не осциллирует на графе-цепи Γ , то оно слабо (сильно) не осциллирует и на любом его подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Теорема 3. Пусть Γ – граф-цепочка и уравнение (1) критически не осциллирует на подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ($\Gamma_0 \neq \Gamma$). Тогда функция Грина краевой задачи (1), (3) на графе Γ знакопеременна.

Из теоремы 3 и результатов [1] следует, что свойство критической неосцилляции вычленяет грань между возможностью и невозможностью для функции Грина хоть какой-то краевой задачи быть положительной, причем в наилучшем положении оказывается задача Дирихле (1), (3).

- [1] Кулаев Р.Ч. Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе // Математический сборник. 2015. Т. 206, №12. С. 79–118.
- [2] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит, 2004.
- [3] Дерр В.Я. Неосцилляция решений дифференциальных уравнений // Вестник Удмурдского университета. 2009. Вып. 1. С. 46–89.

О разделимости оператора Штурма-Лиувилля в весовых пространствах мультипликаторов

Кусаинова Л.К., Касым А.С.

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Республика Казахстан

Мы рассматриваем в $L_2(I)$, $I = (a, +\infty)$, $a > -\infty$, самосопряженный дифференциальный оператор

$$Ly = -y'' + v(t)y$$

с потенциалом $v \geq 1$ из $L_2^{loc}(I)$. Оператор L называют разделимым, если

$$\|y''\| + \|vy\|_2 \leq C (\|Ly\|_2 + \|y\|_2), \quad y \in D(L),$$

где $\|y\|_2 = \|y; L_2(I)\|$. Это условие равносильно равенству, что $D(L) = W_{2,v}^2$, где $W_{2,v}^2$ есть пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме $\|y; W_{2,v}^2\| = \|y''\|_2 + \|vy\|_2$ [1].

Непрерывную справа функцию $h(\cdot) : [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ будем называть регулярной, если существует такое $b > 1$, что $b^{-1}h(x) \leq h(t) \leq bh(x)$ для $x \leq t \leq x + h(x)$ ($x \geq a$).

Пусть

$$v^*(x) = \sup\{h > 0 : h \int_x^{x+h} v \leq 1\} \quad (x \geq a)$$

Обозначим через $M(X \rightarrow Y)$ пространство всех точечных мультипликаторов, действующих на паре функциональных пространств (X, Y) [2].

Теорема. Пусть v удовлетворяет по отношению к некоторой регулярной функции $h(\cdot)$ условиям:

1)

$$v^*(x) \leq A_0^{-1}h(x), \quad A_0 = 44b^2(\sqrt{C_0(1+b^2)} + \sqrt{C_0(1+b^4)}),$$

2)

$$\sup_{x \leq t \leq x+h(x)} v^*(t) \left(\sup_{x \leq t \leq x+h(x)} v^*(t) \int_t^{t+v^*(t)} v^2 \right)^{1/2} \leq C < \infty.$$

Тогда $D(L) = W_{2,v}^2$. Если к тому же v удовлетворяет условию типа (A_∞) на отрезках $[x, x+h]$ ($0 < h < 1$, $x \geq a$), то имеет место импликация

$$\begin{aligned} y \in W_{2,v}^2 \cap M(W_2^{k-2} \rightarrow L_2), \quad Ly \in M(W_2^k \rightarrow L_2), \quad k \geq 2 \\ \implies y \in M(W_2^k \rightarrow W_{2,v}^2). \end{aligned}$$

Постоянная C_0 есть наилучшая постоянная вложения $W_2^1(0, 1) \hookrightarrow C[0, 1]$

- [1] К. Т. Мынбаев, М.О. Отелбаев. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М."Наука", 1988. 277с.
- [2] В.Г. Мазья, Т.О. Шапошникова. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Ленинград. Издательство ЛУ. 1986. 403с

**О некоторых задачах оптимального управления и их
аппроксимации для некоторых несамосопряженных
эллиптических уравнений типа конвекции-диффузии**

Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Задачи оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными, имеют ту особенность, что входные данные краевых задач и соответствующие им решения, на которых ищется минимум того или иного функционала и строится оптимальное управление, вообще говоря, обладают малой гладкостью [1]. Это существенно осложняет обоснование численных методов аппроксимации задач управления, в частности, конечно-разностных. Актуальным для теории и приложений является получение оценок погрешности по состоянию, погрешности аппроксимации исходного функционала разностным и оценок скорости сходимости по функционалу и управлению [2]-[3] при естественных невышешенных требованиях гладкости в постановках задач управления. Важным вопросом при исследовании разностных аппроксимаций задач оптимального управления является также регуляризация аппроксимаций по А. Н. Тихонову [2]-[3].

В настоящей работе эти вопросы исследуются в связи с разностной аппроксимацией задач оптимального управления процессами, описываемыми задачей Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений второго порядка с несамосопряженными операторами – задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями, с квадратичным функционалом и управлениями в коэффициентах оператора конвективного переноса и правой части уравнения. При этом используются минимальные ограничения на гладкость в постановках задач управления, которые обеспечивают лишь обобщенную разрешимость исходной краевой задачи и разрешимость задач управления. Задачи конвекции-диффузии являются типичными для математических моделей механики жидкости и газа. Так, распределение тепла, примесей может происходить не только за счет диффузии, но и обусловлено движением среды. Принципиальные особенности физико-химических процессов в механике жидкости и газа могут быть порождены именно учетом движения

сред под действием тех или иных сил. В работе построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости сеточных аппроксимаций по состоянию и функционалу. Построена минимизирующая последовательность для исходного функционала, слабо сходящаяся в пространстве управлений, и даны оценки погрешности приближения по функционалу. Проведен процесс регуляризации по Тихонову для последовательности разностных аппроксимаций. Работа дополняет результаты из [4].

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук (МК-4147.2015.1)

- [1] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
- [2] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
- [3] Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999.
- [4] Лубышев Ф.В., Манапова А.Р., Файрузов М.Э. Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, Т. 54, № 11, С. 1767–1792 (2014).

Динамика взаимодействующих спиновых цепочек в модели столкновений

Лучников И.А.

Московский физико-технический институт, г. Москва, Россия

Рассмотрим динамику квантовой системы в простой модели столкновений [1]. Начальная матрица плотности системы ρ_s , собственный Гамиль-

тониан системы H_s . Резервуар состоит из набора одинаковых некоррелированных квантовых подсистем. Начальная матрица плотности каждой подсистемы резервуара $\rho_r = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|$. Собственный Гамильтониан каждой подсистемы резервуара H_r . Система по очереди взаимодействует с подсистемами резервуара в течении времени τ с каждой. Гамильтониан взаимодействия системы с подсистемой резервуара H_{int} . Полный Гамильтониан системы и подсистемы резервуара $H = H_s + H_r + H_{int}$. Отображение, описывающее преобразование матрицы плотности полсе акта столкновения номер n :

$$\rho_s^{(n)} = \text{tr} \left\{ \exp \left[-i\gamma\tau H \right] \rho_s^{(n-1)} \otimes \rho_R \exp \left[i\gamma\tau H \right] \right\}$$

Рассмотрим предел $\gamma^2\tau = \text{const} = \Omega$, $\tau \rightarrow 0$. После его взятия получаем эффективный генератор динамической полугруппы, который имеет Линдбладовскую форму:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}[\rho] = & \gamma \left[\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} H_{\alpha\alpha}, \rho \right] + \frac{1}{2} i\Omega \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\beta} (2H_{\alpha\beta} \rho H_{\alpha\beta}^{\dagger} - \{H_{\alpha\beta}^{\dagger} H_{\alpha\beta}, \rho\}) + \\ & + \frac{1}{2} i\Omega \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} (\{H_{\alpha\alpha} H_{\beta\beta}, \rho\} - 2H_{\alpha\alpha} \rho H_{\beta\beta}) \\ i\partial_t \rho = & \mathcal{L}_{eff}[\rho] \end{aligned}$$

Здесь $H_{\alpha\beta} = \langle\alpha|H|\beta\rangle$, оператор, который действует в Гильбертовом пространстве системы. Допускается обобщение на различные начальные состояния подсистем резервуара.

Рассмотрим классическую задачу. По двум параллельным трубам длины L пропускают некоторую жидкость, параметры которой известны. По одной трубе жидкость движется слева на право со скоростью v , по другой трубе жидкость движется справа на лево со скоростью v . Температура жидкости, которая подается в первую трубу T_1 , температура жидкости, которая подается во вторую трубу T_2 . Между трубами реализован теплообмен. Теплообмен вдоль трубы отсутствует. Необходимо найти стационарное распределение температуры в первой и второй трубе в зависимости от координаты. Рассмотрим квантовый аналог данной задачи. Заменим две трубы с движущейся жидкостью на две движущиеся спиновые цепочки. Температуру T_1 заменим на матрицу плотности

ρ_1 , температуру T_2 заменим на матрицу плотности ρ_2 . Необходимо найти частичные матрицы плотности для всех спинов. Описанный выше подход позволяет получить приближенное решение квантовой задачи с хорошей точностью и сравнить его с классическим случаем. Будет показано, что при определенных условиях, эти две задачи описываются одинаковой системой уравнений.

- [1] Mario Ziman, Vladimir Buzek, Open system dynamics of simple collision models (2010) arXiv:1006.2794

Эквивалентность некоторых интегралов от целых функций

Луценко А.В., Луценко В.И.

БашГУ, г. Уфа, Россия

Пусть $W(t)$ положительная функция на интервале $(-a; a)$ и $L_2(W)$ пространство локально интегрируемых на интервале $(-a; a)$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|^2 := \int_{-a}^a |f(t)|^2 W(t) dt.$$

Пространство $L_2(W)$ — гильбертово, такие пространства изучались в различных работах, в частности (см. [1 — 5]), на тему описания сопряженных пространств с помощью преобразования Фурье - Лапласа. Мы будем предполагать, что все экспоненты входят в пространство $L_2(W)$ и система экспонент полна в этом пространстве. Отсюда следует, что

$$\int_{-a}^a W(t) dt < \infty$$

и преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм сопряженного пространства $L_2^*(W)$ и некоторого пространства целых функций $\widehat{L}_2(W)$ с наведенной структурой гильбертового пространства. В работе [3] показано, что когда $W(t) = e^{2h(t)}$ с выпуклой функцией h , то $\widehat{L}_2(W)$ изоморфно пространству целых функций, удовлетворяющих ограничению на рост

$$|F(z)| \leq C e^{\tilde{h}(\Re z)},$$

с нормой

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x+iy)|^2 dy d\tilde{h}'(x)}{K(x)}.$$

Здесь $\tilde{h}$ — сопряженная по Юнгу

$$\tilde{h}(x) = \sup_{|t|<a} (\{xt - h(t)\}),$$

и

$$K(x) = \int_{-a}^a e^{2xt-2h(t)} dt.$$

При помощи данного результата доказывается следующая теорема

Теорема 1. Пусть $W(t) = e^{2h(t)}$ с выпуклой ограниченной функцией h , то преобразование Фурье-Лапласа функции из $L_2(W)$ является целой функцией $F(z)$, удовлетворяющей ограничению на рост

$$|F(z)| \leq C e^{\tilde{h}(\Re z)},$$

и для которой эквивалентны следующие интегралы

$$m \int_{-\infty}^{\infty} |F(iy)|^2 dy < \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x+iy)|^2 dy d\tilde{h}'(x)}{K(x)} < M \int_{-\infty}^{\infty} |F(iy)|^2 dy.$$

Здесь $\tilde{h}$ — сопряженная по Юнгу

$$\tilde{h}(x) = \sup_{|t|<a} (\{xt - h(t)\}),$$

и

$$K(x) = \int_{-a}^a e^{2xt-2h(t)} dt.$$

1. Isaev K. P., Yulmukhametov R. S. *Unconditional bases of reproducing kernels in Hilbert spaces of entire functions*. Ufa Math. J. 5:3, 67–76 (2013).

2. Putintseva A. A. *Riesz bases in weighted spaces*. Ufa Math. J. 3:1, 45–50 (2011).

3. Lutsenko V. I., Yulmukhametov R. S. *Generalization of the Paley-Wiener theorem in weighted spaces*. Math. Notes. 48:5, 1131–1136 (1990).

4. Lutsenko V. I., *Unconditional bases of exponentials in Smirnov spaces*. PhD thesis. Institute of Mathematics CC USC RAS, Ufa (1992). (in Russian).

5. Bashmakov R. A., Isaev K. P., Yulmukhametov R. S. *On geometric characterizations of convex functions and Laplace integrals*. Ufimskij Matem. Zhurn. 2:1, 3–16 (2010). (in Russian).

Фермионные квантовые каналы разрушающие запутанность

Магадов К.Ю.

Московский физико-технический институт, г.Долгопрудный, Россия

Фермионные гауссовские отображения были подробно рассмотрены в работе [1]. Так как отсутствует классификация одномодовых гауссовских фермионных каналов, в отличие от бозонного случая - это мотивировало исследования, законспектированные в [2].

В общем случае фермионное гауссовое линейное отображение, записанное для операторов в грассмановом представлении имеет следующий вид

$$\mathcal{E}(X)(\theta) = C \int \exp[S(\theta, \eta) + i\eta^T \mu] X(\mu) D\eta D\mu, \quad (1)$$

где

$$S(\theta, \eta) = \frac{i}{2}(\theta^T, \eta^T) \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \eta \end{pmatrix} \quad (2)$$

для некоторых $2n \times 2n$ комплексных матриц A, B, D , и комплексного числа C .

В работе [2] рассмотрен случай $n = 1$ при различных значениях параметров, а именно коэффициентов матриц A, B, D . Найдены условия, при которых отображение вполне положительно и сохраняет след, т. е. является квантовым каналом. Также найдены ограничения на параметры при которых квантовый канал $\mathcal{E}$ разрушает запутанность. При некоторых значениях параметров канала получается провести точную аналогию со случаем тщательно изученных бозонных гауссовых каналов.

Физическая основа данных изысканий состоит в том, что возможно представить квантовый канал $\mathcal{E}$ как эволюцию открытой квантовой системы. Описание таких систем происходит в факторизованном по тензорному произведению гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{system} \otimes \mathcal{H}_{env}$. Существует такой гамильтониан H и состояние окружения ρ_{env} , что

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_2 \left(e^{itH} \rho \otimes \rho_{env} e^{-itH} \right), \quad (3)$$

где Tr_2 означает след по гильбертову пространству $\mathcal{H}_{env}$. Выражение (3) в общем виде описывает эволюцию произвольной открытой квантовой системы.

- [1] S. Bravyi, ‘Lagrangian representation for fermionic linear optics’, Journal Quantum Information and Computation archive **5**, 216-238, 2005.
- [2] S. N. Filippov, K. Yu. Magadov, ‘Entanglement-breaking fermionic channels’, to appear in Arxiv.

On the Inverse Problem for a Sturm-Liouville Equation with Discontinuous Coefficient

Mamedov Kh.R., and Ala V.

Mersin University, Mersin, Turkey

e-mail: volkanala@mersin.edu.tr

The work is devoted to the solution of the inverse eigenvalue problem for Sturm-Liouville differential operators on $[0, \pi]$. The inverse problem consists of recovering constant densities ρ_i ($i = 1, 2$) of eigenvalue problem. It is shown that this inverse problem has an infinite number of solutions $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ in $\mathbb{R}^2$ and unique solution in a sufficiently small area $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Besides, it is shown that the inverse problem of recovering $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ with different densities ρ_1 and ρ_2 from three eigenvalues of the eigenvalue problem and three eigenvalues of an eigenvalue problem with other boundary conditions has unique solution in $\mathbb{R}^2$.

Consider boundary problem L_1 for differential equation

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda\rho(x)y, \quad x \in [0, a) \cup (a, \pi], \quad (1)$$

with boundary conditions

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad (2)$$

and the conjugation conditions

$$y(-a) - y(+a) = 0, \quad y'(-a) - y'(+a) = 0. \quad (3)$$

Here λ is a complex parameter, $\rho(x)$ is a piecewise continuous function

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & 0 \leq x < a, \\ \rho_2, & a < x \leq \pi. \end{cases},$$

where $q(x) \in C(0, \pi)$, $\rho_1, \rho_2 = \text{const} \neq 0$.

With boundary problem L_1 we consider boundary problem L_2 with equations (1), conjugation conditions (3), and the boundary conditions

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \quad (4)$$

Then the inverse problem of recovering $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ with different densities ρ_1, ρ_2 from three eigenvalues of problem (1)–(3) and three eigenvalues of problem (1),(3),(4) has unique solution in $\mathbb{R}^2$.

This work was supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey.

The uniqueness of the solution for the problem of identification of Sturm boundary conditions for an inhomogeneous string

Mamedov Kh.R., and Kara B.

Mersin University, Mersin, Turkey

e-mail: b.kara3333@gmail.com

The work is devoted to identification of boundary conditions for string with two pices, which have different densities. The inverse problem consists of recovering constants h and H in boundary conditions of Sturm-Liouville problem. It is shown that this inverse problem has unique solution. This differs substantially from the case of a homogeneous string for which the problem of identification of coefficients has two solutions.

Consider the followng eigenvalue problem the for the differential equation

$$-y'' + q(x) y = \lambda^2 \rho y, \quad (1)$$

with the boundary conditions

$$U_1(y_-) = y'_-(0) - h y_-(0) = 0, \quad (2)$$

$$U_2(y_+) = y'_+(\pi) + H y_+(\pi) = 0, \quad (3)$$

and conjugation conditions

$$y_-(a) = y_+(a), \quad y'_-(a) = y'_+(a). \quad (4)$$

Here λ is a complex parameter, $\rho(x)$ is a piecewise continuous function

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & 0 \leq x < a, \\ \rho_2, & a < x \leq \pi. \end{cases}, \quad y(x) = \begin{cases} y_-, & 0 \leq x < a, \\ y_+, & a < x \leq \pi, \end{cases}$$

where $q(x) \in C(0, \pi)$, $\rho_1, \rho_2 = \text{const} \neq 0$.

It is well known that if $q(x) \equiv q(\pi - x)$ and $\rho_1 = \rho_2$, then the problem of determination the coefficients h and H from eigenvalues of problem (1)–(4) has two solutions [1, 2]. We show that if $q(x) \equiv q(\pi - x)$ and $\rho_1 \neq \rho_2$, then the problem of determination the coefficients h and H from eigenvalues of problem (1)–(4) has unique solution. Thus, cases $\rho_1 = \rho_2$ and $\rho_1 \neq \rho_2$ give different numbers of solutions of the inverse problem for problem (1)–(4).

This work was supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey.

- [1] Akhtyamov A.M. and Utyashev I.M. Identification of Boundary Conditions at Both Ends of a String from the Natural Vibration Frequencies // Acoustical Physics, 2015. Vol. 61, No. 6, pp. 615622.
- [2] Akhtyamov A.M. On the Uniqueness of The Solution of on Inverse Spectral Problem // Differential Equations. 2003. Vol. 39, No. 8, pp. 1061-1066.

Identification of coefficients in boundary conditions of strings graph

Mamedov Kh.R., and Nur E.Y.

Mersin University, Mersin, Turkey

e-mail: nur_9465@hotmail.com

The work is devoted to the solution of the inverse spectral problem for Sturm-Lioville differential operators on the star graphs with n strings-edges x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). The inverse problem consists of recovering the coefficients $h_1, h_2, \dots, h_n$ in boundary conditions of star-graph with strings-edges x_i with different densities ρ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) from eigenvalues of strings graph

vibrations. We show that this inverse problem has a unique solution $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ in $\mathbb{R}^n$.

For example, consider boundary problem L with equations

$$-y_1'' + q_1(x) y_1 = \lambda^2 \rho_1 y_1, \quad -y_2'' + q_2(x) y_2 = \lambda^2 \rho_2 y_2, \quad -y_3'' + q_3(x) y_3 = \lambda^2 \rho_3 y_3, \quad (1)$$

the conjugation conditions

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0, \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$y_1'(\pi) + h_1 y_1(\pi) = 0, \quad y_2'(\pi) + h_2 y_2(\pi) = 0, \quad y_3'(\pi) + h_3 y_3(\pi) = 0. \quad (3)$$

We show that if the densities ρ_1, ρ_2, ρ_3 are different then the inverse problem of recovering $h = (h_1, h_2, h_3)$ from four eigenvalues of problem (1)–(3) has unique solution in $\mathbb{R}^3$.

This work was supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey.

Identification of different densities of the strings-edges from eigenvalues of strings graph

Mamedov Kh.R., and Cetinkaya A.F.

Mersin University, Mersin, Turkey

e-mail: faycacetinkaya@mersin.edu.tr

The work is devoted to the solution of the inverse spectral problem for Sturm-Liouville differential operators on the star graphs with n strings-edges x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). The inverse problem consists of recovering constant densities ρ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) of the strings-edges x_i from $n + 1$ eigenvalues of strings graph vibrations. It is shown that this inverse problem has an infinite number of solutions $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ in $\mathbb{R}^n$ and unique solution in a sufficiently small area $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Besides, it is shown that the inverse problem of recovering $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ with different densities $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ from $n + 1$ eigenvalues of strings graph vibrations and $n + 1$ eigenvalues of strings graph vibrations with other boundary conditions has unique solution in $\mathbb{R}^n$.

For example, consider boundary problem L_1 with equations

$$-y_1'' + q_1(x) y_1 = \lambda^2 \rho_1 y_1, \quad -y_2'' + q_2(x) y_2 = \lambda^2 \rho_2 y_2, \quad -y_3'' + q_3(x) y_3 = \lambda^2 \rho_3 y_3, \quad (1)$$

the conjugation conditions

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0, \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$y_1(\pi) = 0, \quad y_2(\pi) = 0, \quad y_3(\pi) = 0. \quad (3)$$

With boundary problem L_1 we consider boundary problem L_2 with equations (1), conjugation conditions (2), and the boundary conditions

$$y_1(\pi) = 0, \quad y_2(\pi) = 0, \quad y_3'(\pi) = 0. \quad (4)$$

Then the inverse problem of recovering $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ with different densities ρ_1, ρ_2, ρ_3 from four eigenvalues of problem (1)–(3) and four eigenvalues of problem (1),(2),(4) has unique solution in $\mathbb{R}^3$.

This work was supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey.

Обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля на графе Мартынова Ю.В.

ООО «РН-УфаНИПИнефть», г.Уфа, Россия

Рассматривается электрическая цепь в виде соединения типа «звезда» из трех звеньев, на каждом из которых задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной l_k с распределенными емкостью C_k и индуктивностью L_k :

$$L_k C_k (U_k)_{tt} = (U_k)_{x_k x_k} (x_k; t), \quad x_k \in (0; l_k), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

Граничные условия

$$(U_k)_{x_k} (l_k; t) + C_k \tilde{L}_k (U_k)_{tt} (l_k; t) + \frac{C_k}{\tilde{C}_k} U_k (l_k; t) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

описывают ситуацию, когда k -ый проводник заземлен через сосредоточенную самоиндукцию $\tilde{L}_k$ и емкость $\tilde{C}_k$, соединенные последовательно.

В общем узле задаются условие непрерывности потенциала и условие баланса токов:

$$\begin{cases} U_1(0; t) = U_2(0; t) = U_3(0; t), \\ \sum_{i=1}^3 (U_i)_{x_i}(0; t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Собственные колебания рассматриваемой динамической системы могут быть представлены в виде

$$U_k(x_k; t) = e^{i\omega t} y_k(x_k), k = \overline{1, 3}.$$

Тогда с учетом следующих обозначений

$$a_k^2 = \frac{1}{L_k C_k}, p_{k1} = \frac{C_k}{\tilde{C}_k} > 0, p_{k2} = -C_k \tilde{L}_k, k = \overline{1, 3}.$$

получим краевую задачу для оператора Штурма-Лиувилля

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k), x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

и условиями в общем узле:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \\ \sum_{i=1}^3 y_i'(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Обратная спектральная задача для краевой задачи (4)–(6) состоит в нахождении всевозможных значений вектора $\vec{p} = (p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32})$ коэффициентов граничных условий, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ являются собственными значениями краевой задачи. В работе эта задача сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора

$$B(\lambda, \vec{p}) = B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^3 (p_{k1} B_{k1}(\lambda) + p_{k2} B_{k2}(\lambda)).$$

Последняя задача эквивалентна решению системы 6 алгебраических уравнений

$$\det(B(\lambda_j, \vec{p})) = 0, j = \overline{1, 6}, \quad (7)$$

относительно 6 неизвестных координат вектора $\vec{p}$. Отметим, что стандартные средства пакетов прикладных программ для вычислений, таких как MATLAB, Maple, с решением системы (7) не справляются.

Предложен метод численного решения многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора $B(\lambda, \vec{p})$, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий $p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32}$ и являющийся аналогом метода деления отрезка пополам. Разработан прототип программного обеспечения в пакете MATLAB для реализации предложенного численного метода. Тестирование данного прототипа дало удовлетворительные результаты.

- [1] Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады РАН. – 2009. – Т.426. – N 4. – С. 1–4.
- [2] Покорный Ю.В., Пенкин О.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: Физматлит, 2005. – 272 с.
- [3] Грэхем М., Глэдвелл Л. Обратные задачи теории колебаний. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 608 с.

Metric spaces of bounded analytic functions

Makhmutov S., Makhmutova M.

Department of Mathematics and Statistics, Sultan Qaboos University,
Oman

e-mail: makhm@squ.edu.om

Bounded functions with given growth of the hyperbolic derivative $\varphi^*(z) = |\varphi'(z)|(1 - |\varphi(z)|^2)^{-1}$ are used to describe boundedness and compactness of composition operators on Banach spaces of analytic functions. We introduce metrics in order to define metrics for appropriate classes of functions. Classes of such functions can be considered as hyperbolic analogues of known classes of analytic and meromorphic functions: Bloch space, Q_p classes, Dirichlet

classes, Besov classes. However some classes of analytic functions do not have analogous hyperbolic classes.

- [1] S. Makhmutov, Hyperbolic Besov functions and Bloch-to-Besov composition operators, 1997, Hokkaido Math. Journal 26, 699-711.
- [2] S. Makhmutov, M. Tjani, Composition operators on some Mobius invariant Banach spaces, 2000, Bull. Austral. Math. Soc. 62, 1-19.
- [3] M. Lindström, S. Makhmutov, J. Taskinen, The essential norm of a Bloch-to- Q_p composition operator, 2004, Canad. Math. Bull. 47, 49-59.

The Volkenborn Integral of q -Extension of p -Adic Gamma Function

Menken H. and Colakoglu Havare O.

Department of Mathematics, Mersin University, Turkey

e-mail: hmenken@mersin.edu.tr; ozgecolakoglu@mersin.edu.tr

The q -calculus has been developing fast. The special functions as gamma function, zeta function also has great interest in p -adic calculus. In the present work we consider q -extension of p -adic gamma function. We obtain the Volkenborn integral of the q -extension of p -adic gamma function by using its Mahler expansion. Furthermore, we give a new representation for q -extension of p -adic Euler constant.

- [1] K. Koblitz, q -extension of the p -adic gamma function, Transactions of the American Mathematical Society, 260, 2:449-457, 1980.
- [2] Koblitz, N., q -extension of the p -adic gamma function II, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 273, No. 1, pp.111-129, 1982.
- [3] Schikhof, W. H., *Ultrametric Calculus: An Introduction to p -adic Analysis*, Cambridge University Pres, 1984.
- [4] Volkenborn A., *Ein p -adisches Integral und seine Anwendungen. I*, Manuscripta Math. 7-4, 341-373, 1972.

- [5] Volkenborn A., *Ein p -adisches Integral und seine Anwendungen II*, Manuscripta Math. 12, 17-46, 1974.

The uniqueness of the identification of masses at beam ends for an inhomogeneous string

Menken H., and Sahin F.

Mersin University, Mersin, Turkey

e-mail: ferhatsahin86@gmail.com

The work is devoted to identification of boundary conditions for string with two pices, which have different densities. The inverse problem consists of recovering constants m_1 and m_2 in boundary conditions of Sturm-Liouville problem. It is shown that this inverse problem has unique solution. This differs substantially from the case of a homogeneous string for which the problem of identification of coefficients has two solutions.

Consider the followng eigenvalue problem the for the differential equation

$$-y'' + q(x) y = \lambda^2 \rho y, \quad (1)$$

with the boundary conditions

$$U_1(y_-) = y'_-(0) + m_1 \lambda^2 y_-(0) = 0, \quad (2)$$

$$U_2(y_+) = y'_+(\pi) - m_2 \lambda^2 y_+(\pi) = 0, \quad (3)$$

and conjugation conditions

$$y_-(a) = y_+(a), \quad y'_-(a) = y'_+(a). \quad (4)$$

Here λ is a complex parameter, $\rho(x)$ is a piecewise continuous function

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & 0 \leq x < a, \\ \rho_2, & a < x \leq \pi. \end{cases}, \quad y(x) = \begin{cases} y_-, & 0 \leq x < a, \\ y_+, & a < x \leq \pi, \end{cases}$$

where $q(x) \in C(0, \pi)$, $\rho_1, \rho_2 = \text{const} \neq 0$.

It is well known that if $q(x) \equiv q(\pi - x)$ and $\rho_1 = \rho_2$, then the problem of determination the coefficients m_1 and m_2 from eigenvalues of problem (1)–(4) has two solutions. We show that if $q(x) \equiv q(\pi - x)$ and $\rho_1 \neq \rho_2$, then

the problem of determination the coefficients m_1 and m_2 from eigenvalues of problem (1)–(4) has unique solution. Thus, cases $\rho_1 = \rho_2$ and $\rho_1 \neq \rho_2$ give different numbers of solutions of the inverse problem for problem (1)–(4).

This work was supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey.

О нулях квазиполиномов с вещественными показателями

Мерзляков С. Г.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Теорема. Пусть $b_1 < b_2 < \dots < b_n, r_1, r_2, \dots, r_n > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, и для любого числа $k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n-1$, квазиполином

$$-2r_k e^{b_k x} + \sum_{j=1}^n r_j e^{b_j x}$$

принимает отрицательные значения в некоторых вещественных точках.

Тогда для любых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}, |a_1| = r_1, |a_2| = r_2, \dots, |a_n| = r_n$, у квазиполинома

$$\sum_{j=1}^n a_j e^{b_j z}$$

все нули простые и разделенные.

Используя этот результат можно, в частности, доказать следующее.

Теорема. Пусть у квазиполинома p все показатели положительные.

Тогда все его достаточно большие производные будут иметь простые и разделенные нули.

Множество показателей рядов экспонент для интерполяции в любой выпуклой области

Мерзляков С.Г., Попенов С.В.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Ранее авторами была решена задача о полном описании множества показателей рядов экспонент для разрешимости задачи интерполяции

для случая вещественных узлов в данной выпуклой области, и найдены критерии разрешимости, которые связывают геометрию границы области в окрестности предельной точки узлов и множество предельных направлений показателей экспонент в бесконечности.

Рассматривается задача интерполяции рядами экспонент для произвольных узлов и в любой выпуклой области. Ряды экспонент сходятся в топологии равномерной сходимости на всех компактах в области. Получено полное описание множества показателей экспонент для разрешимости этой задачи: все направления в бесконечности должны являться предельными для множества показателей.

- [1] С. Г. Мерзляков, С. В. Попенов, Кратная интерполяция рядами экспонент в $H(C)$ с узлами на вещественной оси, Уфимск. матем. журн., 5:3 (2013), 130-143.
- [2] С. Г. Мерзляков, С. В. Попенов, Интерполяция рядами экспонент в $H(D)$, с вещественными узлами, Уфимск. матем. журн., 7:1 (2015), 46-58.

О дефектных числах операторов, порожденных бесконечными якобиевыми матрицами

Мирзоев К.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
г.Москва, Россия

e-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Пусть $A_j, B_j (j = 0, 1, \dots)$ - квадратные матрицы порядка m , элементы которых являются комплексными числами, причём матрицы A_j - эрмитовы матрицы, а $B_j (j = 0, 1, \dots)$ - невырожденные. Определим минимальный замкнутый симметрический оператор L с областью определения D_L , порожденный бесконечной симметрической матрицей Якоби

$$J = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где O - нулевая матрица порядка m , в гильбертовом пространстве l_m^2 последовательностей $u = (u_0, u_1, \dots)$, $u_j \in \mathbb{C}^m$, посредством отображения $u \rightarrow \mathbf{J}u$, т.е. формулой $Lu = lu$ для $u \in D_L$, где $lu = ((lu)_0, (lu)_1, \dots)$ и $(lu)_0 := B_0u_1 + A_0u_0$, $(lu)_j := B_ju_{j+1} + A_ju_j + B_{j-1}^*u_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$

В докладе, основанном на работе [1], обсуждаются новые признаки минимальности, максимальности и не максимальности дефектных чисел оператора L в терминах элементов матрицы $\mathbf{J}$. Особое внимание уделено случаю $m = 1$, т.е. вопросу об условиях на элементы трёхдиагональной числовой якобиевой матрицы, обеспечивающих реализацию случая определённости классической степенной проблемы моментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00754).

- [1] Бройтигам И.Н., Мирзоев К.А. О дефектных числах операторов, порожденных бесконечными якобиевыми матрицами. ДАН, 2016, Т. 467, № 3, С. 261-265.

Существование и единственность ренормализованного решения параболического уравнения с двойной переменной нелинейностью

Мукминов Ф.Х., Андриянова Э.Р.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$. В цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$(\beta(x, u))'_t = \operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + b(x, u, \nabla u),$$

где $\beta(x, u)$ — возрастающая и непрерывная по u функция, измеримая по x . Модельным примером рассматриваемых уравнений с переменными нелинейностями служит уравнение вида

$$(\beta(u))_t = \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i})_{x_i} + \Phi(x),$$

где $\beta(u)$ – возрастающая непрерывная функция. При некоторых естественных ограничениях доказаны существование и единственность ре- нормализованного решения первой смешанной задачи. Ранее в работах [1], [2] аналогичные результаты были получены в случае $\beta(u) = u$.

- [1] Chao Zhang, Shulin Zhou. Renormalized and entropy solutions for nonlinear parabolic equations with variable exponents and L_1 data. J. Differential Equations 248, 2010, pp. 1376-1400.
- [2] M. Bendahmane, P. Wittbold, A. Zimmermann. Renormalized solutions for a nonlinear parabolic equation with variable exponents and L_1 data. J. Differential Equations 249, 2010, pp. 1483-1515.

Решение задачи Шапиро для обобщенной свертки в пространстве $H(\mathbb{C})$

Муллабаева А.У.

ИМВЦ УНЦ РАН, г. Уфа, Россия

В 1961 году было введено гильбертово пространство Баргмана – Фока. Пусть D — дифференциальный оператор. Известно, что любую функцию из этого пространства можно представить в виде суммы, где одно слагаемое является ядром этого оператора, а другое представляет произведение характеристической функции и функции из пространства Баргмана – Фока.

Шапиро поставил задачу, можно ли любую функцию из пространства $H(\mathbb{C})$ представить в виде суммы ядра заданного дифференциального оператора и произведения характеристической функции этого оператора на целую функцию из $H(\mathbb{C})$.

В 1989 г. Шапиро получил следующий результат [1]:

Теорема. Пусть P — произвольный однородный полином в $\mathbb{C}^n$. Тогда любую функцию $f \in H(\mathbb{C}^n)$ можно представить единственным образом в виде $f = g + h$, где $g, h \in H(\mathbb{C}^n)$, причем h кратно P , а $P^*(D)g = 0$, где $P^*(z) = \overline{P(\bar{z})}$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$.

Нами решена задача Шапиро для обобщенной свертки, а именно, получено разложение любой функции в пространстве $H(\mathbb{C})$ в виде суммы

ядра оператора обобщенной свертки, введенного в работе [2], и главного идеала, порожденного некоторой целой функцией. В частности, идеал может быть порожден сопряженной характеристической функцией оператора обобщенной свертки.

Это разложение вытекает из сюръективности композиции оператора обобщенной свертки с операцией умножения на целую функцию. Для доказательства применяется теорема Майкла — Епифанова о существовании непрерывного правого обратного оператора и необходимо выполнение условия секвенциальной достаточности нулей характеристической функции оператора обобщенной свертки в ядре оператора обобщенной свертки с сопряженной характеристической функцией.

- [1] Shapiro H.S. *An algebraic theorem of E. Fisher, and the holomorphic Goursat problem*// Bull. London Math. Soc. 1989. V. 21. P. 513–537.
- [2] Муллабаева А.У., Напалков В.В. *Кратная интерполяционная задача Валье Пуссена*// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2015. Т. 19. № 1. С. 63–77.

О свойствах преобразования Юнга-Фенхеля

Мусин И.Х.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ множество всех вещественнозначных функций $g \in C(\mathbb{R}^n)$ таких, что:

- 1) $g(x) = g(|x_1|, \dots, |x_n|)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;
- 2) сужение g на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ множество всех вещественнозначных функций $g \in C(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Преобразование Юнга-Фенхеля функции $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$ есть функция $g^* : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$, определённая по правилу

$$g^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - g(y)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

По функции $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определим функцию $u[e]$ на $\mathbb{R}^n$ по правилу: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow u(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$.

Теорема 1. Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n: \\ x_j \neq 0}} (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) \leq 0.$$

Теорема 2. Пусть функция $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ выпукла. Тогда

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{j=1}^n (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n.$$

Теорема 3. Пусть функция $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ выпукла. Тогда

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n: \\ x_j \neq 0}} (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) = 0.$$

Приведённые утверждения могут найти применения в анализе Фурье, теории приближения функций, теории выпуклых функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01661-а).

Дифференциально-разностный оператор в пространстве Шварца

Мусин И.Х., Яковлева П.В.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

1. Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале, b – выпуклая непрерывная положительно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$ – замыкании C . Пара (b, C) определяет замкнутое выпуклое неограниченное множество

$$U(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle \leq b(y), \forall y \in C\},$$

Пусть $C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, x \rangle \geq 0, \forall x \in C\}$.

Пусть $S(U(b, C))$ – пространство, состоящее из $C^\infty(U)$ -функций f таких, что для любого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f\|_{p,U} = \sup_{x \in U, |\alpha| \leq p} |(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^p < \infty.$$

При $b \equiv 0$ $S(U(b, C)) = S(C^*)$.

2. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$ $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $h_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Пусть K – выпуклая оболочка точек h_α , $b(y) = \max_{t \in K} (-\langle y, t \rangle)$.

Определим на $S(U(b, C))$ нетривиальный оператор L по правилу: $L(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (D^\alpha f)(x + h_\alpha)$.

Теорема. Оператор L действует сюръективно из $S(U(b, C))$ в $S(C^*)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15–01–01661–а).

О построении границ областей устойчивости точек равновесия неавтономных периодических систем

Мустафина И.Ж.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается линейное периодическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = (A_0(t) + (\alpha - \alpha_0)A_1(t) + (\beta - \beta_0)B_1(t) + A_2(\alpha, \beta, t))x, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

в котором α и β – скалярные параметры, а матрицы $A_0(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t)$ и $A_2(\alpha, \beta, t)$ являются T -периодическими по t , при этом $A_2(\alpha, \beta, t)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\|A_2(\alpha, \beta, t)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2) \text{ при } (\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0).$$

Связное множество G в плоскости Π параметров (α, β) назовем *областью устойчивости* (*областью неустойчивости*) точки равновесия $x = 0$ системы (1), если для любого $(\alpha, \beta) \in G$ точка равновесия $x = 0$ является устойчивой (неустойчивой). Точку $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ назовем *граничной точкой* области устойчивости G , если в любой ее окрестности содержатся точки как из области устойчивости G , так и из области неустойчивости. Гладкую кривую, проходящую через граничную точку $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ области устойчивости системы (1) и состоящую из граничных точек назовем *граничной кривой*. Граничную точку $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ назовем *регулярной*, если через точку (α_0, β_0) проходит единственная граничная кривая.

В настоящей работе предлагается основанный на результатах из [1,2] новый подход, позволяющий определить условия, при которых граничная точка области устойчивости системы (1) является регулярной, а также приближенно строить соответствующие граничные кривые.

Обозначим через V_0 матрицу монодромии линейной периодической системы $\frac{dx}{dt} = A_0(t)x$. Необходимым условием того, чтобы точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ была граничной для области устойчивости системы (1) является то, чтобы матрица монодромии V_0 имела хотя бы одно собственное значение λ_0 такое, что $|\lambda_0| = 1$, и не имела собственных значений, модуль которых превосходит единицу.

В работе рассматриваются следующие два случая:

- 1⁰. Матрица V_0 имеет простое собственное значение 1;
- 2⁰. Матрица V_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i\omega_0}$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$, k – натуральное число.

Ограничимся приведением одного из результатов, относящегося к случаю 1⁰. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы V_0 и транспонированной матрицы V_0^* соответственно, отвечающие собственному

значению 1. Эти векторы можно считать нормированными равенствами: $\|e\| = 1$ и $(e, g) = 1$. Положим

$$\zeta_1 = \int_0^T (A_1(t)e, g)dt, \quad \zeta_2 = \int_0^T (B_1(t)e, g)dt.$$

Теорема. Пусть $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$. Тогда точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ является регулярной граничной точкой области устойчивости решения $x = 0$ уравнения (1).

- [1] Розо М. *Нелинейные колебания и теория устойчивости*. М.: Наука. 1971. 288 с.
- [2] Красносельский М.А., Юмагулов М.Г. *Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений.* // ДАН России, Том 365. № 2. 1999. С. 162-164.

Осцилляционные свойства спектра задачи для цепочки стержней с упругими опорами в узлах сочленения

Мустафокулов Р.

Таджикский национальный университет, г.Душанбе, Таджикистан

В докладе обсуждается вопрос об осцилляционных свойствах спектра [1] задачи, соответствующей цепочки стержней с упругими опорами в узлах сочленения.

Пусть $\Gamma = (b_1, b_2) \subset R^1$ и $b_1 = a_0 < a_1 < \dots < a_m < a_{m+1} = b_2$. Обозначим $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m+1$) и $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{m+1} \gamma_i$. На множестве Γ рассмотрим задачу: – на Γ_0 задано дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv (p(x)y'')'' = f(x), \quad f(\cdot) \in C(\Gamma_0), \quad p(\cdot) \in C^2(\Gamma_0); \quad (1)$$

– во внутренних узлах a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) множества Γ выполнены условия связи

$$\begin{cases} y(a_i - 0) = y(a_i + 0), & y''(a_i - 0) = y''(a_i + 0) = 0, \\ [(py'')' - qy'](a_i - 0) - [(py'')' - qy'](a_i + 0) - \kappa(a_i)y(a_i) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $q(a_i) \geq 0$, $\kappa(a_i) \geq 0$, причем $q(a_i) + \kappa(a_i) > 0$ для всех a_i ($i = 1, 2, \dots, m$); – в граничных узлах $a_0 = b_1$ и $a_{m+1} = b_2$ заданы краевые условия

$$\begin{cases} \alpha_0 y(b_1) + \alpha_3 [(py'')' - qy'] (b_1 + 0) = 0, & \alpha_1 y'(b_1 + 0) - \alpha_2 y''(b_1) = 0, \\ \beta_0 y(b_2) - \beta_3 [(py'')' - qy'] (b_2 - 0) = 0, & \beta_1 y'(b_2 - 0) + \beta_2 y''(b_2) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$), причем $\alpha_i + \alpha_j > 0$, $\beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$.

Через $\mathfrak{M}$ означим множество функций $y(x)$ из $C^{(3)}(\Gamma_0)$, для которых выполнены условия (2), (3) (из первого условия (2) следует, в частности, что $\mathfrak{M} \subset C_{[b_1, b_2]}$). Задача (1) – (3) запишется тогда в виде

$$Ly = f \quad (y \in \mathfrak{M}). \quad (4)$$

Наряду с задачей (4) рассмотрим соответствующую спектральную задачу

$$Ly = \lambda m(\cdot)y \quad (y \in \mathfrak{M}), \quad m(\cdot) \in C(\Gamma_0). \quad (5)$$

Разрешимость задачи (4), представления её решения через функцию Грина $G(x, s)$, непрерывность $G(x, s)$ вместе с соответствующими производными на $\Gamma_0 \times \Gamma_0$, а также её знакоопределённость были установлены в [2]. Отсюда, в частности, следует эквивалентность задачи (5) интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_{\Gamma} G(x, s) m(s) y(s) ds. \quad (6)$$

Будем говорить, что λ_0 принадлежит спектру задачи (5), если существует нетривиальное решение $y_0 \in \mathfrak{M}$ уравнения (5) при $\lambda = \lambda_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Спектр задачи (5) называется осцилляционным, если он состоит из неограниченной последовательности вещественных простых положительных собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ и если соответствующие собственные функции φ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) обладают следующими свойствами: 1) φ_k имеет в (b_1, b_2) точно k простых нулей $(k = 0, 1, 2, \dots)$; 2) при каждом $k \geq 1$ между любыми соседними нулями φ_k из (b_1, b_2) находится точно один нуль функции φ_{k+1} (перемежаемость нулей).

ТЕОРЕМА. Пусть $\inf_{\Gamma_0} p(x) > 0$. Тогда спектр задачи (5) в Γ является осцилляционным.

Эта теорема показывает, что спектральные свойства задачи для цепочки стержней полностью аналогичны спектральным свойствам задачи для струны или одного стержня.

- [1] Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. – М.: Физматлит. 2009.
- [2] Мустафокулов Р., Солиев С.К. Об одной многоточечной краевой задаче // ДАН РТ. 2014. Т. 57. №9-10. С. 725-731.

Описание пространства сопряженного с подпространством Баргмана – Фока

Напалков В. В. (мл.)

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть F_n пространство Баргмана – Фока, состоящее из целых в $\mathbb{C}^n$ функций $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, для которых

$$\|f\|_{F_n}^2 \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 d\sigma_n(z) < \infty.$$

Здесь $d\sigma_n(\xi) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\pi^n} e^{-|z|^2} dv_n(z)$, v_n – мера Лебега в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Пусть $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$ целая функция, обладающая следующим свойством: для любого $\lambda_0 \in \mathbb{C}^n$ функция $\varphi(z)e^{<z, \lambda_0>}$ принадлежит пространству F_n .
Здесь

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n, \quad <z, \lambda> \stackrel{def}{=} z_1 \cdot \lambda_1 + \dots + z_n \cdot \lambda_n.$$

Класс таких функций описан, например в [1] р. 25 (см. также [2]). Рассмотрим систему функций $\mathcal{E}_\lambda \stackrel{def}{=} \{\varphi(\cdot) \cdot e^{<\cdot, \lambda>} \varphi(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{C}^n}$. Ясно, что $\mathcal{E}_\lambda \subset F_n$. Пусть $\text{span } \mathcal{E}_\lambda$ – линейная оболочка системы функций $\mathcal{E}_\lambda \subset F_n$. Пополнение $\text{span } \mathcal{E}_\lambda$ по норме пространства F_n является подпространством F_n . Обозначим его символом L_φ^n :

$$L_\varphi^n = \overline{\text{span}} \mathcal{E}_\lambda.$$

Пространство L_φ^n есть подпространство пространства F_n , и L_φ^n само является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Однако L_φ , вообще говоря, не совпадает с F_n . Скалярное произведение в пространстве L_φ^n имеет вид:

$$(h, g)_{L_\varphi^n} = \int_{\mathbb{C}^n} h(z) \cdot \overline{g(z)} d\sigma_n(z).$$

Также

$$\|h\|_{L_\varphi} = \sqrt{\int_{\mathbb{C}^n} |h(z)|^2 d\sigma_n(z)}, \quad h \in L_\varphi^n.$$

Всякий линейный непрерывный функционал S над L_φ^n согласно теоремы Рисса – Фишера порождается некоторым элементом h из пространства L_φ^n :

$$S(f) = (f, h)_{L_\varphi^n}, \quad f \in L_\varphi^n.$$

Пусть

$$\tilde{h}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(\lambda) e^{<\cdot, \lambda>} \varphi(\cdot), h)_{L_\varphi^n}.$$

В силу полноты системы функций $\{\mathcal{E}_\lambda\}$ в пространстве L_φ^n отображение $h \longrightarrow \tilde{h}$ инъективно. Совокупность $\tilde{h}$, $h \in L_\varphi^n$ обозначим через $\tilde{L}_\varphi^n$. На L_φ^n введем структуру гильбертова пространства.

Положим

$$(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)_{\tilde{L}_\varphi^n} \stackrel{\text{def}}{=} (h_2, h_1)_{L_\varphi^n}, \quad h_1, h_2 \in L_\varphi^n.$$

Возникает задача об описании пространства $\tilde{L}_\varphi^n$.

Теорема. Пространства $\tilde{L}_\varphi^n$ и L_φ^n совпадают, т.е. состоят из одних и тех же целых функций и для любых $s, g \in L_\varphi^n = \tilde{L}_\varphi^n$ выполнено равенство

$$(s, g)_{\tilde{L}_\varphi^n} = (s, g)_{L_\varphi^n}$$

Если $g \in \tilde{L}_\varphi^n$, то

$$\|g\|_{\tilde{L}_\varphi^n}^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |g(\xi)|^2 d\sigma_n(\xi).$$

- [1] Newman D.J. and Shapiro H.S. Hilbert space of entire function related to the operational Calculus. University of Michigan. Ann Arbor. 1964. 92 p. (mimeographed notes).

- [2] Newman D.J. and Shapiro H.S. Certain Hilbert spaces of entire functions. Bull. Amer. Math. Soc. Volume 72. Number 6. 1966. 971-977.

Интегральные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя

Насибуллин Р.Г.

Казанский(Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

В математике и в математической физике широкое развитие получили неравенства, которые дают различные нижние оценки норм производной функции. К таким видам неравенств, например, относятся неравенства типа Харди. Имеются ряд работ, которые посвящены развитию, обобщению и применению неравенств Харди. Неравенства типа Харди развивались в разных направлениях. Например, в работах Х. Брезиса и М. Маркуса, М. Хоффман-Остенхоф, Т. Хоффман-Остенхоф и А. Лаптева, Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Вирса доказаны неравенства с дополнительными слагаемыми. В статье [1] установлены неравенства типа Харди, точные константы в которых зависят от первого положительного корня следующего дифференциального уравнения

$$rJ_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \nu \geq 0, r > 0,$$

где J_ν – функция Бесселя, определяемая следующим образом

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+1+\nu)}, \quad x > 0, \nu \geq 0.$$

Пусть Ω – выпуклая область, $\delta = \delta(\Omega)$ – функция расстояния до границы области Ω , $\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \delta$. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непрерывно дифференцируемой функций с компактным носителем в Ω . Приведем формулировку результата из [1]:

Пусть $s \in (0, +\infty)$, $q \in (0, +\infty)$, $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$. Тогда для произвольной функции $f \in C_0^1(\Omega)$, такой что $\int_{\Omega} |\nabla f|^2 \delta^{1-s} dx < \infty$, выполнено следующее точное неравенство

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^2}{\delta^{s-1}} dx \geq \frac{s^2 + \nu^2 q^2}{4} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\delta^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q)}{4\delta_0^q} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\delta^{s+1-q}} dx, \quad (1)$$

где $\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \delta$.

Мы доказали L^p -аналог неравенства (1). Отметим, что весовые функции в полученных неравенствах зависят от функции Бесселя порядка ν . Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть Ω — выпуклая область с конечным внутренним радиусом δ_0 , $s \in (0, +\infty)$, $q \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$ и $\nu \in [0, r/q]$. Тогда для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+1}} dx \geq h \int_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^{s+1}} \mathfrak{J}_{\nu} \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right) dx + \frac{\lambda^2}{\delta_0^q} \int_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^{s+1-q}} \mathfrak{J}_{\nu} \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right) dx,$$

где

$$\mathfrak{J}_{\nu}(x) = \left(\frac{r}{2} - \frac{q\nu}{2} + \frac{q\lambda_{\nu}(2r/q)x^{q/2}}{2} \frac{J_{\nu-1}(\lambda_{\nu}(2r/q)x^{q/2})}{J_{\nu}(\lambda_{\nu}(2r/q)x^{q/2})} \right)^{p-2},$$

$$r = \frac{s}{p-1}, \quad h = (p-1) \frac{r^2 - \nu^2 q^2}{4}, \quad \lambda = \frac{q\sqrt{p-1}}{2} \lambda_{\nu}(2r/q).$$

Следствие 1. Пусть Ω — выпуклая область с конечным внутренним радиусом δ_0 и $f \in C_0^1(\Omega)$. Если $s \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$, $r = s/(p-1)$, то

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+1}} dx \geq \frac{(p-1)r^p \pi^p}{2^p \delta_0^{2r}} \int_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^{1-r}} \cot^{p-2} \left(\frac{\pi \delta^r}{2 \delta_0^r} \right) dx.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00351-а) и при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта №15-41-02433.

- [1] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2011 — V. 18 — P. 723–736.

One-parametric families of Reimann surfaces

Nasyrov S.R.

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia

We describe one-parametric families of rational functions $R(z, t)$ depending smoothly on a real parameter $t \in [0; 1]$. For a fixed t the function $R(z, t)$ maps conformally the Riemann sphere $\widehat{\mathbb{C}}$ onto a Riemann surface $S(t)$ over $\widehat{\mathbb{C}}$. Let the critical points $a_k = a_k(t)$ of $R(z, t)$ have multiplicities m_k and corresponding critical values $A_k(t) = R(a_k(t), t)$ depend smoothly on t . We will also assume that $R(z, t)$ has poles of order n_j at points $b_j = b_j(t)$. Provided that we know the functions $A_k(t)$, we find a system of ODE for the critical points $a_k(t)$ and the poles $b_j(t)$.

In the case when there is no poles at finite points of the complex plane, i.e. $R(z, t)$ are polynomials by z , such problem was solved in [1]. In [2] we considered families of rational functions with simple critical points $a_k(t)$. Here we investigate the case of arbitrary multiplicities. We should note that in [3, 4] we considered the case of one-parametric families of elliptic functions with a unique pole in every period parallelogram and simple critical points.

Thus, let

$$R(z, t) = C_0 \int_{z_0}^z \frac{\prod_{k=1}^M (\zeta - a_k(t))^{m_k-1} d\zeta}{\prod_{j=1}^N (\zeta - b_j(t))^{n_j+1}} + C_1 \quad (1)$$

be a family of rational functions with critical points $a_k(t)$ of order m_k and poles $b_j(t)$ of order n_j . Without loss of generality we can assume that $C_0 = 1$, $z_0 = a_1$, $C_1 = A_1$, and

$$\sum_{k=1}^M (m_k - 1)a_k(t) - \sum_{j=1}^N (n_j + 1)b_j(t) = 0$$

for all $t \in [0, 1]$.

Theorem. *The critical points $a_k = a_k(t)$ and the poles $b_j = b_j(t)$ of the functions (1) satisfy the following system of ODE:*

$$\dot{a}_l = \frac{H_l^{(m_l-1)}(a_l)}{(m_l - 1)!} \dot{A}_l + \sum_{k=1, k \neq l}^M \frac{G_{kl}^{(m_k-2)}(a_k)}{(m_k - 2)!} \dot{A}_k, \quad \dot{b}_j = \sum_{k=1}^M \frac{I_{kj}^{(m_k-2)}(a_k)}{(m_k - 2)!} \dot{A}_k,$$

where

$$H_l(x) = \frac{\prod_{j=1}^N (x - b_j)^{n_j+1}}{\prod_{k=1, k \neq l}^M (x - a_k)^{m_k-1}}, \quad G_{kl}(x) = \frac{H_k(x)}{x - a_l}, \quad I_{kj}(x) = \frac{H_k(x)}{x - b_j}.$$

Here the dot above a letter means differentiation by t .

This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No 01-14-00351.

- [1] Nasyrov S.R. Determination of the polynomial uniformizing a given compact Riemann surface // Math. Notes. 2012. V.91, No 3. P.558–567.
- [2] Nasyrov S.R. Uniformization of simply connected compact Riemann surfaces by rational functions // Proc. of VIII Petrozavodsk Int. Conf. 'Complex Analysis and Appl.'. Petrozavodsk, Petr. Univ., 2016. P. 54–56.
- [3] Nasyrov S.R. One-parametric families of elliptic functions uniformizing complex tori // Proc. of VII Petrozavodsk Int. Conf. 'Complex Analysis and Appl.'. Petrozavodsk, Petr. Univ., 2014. P.78–79.
- [4] Nasyrov S.R. One-parametric families of multivalent functions on Riemann surfaces // Proc. Int. Conf. 'Modern Methods of Function Theory and Related Topics'. Voronezh, Voronezh Univ., 2015. P.83–85 [in Russian].

Normed linear spaces of sesquilinear forms associated with positive operator affiliated with von Neumann algebra

Novikov An.An.

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia

Let a be positive selfadjoint operator affiliated with von Neumann algebra $\mathcal{M}$. By $\mathcal{M}^{sa}$ denote the selfadjoint part of $\mathcal{M}$. The von Neumann algebra $\mathcal{M}$ acts in Hilbert space H with the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. By $D(a)$ we denote the domain of operator a . By $\mathcal{M}_*$, $\mathcal{M}_*^h$, $\mathcal{M}_*^+$ we denote predual space of von Neumann algebra $\mathcal{M}$, its hermitian and positive parts, respectively. By $\mathbf{1}$

we denote the identity operator. By definition $a_\lambda^{\frac{1}{2}} := \lambda a^{\frac{1}{2}} (\lambda \mathbf{1} + a^{\frac{1}{2}})^{-1}$. For positive linear functional $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ the limit $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(a_\lambda)$ is denoted by $\varphi(a)$.

By $\mathcal{D}_a^+$ we denote $\{\varphi \in \mathcal{M}_*^+ \mid \varphi(a) < +\infty\}$. By definition $\mathcal{D}_a^h := \text{lin}_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_a^+$. By $\mathcal{D}_a^\sharp$ we denote the algebraic dual of $\mathcal{D}_a^h$ (the space of all real-valued linear functionals in $\mathcal{D}_a^h$).

We define a vector space $I(a) := \{x \in \mathcal{D}_a^\sharp \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^+ (-\lambda \varphi(a) \leq x(\varphi) \leq \lambda \varphi(a))\}$ and endow it with the norm $\|\cdot\|^a := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \forall \varphi \in \mathcal{D}_a^+ (-\lambda \varphi(a) \leq x(\varphi) \leq \lambda \varphi(a))\}$.

Lemma For $\varphi \in \mathcal{D}_a^h$ the equality $a^{\frac{1}{2}} \varphi a^{\frac{1}{2}}(x) := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(a_\lambda^{\frac{1}{2}} x a_\lambda^{\frac{1}{2}})$ determines a linear functional $a^{\frac{1}{2}} \varphi a^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{M}_*^h$.

For $x \in \mathcal{M}^{sa}$ define a sesquilinear form $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}$ on $D(a^{\frac{1}{2}}) \times D(a^{\frac{1}{2}})$ by the equality $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}(f, g) := \langle x a^{\frac{1}{2}} f, a^{\frac{1}{2}} g \rangle$. We endow the linear space of all such sesquilinear forms is denoted by $\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{sa})$ with the norm $p_a(\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \forall f \in H (-\lambda a^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} a^{\frac{1}{2}}(f, f) \leq \widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}(f, f) \leq \lambda a^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} a^{\frac{1}{2}}(f, f))\}$.

Lemma For $\varphi \in \mathcal{D}_a^+$ such that $\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \cdot, f_n \rangle$ the equality $a^{\frac{1}{2}} \varphi a^{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}(f_n, f_n)$ holds.

For an injective operator a we identify the sesquilinear form $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}$ with the continuous linear functionals on $\mathcal{D}_a^h$ using the equality $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}(\varphi) = a^{\frac{1}{2}} \varphi a^{\frac{1}{2}}(x)$.

Theorem For an injective operator a the identification of the sesquilinear forms $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}$ with the continuous linear functionals on $\mathcal{D}_a^h$ lead to the identification of normed vector space $\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{sa})$ with the normed vector space $I(a)$.

Theorem For an injective operator a the mapping $u : x \in \mathcal{M}^{sa} \mapsto \widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}} \in I(a)$ is an isometrical isomorphism.

- [1] Novikov A., *L1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity, 2016, doi:10.1007/s11117-016-0422-4

- [2] Novikov An.An., Tikhonov O.E., Characterization of Central Elements of Operator Algebras by Inequalities // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2015, Vol. 36, No. 2, pp. 208–210.
- [3] Novikov An.An., Tikhonov O.E. Measures on Orthoideals and L_1 -Spaces Associated with Positive Operators // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2016, Vol. 37, No. 4, pp. 497–499.
- [4] Новиков А.А., Тихонов О.Е., L_1 -пространства, ассоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского, - 2015. - т. 51. - с. 335–336
- [5] Новиков Ан.Ан., L_1 -пространства, асоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского, - 2014. - т. 50. - с. 133–134
- [6] Новиков Ан.Ан., Эскандариан З., Индуктивные и проективные пределы банаховых пространств измеримых функций с порядковыми единицами по степенному параметру // Изв. вуз. Матем. - 2016. - №10. - с. 80–85

Авторырезонанс в модели генератора терагерцевых волн

Киселев О.М., Новокшенов В.Ю.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН (Россия, Уфа), novik53@mail.ru

Терагерцевый диапазон электромагнитных волн ($\sim 10^{12}$ Гц, длина волны 0.1 – 1 мм) слабо покрывается современными электронными и оптическими устройствами. В то же время этот диапазон важен для медицинских, контртеррористических, научных и других приложений ввиду высокой проникаемости в диэлектриках при малой мощности излучения. Открытый недавно источник излучения перестраиваемой частоты на основе стопки контактов Джозефсона, может стать эффективным для этих приложений [1]. Изученные образцы, состоящие из сотен параллельных сверхпроводящих слоев, демонстрируют синхронизацию частот

отдельных джозефсоновских контактов. Более того, мощность излучения растет как квадрат от числа слоев. Предложенная математическая модель данного устройства изучена слабо. Она представляет собой цепочку уравнений синус-Гордон, где каждое уравнение линейно связано с ближайшими соседями, а также имеет члены, отвечающие диссипации и накачке энергии [2]

$$\ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = (1 - \alpha \Delta_2) \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \sin \varphi_n + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - j_{ext} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi_n(t, -L)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n(t, L)}{\partial x} = 0, \quad -L < x < L, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где φ_n - фаза электрического поля в n -ом слое, $\omega_{res} = \pi \ell / L$, - резонансная частота излучения, j_{ext} - внешний ток накачки, $\varepsilon \ll 1$ - малая диссипация, Δ_2 - вторая разность, $\Delta_2 \varphi_n \equiv \varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}$. Необходимо найти начальные условия, а также значения параметров накачки и диссипации, обеспечивающие синхронизацию волновых мод в большинстве узлов цепочки. Эксперименты показывают, что подобные режимы достаточно редки, в общем положении синхронизация не наступает, что ведет к резкому падению мощности излучения. Традиционные механизмы синхронизации [3] посредством среднего поля, захвата фазы хаотических колебаний или образования кластеров с водителем ритма, по-видимому, неприменимы к данной системе. В силу специфики уравнений возможно образование устойчивых мод типа кинков или бризеров в каждом узле и их согласование по фазе. Контролем этого согласования здесь является вольт-амперная характеристика, или зависимость j_{ext} от частоты излучения. Эта зависимость носит типично резонансный характер, то есть наблюдается частота, на которой затраты тока для генерации излучения максимальны. Обычно автофазировка - захват в резонанс - возникает для узкого и нетривиально устроенного множества фаз нелинейных волн. Объяснение резонансной зависимости параметров системы с автофазировкой составляют предмет доклада.

В нелинейной цепочке (1), (2) имеются большие и малые параметры, которыми следует воспользоваться для построения теории возмущений. Оказывается, что при больших частотах ω_{res} цепочка асимптотически "расцепляется" и существует режим линейного по времени роста φ_n . Мы

исследуем этот режим захвата в резонанс реализуется, выводя зависимость тока j_{ext} от частоты ω . Необходимым условием резонанса служит зависимость поля φ_n от пространственных переменных n и x . Показано, что в главном члене асимптотики необходимо выполнение "уравнения главного резонанса". Здесь оно представляет собой уравнение математического маятника с периодически изменяющейся частотой. Мы устанавливаем существование решений этого уравнения и исследуем их устойчивость.

- [1] L.Ozyuzer et al., Emission of coherent THz radiation from superconductors, Science V.318, P.1291–1293 (2007)
- [2] X. Hu and S. Lin, Three-dimensional phase-kink state in a thick stack of Josephson junctions and terahertz radiation, Physical Review B, V.78 N.13, 134510 (2008)
- [3] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, Cambridge University Press, 2003, 432P

Многоточечная задача Валле Пуссена с кратными комплексными узлами для операторов свертки

Нуятов А.А.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
г.Нижний Новгород, Россия

В работе доказана разрешимость многоточечной задачи Валле Пуссена (задачи интерполяции) в ядре оператора свертки, когда нулевая последовательность характеристической функции оператора свертки и узловые точки, являющиеся нулями целой функции, лежат в некоторых углах комплексной плоскости, при этом узлы могут быть кратными.

Обозначим $Ker M_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = 0\}$ - ядро оператора свертки M_φ .

Многоточечную задачу Валле Пуссена в $Ker M_\varphi$ с узлами μ_j , $j = 1, 2, \dots$, являющимися нулями функции $\psi \in H(\mathbb{C})$, поставим следующим образом: для произвольной последовательности комплексных чисел

$a_j, j = 1, 2, \dots$ существует ли функция $y \in \text{Ker } M_\varphi$ такая, что

$$y(\mu_j) = a_j, j = 1, 2, \dots$$

В работе [1] эта задача решена для случая, когда узлы простые и лежат на вещественной оси. В работе [2] решена задача кратной интерполяции для вещественных узлов. В работе [3] решена задача для простых комплексных узлов, которые лежат в некотором угле. В данной работе решается задача кратной интерполяции для комплексных узлов, лежащих в некотором угле.

Пусть $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - нулевое множество функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, каждый нуль повторяется столько раз какова его кратность; $N_\psi = \{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - множество нулей функции $\psi \in H(\mathbb{C})$, каждый нуль повторяется столько раз какова его кратность; $\tilde{N}_\psi$ - бесконечное множество, которое состоит из всех различных нулей функции $\psi \in H(\mathbb{C})$.

Теорема. Пусть для некоторого фиксированного $\alpha \in [0, +\infty)$ существует число $\beta \in [0, +\infty)$ такое, что

$$\alpha \cdot \beta < 1,$$

при этом выполнены условия:

- (a) $N_\varphi \subset D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| \leq \alpha \text{Re } z\}$ и существует подпоследовательность λ_{k_s} такая, что

$$\text{Re}(\lambda_{k_s}) < \text{Re}(\lambda_{k_{s+1}}), s \in \mathbb{N}.$$

- (b) $N_\psi \subset D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| \leq \beta \text{Re } z\}$, при этом для элементов множества $\tilde{N}_\psi$ выполнено:

$$\text{Re}(\mu_k) < \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \text{Re}(\mu_{k+1}), k \in \mathbb{N}.$$

Тогда разрешима многоточечная задача Валле Пуссена в $\text{Ker } M_\varphi$.

Работа выполнена совместно с Напалковым Валентином Васильевичем.

- [1] Напалков В.В., Нуятов А.А., *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки* // Мат. сборник. 203. Т. 2. 2012. С. 77-86.

- [2] Мерзляков С.Г., Попенов С.В. *Кратная интерполяция рядами экспонент в $H(\mathbb{C})$ с узлами на вещественной оси*// Уфимский математический журнал. 2013. Т.5. № 3. С. 130 – 143.
- [3] Напалков В. В., Нуятов А.А. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки узлами, заданными в угле*// Теоретическая и математическая физика. 180. № 2. 2014. С. 264 – 271.

Пространства с мультивесовыми производными и краевые задачи для сингулярных дифференциальных уравнений

Ойнаров Р.

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Пусть $I = (0, 1)$ или $I = (0, \infty)$, $\alpha_i \in R$, $i = 0, 1, \dots, n$. Пусть $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\bar{\alpha}| = \sum_{i=0}^n \alpha_i$. Для функции $f : I \rightarrow R$ определим следующую дифференциальную операцию:

$$D_{\bar{\alpha}}^0 f(t) \equiv t^{\alpha_0} f(t), \quad D_{\bar{\alpha}}^k f(t) = t^{\alpha_k} \frac{d}{dt} D_{\bar{\alpha}}^{k-1} f(t), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где каждая производная понимается в обобщённом смысле.

Операция $D_{\bar{\alpha}}^k f(t)$ называется α -мультивесовая производная функции f k -того порядка.

Через $W_{p, \bar{\alpha}}^n \equiv W_{p, \bar{\alpha}}^n(I)$ обозначим пространство функций $f : I \rightarrow R$, имеющей α -мультивесовые производные до k -того порядка включительно на интервале I с конечной полу-нормой:

$$\|D_{\bar{\alpha}}^n f\|_p = \left(\int_I |D_{\bar{\alpha}}^n f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty.$$

Когда $\alpha_n = \gamma$ and $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, мы имеем пространства Л.Д.Кудрявцева $W_{p, \bar{\alpha}}^n \equiv L_{p, \gamma}^n$.

Исследуются: поведение функции $f \in W_{p, \bar{\alpha}}^n$ на концах интервала I , ограниченность и компактность вложения

$$W_{p, \bar{\alpha}}^n \hookrightarrow W_{q, \bar{\beta}}^m, \quad (1)$$

где $1 < p, q < \infty$, $0 \leq m < n$, $\bar{\beta} = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m\}$. Устанавливается неравенство типа Никольского-Лизоркина-Кудрявцева для функций $f \in W_{p, \bar{\alpha}}^n$.

- [1] Kalybay A., A generalized multiparameter weighted Nikol'skii–Lizorkin inequality, *Doklady Math.*, 1(68) (2003), 121–127.
- [2] Kalybay A. and Oinarov R., Some properties of spaces with multiweighted derivatives, In: *Progress in Analysis*, Vol. I, World Sci. Publ., 2003, 1–13.
- [3] Abdikalikova Z., Baiarystanov A. and Oinarov R., Compactness of embedding between spaces with multiweighted derivatives – the case $p \leq q$, *Math. Ineq. Appl.*, Vol. 14, 4 (2011), 793–810.
- [4] Abdikalikova Z., Oinarov R. and L.-E. Persson, Boundedness and compactness of the embedding between spaces with multiweighted derivatives when $1 \leq q < p < \infty$, *Czechoslovak Math. J.*, Vol. 61, 136 (2011), 7–26.

Метод частичных областей для задач пространственной теории упругости

Осипов Е.А.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань,
Россия

При решении волновых уравнений в граничных задачах часто применяется метод частичных областей. Например, при решении задач дифракции электромагнитных волн в работах [4], [6]. Одним из вариантов метода частичных областей является метод переопределенной граничной задачи, предложенный в работе [5], а так же в работах других авторов.

Используя метод переопределенной граничной задачи в частичных областях вместо исходных задач рассматриваются вспомогательные граничные задачи. При этом на границе заданы все величины, которые

участвуют в условиях сопряжения полей. Такие задачи являются заведомо переопределенными. Необходимые и достаточные условия их разрешимости задают зависимости между граничными функциями. Эти условия вместе с условиями сопряжения на общих участках границ частных областей образуют систему функциональных уравнений, интегральных или сумматорных, которая сводится к регулярным интегральным уравнениям или к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ).

Граничные задачи для систем уравнений теории упругости исследованы в работах [1], [2], [3]. В работе, используя метод переопределенной граничной задачи, задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, размещенных на границе полупространства, сведена (в двух вариантах: скалярной и векторной форме) к БСЛАУ вида (векторная форма записи)

$$l_x l_y \mathbf{d}_{kh} - \frac{1}{l_x l_y} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{pq}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{mn} \mathbf{d}_{mn} J_{p-k, q-h} I_{m-p, n-q} = \tilde{\mathbf{b}}_{sr} I_{s-k, r-h}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad h = 0, \pm 1, \dots,$$

относительно коэффициентов Флоке отраженной волны. Здесь $\mathbf{d}_{mn}$ и $\tilde{\mathbf{b}}_{mn}$ – некоторые двумерные векторы, а $\mathbf{G}_{mn}$ – матрицы имеющие обратные. $J_{m,n}$ и $I_{m,n}$ – это легко вычисляемые интегралы.

Найдены условия разрешимости некоторых переопределенных граничных задач. Полученные уравнения показывают, как в переопределенной граничной задаче на границе сопряжения упругих сред функции $\sigma_{xz,0}$ и $\sigma_{yz,0}$ (– функции тензора напряжения) должны выражаться через функции u_{x0} и u_{y0} (– функции вектора перемещений).

- [1] Осипов Е.А. Сумматорные и интегральные уравнения двоякопериодических задач дифракции упругих волн в пространстве // Труды Российской летней школы "Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики". – Казань: Изд-во "Фолиантъ", 2010. – С. 66–74.
- [2] Осипов Е.А., Плещинский Н.Б. Сумматорные и интегральные уравнения периодических задач дифракции упругих волн на дефектах

в слоистых средах // Известия вузов. Математика, 2008. – №9. – С. 76–82.

- [3] Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б., Осипов Е.А. Упругие свойства слоистого композита, ослабленного периодической системой трещин // Вестник Казанск. гос. технол. ун-та, 2012. – №3. – С. 82–85.
- [4] Плещинский Н.Б. Модели и методы волноводной электродинамики: учебное пособие. – Казань: Казанск. гос. ун-т, 2008. – 104 с.
- [5] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций // Препринт 2000-1. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2000. – 50 с.
- [6] Aleksandrova I.L., Osipov E.A., Pleshchinskii N.B., Rogozhin P.A. On problems of electromagnetic wave diffraction on periodical sets of heterogeneities in the layered media // 2012 Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2012. – Kharkiv, Ukraine, August 28–30, 2012. – P. 455–458. – ISBN: 978-1-4673-4479-1.

О точечных мультипликаторах в разностных пространствах

Оспанова А. Б., Кусаинова Л. К.

ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

Рассматриваются разностные весовые пространства с конечной нормой

$$\|\{y_j\}; \omega_p^m(v_0, \dots, v_m)\| = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta^m y_j|^p v_{k_j} \right)^{1/p},$$

$1 < p < \infty$, $v_k = \{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ ($v_{k_j} > 0$). Разностный оператор определяется так:

$$\Delta^m y_j = \begin{cases} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} y_{j-m/2+k}, & \text{если } m = 2n; \\ \Delta^{m-1}(\Delta y_j), & \text{если } m = 2n - 1. \end{cases}$$

В работе исследуются точечные мультипликаторы $\mu = \{\mu_j\} \in M(\omega_p^m(v_0, \dots, v_m) \rightarrow X)$, где X – различные функциональные пространства. К примеру, рассмотрим пространство $\omega_p^2(1, v, v,)$, $v = \{v_j\}$. Здесь по последовательности $v = \{v_j\}$ строится последовательность характеристических размеров $\{K_n^*\}$ и выводится оценка

$$\|\lambda y; \omega_p^1(1, 1)\| \leq cA^* \|y; \omega_p^2(1, v, v,)\|,$$

где $\lambda = \{\lambda_j\}$, $A^* = \sup_{n \geq 1} (K_n^* + 1)^{1+1/p'} \left[\sum_{j=n}^{n+K_n^*} (|\Delta \lambda_j|^p + |\lambda_j|^p) \right]^{1/p}$, $p' = p/(p-1)$.

- [1] L. Kussainova, A. Ospanova. Interpolation Theorems for Weighted Sobolev Spaces. Proceedings of the World Congress on Engineering 2015 (WCE 2015, July 1 - 3, 2015), Vol I. – London (U.K.). 2015. – P. 25-28.

О порядках Жевре формальных степенных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве

Парусникова А.В.

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики“, г.Москва, Россия

Для формальных степенных асимптотических разложений решений модифицированного первого, второго, третьего, четвертого и пятого уравнений Пенлеве при ненулевых значениях параметров уравнений в работе найдены порядки Жевре. Доказано, что данные формальные разложения являются асимптотическими разложениями решений соответствующих уравнений в некоторых секторах с вершиной в бесконечности на римановой поверхности логарифма. Приведена оценка угла раствора этих секторов.

- [1] Anastasia V. Parusnikova, *On Gevrey orders of formal power series solutions to the third and fifth Painlevé equations near infinity*. Opuscula Math. 34, no. 3 (2014), 591-599

- [2] А. В. Парусникова, *Порядки Жевре решений четвертого уравнения Пенлеве в случае общего положения*. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013, по. 97.

**Представление общего решения уравнения типа
Коши–Римана с сингулярной окружностью и особой точкой
Расулов А.Б., Бободжонова М.А., Федоров Ю.С.**

Пусть область G содержит точку $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром ∂G , ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $G_0 = G \setminus \{0 \cup L\}$. В области G_0 рассмотрим уравнение

$$u_{\bar{z}} - A(z)u + B(z)\bar{u} = f(z). \quad (1)$$

где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $A(z) = z(|z|(|z| - R))^{-1}a(z)$, $B(z) = |z|^{-m}b(z)$, $a, b \in C(\bar{G})$ и правой частью $f \in L^p(G)$, показатели $0 < m < 1$ и $p > 2$.

Для получения общего решения уравнения и в его описании существенную роль играет интегральный оператор И.Н. Векуа[1]

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{f(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z},$$

с плотностью $f \in L^p(G)$, $p > 2$.

Лемма 1. *В предположении*

$$A_0(z) = z(a(z) - a(R))(|z|(|z| - R))^{-1} \in L^p(G)$$

сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon A)(z), \quad z \neq L,$$

существует и определяет функцию, которая представима в виде

$$\Omega(z) = 2a(R) \ln ||z| - R| + h(z),$$

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{a(R)}{\pi i} \int_{\partial G} \frac{\ln |\rho - R| d\zeta}{\zeta - z} \in H(\bar{G}).$$

На основы этой леммы построена общего решения уравнения

$$u_{\bar{z}} - Au = f, \quad (2)$$

Случай, когда коэффициенты $a(z) \neq 0, b(z) \neq 0$ для любого $z \in \overline{G}$ используя общего решения уравнения (2) приходим к следующему интегральному уравнению

$$V + T(B\overline{V}) = \phi + F,$$

где $V = e^{-\Omega}u$, $B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\text{Im}\Omega}$, $F = T(e^{-\Omega}f)$, значение Ω указан в леммы 1.

В случае отсутствия сингулярности коэффициентов подобного уравнение возникало у И.Н. Векуа[1], где для его обращения он предложил метод последовательных приближений. Однако этот метод применим лишь в предположении, что коэффициент b по модулю достаточно мал. В общем случае необходимо построить в явном виде резольвенту этого уравнения, что и является предметом рассмотрения в настоящей работы.

[1] И.Н.Векуа,Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.

Оценки оператора обобщённого дифференцирования

Рахимова А.И.

БашГУ, г.Уфа, Россия

Рассмотрим обобщенное пространство Фока, оно имеет вид:

$$F_\beta = \{f(z) \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{\pi^{\frac{2}{\beta}}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu < \infty\}, \beta > 0,$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости.

Введем обозначение $k = \frac{2}{\beta}$. Возьмем функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{C})$. Рассматриваем оператор $S = z \cdot$ умножения на переменную z , действующий по правилу $Sf : f(z) \longrightarrow z \cdot f(z)$, $f(z) \in F_\beta$. [1]

Оператор, сопряженный к нему, имеет вид:

$$S^* = c_1 \frac{d}{dz} + c_2 z \frac{d^2}{dz^2} + \dots + c_{n-1} z^{n-2} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + c_n z^{n-1} \frac{d^n}{dz^n} + \dots,$$

$n \leq n_0$, где порядок оператора n_0 конечный или бесконечный, его коэффициенты такие, что

$$\sum_{s=1}^n \frac{c_s n!}{(n-s)!} = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta}n)}, n = \overline{(1; n_0)}.$$

Если k — целое число, то дифференциальный оператор S^* конечный порядка k , если k — нецелое число, то дифференциальный оператор S^* бесконечный.

Теорема 1. Коэффициенты дифференциального оператора

$$S^* = c_1 \frac{d}{dz} + c_2 z \frac{d^2}{dz^2} + \dots + c_{n-1} z^{n-2} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + c_n z^{n-1} \frac{d^n}{dz^n} + \dots$$

вычисляются по формуле

$$c_n = \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{n-s} \Gamma(k(s+1))}{s!(n-s)! \Gamma(ks)}, n = \overline{(1; n_0)},$$

где n_0 — порядок дифференциального оператора. Для коэффициентов c_n , $n = \overline{(1; n_0)}$, выполняется асимптотика $c_n \leq \frac{k^k n^{k-n+\frac{1}{2}} e^n (1+\frac{1}{n})^{k-\frac{1}{2}}}{\text{sqrt}(2\pi)}$ и верно равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$.

Теорема 2. Для оператора

$$D_k = c_1 \frac{d}{dz} + c_2 z \frac{d^2}{dz^2} + \dots + c_{k-1} z^{k-2} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} + c_k z^{k-1} \frac{d^k}{dz^k},$$

который n раз действует на аналитическую в некоторой области функцию $f(z)$, верна оценка:

$$\left| \frac{D_k^n f(z)}{c_1^n \dots c_k^n (k(n+1))!} \right| \leq \frac{C}{r^n},$$

где r — радиус области, C — некоторая константа.

- [1] Дильмухаметова А. М., Муллабаева А. У., Напалков В. В. Обобщение пространства Фока // Уфимский математический журнал. Уфа. 2010. Т. 2, №1. С. 52–58.

Сильно вырожденные разрешающие семейства дробных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах

Романова Е.А.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ — банаховы пространства, замкнутые операторы $L, M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ имеют плотные области определения $D_L, D_M \subset \mathfrak{U}$. Множество точек $\mu \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mu L - M : D_L \cap D_M \rightarrow \mathfrak{V}$ инъективен, при этом операторы $(\mu L - M)^{-1}L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $L(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$ (линейны и непрерывны), назовем L -резольвентным множеством $\rho^L(M)$ оператора M .

При $p \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha > 0$ будем говорить, что пара операторов (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}^\alpha(\theta, a, p)$, если

(i) существуют такие константы $a_0 \geq 0$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, что для всех $\lambda \in S_{a_0, \theta_0}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при всех $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K(a, \theta) > 0$, что при любых $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a, \theta}^L(M)$

$$\begin{aligned} \max \left\{ \left\| \prod_{k=0}^p (\mu_k^\alpha L - M)^{-1} L \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \left\| \prod_{k=0}^p L (\mu_k^\alpha L - M)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \right\} \\ \leq K \prod_{k=0}^p |\mu_k^{\alpha-1} (\mu_k - a)|^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто. Решением уравнения

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

называется такая функция $u \in C([0, +\infty); D_M) \cap C([0, +\infty); D_L)$, для которой существует производная $D_t^\alpha Lu \in C([0, +\infty); \mathfrak{V})$ и при всех $t \geq 0$ выполняется равенство (1).

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \quad u^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (2)$$

для уравнения (1). Замкнутое множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется фазовым пространством уравнения (1), если

(i) для каждого решения $u = u(t)$ уравнения (1) $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \geq 0$;

(ii) существует плотный в $\mathfrak{P}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}$ такой, что при любом $u_0 \in \overset{\circ}{\mathfrak{P}}$ существует единственное решение задачи (1), (2).

Семейство операторов $\{W(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in [0, +\infty)\}$ называется разрешающим семейством операторов для уравнения (1), если существует фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения и при всех u_0 из некоторого плотного в $\mathfrak{P}$ линеала $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}$ единственное решение задачи (1), (2) имеет вид $u(t) = W(t)u_0$ при $t \geq 0$.

Обозначим $\ker(R_\mu^L(M))^{p+1} = \mathfrak{U}^0$, $\overline{\text{im}}(R_\mu^L(M))^{p+1} = \mathfrak{U}^1$, $\ker(L_\mu^L(M))^{p+1} = \mathfrak{V}^0$, $\overline{\text{im}}(L_\mu^L(M))^{p+1} = \mathfrak{V}^1$, $L_k = L|_{D_L \cap \mathfrak{U}^k}$, $M_k = M|_{D_M \cap \mathfrak{U}^k}$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$, $L_k : D_L \cap \mathfrak{U}^k \rightarrow \mathfrak{V}^k$, $M_k : D_M \cap \mathfrak{U}^k \rightarrow \mathfrak{V}^k$, $k = 0, 1$, причем операторы L_1 и M_0 обратимы. Если к тому же $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1)$, $\Gamma = \partial S_{a_0, \theta_0}^L(M) + 1$, то при $p = 0$ или $\alpha \in \mathbb{N}$ фазовым пространством уравнения (1) является $\mathfrak{U}^1$, а семейство операторов

$$\left\{ U_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1} (\mu^\alpha L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t > 0 \right\}$$

аналитически продолжимо в сектор $\Sigma_{\theta_0} \equiv \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta_0 - \pi/2, \tau \neq 0\}$, сильно непрерывно продолжимо в точку $t = 0$ и является разрешающим семейством операторов для уравнения (1).

При произвольном $\alpha > 0$ и $p = 0$ этот результат получен в работе [1]. При $p \in \mathbb{N}$ и дробном $\alpha > 0$ теорема 1 не верна.

- [1] Федоров В.Е., Романова Е.А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т.16, № 2. С.93-107.

**Начально-граничная задача для неоднородного
вырождающегося уравнения смешанного
параболо-гиперболического типа**

Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.

Институт прикладных исследований РБ, г. Стерлитамак, Россия

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L_{n,m}u = F(x, t), \quad (1)$$

здесь

$$L_{n,m}u = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u, & t < 0, \end{cases} \quad F(x, t) = \begin{cases} F_1(x, t), & t > 0, \\ F_2(x, t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, где $n \geq 0$, $m \geq 0$, $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, $F_i(x, t)$, $i = 1, 2$, – известные функции и поставим следующую задачу.

Задача. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \quad (2)$$

$$L_{n,m}u(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in D_- \cup D_+; \quad (3)$$

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(l, t) = h_2(t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

где $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$, $\varphi(x)$, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $h_1(-\alpha) = \varphi(0)$, $h_2(-\alpha) = \varphi(l)$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Отметим, что начально-граничная задача (2) – (5) для однородного уравнения (1), т.е. когда $F_i(x, t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, была изучена в работах [1 – 3] в прямоугольной области D при $h_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $l = 1$, $b \geq 0$, $n \geq 0$ и $m \geq 0$. В работе [4] для однородного уравнения (1) при $n > 0$ и $m > 0$ изучена нелокальная задача в которой вместо условия (5) задано нелокальное условие $u(x, -\alpha) - u(x, \beta) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

В данной работе при всех $n \geq 0$, $m \geq 0$ и $b \geq 0$ установлен критерий единственности задачи. Решение задачи построено в явной форме

в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости построенных рядов возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этих рядов. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование регулярного решения, т.е. в классе функций (2) и (3).

- [1] Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 9. С. 1175 - 1181.
- [2] Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273 – 279.
- [3] Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для парабола-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 1. С. 1–8.
- [4] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 356 – 365.

Первая граничная задача для уравнения смешанного эллипτικο–гиперболического типа с нагруженными слагаемыми

Сабитова Ю.К.

Стерлитамакский филиал БашГУ, г.Стерлитамак, Россия

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - b^2 u(x, y) + C_1(y)u(x, 0) = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - b^2 u(x, y) + C_2(y)u(x, 0) = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta, l, b \geq 0$ – заданные положительные действительные числа, $C_1(y), C_2(y)$ – заданные непрерывные функции.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В работах [1], [2] впервые для нагруженного парабологиперболического уравнения в прямоугольной области изучена начально-граничная задача методом спектральных разложений, где установлен критерий единственности решения и доказана теорема существования этой задачи. Решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

Задача (2) – (5) при $l = 1$ изучена в работе [3], здесь при всех $b \geq 0$ установлены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи. Само решение построено в виде суммы ряда Фурье. При доказательстве равномерной сходимости ряда из-за проблемы малых знаменателей накладываются условия малости норм коэффициентов $C_1(y)$ и $C_2(y)$, входящих в уравнение (1) в составе нагруженных слагаемых.

В данной работе, на основе [3] – [5] установлен критерий единственности решения задачи (2) – (5) для нагруженного уравнения (1) в прямоугольной области D . Решение построено в виде суммы ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей относительно сторон α/l прямоугольника D_- . В связи с чем установлены оценки об отделенности от малого знаменателя с соответствующей асимптотикой для рациональных и иррациональных значений числа α/l , которые позволили обосновать сходимость построенного ряда

в классе регулярных решений (2) и (3). При этом условие малости норм $||C_1|| = \max_{0 \leq y \leq \beta} |C_1(y)|$ и $||C_2|| = \max_{-\alpha \leq y \leq 0} |C_2(y)|$ снято.

- [1] *К. Б. Сабитов.* Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа // Докл. АМАН. Нальчик. 2009. Т.11. № 1. С. 66 – 73.
- [2] *К. Б. Сабитов.* Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Изв. вузов. Математика. 2015. № 6. С. 31 – 42.
- [3] *К.Б. Сабитов, Е.П. Мелишева.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Изв.вузов.Матем. 2013. № 7. С. 62 – 76.
- [4] *Ю. К. Сабитова.* Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 3. С. 393 – 406.
- [5] *К. Б. Сабитов.* Задача Дирихле для дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков // Мат. заметки. Т. 97 (2), 262 – 276 (2015).

Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов

Сакбаев В.Ж.

Московский физико-технический институт, г.Москва, Россия

Изучаются случайные блуждания в сепарабельном гильбертовом пространстве H и представления с их помощью решений задач Коши для дифференциальных уравнений, начальными условиями которых являются числовые функции на гильбертовом пространстве H . Для случайных блужданий в конечномерном пространстве H приведены примеры таких представлений для решений уравнения теплопроводности,

уравнения дробной диффузии, уравнения Шредингера с различными гамильтонианами (см. [1]). Для реализации таких представлений в бесконечномерном гильбертовом пространстве исследуются меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов. Как известно ([2]), не существует ненулевой счетно-аддитивной σ -конечной меры на σ -кольце борелевских подмножеств бесконечномерного гильбертова пространства, инвариантной относительно сдвига. Изучается конечно-аддитивный аналог меры Лебега – инвариантная относительно сдвигов и поворотов в бесконечномерном гильбертовом пространстве H неотрицательная конечно аддитивная мера λ , определенная на минимальном кольце подмножеств пространства H , содержащем все измеримые бесконечномерные прямоугольники.

Брусом в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H назовем такое множество $\Pi \subset H$, что найдется какой-либо ортонормированный базис $\{e_j\}$ в пространстве H , в котором координаты точек множества Π определяются условиями

$$\Pi = \{x \in H : x_j \in [a_j, b_j) \forall j \in \mathbf{N}\}, \quad -\infty < a_j < b_j < +\infty, j \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Непустой брус (1) называется измеримым, если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{0, \ln(b_j - a_j)\}$$

сходится. Обозначим через $\mathcal{P}$ совокупность измеримых брусков в пространстве H и определим функцию множества $\lambda_0 : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty)$ следующим правилом: $\lambda_0(\emptyset) = 0$ и

$$\mu(\Pi_{a,b}) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)\right) \quad \forall \Pi_{a,b} \in \mathcal{P}, \Pi_{a,b} \neq \emptyset.$$

Теорема 1. Функция множества λ_0 аддитивна на классе измеримых брусков $\mathcal{P}$ и допускает единственное продолжение до меры λ на минимальном кольце $\mathcal{R}$, содержащем класс $\mathcal{P}$. При этом мера λ является инвариантной относительно сдвигов и поворотов в пространстве H .

Установлено, что мера λ не является счетно-аддитивной и σ -конечной, что ее значение на любом компакте из H равно нулю, что шары малого радиуса имеют нулевую меру, а шары большого радиуса неизмеримы.

Определено гильбертово пространство $\mathcal{H}$ классов эквивалентности комплекснозначных функций (называемых также функциями) на пространстве H , квадратично интегрируемых по инвариантной мере λ . Установлено, что пространство $\mathcal{H}$ несепарабельно.

С помощью усреднения операторов сдвига в пространстве $\mathcal{H}$ на случайные векторы пространства H , распределение которых задается однопараметрической полугруппой (относительно сверточного умножения) гауссовских мер на пространстве H , определяется однопараметрическая полугруппа сжимающих самосопряженных преобразований пространства $\mathcal{H}$, генератор которой назван оператором диффузии. Получено представление формулами Фейнмана решений задачи Коши для уравнения Шредингера, гамильтонианом которого является оператор диффузии.

- [1] Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами Шредингера. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 57.
- [2] Вершик А.М. Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве? Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 259. С. 256-281.

О бризерных решениях сферически симметричного уравнения Клейна-Гордона

Салимов Р.К., Екомасов Е.Г.

БашГУ, г.Уфа, Россия

В настоящее время весьма актуальными являются исследования нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих решения в виде уединенных волн, т.к. они часто используются во многих областях физики, например теории поля, физике конденсированных сред и гидродинамике [1,2]. Хотя наиболее изученными являются $(1+1)$ и $(2+1)$ модели, наибольший интерес с точки зрения нахождения устойчивых решений, интерпретируемых как классические модели частиц конечного размера,

являются (3+1) модели. Так было широко исследовано численно поведение решений уравнений синус-Гордона [3], ϕ^4 [4], НУШ [5], для пространственно двумерного и трехмерного случаев. Во всех этих случаях уравнения имеют линейный предел и главным членом при стремлении амплитуды решения к нулю остается линейный - это приводит к возбуждению фононного спектра линейных волн и расплыванию решений. В то же время для уравнения Клейна-Гордона, содержащего пространственную неоднородность

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = F(u)(1 + g(r)). \quad (1)$$

локализованные решения имеются в линейном случае. Например для уравнения

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = u(1 + g(r)). \quad (2)$$

где $g(r) = k$ при $r < W$ и $g(r) = 1$ при $r \geq W$ Поэтому актуальным является вопрос о существовании таких решений при переходе к нелинейному случаю, например вида

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = \sin(u)(1 + g(r)). \quad (3)$$

При численном исследовании решения уравнения (3) с начальными условиями в виде решения уравнения (2) для $K = -1.45376$ и $W = 2$ было получено долгоживущее локализованное осциллирующее решение, не имеющее тенденций к пространственному расплыванию и не содержащее расходящихся волн. Рассмотрение подобных решений может быть актуально при изучении локализованных неоднородностей в магнитных материалах, описываемых уравнением синус-Гордона.

- [1] Scott A. (ed.) *Encyclopedia of Nonlinear Science* . - New York: Routledge, 2004.
- [2] Knight C.J.K, Derks G., Doelman A., Susanto H. *Stability of stationary fronts in a non-linear wave equation with spatial inhomogeneity* // Journal of Differential Equations. 2013.254, pp. 408-468.

- [3] Saadatmand D., Javidan K. *Collective-Coordinate Analysis of Inhomogeneous Nonlinear Klein-Gordon Field* // Theory Brazilian Journal of Physics. 2013. vol 43, № 1-2. pp. 48-56.
- [4] Gonzalez J.A., Bellorin A., Guerrero L.E., *Kink-soliton explosions in generalized. Klein-Gordon equations* Chaos // Solitons Fractals. 2007. 33 (1), 3. pp 143-155..
- [5] B.A. Malomed B.A., *Discrete solitons and vortices on two-dimensional lattices of PT-symmetric couplers* // J. Opt. Soc. Am. B. 2014. 31, 10, pp 2060.

Пространство $L_2(G)$ и собственные функции операторов: ротор и градиент дивергенции

Сакс Р.С.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть G – произвольная ограниченная область с гладкой границей Γ , $\mathbf{n}$ – ее внешняя нормаль. $L_2(G)$ – пространство вектор-функций интегрируемых с квадратом модуля.

Оказывается, что в пространстве $L_2(G)$ имеются ортогональные подпространства $V^0(G)$ и $\mathcal{A}_\gamma(G)$, в которых операторы ротор и градиент дивергенции имеют самосопряженные расширения S и $\mathcal{N}_d$,

$$\mathcal{A}_\gamma(G) = \{\nabla h, h \in H^1(G) : \mathbf{n} \cdot \nabla h|_\Gamma = 0\},$$

$$V^0(G) = \{\mathbf{u} \in L_2 \perp \mathcal{B}_H : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\},$$

$$\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in L_2(G) : \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\},$$

где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{n}(x)$ и $\mathbf{u}(x)$ в точке $x \in \Gamma$ (см. [1, 2, 3]).

Обратные операторы вполне непрерывны. Следовательно, спектры операторов S и $\mathcal{N}_d$ точечные и каждый из них имеет полную систему собственных функций в $V^0(G)$ и $\mathcal{A}_\gamma(G)$, соответственно.

Пространство $\mathcal{B}_H$ – конечномерно и его размерность есть род границы Γ , он равен нулю для сферы и единице – для тора. Таким образом, пространство

$\mathbf{L}_2(G)$ имеет базис, состоящий из собственных функций ротора и градиента дивергенции.

В математической физике особо значимы области: тороидальная (токамак) и шар.

В шаре B радиуса R собственные вектор-функции $\mathbf{u}_\kappa^\pm$ ротора (отвечающие с.з. $\pm\rho_{n,m}/R$) и собственные функции $\mathbf{q}_\kappa$ оператора градиент дивергенции (отвечающие с.з. $(\alpha_{n,m}/R)^2$) выражаются явными формулами. Числа $\pm\rho_{n,m}$ и $\alpha_{n,m}$ - нули функций ψ_n и их производных ψ'_n , где

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad \psi_n(\rho_{m,n}) = 0,$$

$$\psi'_n(\alpha_{n,m}) = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \geq 0, \quad |k| \leq n, \quad \kappa = (n, m, k).$$

Эти формулы приведены автором в работе [4]. Используя их профессор Г.Г.Исламов рассчитал поля $\mathbf{u}_\kappa^+$, для $\kappa = (1, 1, 0), (1, 1, -1), (1, 1, 1)$, соответствующие (при $R = 1$) минимальному собственному значению $\rho_{1,1} \simeq 4,49341$ ротора и их линии тока. Траектории этих линий похожи на нити, наматываемые на тороидальную катушку.

Доказано, что принадлежность вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(B)$ подпространству $\mathbf{V}_\mathcal{R}^s(B) \subset \mathbf{V}^0(B)$ необходима и достаточна для сходимости ее ряда Фурье (по собственным функциям ротора) в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^s(B)$.

В подпространствах $\mathbf{L}_2(G)$ для любой G исследована разрешимость краевой задачи для системы $\mathbf{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}$ при $\lambda \neq 0$ в G с граничным условием $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g$.

В шаре B при любых λ исследована разрешимость краевой задачи: $\mathbf{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = 0$.

Имеются приложения [1, 2, 3, 4].

- [1] Сакс Р.С. Ортогональные подпространства пространства $\mathbf{L}_2(G)$ и самосопряженные расширения операторов ротора и градиента дивергенции. Доклады Акад. Наук. 2015. Т. 462, № 3, С. 278-282.
- [2] Сакс Р.С. Оператор градиент дивергенции в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ Доклады Акад. Наук. 2015. Т. 462, № 5, С. 61-65.

- [3] Сакс Р.С. *Оператор ротор в пространстве $L_2(\mathbf{G})$* Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 1, С. 87-103.
- [4] Сакс Р.С. *Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса* Уфимский математический журнал 2013 Т. 5 №2 63-81.

Квантовое исчисление и квазисимметричные гомеоморфизмы **Сергеев А.Г.**

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия

Одной из главных задач некоммутативной геометрии является перевод основных понятий анализа, геометрии и топологии на язык банаховых алгебр.

В докладе будет приведен ряд примеров такого перевода для классических пространств теории функций, таких как соболевское пространство полудифференцируемых функций, пространство ВМО и пространство квазисимметричных гомеоморфизмов. Возникающее при этом операторное исчисление принято называть, следуя Конну, квантовым.

Асимптотика спектра сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в вырожденном случае

Сидельникова Н.А.

Башкирский государственный университет, artsid2000@gmail.com

В данной работе рассматривается дифференциальный оператор L_0 IV порядка, порождённый в пространстве $L_2[1; \infty]$ дифференциальным выражением четвертого порядка следующего вида

$$ly = y^{IV} - 2(p(x)y')' + q(x)y, 1 \leq x \leq +\infty,$$

где $p(x)$, $q(x)$ - вещественные функции, λ - комплексный параметр.

В настоящей работе мы получаем асимптотические формулы для функции $N(\lambda)$ - плотности собственных значений расширения оператора L_0 при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$N_+(\lambda) \propto \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^1 \left(\sqrt{\sqrt{p^2 + \lambda - q} - p} - \sqrt{\sqrt{p^2 - q} - p} \right) dx,$$

$$N_-(\lambda) \propto \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda}^0 \left(\int_{p^2 - \sigma - q > 0} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{p^2 + \sigma - q} - p\sqrt{p^2 + \sigma - q}}} \right) d\sigma.$$

На функции $p(x)$ и $q(x)$ наложены следующие условия:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |p(x)| = +\infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |q(x)| = +\infty$;

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| = 0$;

4) при $x \rightarrow +\infty$

$$|p^{(k)}(x)| = a_k |p(x)|^{1-\frac{k}{\alpha}} (1 + o(1));$$

$$|q^{(k)}(x)| = b_k |p(x)|^{1-\frac{k}{\beta}} (1 + o(1)),$$

где $k = 1, 2$;

5) $|q(x)| = C |p|^{\frac{\beta}{\alpha}} (1 + o(1)), x \rightarrow +\infty$;

6) $p(1) \neq 0$,

где $\alpha, \beta, C, a_k, b_k$ - положительные постоянные.

- [1] Султанаев Я.Т. "Асимптотика спектра обыкновенных дифференциальных операторов в вырожденном случае. Дифференциальные уравнения. 1992, т. 18, №10, с. 1694-1702.
- [2] Султанаев Я.Т. "Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений в вырожденном случае. Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1988. Вып. 13, с. 36-55.
- [3] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука. 1983.
- [4] 4) Сидельникова Н.А. Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора, порожденного выражением $y^{IV} - 2a(x^\alpha y') + bx'y$. Мат. Заметки. 2003, т. 73; 1. с. 148-151.

Решение галилеево-инвариантной подмодели ранга два

Сираева Д.Т.

Уфимский государственный авиационный технический университет,
г. Уфа, Россия

Уравнения газовой динамики

$$\begin{aligned}\rho_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \rho^{-1} \nabla p &= 0, \\ p_t + (\vec{u} \cdot \nabla)p + A(p, \rho) \operatorname{div} \vec{u} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\vec{u}$ – скорость, ρ – плотность, p – давление, $A = \rho f_\rho$, $p = f(\rho, S)$ – уравнение состояния, наиболее глубоко изучены методами группового анализа [1]. В данной работе рассматриваются уравнения газовой динамики (1) с уравнением состояния $p = f(\rho) + g(S)$, полученного при групповой классификации [1]. Уравнения газовой динамики при данном уравнении состояния допускают 12-и мерную алгебру Ли, для которой оптимальная система неподобных подалгебр построена [2].

Двумерная подалгебра с номером 2.36 [2] имеет один базисный оператор в виде суммы переноса по аппликату и галилеевого переноса по абсциссе. Другой базисный оператор есть сумма переносов по давлению и по абсциссе.

Инвариантная подмодель в лагранжевых координатах линеаризуется. Тип системы не всегда гиперболический.

Критерий того, что система не является системой типа Коши, задается одним равенством. Данное равенство разбивается на два случая, при которых получены решения. Точные решения, зависящие от четырех существенных постоянных, при специальном выборе констант описывают до и сверхзвуковые пространственные движения частиц со схлопыванием дозвуковой области. Показано, что величина движущегося объема из одних и тех же частиц не изменяется со временем. Построен звуковой коноид, задающий распространение слабого разрыва. Другое решение представляется в виде ряда по малому параметру, получено первое приближение решения и рекуррентные соотношения.

- [1] *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика. Прикладная математика и механика, Москва: РАН, Т. 58, Вып. 4, 1994. С. 30-55.
- [2] *Сираева Д.Т.* Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов. Уфимский математический журнал. Т. 6, № 1 (2014) С. 94-107.

Формальные интегралы и операторы Нётер гиперболических систем уравнений, допускающих богатый набор симметрий

Старцев С.Я.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений в частных производных

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1)$$

где u и F – n -мерные векторы. Один из классов интегрируемых систем (1) образован системами, допускающими n функционально независимых x - и y -интегралов (то есть функций вида $w(x, y, u, u_1, \dots, u_\ell)$, $u_i := \partial^i u / \partial x^i$ и $\bar{w}(x, y, u, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r)$, $\bar{u}_i := \partial^i u / \partial y^i$, таких что $D_y(w) = 0$ и $D_x(\bar{w}) = 0$; D_y и D_x здесь обозначают полные производные по y и x в силу системы (1)). В работе [1] было доказано, что такие системы допускают операторы

$$S = \sum_{j=0}^k \alpha_j[u] D_x^j, \det(\alpha_k) \neq 0, \quad \bar{S} = \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j[u] D_y^j, \det(\bar{\alpha}_m) \neq 0, \quad (2)$$

такие что $u_t = S(f(x))$ и $u_t = \bar{S}(g(y))$ являются симметриями системы для любых n -мерных векторов $f(x)$ и $g(y)$. Через $\alpha_j[u]$ и $\bar{\alpha}_j[u]$ здесь обозначены матрицы размера $n \times n$, зависящие от конечного числа переменных $x, y, u, u_i, \bar{u}_i$.

Из конкретных примеров видно, что вероятно верно и обратное утверждение, а обобщение рассуждений из [1] почти доказывает это. А именно, верно следующее утверждение: система (1) допускает операторы S

и $\bar{S}$ тогда и только тогда, когда существуют операторы

$$W = \sum_{j=0}^p \beta_j[u] D_x^j, \det(\beta_p) \neq 0, \quad \bar{W} = \sum_{j=0}^q \bar{\beta}_j[u] D_y^j, \det(\bar{\beta}_q) \neq 0, \quad (3)$$

такие что $W(h) \in \ker D_y$ и $\bar{W}(h) \in \ker D_x$ для любой симметрии $u_t = h[u]$ системы (1). Через $h[u]$ и $\beta_j[u]$, $\bar{\beta}_j[u]$ здесь соответственно обозначены n -мерный вектор и $n \times n$ матрицы, зависящие от переменных $x, y, u, u_i, \bar{u}_i$. Поскольку линейаризации интегралов также отображают симметрии в $\ker D_y$ и $\ker D_x$, естественно назвать операторы (3) формальными интегралами.

Помимо этого, операторы (2) позволяют построить два дифференциальных оператора, переводящих косимметрии (и, в частности, характеристики законов сохранения) в симметрии, а формальные интегралы (3) порождают два дифференциальных оператора, отображающих косимметрии обратно в симметрии. То есть, если пользоваться терминологией работы [2], из (2) и 3) следует наличие у системы (1) прямых и обратных операторов Нётер соответственно. Более подробное изложение вышеприведенных результатов дано в [3].

- [1] В.В. Соколов, С.Я. Старцев. Симметрии нелинейных гиперболических систем типа цепочек Тоды, 2008, ТМФ, Т. 155, № 2, С. 344-355
- [2] B. Fuchssteiner and A.S. Fokas. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries, 1981 Physica D: Nonlinear Phenomena, 4(1), 47-66
- [3] S. Ya. Startsev. Formal integrals and Noether operators of nonlinear hyperbolic partial differential systems admitting a rich set of symmetries, arXiv:1511.09418 [nlin.SI]

Асимптотика решений дифференциальных уравнений с колеблющимися коэффициентами

Султанаев Я.Т., Назирова Э.А.

БГПУ им.Акмиллы, БашГУ, г.Уфа, Россия

Исследованию асимптотического поведения обыкновенных сингулярных дифференциальных уравнений посвящено значительное число работ (см.библиографию в [2]), однако в этих работах как правило исследовались уравнения, коэффициенты которых имели "правильный"рост на бесконечности. В докладе будут изложены новые методы исследования асимптотического поведения решений уравнений с колеблющимися коэффициентами, не удовлетворяющие условиям "правильного"роста. Приложение данного метода к изучению сингулярных уравнений 4-го порядка изложено в [1].

- [1] Н.Ф.Валеев., А.Ескермесулы., Я.Т.Султанаев. Индексы дефекта дифференциального оператора с быстроосциллирующими коэффициентами, 2016.т.100.вып.3.с128-132.
- [2] М. В. Федорюк, Асимптотические методы в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Матем. сб., 79(121):4(8) (1969), 477–516.

Стохастические возмущения устойчивых динамических систем

Султанов О.А.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия,
oasultanov@matem.anrb.ru

Исследуется влияние малых постоянно действующих случайных возмущений типа белый шум на динамическую систему с локально устойчивой неподвижной точкой. Возмущенная система записывается в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито, при этом возмущение не исчезает в неподвижной точке. В этом случае траектории

стохастической системы, стартующие вблизи устойчивой неподвижной точки, рано или поздно покидают окрестность равновесия с вероятностью единица. Устойчивость равновесия может сохраниться на конечном временном интервале, который зависит от интенсивности возмущения $0 < \mu \ll 1$. Ставится задача об оценке временного интервала устойчивости. Основным результатом является описание классов возмущений, при которых равновесие детерминированной системы будет устойчиво по вероятности при $0 < t < T_\mu$, где $T_\mu = \mathcal{O}(\mu^{-N})$ ($N \geq 2$), $T_\mu = \mathcal{O}(\exp \mu^{-2})$ и $T_\mu = \infty$.

Специальные свойства полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.

МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

НИЯУ МИФИ, г. Москва, Россия

Основные факты из теории классических полиномов Бернштейна представлены в [1]–[3]. Недавняя публикация [4] (см. также обзор [3]) посвящена изучению полиномов Бернштейна для важного примера симметричного модуля

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Полиномы Бернштейна для функции (1) определяются формулой

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Пример (1) выделяется естественной простотой и наглядностью, порождая, в тоже время, весьма нетривиальные свойства полиномов Бернштейна (2).

В докладе будут затронуты следующие темы.

- Ключевые формулы и соотношения, связанные с полиномами Бернштейна (2).
- Скорость приближения функции (1) полиномами (2) на основном отрезке $[0, 1]$.

- Характер сходимости полиномов Бернштейна (2) в комплексной плоскости.
- Распределение нулей полиномов Бернштейна (2) и их аттрактор, связанный с областью сходимости (совместные исследования с Д. Г. Цветкович).

Многие из обсуждаемых свойств сохраняются и в общем случае кусочно линейной порождающей функции с рациональными абсциссами точек излома.

- [1] Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. N.Y.: Chelsea Publ. Comp., 1986.
- [2] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л.: ЛГПИИ им. А. И. Герцена, 1990.
- [3] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Том 8. Часть 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.
- [4] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

Новые подходы к исследованию обратных и нелокальных задач для эволюционных уравнений

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Эйдельман Ю. С.

МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

НИЯУ МИФИ, г. Москва, Россия

Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel

В банаховом пространстве E рассматриваем абстрактные дифференциальные уравнения на конечном отрезке $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Оператор A предполагаем линейным и замкнутым в E с областью определения $D(A) \subset E$. Типичной, как известно, является задача Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

с заданным элементом $u_0 \in D(A)$ и неизвестной функцией $u: [0, T] \rightarrow E$. Наш основной интерес связан с другими, неклассическими, *обратными* и *нелокальными* задачами.

Модельная обратная задача имеет вид

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g, \quad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_1 \quad (2)$$

с заданными элементами $u_0, u_1 \in D(A)$, неизвестной функцией $u: [0, T] \rightarrow E$ и неизвестным элементом $g \in E$.

Модельная нелокальная задача имеет вид

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = u_1 \quad (3)$$

с заданным элементом $u_1 \in D(A)$ и неизвестной функцией $u: [0, T] \rightarrow E$.

Возможны естественные обобщения указанных модельных задач. Как установлено в [1]–[3], вопрос единственности решения для подобных задач допускает полное исследование без всяких предположений о задаче Коши (1). Совсем недавно было выяснено, что схожая автономия проявляется и в вопросах разрешимости: во многих ситуациях удается решать обратные и нелокальные задачи, не предполагая заранее корректности задачи Коши. Особенно удобен случай гильбертова пространства, когда удается показать эффективную разрешимость задач (2) и (3) с произвольным самосопряженным оператором A (не обязательно полуограниченным). В общем банаховом случае также обнаружены удобные разрешающие формулы, использующие классические полиномы Бернулли.

- [1] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1132–1133.
- [2] Тихонов И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Известия РАН, сер. матем. 2003. Т. 67, № 2. С. 133–166.
- [3] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с

Неравенство типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для обобщенных моментов

Тимергалиев Б.С.

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, г.Казань,
Россия

Классическое неравенство Брунна-Минковского позволяет сравнить площади и объемы областей, которое имеет вид:

$$|\Omega_0 + \Omega_1|^{1/n} \geq |\Omega_0|^{1/n} + |\Omega_1|^{1/n},$$

где $|\Omega|$ — мера множества Ω , Ω_0, Ω_1 — выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0 + \Omega_1 := \{z_0 + z_1 \in \mathbb{R}^n : z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$ — векторная сумма.

Наш интерес к этой тематике связан с результатами Г. Кэди [1], который доказал неравенство типа Брунна-Минковского для функционала, введенного Ф.Г. Авхадиевым [2]. Развитие результата Г. Кэди, а также неравенства для новых типов функционалов были получены в работах [3],[4]. Целью данной работы является обобщение результатов Х. Хадвигера [5], доказавшего неравенство типа Брунна-Минковского для двух моментов выпуклой области.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Определим функционал

$$I(k, \Omega) = \int_{\Omega} (\alpha_1 |x_1 - s_1|^k + \dots + \alpha_n |x_n - s_n|^k)^m dx,$$

где $s_1, s_2, \dots, s_n$ — координаты точки минимума функции

$$I(y) = \int_{\Omega} (\alpha_1 |x_1 - y_1|^k + \dots + \alpha_n |x_n - y_n|^k)^m dx,$$

переменных $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; $x_1, x_2, \dots, x_n$ — декартовы координаты точки $x \in \Omega$; $k \in (0, 1]$ при $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ и $k \in (0, +\infty)$ при $m = 1$; $\alpha_j (j = \overline{1, n}) \in (0, +\infty)$ — произвольные действительные числа. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда имеет место неравенство

$$I(k; m; \Omega_t)^{1/(km+n)} \geq (1-t)I(k; m; \Omega_0)^{1/(km+n)} + tI(k; m; \Omega_1)^{1/(km+n)},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (0, 1]$ при $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ и $k \in (0, +\infty)$ при $m = 1$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00351.

- [1] Keady G. On a Brunn-Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2007. – V. 8. – P. 1–10.
- [2] Авхадиев Ф. Г. Решение обобщенной задачи Сен-Венана // Матем. сб. – 1998. – № 12. – С. 3–12.
- [3] Авхадиев Ф. Г., Тимергалиев Б. С. Неравенства типа Брунна-Минковского для конформных и евклидовых моментов областей // Изв. вуз. Матем. – 2014. – № 1. – С. 90–106.
- [4] Тимергалиев Б. С. Неравенства типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для степенных моментов // Уч. зап. Каз. Ун. – 2016. – № 12. – С. 3–12.
- [5] Hadwiger H. Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente // Comment Math. Helv. – 1956. – V. 30. – P. 285–296.

Производство энтропии в марковских открытых квантовых системах

Трушечкин А.С.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г.Москва, Россия

Уравнение Линдблада, описывающее динамику открытой квантовой системы, которой соответствует некоторое (конечномерное) гильбертово

пространство $\mathcal{H}_S$, имеет вид [1]

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[H(\lambda_t), \rho_t] + \sum_{k=1}^K \mathcal{D}[L_k(\lambda_t)]\rho_t \equiv \mathcal{L}(\lambda_t)\rho_t, \quad (1)$$

где ρ_t — состояние системы в момент времени t (оператор плотности, т.е. положительный оператор в $\mathcal{H}_S$ с единичным следом), λ_t — зависящие от времени внешние параметры, $H(\lambda_t)$ — самосопряжённый оператор на $\mathcal{H}_S$ (гамильтониан), $L_k(\lambda_t)$ — линейные операторы на $\mathcal{H}_S$, $\mathcal{D}[c]\rho = c\rho c^\dagger - \frac{1}{2}\{\rho, c^\dagger c\}$, $[A, B] = AB - BA$, $\{A, B\} = AB + BA$. Уравнение Линдблада является наиболее общим уравнением динамики открытой квантовой системы в том случае, когда динамика — марковская (т.е. знание состояния ρ_t квантовой системы в текущий момент времени позволяет предсказать дальнейшую эволюцию состояния).

Рассматривается вопрос о физически оправданном определении производства энтропии в единицу времени $\sigma(t)$ для квантовой системы, подчиняющейся уравнению (1). Обычно оно определяется исходя из уравнения баланса $\sigma(t) = \frac{d}{dt}S(\rho_t) + J(t)$, где $S(\rho) = -\text{Tr}\rho \ln \rho$ — энтропия фон Неймана, а $J(t)$ — поток энтропии из системы в окружение. Сложность состоит в том, что в общем случае величина $J(t)$ зависит от резервуара и от того, как именно резервуар связан с системой, что не определяется однозначно уравнением Линдблада. Поэтому уместно поставить следующей вопрос: какой минимальной информацией необходимо дополнить уравнение Линдблада, чтобы определить поток энтропии $J(t)$ и, следовательно, производство энтропии $\sigma(t)$.

Для решения этого вопроса мы обращаемся к концепции комплементарного квантового канала [2]. А именно, запишем эволюцию состояния системы в течение бесконечно малого промежутка времени dt как действие квантового канала Φ_{dt} (вполне положительного, сохраняющего след отображения квантовых состояний): $\rho_{t+dt} = \rho_t + \mathcal{L}(\lambda_t)\rho_t dt + o(dt) \equiv \Phi_{dt}(\rho_t)$. Известно, что квантовый канал может быть (неоднозначно) представлен в виде унитарной динамики в пространстве большей размерности $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, а именно, $\Phi_{dt}(\rho) = \text{Tr}_E U (\rho \otimes |0\rangle\langle 0|) U^\dagger$, где $|0\rangle \in \mathcal{H}_E$ и Tr_E — частичный след по пространству $\mathcal{H}_E$. Пространство $\mathcal{H}_E$ интерпретируется как эффективная часть окружения, с которой взаимодействует система в промежуток времени dt . Тогда комплементарный канал

может быть определен как $\tilde{\Phi}_{dt}(\rho) = \text{Tr}_S U (\rho \otimes |0\rangle\langle 0|) U^\dagger$ и, далее,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{dt}(\rho_t) = & \left(1 - \sum_{k=1}^K \text{Tr}[L_k^\dagger L_k \rho_t] dt\right) |0\rangle\langle 0| + \sum_{k=1}^K (\text{Tr}[L_k \rho_t] |k\rangle\langle 0| + \text{э.с.}) \sqrt{dt} \\ & + \sum_{j,k=1}^K \text{Tr}[L_k^\dagger L_j \rho_t] |j\rangle\langle k| dt. \end{aligned}$$

Если переходу $|0\rangle \rightarrow |k\rangle$ в окружении соответствует определенное приращение энтропии $\Delta s_k(\lambda_t)$, то можно определить поток и, следовательно, производство энтропии:

$$J(t) = \sum_k \text{Tr}[L_k^\dagger(\lambda_t) L_k(\lambda_t) \rho_t] \Delta s_k(\lambda_t), \quad \sigma(t) = -\text{Tr}[(\mathcal{L}(\lambda_t) \rho_t) \ln \rho_t] + J(t).$$

Неоднозначность определения комплементарного канала здесь проявляется в том, что и операторы H и L_k в уравнении (1) определяются неоднозначно: существуют преобразования этих операторов, переводящие уравнение (1) в себя, однако комплементарные каналы при этом будут разными. Таким образом, минимальную информацию, которой должно быть дополнено уравнение Линдблада для определения производства энтропии, составляют: а) специальный выбор операторов L_k , которые соответствуют переходам в окружении с определёнными приращениями энтропии, б) величины этих приращений $\Delta s_k(\lambda_t)$.

Можно доказать, что при определенных условиях производство энтропии неотрицательно.

- [1] Бройер Х.-П., Петруччоне Ф. Теория открытых квантовых систем. М.; Ижевск: РХД, 2010.
- [2] Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. М: МЦНМО, 2010.

Нелокальная задача Флорина с интегральным граничным условием

Тураев Р.Н.

Институт Математики при Национальном Университете Узбекистана;
rasul.turaev@mail.ru

Нелокальные краевые задачи часто возникают при построении математических моделей различных явлений физики, биологии и экологии. Неклассические задачи с нелокальными граничными условиями используются для математического моделирования процессов загрязнения в реках, морях, которое обусловлено сточными водами [1,2]. Задачи с интегральным граничным условием встречаются в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня [3]. Для параболических уравнений задачи с интегральным условием рассмотрены в работах [4,5], а задачи со свободной границей в работах [6,7].

В настоящей работе рассматривается задача со свободной границей типа Флорина с интегральным условием. Требуется найти пару функций $u(x, t), s(t)$, таких что $s(t)$ определена и непрерывно дифференцируема в промежутке $0 \leq t \leq T$, а функция $u(x, t)$ в области $D = \{(x, t) : 0 < x < s(t), 0 < t \leq T\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = a(t, x)u_{xx}, \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

начальным и граничным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s(0) = s_0 > 0, \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = f(t, u(0, t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\int_0^{s(t)} u(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u(s(t), t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где $\varphi(x), \psi(t)$ -заданные функции, $f(t, \xi)$ определена и непрерывна при $t \geq 0, |\xi| < \infty$, она ограничена вместе с производными в замкнутом множестве своих аргументов.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача сведена к задаче типа Стефана с нелокальным граничным условием. Затем получаются некоторые априорные оценки для решений $s(t)$, $u(x, t)$ и их производные. Далее на основе полученных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказываются единственность решения и глобальная разрешимость задачи.

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. М.: Наука. Физматлит. 1997. – 320 с.

2. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии*. Москва: Выс. шк., 1995, – 301 с.

3. Cannon J.R. *The solution of the heat equation subject to the specification of energy.* // Quart. appl. math. 1963. vol. XXI, No. 2, p. 155-160.

4. Н.И.Ионкин *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.* // Дифференциальные уравнения. 1977. том. XIII, No. 2. с. 294-304.

5. Н.И.Юрчук *Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений.* // Дифференциальные уравнения. 1986. том. 22, No. 12. с. 2117-2126.

6. Cannon J.R. *The one phase Stefan problem subject to the specification of energy.* // Jour. of Mat. Anal. and Appl. 1982. vol. 86I, p. 281-291.

7. E. Comparini and D.A. Tarzia *A Stefan problem for the heat equation subject to an integral condition.* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1985. vol. 73. p. 119-136.

Линейная дифференциальная игра преследования с управлением импульсного и с ограничением смешанного характеров

Тухтасинов М.

Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека, г.Ташкент,
Узбекистан

В работе [1] рассмотрены дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и управлением с геометрическими ограничениями. В данной работе рассмотрены конфликтно-игровые задачи с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом воз-

действия на объект осуществляются управлением импульсного характера и управлением с "линейным ограничением" интегрального характера [2]. Пользуясь методом разрешающих функции [1] приводится достаточное условие для завершения преследования из заданной начальной точки.

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Az + u - v, \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

где u, v — параметры управления преследующего и убегающего игроков, соответственно, A — постоянная матрица порядка $m \times m$. Терминальное множество представляется цилиндром вида $M^* = M^0 + M$, где M^0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, M — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без точек сгущения, т.е. любой отрезок $[a, b]$ содержит конечное число элементов этой последовательности.

Импульсное воздействие преследователя в моментах времени τ_i представляется с помощью функции Дирака $\delta(t - \tau_i)$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad t \geq 0$$

где $u_i \in U$. Убегающий применяет измеримое управление $v(t)$, $t \geq 0$, с условием:

$$\int_0^t \|v(\vartheta)\|^2 d\vartheta \leq \beta t + \sigma,$$

где β и σ — неотрицательные фиксированные числа.

Постановка задачи. Для данной начальной точки $z^0 \notin M^*$ определить условия, при выполнении которых для произвольного допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего игрока, используя разрешенные информации, можно будет построить мгновенные значения управления, в данных моментах времени τ_i , преследующего игрока таким образом, чтобы соответствующая траектория $z(t)$, $t \geq 0$, системы (1), исходящая из начального положения z^0 , за конечное время вышла на терминальное множество M^* .

Далее, применяя без каких-либо существенных изменений рассуждения работы [1, п.2] получим число $N(z, w)$:

$$N(z, w) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \inf_{v(\cdot) \in V[0, \tau_n]} \sum_{i=1}^n \alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = 1 \right\}.$$

Тогда имеет место следующая

Теорема. Пусть множества M, U — компакты, выпуклы и $N(z, w) < \infty$ для начального положения $z = z^0$ и некоторого набора w , тогда траекторию $z(t)$ системы (1) можно вывести на терминальное множество M^* в момент времени $t = \tau_{N(z^0, w)}$.

Замечание. В определении числа $N(z, w)$, в отличие от работы [1], знак *inf* в скобке записан перед знаком суммы, потому что убегающий игрок должен ограниченный ресурс распределить на весь отрезок $[0, \tau_n]$.

- [1] Чикрий А.А., Матичин И.И., “Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков”, *Тр.Ин-та математики и механики УрО РАН*, 11:1(2005), 212-224
- [2] Саматов Б.Т., “П-стратегия в дифференциальной игре с линейными ограничениями по управлению”, *Прикл.матем. и мех.*, 78:3(2014), 369-377

Об одной формуле вычисления регуляризованных следов возмущений дискретных операторов и ее приложениях.

Фазуллин З.Ю.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть L_0 — дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $V = V^*$ — ограниченный оператор в $\mathcal{H}$ так, что $L = L_0 + V$ — дискретный и полуограниченный снизу оператор. Далее, пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ — собственные числа оператора L_0 , ν_n — кратность λ_n , $n = 1, 2, \dots$, P_n — проектор на собственное подпространство, соответствующее собственному числу λ_n .

Обозначим $\mu_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, \nu_n$, собственные числа возмущенного оператора L , "отпачкованные" от λ_n . Пусть

$$\alpha_n = \sum_{m \neq n} \frac{\text{sp } P_n V P_m V}{\lambda_m - \lambda_n}$$

– вторая поправка теории возмущений, sp – след ядерного оператора.

Теорема. Пусть последовательность α_n абсолютно суммируема. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \left(\lambda_n - \mu_k^{(n)} \right) + \text{sp } P_n V \right) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\lambda_l} \sum_{n=1}^l \text{sp } (P_n V^2 - (P_n V)^2). \quad (1)$$

Как приложение формулы (1) мы в докладе проанализируем формулы следов ограниченных возмущений одномерных и двумерных модельных дифференциальных операторов математической физики [1]–[4].

- [1] З. Ю. Фазуллин. *Формула регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа-Бельтрами.* // Междунар. конф. по компл. анализу и смежным вопросам. Тезисы докладов. Нижний Новгород. 1997. С. 80–81.
- [2] З.Ю. Фазуллин, Х.Х. Муртазин. *Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора.* // Матем. сборник. 2001. Т. 192. № 2. С. 109–138.
- [3] Х.Х. Муртазин, З.Ю. Фазуллин. *Спектр и формула следов двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле.* // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45. № 4.
- [4] В. А. Садовничий, З. Ю. Фазуллин, А. И. Атнагулов. *Свойства резольвенты оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере и формула следов.* // Докл. РАН. 2011. Т. 441. №2. С. 174–176.

Групповая классификация и точные решения уравнения

Шёнбухера — Уилмотта

Федоров В.Е., Дышаев М.М.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Рассмотрена нелинейная модель теории финансовых рынков

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2 \left(1 - \rho \frac{g'(\rho w_x)}{g(\rho w_x)} x w_{xx}\right)^2} = 0, \quad (1)$$

называемая моделью Шёнбухера — Уилмотта [1]. Она описывает ценообразование опционов на неликвидном рынке с учетом влияния размеров открытых позиций трейдеров. После замены $\rho w = u$ и переобозначения $g'(\rho w_x)/g(\rho w_x) = v(u_x)$ получим уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2 (1 - x v(u_x) u_{xx})^2} = 0. \quad (2)$$

Теорема 1. Базис алгебры Ли инфинитезимальных операторов групп преобразований эквивалентности уравнения (2) при функции v , не равной тождественно нулю, образуют операторы

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = \partial_u, \quad Y_3 = x \partial_u, \quad Y_4 = x \partial_x + u \partial_u, \quad Y_5 = u \partial_u - v \partial_v.$$

На основе теоремы 1 получена групповая классификация уравнения (2).

Теорема 2. 1. Базис основной алгебры Ли уравнения

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2 (1 - x u_{xx})^2} = 0$$

имеет вид $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_u$, $X_3 = x \partial_x + u \partial_u$, $X_4 = x \partial_u$.

2. Базис основной алгебры Ли уравнений

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2 \left(1 - \frac{\beta x u_{xx}}{u_x}\right)^2} = 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

имеет вид $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_u$, $X_3 = x \partial_x$, $X_4 = u \partial_u$.

3. В случаях функции v , не приводимой к перечисленным выше преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли уравнения (2) совпадает с ядром основных алгебр Ли и имеет вид $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_u$, $X_3 = x \partial_x + u \partial_u$.

Возвращаясь от u к функции w , получим, учитывая произвол в выборе некоторых констант, многопараметрические семейства решений уравнения (1), соответствующего случаю 1 в теореме 2

$$w(t, x) = Ax + B;$$

$$w(t, x) = \frac{atx}{\rho} + \frac{2 - \frac{\sigma^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\sigma^2}{a}}}{2\rho} x \ln |x| + Bx + C, \quad a \neq 0, \quad \sigma \neq 0,$$

$$\frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\sigma^2}{a} \geq 0;$$

$$w(t, x) = \frac{b}{\rho} x \ln |x| - \frac{b\sigma^2 tx}{2\rho(1-b)^2} + Ax + B, \quad b \neq 1.$$

Аналогичным образом исследован случай 2 теоремы 2. Предложена экономическая интерпретация полученных решений.

- [1] P. Schonbucher, P. Wilmott. The feedback-effect of hedging in illiquid markets // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2000. V. 61. P. 232–272.

Задача о порождающих в кольце целых функций многих комплексных переменных первого порядка и минимального типа в конусе

Филиппов В.Н.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
г.Нижний Новгород, Россия

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, содержащая замкнутый выпуклый острый конус Γ с вершиной в начале, $E(\Gamma)$ – кольцо целых функций первого порядка конечного типа, имеющих минимальный тип в сопряженном для Γ конусе, $H(D)$ – пространство аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(D)$ – пространство, сопряженное к $H(D)$. Для каждого функционала $F \in H^*(D)$ существует определяющая его мера μ на D , $\text{supp } \mu \subset D$, т.е.

$$(F, f) = \int_D f(z) d\mu(z), \quad f \in H(D).$$

Обозначим $\hat{F}(z)$ (или $\hat{\mu}(z)$) преобразование Лапласа функционала F , которое является целой функцией экспоненциального роста.

Функционал $F \in H^*(D)$ порождает в пространстве $H(D)$ оператор свертки $F * f$:

$$(F * f)(z) = \int_D f(z + \zeta) d\mu(\zeta) = (\mu * f)(z).$$

Пусть функционалы $F_{kj} \in H^*(D)$, $k = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$ такие, что $\hat{\mu}_{kj} \in E(\Gamma)$. В пространстве $H^l(D)$ – топологическом произведении – рассмотрим неоднородную систему уравнений свертки

$$\sum_{j=1}^l \mu_{kj} * f_j = g_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где $g_k \in H(D)$. Матрица $M = (\mu_{kj})$ определяет линейный непрерывный оператор L_M :

$H^l(D) \rightarrow H^m(D)$. Обозначим $\Delta_1(z), \dots, \Delta_q(z)$ всевозможные различные определители $\det(\hat{\mu}_{j_s, k})$, $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq m$.

Справедлива следующая теорема о разрешимости неоднородной системы уравнений свертки в терминах характеристических функций уравнений.

Теорема. Система (1) разрешима в пространстве $H^l(D)$ для всякого $g \in (\ker L_M^*)^\perp$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|\Delta_1(z)| + \dots + |\Delta_q(z)| \geq C_1 \exp(-(C_2 h(z) + \varepsilon)|z|), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (2)$$

где $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$, $C_2 = C_2(\varepsilon) > 0$, $h(z)$, – опорная функция пересечения замкнутого шара единичного радиуса с центром в начале с конусом Γ , L_M^* – сопряженный к L_M оператор.

Доказательство теоремы основывается на утверждении, что (2) является необходимым и достаточным условием порождения кольца $E(\Gamma)$ функциями $|\Delta_1(z)|, \dots, |\Delta_q(z)|$ [1], что в свою очередь обеспечивает конечную порожденность $E(\Gamma)$ -модуля $(E(\Gamma))^l$ [2]. Теперь теорема из [3] завершает доказательство.

- [2] Kelleher J.J., Taylor B.A. // Math. Ann. 1971. V. 193, N4. C.225–237.
- [3] Филиппов В.Н. / Вопросы аппроксимаций функций комплексного переменного. Уфа. 1982. С.97–101.

Non-linear quantum dynamics induced by measurements

Filippov S.N.

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

Quantum measurements play a vital role in quantum theory as they lead to state transformations. In mathematical terms, if the outcome i is observed and the system is available after the measurement is performed, then the outcome system is described by the operator $\mathcal{J}_i(\varrho)$ such that $\mathcal{J}_i(\varrho) \geq 0$ and $\text{tr}\mathcal{J}_i(\varrho)$ is the probability of observing the i -th outcome. The density operator

$$\varrho_i = \frac{\mathcal{J}_i(\varrho)}{\text{tr}[\mathcal{J}_i(\varrho)]} \quad (1)$$

is a conditional output state. As the transformation (1) is non-linear, sequential measurements may result in a peculiar quantum dynamics. In this report, we consider sequential measurements on a probe which is coupled with the system in interest. We introduce a *stroboscopic* limit of sequential measurements and derive analytical non-linear equations for the system.

Let $\mathcal{H}_{\text{sys}}$ and $\mathcal{H}_{\text{pr}}$ be the system and probe Hilbert spaces, respectively. For the sake of simplicity we assume that both $\mathcal{H}_{\text{sys}}$ and $\mathcal{H}_{\text{pr}}$ are finite dimensional. By $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{sys}})$ and $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{pr}})$ denote the linear spaces of operators acting on $\mathcal{H}_{\text{sys}}$ and $\mathcal{H}_{\text{pr}}$, respectively. Any system–probe Hamiltonian H admits the resolution $H = \gamma \sum_j A_j \otimes B_j$, where the dimensionless operators $A_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{sys}})$ and $B_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{probe}})$ with $\|A_j\|, \|B_j\| \leq 1$. The parameter γ defines a characteristic strength of the system–probe interaction. Hereafter we assume the Planck constant $\hbar = 1$. Let $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{\text{sys}} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{pr}}))$ be the aggregate density operator of the system and probe. Then the unitary evolution of duration t reads $\mathcal{U}_t(\varrho) = e^{-iHt} \varrho e^{iHt}$.

The probe is being measured repeatedly after equal time intervals τ . By time $t = T$ the number of performed measurements equals $N = \lfloor T/\tau \rfloor$. If

all those measurements resulted in the outcomes $i_1, \dots, i_N$ sequentially, then the system–probe transformation is described by the map:

$$\Phi_T = \mathcal{U}_{T-N\tau} \circ \mathcal{J}_{i_N} \circ \dots \circ \mathcal{U}_\tau \circ \mathcal{J}_{i_2} \circ \mathcal{U}_\tau \circ \mathcal{J}_{i_1}, \quad (2)$$

where $\circ$ denotes concatenation of maps. Probability of realization of this map $p_\Phi = \text{tr}[\Phi_T[\varrho]]$, where $\text{tr}[\varrho] = 1$. Tracing out the probe, we get the system density operator evolution.

We consider in detail the situation when the outcomes $i_1, \dots, i_N = i$ are all coincident. Physically, the probability of such a sequence of outcomes is quite high if $\gamma\tau \ll 1$ as this case corresponds to Zeno effect for the probe [1]. However, our case crucially differs from those ones as the measurements are performed on the probe and not on the system itself.

For projective rank-1 measurements the instrument $\mathcal{J}_i$ takes the form $\mathcal{J}_i(\varrho) = C_i \varrho C_i$ with $C_i = I_{\text{sys}} \otimes |\varphi\rangle\langle\varphi|$ and $\varrho_{\text{pr}}(0) = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ for some fixed vector $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{pr}}$. Though the probe dynamics is effectively frozen if $\gamma\tau \rightarrow 0$, the system continues evolving. In the *stroboscopic limit*

$$\tau \rightarrow 0, \quad \gamma^2\tau = \Omega = \text{const}, \quad (3)$$

the normalized system state $\varrho_{\text{sys}}(T)$ satisfies the non-linear equation

$$\frac{\partial \varrho_{\text{sys}}}{\partial T} = -i[H_1, \varrho_{\text{sys}}] - \{H_2, \varrho_{\text{sys}}\} + 2\text{tr}(H_2 \varrho_{\text{sys}}) \varrho_{\text{sys}}, \quad (4)$$

where $H_1 = \gamma \sum_j A_j \langle B_j \rangle$ and $H_2 = \frac{\Omega}{2} \sum_{jk} A_j A_k (\langle B_j B_k \rangle - \langle B_j \rangle \langle B_k \rangle)$, $\langle \cdot \rangle = \langle \varphi | \cdot | \varphi \rangle$.

Let the initial state $\varrho_{\text{sys}}(0)$ be pure. The approximate dynamics (4) preserves purity of the initial state and the evolution of system state vector $|\psi\rangle$ satisfies

$$i \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = (H_1 - iH_2) |\psi\rangle + i \langle \psi | H_2 | \psi \rangle |\psi\rangle. \quad (5)$$

The study is supported by Russian Science Foundation under project No. 16-11-00084 and performed in Moscow Institute of Physics and Technology.

- [1] Sudarshan E. C. G., Misra B. *The Zeno's paradox in quantum theory* // J. Math. Phys. – 1977. – V. 18. – PP. 756–763.

Распределение нулей голоморфных функций и тестовые функции

Хабибуллин Б. Н., Таминдарова Н. Р.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

ОСНОВНОЙ ВОПРОС. Пусть $D \subset \mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — область в расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \neq D$, K компакт в D с непустой внутренностью. $M \neq -\infty$ — субгармоническая функция в D с мерой Рисса ν_M , f — ненулевая голоморфная функция в D , обращающаяся в нуль на последовательности точек $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D \setminus K$ и $\log |f| \leq M$ на $D \setminus K$ (почти всюду). Для каких функций $v \geq 0$ на $D \setminus K$ из конечности интеграла

$$\int_{D \setminus K} v d\nu_M < +\infty$$

следует конечность суммы

$$\sum_{z_k \in D \setminus K} v(z_k) < +\infty?$$

Отрицание подобной импликации позволяет получать теоремы единственности, а именно: если последний ряд расходится, а интеграл выше конечен, то из $\log |f| \leq M$ на $D \setminus K$ следует, что f — нулевая функция.

Нам удалось получить в определенном смысле неупрощаемый результат:

ОТВЕТ [1] Достаточно, чтобы функция v была положительной субгармонической в открытом множестве $D \setminus K$ и стремилась к нулю при приближении изнутри области D к границе этой области D в $\mathbb{C}_\infty$. Функции v из нашего Ответа называем *тестовыми*.

Ранее такого рода результаты использовались лишь с более или менее явными функциями. Более того, некоторая равномерная относительно определенных подклассов тестовых функций версия нашего Ответа позволяет дать почти полное обращение наших результатов, что еще более подчеркивает их точность.

В связи с полученным результатом значительный интерес представляет построение различных явных типов и классов тестовых функций,

что само по себе задача актуальная и требует применения разнообразных математических объектов, как-то: функций Грина и их комбинаций, функции расстояния, гиперболического (конформного) радиуса и т. д.

Результаты удастся распространить и на функции нескольких комплексных переменных [2].

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00024.

- [1] Bulat Khabibullin, Nargiza Tamindarova *Distribution of zeros and masses for holomorphic and subharmonic functions. I. Hadamard- and Blaschke-type conditions* // arXiv:1512.04610v2 [math.CV], 12/2015–03/2016, 70 pages, list of references 71. This work submitted to the journal "Sbornik: Mathematics" in 2015 (принято к печати в журнале «Математический сборник»).
- [2] B.N. Khabibullin, N.R. Tamindarova, *Uniqueness Theorems for Subharmonic and Holomorphic Functions of Several Variables on a Domain* // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2016, to appear.

Интегрируемые двумеризованные цепочки.

Характеристические кольца Ли и классификация

Хабибуллин И.Т., Попцова М.Н.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Обсуждается задача описания интегрируемых уравнений вида

$$u_{n,xy} = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x}u_{n,y}, \quad (1)$$

называемых двумеризованными цепочками. Здесь $u_n = u_n(x, y)$ – искомая функция, зависящая от целого n и вещественных x, y . Отметим, что $u_{n,x} = \frac{\partial u_n}{\partial x}$, $u_{n,y} = \frac{\partial u_n}{\partial y}$, $u_{n,xy} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}$. Функция $\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ предполагается аналитической в некоторой открытой области $D \subset \mathbb{C}^3$. Также предполагается, что функции $\frac{\partial \alpha}{\partial u_{n+1}}$ и $\frac{\partial \alpha}{\partial u_{n-1}}$ отличны от тождественного нуля.

Определение 1. Цепочку (1) назовем интегрируемой, если для любых целых N_1, N_2 , где $N_1 < N_2$ система уравнений гиперболического

типа, “аппроксимирующая” (1)

$$\begin{aligned} u_{N_1-1} &= c_0, \\ u_{n,xy} &= \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y}, \quad N_1 \leq n \leq N_2, \\ u_{N_2+1} &= c_1, \end{aligned} \quad (2)$$

является интегрируемой по Дарбу.

Интегрируемые по Дарбу системы уравнений решаются в явном виде, при этом любое решение “аппроксимирующей” системы легко продолжается до решения исходной цепочки, поэтому цепочки интегрируемые в смысле определения выше допускают широкий класс явных решений. Наша гипотеза состоит в том, что такие цепочки принадлежат классу солитонных систем, т.е. являются интегрируемыми в общепринятом смысле.

Определение 1 позволяет свести задачу интегрируемой классификации двумеризованных цепочек вида (1) к исследованию характеристических колец Ли гиперболических систем специального вида. Необходимым и достаточным условием интегрируемости системы по Дарбу является конечномерность ее характеристических колец по обоим характеристическим направлениям (см. [1]). Из этого требования можно вывести эффективные необходимые условия интегрируемости цепочки (1).

В представляемой работе мы описали класс цепочек (1), для которых выполняется помимо конечномерности характеристических колец Ли “аппроксимирующей” системы по направлениям x и y еще и условие согласованности базисов этих колец Ли с градуировкой.

- [1] А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина, И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат, Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения, М.-Ижевск, 2012.

Об одном методе построения пар Лакса для интегрируемых систем

Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В докладе обсуждается алгоритм построения представления Лакса для нелинейных интегрируемых уравнений. Ранее в работе [1] был предложен способ построения пары Лакса посредством линеаризации рассматриваемого уравнения и последующего поиска некоторого многообразия, согласованного с линеаризованным уравнением. Построенная таким способом пара Лакса отличается от классической более высокой матричной размерностью, либо более высоким порядком входящих линейных операторов. В докладе обсуждается эффективный способ понижения порядка (матричной размерности), позволяющий свести найденные методом работы [1] пары Лакса к более простому виду. Применение метода иллюстрируется на примерах дискретных нелинейных моделей.

- [1] Habibullin I. T., Khakimova A. R., Poptsova M. N., On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations, J. Phys. A: Math. Theor. 49, 035202 (2016) (35pp)

Вихревые установившиеся плоские неизоэнтропические течения идеального газа

Хабиров С. В.

Институт механики УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Для модели идеального газа инвариантная подмодель двумерных установившихся течений хорошо известна [1, 2]. Множество точных решений найдено и расчетов краевых задач проведено для безвихревых изоэнтропических течений. Безвихревые течения с переменной энтропией возможны только по концентрическим окружностям [1]. Потенциальные изоэнтропические течения за ударной волной становятся вихревыми

и с переменной энтропией. Оказывается вихревые установившиеся плоские баротропные неизоэнтропические течения идеального газа происходят либо по прямым линиям при постоянном давлении, либо по concentрическим окружностям. В работе проведена групповая классификация небаротропных течений [3] по произвольной функции из интеграла Бернулли и по уравнению состояния. Результат групповой классификации состоит из шести случаев. Возможно расширение допускаемой алгебры до пятимерной размерности. Построена оптимальная система одномерных подалгебр. Рассмотрены инвариантные решения для одного случая групповой классификации. Дана физическая интерпретация некоторых из решений: разворот вихревого потока, движение газа по concentрическим окружностям с особенностью вихря и плотности на логарифмической спирали, неточечный круговой источник с радиальным растеканием на бесконечности, спиральное растекание с окружности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант 14-01-97027-а.

- [1] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука. 1981.368 с.
- [2] Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука. 1988.424 с.
- [3] Хабиров С. В., Чиркунов Ю.А. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ. 2012. 659 с.

Orthogonal Measures on State Spaces and Context Structures of Quantum Theory

Hamhalter J., Turilova E.

Czech Technical University, Prague, Czech Republic, Kazan Frderal
University, Kazan, Russia

Our previous research has shown that there is a connection between Choquet order of orthogonal measures and structure of abelian subalgebras of von Neumann algebras. In particular, it turned out that order isomorphisms

of Choquet posets are in correspondence with Jordan $*$ -isomorphisms of certain associated von Neumann algebras. It brings new relationships between classical Choquet theory and the structure of context algebras investigated in the framework of topos approach to foundations of quantum theory.

Given a von Neumann algebra $\mathcal{M}$, we shall denote by $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ the poset of all abelian von Neumann subalgebras containing the unit of $\mathcal{M}$. The order is given by the set theoretic inclusion. Let K be a compact convex set in a locally convex topological space X . The symbol $C(K)$ will stand for the C^* -algebra of all continuous complex functions on K . Let $A(K)$ and $P(K)$ represent the set of all continuous affine functions on K and all continuous convex functions on K , respectively. By a Radon measure μ on K we mean an element in the dual space $C(K)^*$, canonically identified with a regular Borel measure $d\mu$ on K . The set of all probability Radon measures on K will be denoted by $M_1^+(K)$. Let $\mu \in M_1^+(K)$. The point $b(\mu) \in K$ is called the *barycenter* of μ if, for each $a \in A(K)$, $a(b(\mu)) = \int_K a(\omega) d\mu(\omega)$. Measure μ is called *representing* for a given point $x \in K$ if x is the barycenter of μ . The set of all representing measures of x will be denoted by $M_x^+(K)$. Let μ and ν be positive Radon measures. The Choquet order relation is defined in the following way [1]:

$$\mu \prec \nu \quad \text{if} \quad \mu(f) \leq \nu(f) \quad \text{for all} \quad f \in P(K).$$

Let us now specify the convex theory to the state spaces of C^* -algebras. Let $S(\mathcal{A})$ be the set of all states (norm one positive functionals) on C^* -algebra $\mathcal{A}$ endowed with the weak*-topology. It is a compact convex set. Let us fix a state φ on $\mathcal{A}$. The measure $\mu \in M_\varphi^+(S(\mathcal{A}))$ is called *orthogonal* if, for each Borel set $E \subset S(\mathcal{A})$, the positive functionals φ_E and $\varphi_{S(\mathcal{A}) \setminus E}$ on $\mathcal{A}$ given by $\varphi_E(a) = \int_E a(\omega) d\mu(\omega)$ and $\varphi_{S(\mathcal{A}) \setminus E}(a) = \int_{S(\mathcal{A}) \setminus E} a(\omega) d\mu(\omega)$ are orthogonal. (Recall that the positive functionals are called orthogonal if there is no nonzero positive functional dominated by both of them.)

The triple $(\pi_\varphi, \xi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ will represent the GNS data of φ . By $\mathcal{M}_\varphi$ we shall denote the von Neumann algebra generated by $\pi_\varphi(\mathcal{A})$. Then $\mathcal{M}'_\varphi = \pi_\varphi(\mathcal{A})'$. Let $\mu \in M_\varphi^+(S(\mathcal{A}))$. Take $f \in L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu)$. Then there is a unique element,

$\theta_\mu(f) \in \mathcal{M}'_\varphi$ such that, for each $a \in \mathcal{A}$

$$\langle \theta_\mu(f) \pi_\varphi(a) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \int_{S(\mathcal{A})} f(\omega) a(\omega) d\mu(\omega).$$

It is known that μ is an orthogonal measure if and only if θ_μ is a $*$ -isomorphism that maps $L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu)$ onto von Neumann abelian subalgebra $C_\mu = \theta_\mu(L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu))$ of $\mathcal{M}'_\varphi$ (see [1, Theorem 6.19, p. 239]).

Let us denote by $O_\varphi(\mathcal{A})$ the set of all orthogonal measures in $M_\varphi^+(S(\mathcal{A}))$. Further, we shall denote by Θ_φ the map $\Theta_\varphi : O_\varphi(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{M}'_\varphi) : \mu \rightarrow C_\mu$.

Theorem. Let φ and ψ be states on C^* -algebras $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, respectively. Suppose that $\mathcal{M}'_\varphi$ is a von Neumann algebra without type I_2 direct summand. Then for each order isomorphism $F : O_\varphi(\mathcal{A}) \rightarrow O_\psi(\mathcal{B})$ there is a unique Jordan isomorphism $J : \mathcal{M}'_\varphi \rightarrow \mathcal{M}'_\psi$ such that for each $\mu \in O_\varphi(\mathcal{A})$

$$F(\mu) = \Theta_\psi^{-1} J[\Theta_\varphi(\mu)].$$

Corollary. Let $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ be σ -finite von Neumann algebras with $\mathcal{M}$ not having Type I_2 direct summand. The following statements are equivalent:

- (i) There is a Jordan $*$ -isomorphism between $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$.
- (ii) There are faithful normal states φ and ψ on $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$, respectively, such that $(O_\varphi(\mathcal{M}), \prec)$ and $(O_\psi(\mathcal{N}), \prec)$ are isomorphic as posets.
- (iii) For all faithful normal states φ and ψ on $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$, respectively, $(O_\varphi(\mathcal{M}), \prec)$ and $(O_\psi(\mathcal{N}), \prec)$ are isomorphic as posets.

[1] Takesaki, M.: Theory of Operator Algebras I, II, III. Springer Verlag, (2001).

Исследование асимптотики решения нелинейного уравнения в частных производных с анализом точки катастрофы “бабочка”

Хачай О. Ю., Носов П.А.

УрФУ, г. Екатеринбург, Россия

В работе рассматривается трехмерное нелинейное волновое уравнение

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial^2 T} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = f(\varepsilon T, \varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, U) \quad (1)$$

с плавным изменением источникового члена уравнения во времени и в пространстве; здесь ε – малый положительный параметр. Произведем замену переменных $(q, s_1, s_2, s_3) = \varepsilon(T, X, Y, Z)$ и обозначим $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$; в результате уравнение (1) приобретает вид

$$\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial^2 q} + \frac{\partial^2 U}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial s_3^2} \right) = f(q, \mathbf{s}, U). \quad (2)$$

Предположим, что функция $f(q, \mathbf{s}, U)$ является гладкой и удовлетворяет неравенству $f_U(q, \mathbf{s}, U) \neq 0$, $(q, \mathbf{s}, U) \in \Omega_{(q, \mathbf{s})} \times \Omega_U$, и некоторые соответствующие уравнению (2) условия, которые, во-первых, выделяют в точности единственное решение задачи на области $\Omega_{(q, \mathbf{s})}$, и, во-вторых, обеспечивают хорошее приближение этого решения асимптотическим рядом вида

$$U(\varepsilon, q, \mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(q, \mathbf{s}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

на области $\Omega_{(q, \mathbf{s})}$, за исключением некоторой окрестности ее границы. Примеры таких постановок задач представлены, например, в работах Л. А. Островского (1973); И. А. Молоткова, С. А. Вакуленко (1988); В. П. Маслова, В. Г. Данилова, К. А. Волосова (1987); статье [1].

На границе множества $\Omega_{(q, \mathbf{s})}$ могут находиться точки вырождения функции $f(q, \mathbf{s}, U)$ по искомой функции – нули функции $f_U(q, \mathbf{s}, U)$, которые могут содержать многообразия точек складки, сборки, гладкие линии катастрофы типа “ласточкин хвост” и изолированные точки катастрофы типа “бабочка”.

В работе исследуются внутренние асимптотические разложения решений уравнений вблизи точки катастрофы типа “бабочка” по схеме, аналогичной опубликованной в статье [2]. Для этого будут введены особые переменные (t, x, y, z, V) , полученные с использованием стандартного диффеоморфизма приведения к канонической форме катастрофы типа “бабочка” и затем растяжения (пропорционально $\varepsilon^{-\gamma}$, где $\gamma > 0$), и рассмотрен асимптотический ряд

$$V(\varepsilon, t, x, y, z) = v(t, x, y, z) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k V_k(t, x, y, z), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4)$$

В терминах новых переменных уравнение (2) индуцирует уравнение

для главного члена $v(t, x, y, z)$ ряда (4):

$$v_{xx} = v^5 - tv^3 + zv^2 + yv + x, \quad (5)$$

причем искомое специальное решение уравнения (5) должно дополнительно удовлетворить условиям согласования рядов (3) и (4), и, следовательно, главный член $g(t, x, y, z)$ асимптотического разложения при $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ этого специального решения в областях согласования с рядом (3) почти всюду должен являться корнем уравнения катастрофы типа “бабочка”

$$0 = g^5 - tg^3 + zg^2 + yg + x.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00222 мол_а.

- [1] Ильин А. М., Сулейманов Б. И. О двух специальных функциях, связанных с особенностью сборки. Докл. РАН. 387:2 (2002), 156-158.
- [2] Ильин А. М., Сулейманов Б. И. Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки. Матем. сб., 195:12 (2004), 27-46.

О возмущении волновода комплексным потенциалом

Хуснуллин И.Х.

БГПУ им. М.Акумулы, г.Уфа, Россия

Пусть Ω — интервал $(0, \pi)$, $\Pi := (-\infty, \infty) \times \Omega$, $\langle g \rangle := \int_{\Pi} g(t) dt$, $L_2(G)$ — множество квадратично интегрируемых по Лебегу в G функций, а $H^n(G)$ — множество квадратично интегрируемых по Лебегу в G функций вместе с их частными производными до порядка n включительно, $Q := (a, b) \times \Omega$, где (a, b) — конечный интервал, содержащий начало координат, $V(x)$ — комплекснозначная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, параметры $0 < \mu, \varepsilon \ll 1$ удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon \mu^{-1} = o(1).$$

Через $\mathcal{H}_0(\mathcal{D})$ (через $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$) обозначим оператор $-\Delta$, определенный на функциях из $H^2(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $u(x_1, 0) = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \alpha u\right)\Big|_{x_2=\pi} = 0$ (граничным условиям $\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \alpha u\right)\Big|_{x_2=0} = 0$, $u(x_1, \pi) = 0$), где $\alpha \geq 0$. Хорошо известно, что определенные таким образом операторы $\mathcal{H}_0(\cdot)$ являются самосопряженными операторами в $L_2(\Pi)$ и соответствуют математическим моделям волноводов.

Пусть $\mu_1 = \mu_1(\cdot)$ – минимальное собственное значение, а $\phi_{1,1}$ – соответствующая собственная функция для оператора $-\Delta' := -\frac{d^2}{dx_2^2}$, определенного на функциях из $H^2(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = 0$, $u'(\pi) + \alpha u(\pi) = 0$ (для $\mu_1(\cdot) = \mu_1(\mathcal{D})$) и $u'(0) - \alpha u(0) = 0$, $u(\pi) = 0$ (для $\mu_1(\cdot) = \mu_1(\mathcal{F})$).

В $L_2(\Pi)$ на областях определения операторов $\mathcal{H}_0(\cdot)$ определим операторы $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$ как

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot) := \mathcal{H}_0(\cdot) + \mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Основным результатом является следующая

Теорема. Пусть выполнено условие $\varepsilon\mu^{-1} = o(1)$. Тогда если

$$\operatorname{Re} \langle V \rangle < 0,$$

то существует единственное и простое собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\mu}$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$, стремящегося к μ_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Его асимптотика имеет вид

$$\lambda_{\varepsilon,\mu} = \mu_1 - \frac{1}{4}(\varepsilon^2\mu^{-1})^2 (\phi_{1,1}^2(0) \langle V \rangle)^2 + O(\varepsilon^5\mu^{-2} + \varepsilon^6\mu^{-3}|\ln \varepsilon|^2).$$

Если

$$\operatorname{Re} \langle V \rangle > 0,$$

то оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$ не имеет собственных значений, стремящихся к μ_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00066 мол-а) и в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки России. Так же работа частично поддержана грантом Республики Башкортостан молодым ученым и молодежным научным коллективам (договор № 4).

Новая теорема о неподвижной точке

Царьков И.Г.

Москва, МГУ

В работе изучены метрическо-топологические свойства многозначного отображения, для которого выполнена теорема о неподвижной точке.

Для произвольного множества A в некотором полуметрическом пространстве (Y, ν) через $\varrho(y, A)$ обозначим расстояние до множества A , т.е. величину $\inf_{z \in A} \nu(y, z)$. Для произвольных множеств $A, B \subset Y$ рассмотрим одностороннее хаусдорфово расстояние (уклонение) A от B , т.е. величину $d(A, B) = \sup_{y \in A} \varrho(y, B)$.

Множество A в полуметрическом пространстве (Y, ν) называется бесконечно связным, если для всех $n \in \mathbb{N}$ и единичного шара $B \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного непрерывного отображения $\varphi : \partial B \rightarrow A$ существует непрерывное продолжение $\tilde{\varphi} : B \rightarrow A$.

Множество $M \subset X$ называется $\overset{\circ}{B}$ -бесконечно связным, если пересечение множества M с любым открытым шаром либо пусто, либо бесконечно связно.

Пусть M – непустое подмножество линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$. Точку $x \in X$ называют точкой аппроксимативной компактности, если для любой последовательности $\{y_n\} \subset M : \|x - y_n\| \rightarrow \varrho(x, M)$ ($n \rightarrow \infty$) существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $y_0 \in M$. Обозначение $x \in AC(M)$. Если $AC(M) = X$, то множество M называется аппроксимативно компактным (в нормированном пространстве оно замкнуто). Отметим, что в пространствах Ефимова-Стечкина (в частности, в равномерно выпуклых пространствах) все ограниченно слабо компактные множества являются аппроксимативно компактными.

Достижимой границей множества M в линейном полунормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ назовем множество $\text{rb } M$, состоящее из точек, являющихся ближайшими для некоторых внешних точек множества M .

Пусть $(Y, q), (X, \theta)$ – полуметрические пространства. Отображение $F : Y \rightarrow 2^M$ назовем устойчивым, если $F(y) \neq \emptyset$ для всех $y \in Y$, и

$$\omega_E(F, y_0, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in E \\ q(y_0, y) \leq \delta}} |\varrho(x, F(y_0)) - \varrho(x, F(y))| \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0+),$$

для каждой точки $y_0 \in Y$ и произвольного ограниченного множества $E \subset X$.

Следующее утверждение основывается на свойствах множествах, обладающих непрерывной ε -выборкой (см [1]-[2]).

Теорема. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное полунормированное пространство, $\mathcal{K}$ – замкнутый компакт в пространстве X , являющийся $\mathring{B}$ -бесконечно связным множеством, отображение $F : \mathcal{K} \rightarrow 2^X$ устойчиво и для всех $x \in \mathcal{K}$ множество $M_x = F(x)$ является аппроксимативно компактным, замкнутым и $\mathring{B}$ -бесконечно связным. Пусть для всех $x \in \text{rb } \mathcal{K}$ верно неравенство $\varrho(x, F(x)) > d(F(x), \mathcal{K})$. Тогда существует неподвижная точка $x_0 \in \mathcal{K}$, т.е. $x_0 \in F(x_0)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

- [1] И. Г. Царьков. Локальная и глобальная непрерывная ε -выборка// Изв. РАН. Сер. матем., 2016, 80:2, 165–184.
- [2] И. Г. Царьков. Непрерывная ε -выборка Матем. сб., 2016, 207:2, 123–142.

A Hardy-type inequality for fractional integral operator in q -analysis.

Shaimardan S.

L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, kazakhstan
e-mail: serikbol-87@yandex.kz

Let $0 < q < 1$ be fixed. Then the q -real number $[\alpha]_q$ is defined by $[\alpha]_q = \frac{1-q^\alpha}{1-q}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. It is clear that $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1-q^\alpha}{1-q} = \alpha$.

The definite q -integral or the q -Jackson integral of a function f is defined by the formula

$$\int_0^x f(t) d_q t := (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x), \quad x \in (0, b), \quad (1)$$

and the improper q -integral of a function $f(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, is defined by the formula

$$\int_0^{\infty} f(t) d_q t := (1-q) \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k f(q^k). \quad (2)$$

Note that the series in the right hand sides of (1) and (2) converge absolutely [2].

Let Ω be a subset of $(0, \infty)$ and $\mathcal{X}_{\Omega}(t)$ denote the characteristic function of Ω . For all $z > 0$, we have that (see [1]):

$$\int_0^{\infty} \mathcal{X}_{[z, \infty)}(t) f(t) d_q t = (1-q) \sum_{q^i \geq z} q^i f(q^i).$$

Our main result reads:

Theorem 2. *Let $1 < p \leq r < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Then the inequality*

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\infty} u^r(x) \left(\int_0^x s^{\gamma-1} \ln_q \frac{x}{x-qs} f(s) d_q s \right)^r d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq C \left(\int_0^{\infty} f^p(s) d_q s \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f(\cdot) \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

with $C > 0$ independent of f holds if and only if $B_1 < \infty$, where

$$B_1 := \sup_{x>0} x^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_0^{\infty} \mathcal{X}_{[x, \infty)}(t) \frac{u^r(t)}{t^r} d_q t \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Moreover, $B_1 \approx C$, where C is the best constant in (3).

Theorem 3. *Let $0 < r < p < \infty$, $1 < p$ and $\gamma > \frac{1}{p}$. Then the inequality (3)*

holds if and only if $B_2 < \infty$, where

$$B_2 := \left(\int_0^\infty \left[x^{\gamma + \frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty \mathfrak{X}_{[x, \infty)}(t) \frac{u^r(t)}{t^r} d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \right]^{\frac{pr}{p-r}} d_q x \right)^{\frac{p-r}{pr}}.$$

Moreover, $B_2 \approx C$, where C is the best constant in (3).

This work was supported by Scientific Committee of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant no. 5495/GF4. It was also supported by the Russian Scientific Foundation (project RFFI 16-31-50042).

- [1] A.O. Baizaristanov, S. Shaimardan, A. Temirkhanova, *Weighted Hardy inequalities in quantum analysis*, Vestnik KarGU. Mathematics series. 2 (2013), no. 70, 35-45
- [2] P. Cheung, V. Кас, *Quantum calculus*, - Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, MI, USA, 2000.

Об оптимальном приближении нормы оператора Фурье семейством логарифмических функций

Шакиров И.А.

Набережночелнинский государственный педагогический университет,
г. Набережные Челны, Россия

Равномерная сходимость частичных сумм ряда Фурье функции на-
прямую связана с поведением соответствующей ей константы Лебега [1,
с. 125]:

$$L_n = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} \frac{1}{4k^2 - 1}, \quad \left(c_{n,k} = \sum_{m=1}^{(2n+1)k} \frac{1}{2m-1}, n \in \mathbb{N} \right); \quad (1)$$

$$L_0 = 1, \quad L_1 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

Исследованием ее свойств в первой половине прошлого столетия ак-
тивно занимались А. Лебег, Л. Фейер, Г. Сеге, Г. Харди, Г. Ватсон, а

во второй половине — советские математики С.Б. Стечкин, Н.И. Ахиезер, П.В. Галкин [2], Г.И. Натансон [3] и др. Оставались неизученными некоторые вопросы приближения константы (1) в равномерной метрике семейством логарифмических функций вида $(4/\pi^2) \ln(n+a) + b$. Например, в приближенном равенстве

$$L_n \approx (4/\pi^2) \ln(n+a) + b \quad (a \in [0, +\infty), b \in [0, +\infty), n \in N) \quad (2)$$

интерес представляет задача оптимального (наилучшего) выбора значений параметров a, b . В такой постановке вопроса содержательным является лишь случай, когда пары (a, b) принадлежат более узкому множеству Ω , т.е. $(a, b) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 2]$. Используя результаты работ [2] и [3], в работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 Для всех значений параметра $a \in [a^*, 1] = [0.51188859..., 1]$ остаточный член $O_n(a) \equiv O(n, a) = L_n - (4/\pi^2) \ln(n+a)$ является строго возрастающей функцией аргумента n и имеет образ $R(O_n(a)) = [L_1 - (4/\pi^2) \ln(1+a), \alpha_0]$, где точное значение нижней границы параметра a определяется как $a^* = -1 + 0.5 \left[(\exp(2/7) - 1)^{-1} \right]$, $\alpha_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} O(n, a) = 1.27035324...$ — предельное значение остаточного члена константы Лебега, не зависящее от выбора $a \in [0, 1]$.

Теорема 2 В условиях предыдущей теоремы оптимальное приближение в (2) достигается при значениях $a = a^* = 0.51188859..., b = b^* = 1.26940801...,$ и они определяют решение следующей экстремальной задачи:

$$\inf_{a, b \in \Omega} \sup_{n \in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(n+a) - b \right| = \left\| L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(n+a^*) - b^* \right\| \quad (3) \\ = \varepsilon = 0.00094523....$$

Замечание Строгое возрастание остаточного члена имеет место и в несколько широком, чем $[a^*, 1]$, множестве $[\tilde{a}, 1]$ ($\tilde{a} = -1 + (\exp(32/63) - 1)^{-1} = 0.51089714...$), что позволяет уменьшить погрешность в (3) до значения $\tilde{\varepsilon} = 0.00081229....$ Однако при более близких к одной второй значениях параметра a свойство строгого возрастания остаточного члена, как показывают теоретические и практические результаты, перестает выполняться. Само значение $a = 0.5$ относится к области строгого убывания $O_n(a)$.

- [1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [2] Галкин П.В. Оценки для констант Лебега // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 3–5.
- [3] Натансон Г.И. Об оценке констант Лебега сумм Валле-Пуссена // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1986.

Интегрируемые системы с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере

Шамолин М.В.

Институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики (маломерного или многомерного) твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил, а также задачи динамики точки в силовых полях на конечномерной сфере. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Работа представляет собой развитие результатов по интегрированию динамической части уравнений движения трехмерного твердого тела, находящегося в некотором поле сил, построенном при условии квазистационарного взаимодействия твердого тела со средой [1, 2]. Отметим также ряд работ автора по интегрированию аналогичных уравнений движения двумерного и четырехмерного твердого тела [3, 4], находящегося в неконсервативном поле сил.

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают

дополнительными симметриями, удастся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов или узлов, предельных циклов) [4, 5].

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n -мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле породили системы на касательном расслоении к $(n - 1)$ -мерной сфере. В работе тщательно разобран индуктивный переход от систем на касательных расслоениях к маломерным сферам до систем на касательных расслоениях к сферам произвольной размерности. При этом исследование начинается для систем при отсутствии силового поля и продолжается системами при наличии некоторых неконсервативных силовых полей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-00848-а).

- [1] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд-во “Экзамен”, 2007.
- [2] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 3–237.
- [3] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. – 2010. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 3–229.

- [4] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / Итоги науки и техники. Сер. “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. Т. 125. М.: ВИНТИ, 2013. – С. 3–251.
- [5] Шамолин М.В. Интегрируемые системы в динамике на касательном расслоении к сфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2016. – № 2. – С. 25–30.

Асимптотика интегралов — функций «всплеска» при больших значениях аргумента

Шопошникова Д.А.

Научный исследовательский университет «МЭИ», г.Москва, Россия

При рассмотрении регуляризированной асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае простой точки поворота возникают интегралы (носители сингулярностей задачи) вида

$$\delta_{ij} = e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{\varphi(s)/\varepsilon} K_{ij}(s) ds,$$

где $\varphi(t) = \int_0^t s^{k_0} (s - t_1)^{k_1} \dots (s - t_m)^{k_m} ds$; $K_{ij}(t)$ — многочлен Сильвестра–Эрмита. Эти интегралы называют функцией «всплеска».

Задача Коши, в решении которой возникают эти интегралы, имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon y' = A(t)y + h(t) \\ y(0, \varepsilon) = y^0, \end{cases}$$

где собственные значения матрицы $A(t)$ удовлетворяют условиям стабильности, т.е.

$$\forall i, j \quad \lambda_i(t) \neq \lambda_j(t) \quad \text{и} \quad \exists i_0 \quad \lambda_{i_0} = t^{k_0} (t - t_1)^{k_1} \dots (t - t_m)^{k_m}.$$

В данных тезисах приводятся результаты асимптотики интегралов δ_{ij} при $\varepsilon \rightarrow 0$ вида

$$\delta_k = e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \int_0^t s^k e^{\varphi(s)/\varepsilon} ds,$$

где $\varphi(t) = \int_0^t s^{k_0} (1-s)^{k_1} \dots (1-s)^{k_m} ds.$

Легко заметить что, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$, если $f(t) = \int_0^t s^k e^{\varphi(s)/\varepsilon} ds$ и

$$g(t) = \int_0^t s^k e^{(s^{n+1})/(\varepsilon(n+1))} ds.$$

Приведем результаты асимптотики данного интеграла при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $n = k_0 + \dots + k_m$ и $k = \max\{k_0, \dots, k_m\}$:

$$\begin{aligned} e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \int_0^t s^k e^{\varphi(s)/\varepsilon} ds &\cong e^{-(t^{n+1})/(\varepsilon(n+1))} \int_0^t s^k e^{(s^{n+1})/(\varepsilon(n+1))} ds \cong \\ &\cong \frac{\varepsilon}{t^{n-k}} + \frac{\varepsilon^2(n-k)}{t^{2n-k+1}} + \frac{\varepsilon^3(n-k)(2n-k+1)}{t^{3n-k+2}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^4(n-k)(2n-k+1)(3n-k+2)}{t^{4n-k+3}} + \dots \end{aligned}$$

Асимптотика функции «всплеска» в простейшем изучалась в работах С.Ю.Дзядык [1].

- [1] Дзядык С.Ю. О поведении решений неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота с малым параметром при производной // Укр. матем. журнал, 1973, т. 25, № 5, стр. 657–662.

Estimates for the Steklov spectral zeta function of a planar domain and a compactness theorem

Sharafutdinov V.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

We consider the zeta function ζ_Ω for the Dirichlet-to-Neumann operator of a simply connected planar domain Ω bounded by a smooth closed curve. We prove that, for a fixed real s satisfying $|s| \geq 1$ and fixed length $L(\partial\Omega)$ of the boundary curve, the zeta function $\zeta_\Omega(s)$ reaches its unique minimum when Ω is a disk. This result is obtained by studying the difference $\zeta_\Omega(s) - 2\left(\frac{L(\partial\Omega)}{2\pi}\right)^s \zeta_R(s)$, where ζ_R stands for the classical Riemann zeta function. The difference turns out to be non-negative for real s satisfying $|s| \geq 1$. We prove some growth properties of the difference as $s \rightarrow \pm\infty$. Two analogs of these results are also provided.

Next, we prove some estimates from below for Steklov zeta invariants. The estimates allow us to prove the compactness, with respect to the C^∞ -topology, of a Steklov isospectral family of planar domains. A similar precompactness statement was known before with respect to the H^s -topology with $s < 5/2$ [1].

This is a joint work with Alexandre Jollivet (Lille, France).

- [1] J. EDWARD, *Pre-compactness of isospectral sets for the Neumann operator on planar domains*, Commun. in PDE's, **18** no. 7–8 (1993), 1249–1270.

Partially supported by the program of Presidium of RAS, project 0314-2015-0013.

Обобщенная гипотеза Дэвиса для областей в n -мерном пространстве

Шафигуллин И.К.

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, г.Казань,
Россия

Пусть Ω — произвольная область $\mathbb{R}^n$, такая, что $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $C_0^1(\Omega)$ — семейство непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω , и $\delta = \delta(\Omega) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ — функция расстояния до границы области.

Рассмотрим неравенство типа Харди:

$$\int_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} d\Omega \leq c(\Omega) \int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} d\Omega \quad \forall f \in C_0^1(\Omega),$$

где $p > 1, s > 1$, а $c(\Omega)$ — наилучшая из возможных констант, ее можно определить следующим образом:

$$c(\Omega) = \sup_{f \in C_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx}{\int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx}.$$

Оценкой константы в неравенствах такого вида занимались многие выдающиеся математики с начала двадцатого века до наших дней. Получены результаты как для интегральных неравенств функций одной переменной, так и для их многомерных аналогов. При этом весьма интересной задачей является получение оценки этой константы без каких-либо ограничений на область. Так, в 1994 году Е.В. Davies [1], решая эту задачу для случай $p = s = 2$ выдвинул гипотезу, что константа Харди должна быть равна 4 для любой произвольной области. В 1997 году был найден контрпример (см., например, [2]) из которого следует что константа Харди, для $n \geq 4$ должна удовлетворять неравенству:

$$c(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \leq \frac{4}{(n-2)^2} < 4, \quad n \geq 4.$$

Целью текущей работы является получение равномерной нижней оценки константы Харди для произвольной области при произвольных $p > 1$ и

$s > 1$. Через c_n обозначим наибольшую величину, которая ограничивает снизу константу Харди для всех областей, а именно,

$$c_n = \inf_{\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \mathbb{R}^n} c_n(\Omega).$$

Полученные нами результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и дано неравенство

$$\int_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq c_{p,s}(\Omega) \int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx,$$

где $p > 1$, $1 < s \leq p$. Пусть $B(n, p)$ — бета-функция Эйлера, тогда константа c_n удовлетворяет неравенству:

$$c_n \geq \frac{B(n, p)p(p+1)^p}{2^{p-s}5^{\frac{p}{2}}((B(n, p)p)^{\frac{1}{p}} + p + 1)^p}.$$

Оценка полученная в теореме 1 является точной по порядку при $n \rightarrow \infty$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00351.

- [1] Davies E.B. The Hardy Constant// Q J Math 46 (4), № 12 (1995), 417–431.
- [2] Marcus M., Mizel V., Pinchover Y., On the best constant for Hardy's inequality in $\mathbb{R}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc., 1998, No.8, Vol. 350, 3237–3255.

Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 стационарного типа для одноатомного газа

Шаяхметова Р. Ф.

Институт механики УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Система уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа имеет вид[1]:

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0,$$

$$D\rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

$$DS = 0, S = p\rho^{-\frac{5}{3}},$$

где $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия. Система допускает группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли. Особенностью данной алгебры является наличие проективного оператора. В работе [2] построена оптимальная система неподобных подалгебр, включающая 1248 представителей. Подалгебр, содержащих проективный оператор, значительно меньше. Все они представлены в работе [3] в компактном виде (73 представителя).

В данной работе рассмотрены все одномерные подалгебры работы [3] (3 представителя). Для каждой подалгебры вычислены инварианты и построены инвариантные подмодели ранга 3. Все подмодели стационарного типа. Они приведены к каноническому виду, указанному в работе [4, п.8, с.58]. Согласно теореме работы [4, п.8, с.60] для полученных систем выделена область гиперболичности. Вдоль линии тока получен интеграл энтропии. Аналогично интегралу Бернулли для стационарных движений, для подмоделей получено обыкновенное дифференциальное уравнение на инвариантные функции вдоль линии тока. Геометрически представлены линии уровня инвариантных функций.

Также рассмотрены все двумерные подалгебры работы [3]. Для подалгебр построены инвариантные подмодели ранга 2, все они стационарного типа. Согласно способу, описанному в работе [5], подмодели приведены к каноническому виду. Там, где возможно, для подмоделей получен интеграл энтропии вдоль линии тока и обыкновенное дифференциальное уравнения вместо интеграла Бернулли. Дальнейшее исследование заключается в перенесении других свойств подмодели стационарных движений на полученные подмодели стационарного типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант 14-01-97027.

- [1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика. ПММ, 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

- [2] Черевко А. А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S) \rho^{5/3}$. Новосибирск, 1996. (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, № 4-96). С. 3–37.
- [3] Шаяхметова Р.Ф. Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа. Сибирские электронные математические известия, 2014. Т. 11. С. 605–625.
- [4] Хабиров С.В. Лекции аналитические методы в газовой динамике. БГУ, Уфа, 2013. С. 58–69.
- [5] Хабиров С.В. Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду. Математические заметки, 1999. Т.66. Выпуск 3. С. 439–444.

Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром

Шкаликов А.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия

Для самосопряженного, нормального и позитивного оператора T мы определяем понятия вполне T -подчиненного возмущения, сильного и слабого T -подчиненного возмущения с порядком $p < 1$, а также локально T -подчиненных возмущений разных типов.

Основные вопросы: Как меняется асимптотика спектра оператора $T + B$ при разных типах возмущений B ? При каких условиях на возмущение B сохраняются свойства полноты или базисности собственных векторов оператора $T + B$?

В докладе будут приведены как известные, так и (в основном) новые результаты на эту тему.

On mixed problem for even-order partial differential quasi-linear equation

Yuldasheva A.V.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

We consider following problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(t, x, u), (t, x) \in D\{0 < t < T, 0 < x < \pi\}, k \in \mathbb{N},$$

$$u(0, x) = \varphi(x), u_t(T, x) = \psi(x), 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \Big|_{x=\pi}, \quad i = 0, 1, \dots, 2k-1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

where $\varphi(x)$, $\psi(x)$ and $f(t, x, u)$ are given functions defined on $[0, \pi]$ and $\overline{D} \times (-\infty, \infty)$ respectively and function $u(t, x)$ is solution of the problem.

Definition 1. The function $v(t, x) \in C(\overline{D})$ is called *test function* if it has continuous partial derivatives of order contained in equation and satisfies both following conditions

$$v(0, x) = v_t(T, x) = 0$$

and the boundary conditions.

From [1], we give the definition

Definition 2. The function $u(t, x) \in C(\overline{D})$ satisfying the integral identity

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^\pi \left\{ u \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right] - f(t, x, u)v \right\} dx dt \\ & + \int_0^\pi \psi(x)v(T, x)dx + \int_0^\pi \varphi(x)v_t(0, x)dx = 0 \end{aligned}$$

for an arbitrary test function $v(t, x)$ is called *weak generalized solution* of considered mixed problem.

The existence, uniqueness and continuity of weak generalized solution is proved. Firstly, test function is defined for solution of problem, then generalized solution of the problem is defined by this function. the weak solution is searched as a Fourier series with unknown variable coefficients, then for these coefficients a system of infinite integral equations is obtained. the existence and uniqueness of this system is proved by consecutive approximation method in B_T - Banach space.

- [1] H.I. Chandrov, On mixed problem for a class of quasilinear hyperbolic equation, Tbilisi, 1970.
- [2] H. Halilov, On mixed problem for a class of quasilinear pseudo-parabolic equations, Applicable Analysis, 75, No. 1-2, 2000, 61-71.
- [3] D.A. Ladyzhenskaya, Boundary value problem of mathematical physics, Spribger, New York, 1985.

Спектр поперечных колебаний участка трубопровода при воздействии продольной нагрузки

Юлмухаметов А.А.

Институт механики УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается статический линейный изгиб трубопровода на переходах через реки, овраги и другие препятствия под действием собственного веса трубы и транспортируемой жидкости. Предполагается, что части трубопровода по обе стороны от провисающего участка заделаны в грунт с одинаковыми свойствами. Применяется простейшая модель упругости грунта, состоящая в замене его распределенной системой пружин с определенными жесткостями в продольном и поперечном направлениях трубопровода. Учитывается скорость движения транспортируемой жидкости. Внутренний перепад давления оказывает неуравновешенное боковое усилие, направленное в сторону выпуклости искривленной осевой линии. Учитывается также влияние на изгиб осевого растяжения трубы, возникающего в результате ее осесимметричной деформации. Прямая задача состоит в определении прогиба при заданных размерных, жесткостных и силовых характеристиках трубопровода и грунта. Для упрощения задачи рассматривается случай высокого внутреннего давления и неглубокого залегания трубопровода в грунте. Определяется зависимость прогиба от отношения жесткостей грунта и трубопровода, а также от внутреннего давления и скорости жидкости. С увеличением давления возрастает прогиб. В частности, определяется

критическое значение внутреннего давления, когда в линейной задаче прогиб возрастает неограниченно. Обратная задача состоит в определении относительной жесткости грунта при приборном определении прогиба трубопровода или деформации его крайних волокон. Для этого применяется способ догружения трубопровода известной сосредоточенной силой и соответствующего приборного определения прогиба или деформации. В частности, догружение и соответствующие замеры осуществляются в средней точке пролета трубопровода. Определяется критическое значение относительной жесткости грунта, ниже которого прогибы возрастают неограниченно.

О безусловных базисах из экспонент в весовых пространствах на интервале вещественной оси с ограничениями на порождающую функцию

Юлмухаметов Р.С., Юнусов А.А.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается задача о существовании безусловных базисов из экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ в гильбертовых пространствах

$$L_2(h) = \{f \in L_{\text{loc}}(-1, 1) : \|f\|^2 = \int_{-1}^1 |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt < \infty\},$$

где h — выпуклая функция на $(-1, 1)$.

Система элементов $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$ в гильбертовом пространстве H называется безусловным базисом (см. [1], [2]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для любого набора чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ выполняется соотношение

$$c \sum_{j=1}^n |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^n c_k e_k \right\|^2 \leq C \sum_{j=1}^n |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Предположим, что в пространстве $L_2(h)$ существует безусловный базис из экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$. Целую функцию $L(\lambda)$ с простыми нулями в точках λ_k в дальнейшем будем называть порождающей функцией безусловного базиса.

Утверждение о том, что для двух неотрицательных функций f, g при некоторой постоянной C выполняется оценка $f(x) \leq Cg(x)$, $\forall x \in X$, будем обозначать символом $\prec$: $f(x) \prec g(x)$, $x \in X$. Соответствующий смысл имеют символы $\succ$ и $\asymp$.

Через $\tilde{h}(x) = \sup_{|t|<1}(xt - h(t))$ обозначим сопряженную по Юнгу функцию к функции h .

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть порождающая функция L безусловного базиса из экспонент в пространстве $L_2(h)$ удовлетворяет условиям:

1) на некоторой вертикали $\operatorname{Re} z = a$ для некоторого α , $|\alpha| < \frac{1}{2}$, выполняется верхняя оценка

$$|L(a + iy)| \prec (1 + |y|)^\alpha, \quad y \in \mathbb{R},$$

2) на некоторой вертикали $\operatorname{Re} z = c$ вне кругов $B_k(\delta) := B(\lambda_k, \delta)$ выполняется нижняя оценка

$$|L(c + iy)| \succ (1 + |y|)^\alpha,$$

причем круги $B_k(2\delta)$ попарно не пересекаются. Тогда

$$|L'(\lambda_k)| \asymp \frac{(1 + |\lambda_k|)^\alpha}{|x_k| + 1} e^{\tilde{h}(x_k)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и для всех $\varepsilon > 0$

$$|L(\lambda)| \asymp (1 + |\lambda|)^\alpha e^{\tilde{h}(x)}, \quad \lambda = x + iy \notin \bigcup_k B(\lambda_k, \varepsilon(|x_k| + 1)).$$

Теорема 2. Если в пространстве $L_2(h)$ существует безусловный базис из экспонент и порождающая функция этого базиса удовлетворяет условиям теоремы 1, то весовая функция h ограничена и пространство $L_2(h)$ как банахово пространство изоморфно классическому пространству L_2 .

- [1] Никольский Н. К., Павлов Б. С., Хрущев С. В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* - Препринт ЛОМИ, Р-8-80.
- [2] Hruscev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S. *Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels* // Complex Analysis and Spectral Theory. Lecture Notes in Mathematics. — 1981. — V. 864. — Pp. 214–335.

Бифуркация циклов автономных систем с однородными нелинейностями

Юмагулов М.Г.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x' = A(\alpha)x + \alpha a_p(x), \quad x \in R^N \quad (N \geq 2), \quad (1)$$

в котором α – скалярный малый параметр, матрица $A(\alpha)$ гладко зависит от α , а нелинейность $a_p(x)$ является однородной порядка p : $a_p(\lambda x) \equiv \lambda^p a_p(x)$, $p \geq 2$. Пусть матрица $A(0)$ имеет простые собственные значения $\pm \omega_0 i$, $\omega_0 > 0$.

Значение $\alpha = 0$ назовем *точкой бифуркации циклов системы (1), ответвляющихся от цикла $\mathcal{Y}_0$* , если существует $\delta_0 > 0$ такое, что:

- при каждом $\alpha \in (-\delta_0, \delta_0)$ система (1) имеет цикл $\mathcal{Y}(\alpha)$, являющийся при ненулевых α изолированным;

- цикл $\mathcal{Y}(\alpha)$ непрерывно (в метрике Хаусдорфа) зависит от α , при этом $\mathcal{Y}(0) = \mathcal{Y}_0$.

Если циклы $\mathcal{Y}(\alpha)$ системы (1) существуют только при $\alpha \in (-\delta_0, 0]$ (только при $\alpha \in [0, \delta_0)$), то будем говорить о *субкритической (суперкритической) бифуркации циклов*.

Если циклы $\mathcal{Y}(\alpha)$ удовлетворяют соотношению: $\min_{x \in \mathcal{Y}(\alpha)} \|x\| \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$, то будем говорить, что значение $\alpha = 0$ является *точкой бифуркации циклов системы (1) на бесконечности*.

В докладе обсуждаются вопросы о признаках бифуркации циклов системы (1), а также некоторые приложения.

- [1] Rachinskii D., Schneider K. Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms. // J. Different. Equat. 2005. V. 210. P. 65-86.
- [2] Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Музафаров С.М., Нуров И.Д. Бифуркация Андронова-Хопфа со слабоосциллирующими параметрами. // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 39-44.

Содержание

<i>Абанин А.В.</i> Классические операторы в весовых банаховых пространствах голоморфных функций	6
<i>Абенов М.М.</i> О континууме точных решений системы Эйлера .	7
<i>Абузярова Н.Ф.</i> О 2-порожденности подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси	9
<i>Abylayeva A.M.</i> Hardy type inequalities with variable upper limit .	10
<i>Алимов А.Р.</i> Выборки из метрической проекции для солнц в трехмерных пространствах	11
<i>Ахмерова Э.Ф.</i> Сведение спектральных задач для самосопряженных операторов к изучению резольвенты оператора Штурма-Лиувилля	12
<i>Ахметов Р.Г.</i> Асимптотические решения задачи конвективной диффузии в следе за каплей с учётом объёмной химической реакции	13
<i>Akhtyamov A.M.</i> Identification of Boundary Conditions from Eigenvalues	14
<i>Ахтямов А.М., Шагиев В.Р.</i> Проблема идентификации типов закрепления трубопровода по собственным частотам. . . .	16
<i>Ахтямов Н.Т.</i> О гиперциклических операторах в пространствах последовательностей	17
<i>Баландин С.П.</i> Об интегрируемости некоторых матричных уравнений	18
<i>Банару Г.А.</i> О геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков	19
<i>Bashejeva A.O.</i> Minimal completions of lattices and its applications in FCA	21
<i>Бикчентаев А.М.</i> О τ -компактности произведения τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана	22
<i>Бондаренко Н.П., Бутерин С.А.</i> Обратные спектральные задачи для системы Дирака с интегральным запаздыванием . .	24

<i>Борд Е.Е., Хе А.К., Панарин В.А., Орлов К.Ю., Черевко А.А.</i> Дифференциальное уравнение описывающее гемодинамику в кровеносных сосудах	26
<i>Борисов Д.И.</i> Оценка начальных масштабов для слоев с малыми случайными отрицательно определенными возмущениями	28
<i>Брайчев Г.Г.</i> Особенности относительного роста выпуклых функций	29
<i>Braeutigam I.N.</i> On the asymptotic behavior of solutions of vector Sturm-Liouville equations	31
<i>Валеев Н.Ф.</i> Обратные спектральные задачи с неполными данными.	32
<i>Валиуллина Л.Г.</i> Об асимптотике спектра оператора Штурма–Лиувилля с комплексным логарифмическим потенциалом	34
<i>Вильданова В.Ф.</i> О внутренней гладкости решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка	35
<i>Васильев А.В.</i> Квантовое хеширование для конечных абелевых групп	35
<i>Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н.</i> О порядках ряда Дирихле с нерегулярным распределением показателей в полуполосах	37
<i>Гайсин Р.А.</i> Универсальное условие аналитической квазианалитичности	39
<i>Garifullin R.N., Yamilov R.I. and Levi D.</i> Non-invertible transformations of differential-difference equations	41
<i>Гималтдинова А.А., Курман К.В.</i> Краевые и нелокальные задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области	41
<i>Голубчик И.З.</i> Решение систем ОДУ при помощи задачи факторизации	43
<i>Гонцов Р.Р.</i> Разрешимость в конечном виде фуксовых систем с малыми показателями на $\mathbb{C}P^n$	44
<i>Горючкина И.В.</i> Об аналитической структуре формальных решений уравнений Пенлеве	46

<i>Gumerov R.N.</i> Matrices with simple spectra and Weierstrass polynomials arising in estimations of tensor ranks	48
<i>Давлетов Д.Б.</i> О формальной асимптотике двукратного собственного значения сингулярно возмущенной краевой задачи Дирихле для оператора Ламэ	50
<i>Дрожжсинов Ю.Н.</i> Тауберовы теоремы для голоморфных функций ограниченного аргумента	52
<i>Екомасов Е.Г., Кудрявцев Р.В., Гумеров А.М., Абакумова Н.Н.</i> Кинк-примесные взаимодействия в модели синус-Гордона с учётом внешней силы и затухания	53
<i>Елисеев А.Г.</i> Особенности построения регулярного асимптотического решения сингулярно возмущенной системы Вольтерра 2-го рода	54
<i>Ескермесулы А.</i> Об индексах дефекта двучленного минимального дифференциального оператора четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами	56
<i>Ершов А.А., Сулейманов Б.И.</i> Некоторые особенности изгибаний стержня при сильном продольном сжатии	58
<i>Жибер А.В., Юрьева А.М.</i> Гиперболические уравнения лиувилевского типа специального класса	58
<i>Завьялов М.Н., Маергойз Л.С.</i> Эскиз теории роста функций, голоморфных в многомерном торе	59
<i>Зикиров О.С.</i> О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка	60
<i>Зименс К.Р.</i> Об одной задаче оператора свертки на левой полуплоскости	61
<i>Ибрагимова Л.С.</i> О бифуркациях периодических колебаний в двухпараметрических гамильтоновых системах	62
<i>Иванова О.А., Мелихов С.Н.</i> О динамике оператора Поммье	63
<i>Ivrii O., Kaupov I.R.</i> Makarov's principle for the Bloch unit ball	64
<i>Ильясов Я.Ш.</i> Критические значения применимости метода Нехари и обобщенное отношение Рэлея	66
<i>Исаев К.П.</i> О безусловных базисах из экспонент в пространствах со степенным весом	66

<i>Исламов Г.Г.</i> Спектральная задача для ротора в неортогональной системе координат	68
<i>Ишкин Х.К.</i> Аналог теоремы Келдыша для операторов, не близких к самосопряженным	69
<i>Кадченко С.И., Закирова Г.А., Рязанова Л.С., Кадченко А.И.</i> Численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных дискретными полуограниченными снизу операторами	71
<i>Какушкин С.Н., Кадченко С.И.</i> Нахождение собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов	73
<i>Калинин С.И.</i> (α, β) -выпуклые функции, их свойства и некоторые применения	75
<i>Калякин Л.А.</i> Авторезонанс в автономной системе	76
<i>Карабашева Э. Н., Шабалин П. Л.</i> Однолистность отображений полуплоскости на полигональные области с неограниченным вращением порядка $\ln^\alpha t , t \rightarrow \infty, \alpha \leq 1$	77
<i>Каримов О.Х.</i> Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве	79
<i>Качалов В.И.</i> Голоморфная регуляризация сингулярных возмущений	80
<i>Клячин В.А.</i> Об одном классе функционалов, минимизируемых Φ -триангуляциями	82
<i>Кожевникова Л.М.</i> Об энтропийных решениях анизотропных эллиптических уравнений с нестандартными условиями роста	84
<i>Colakoglu Havare O. and Menken H.</i> A Note on Derivative of the q -Extension of p -Adic Gamma Function.	85
<i>Конечная Н.Н., Сафонова Т.А., Тагирова Р.Н.</i> Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта для операторов шестого порядка, порожденных произведением квазидифференциальных выражений	85
<i>Кордюков Ю.А.</i> Лапласианы на гладких распределениях	87

<i>Кошкарлова Б.С., Кусаинова Л.К.</i> Об осцилляторности полулинейных дифференциальных уравнений со знакопеременными коэффициентами	89
<i>Кулаев Р.Ч.</i> Критическая неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе	90
<i>Кусаинова Л.К., Касым А.С.</i> О разделимости оператора Штурма-Лиувилля в весовых пространствах мультипликаторов	92
<i>Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.</i> О некоторых задачах оптимального управления и их аппроксимации для некоторых несамосопряженных эллиптических уравнений типа конвекции-диффузии	94
<i>Лучников И.А.</i> Динамика взаимодействующих спиновых цепочек в модели столкновений	95
<i>Луценко А.В., Луценко В.И.</i> Эквивалентность некоторых интегралов от целых функций	97
<i>Магадов К.Ю.</i> Фермионные квантовые каналы разрушающие запутанность	99
<i>Mamedov Kh.R., and Ala V.</i> On the Inverse Problem for a Sturm-Liouville Equation with Discontinuous Coefficient	100
<i>Mamedov Kh.R., and Kara B.</i> The uniqueness of the solution for the problem of identification of Sturm boundary conditions for an inhomogeneous string	101
<i>Mamedov Kh.R., and Nur E.Y.</i> Identification of coefficients in boundary conditions of strings graph	102
<i>Mamedov Kh.R., and Cetinkaya A.F.</i> Identification of different densities of the strings-edges from eigenvalues of strings graph	103
<i>Мартынова Ю.В.</i> Обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на графе	104
<i>Makhmutov S., Makhmutova M.</i> Metric spaces of bounded analytic functions	106
<i>Menken H. and Colakoglu Havare O.</i> The Volkenborn Integral of q -Extension of p -Adic Gamma Function	107

<i>Menken H., and Sahin F.</i> The uniqueness of the identification of masses at beam ends for an inhomogeneous string	108
<i>Мерзляков С. Г.</i> О нулях квазиполиномов с вещественными показателями	109
<i>Мерзляков С.Г., Попенов С.В.</i> Множество показателей рядов экспонент для интерполяции в любой выпуклой области .	109
<i>Мирзоев К.А.</i> О дефектных числах операторов, порожденных бесконечными якобиевыми матрицами	110
<i>Мукминов Ф.Х., Андриянова Э.Р.</i> Существование и единственность ренормализованного решения параболического уравнения с двойной переменной нелинейностью	111
<i>Муллабаева А.У.</i> Решение задачи Шапиро для обобщенной свертки в пространстве $H(\mathbb{C})$	112
<i>Мусин И.Х.</i> О свойствах преобразования Юнга-Фенхеля	113
<i>Мусин И.Х., Яковлева П.В.</i> Дифференциально-разностный оператор в пространстве Шварца	115
<i>Мустафина И.Ж.</i> О построении границ областей устойчивости точек равновесия неавтономных периодических систем . .	115
<i>Мустафокулов Р.</i> Осцилляционные свойства спектра задачи для цепочки стержней с упругими опорами в узлах сочленения	117
<i>Напалков В. В. (мл.)</i> Описание пространства сопряженного с подпространством Баргмана – Фока	119
<i>Насибуллин Р.Г.</i> Интегральные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя	121
<i>Nasyrov S.R.</i> One-parametric families of Reimann surfaces	123
<i>Novikov An.An.</i> Normed linear spaces of sesquilinear forms associated with positive operator affiliated with von Neumann algebra	124
<i>Киселев О.М., Новокшенов В.Ю.</i> Авторезонанс в модели генератора терагерцевых волн	126
<i>Нуятов А.А.</i> Многоточечная задача Валле Пуссена с кратными комплексными узлами для операторов свертки	128

<i>Ойнаров Р.</i> Пространства с мультивесовыми производными и краевые задачи для сингулярных дифференциальных уравнений	130
<i>Осипов Е.А.</i> Метод частичных областей для задач пространственной теории упругости	131
<i>Оспанова А. Б., Кусаинова Л. К.</i> О точечных мультипликаторах в разностных пространствах	133
<i>Парусникова А.В.</i> О порядках Жевре формальных степенных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве	134
<i>Расулов А.Б., Бободжонова М.А., Федоров Ю.С.</i> Представление общего решения уравнения типа Коши–Римана с сингулярной окружностью и особой точкой	135
<i>Рахимова А.И.</i> Оценки оператора обобщённого дифференцирования	136
<i>Романова Е.А.</i> Сильно вырожденные разрешающие семейства дробных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах	138
<i>Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.</i> Начально-граничная задача для неоднородного вырождающегося уравнения смешанного парабола-гиперболического типа	140
<i>Сабитова Ю.К.</i> Первая граничная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с нагруженными слагаемыми	141
<i>Сакбаев В.Ж.</i> Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов	143
<i>Салимов Р.К., Екомасов Е.Г.</i> О бризерных решениях сферически симметричного уравнения Клейна-Гордона	145
<i>Сакс Р.С.</i> Пространство $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ и собственные функции операторов: ротор и градиент дивергенции	147
<i>Сергеев А.Г.</i> Квантовое исчисление и квазисимметричные гооморфизмы	149

<i>Сидельникова Н.А.</i> Асимптотика спектра сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в вырожденном случае	149
<i>Сиравва Д.Т.</i> Решение галилеево-инвариантной подмодели ранга два	151
<i>Старцев С.Я.</i> Формальные интегралы и операторы Нётер гиперболических систем уравнений, допускающих богатый набор симметрий	152
<i>Султанаев Я.Т., Назирова Э.А.</i> Асимптотика решений дифференциальных уравнений с колеблющимися коэффициентами	154
<i>Султанов О.А.</i> Стохастические возмущения устойчивых динамических систем	154
<i>Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.</i> Специальные свойства полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля	155
<i>Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Эйдельман Ю. С.</i> Новые подходы к исследованию обратных и нелокальных задач для эволюционных уравнений	156
<i>Тимергалиев Б.С.</i> Неравенство типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для обобщенных моментов	158
<i>Трушечкин А.С.</i> Производство энтропии в марковских открытых квантовых системах	159
<i>Тураев Р.Н.</i> Нелокальная задача Флорина с интегральным граничным условием	162
<i>Тухтасинов М.</i> Линейная дифференциальная игра преследования с управлением импульсного и с ограничением смешанного характеров	163
<i>Фазуллин З.Ю.</i> Об одной формуле вычисления регуляризованных следов возмущений дискретных операторов и ее приложениях.	165
<i>Федоров В.Е., Дышаев М.М.</i> Групповая классификация и точные решения уравнения Шёнбухера — Уилмотта	167

<i>Филиппов В.Н.</i> Задача о порождающих в кольце целых функций многих комплексных переменных первого порядка и минимального типа в конусе	168
<i>Filippov S.N.</i> Non-linear quantum dynamics induced by measurements	170
<i>Хабибуллин Б.Н., Таминдарова Н.Р.</i> Распределение нулей голоморфных функций и тестовые функции	172
<i>Хабибуллин И.Т., Попцова М.Н.</i> Интегрируемые двумеризованные цепочки. Характеристические кольца Ли и классификация	173
<i>Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.</i> Об одном методе построения пар Лакса для интегрируемых систем	175
<i>Хабиров С. В.</i> Вихревые установившиеся плоские неизоэнтропические течения идеального газа	175
<i>Hamhalter J., Turilova E.</i> Orthogonal Measures on State Spaces and Context Structures of Quantum Theory	176
<i>Хачай О. Ю., Носов П.А.</i> Исследование асимптотики решения нелинейного уравнения в частных производных с анализом точки катастрофы “бабочка”	178
<i>Хуснуллин И.Х.</i> О возмущении волновода комплексным потенциалом	180
<i>Царьков И.Г.</i> Новая теорема о неподвижной точке	182
<i>Shaimardan S.</i> A Hardy-type inequality for fractional integral operator in q -analysis.	183
<i>Шакиров И.А.</i> Об оптимальном приближении нормы оператора Фурье семейством логарифмических функций	185
<i>Шамоллин М.В.</i> Интегрируемые системы с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере	187
<i>Шапошникова Д.А.</i> Асимптотика интегралов — функций «всплеска» при больших значениях аргумента	189
<i>Sharafutdinov V.</i> Estimates for the Steklov spectral zeta function of a planar domain and a compactness theorem	191
<i>Шафигуллин И.К.</i> Обобщенная гипотеза Дэвиса для областей в n -мерном пространстве	192

<i>Шаяхметова Р. Ф.</i> Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 стационарного типа для одноатомного газа	193
<i>Шкаликов А.А.</i> Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром	195
<i>Yuldasheva A.V.</i> On mixed problem for even-order partial differential quasi-linear equation	196
<i>Юлмухаметов А.А.</i> Спектр поперечных колебаний участка трубопровода при воздействии продольной нагрузки	197
<i>Юлмухаметов Р.С., Юнусов А.А.</i> О безусловных базисах из экспонент в весовых пространствах на интервале веще- ственной оси с ограничениями на порождающую функцию	198
<i>Юмагулов М.Г.</i> Бифуркация циклов автономных систем с од- нородными нелинейностями	200

Научное издание

**УФИМСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ**

***Сборник тезисов
(г. Уфа, 27 – 30 сентября 2016 г.)***

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 22.09.2016 г. Формат 60х84/16.
Усл. печ.л. 12,08. Уч.-изд.л. 12,6.
Тираж 170 экз. Изд. № 135. Заказ 402.

*Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*