ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 43-46.

УДК 517.98

ОЦЕНКА БИФУРКАЦИОННОГО ПАРАМЕТРА В СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Д.К. ПОТАПОВ

Аннотация. В работе рассматривается проблема существования решений задачи на собственные значения для нелинейных уравнений с разрывными операторами в рефлексивном банаховом пространстве. При этом коэрцитивность соответствующего отображения не предполагается. Вариационным методом получена оценка сверху величины бифуркационного параметра для исследуемых задач. Данный результат подтверждает справедливость аналогичных полученных ранее оценок сверху для величины бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями.

Ключевые слова: собственные значения, спектральные задачи, разрывный оператор, вариационный метод, оценка сверху, бифуркационный параметр.

В работах [1, 2] в вещественном рефлексивном банаховом пространстве E рассматривалась проблема существования ненулевых решений уравнения

$$Au = \lambda Tu \tag{1}$$

в зависимости от параметра λ, где A – линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E^* – сопряженное с E пространство), $T : E \to E^*$ – разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на E. Получены теоремы о существовании луча положительных собственных значений для уравнений вида (1) и наличии для каждого такого значения собственного вектора, который является точкой радиальной непрерывности оператора T (теорема 2 из работы [1] и теорема 2 из работы [2]).

В данной работе рассмотрим вопрос об оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными операторами, будем использовать обозначения и определения из работ [1, 2], не описывая их вновь.

Отметим важность исследования уравнения (1), имеющего, безусловно, огромное количество конкретных приложений (хотя бы в силу чрезвычайной общности этого класса уравнений). А именно, полученные общие результаты могут быть применены к исследованию спектральных задач для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями, имеющих важное прикладное значение, например, к задаче об отрывных течениях несжимаемой жидкости М.А. Гольдштика [3], к задаче о вихревых кольцах в идеальной жидкости L.E. Fraenkel, M.S. Berger [4], к задаче H.J. Kuiper [5] о нагреве проводника при постоянном напряжении и постоянной температуре на поверхности проводника в случае, когда электропроводность материала при переходе через определенные температуры меняется скачком, а также ряду других конкретных эллиптических краевых задач, приводящих к соответствующим отображениям A и T, для которых использование оценки бифуркационного параметра будет плодотворным. В работе [6] выписана такая оценка

D.K. Potapov, Estimation of the bifurcation parameter in spectral problems for equations with discontinuous operators.

Поступила 13 ноября 2010 г.

для задачи М.А. Гольдштика, а в работах [7, 8] получена оценка сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в широком классе таких спектральных задач.

Как и ранее [9], уравнение (1) изучается вариационным методом. Для реализации вариационного подхода к исследованию уравнения (1) дополнительно потребуем квазипотенциальность оператора T. Так как в уравнении (1) оператор A линейный и самосопряженный, то он потенциален, и его потенциал $\phi(u) = \frac{1}{2}(Au, u)$ [10]. Свяжем с уравнением (1) функционал $f^{\lambda}(u) = \phi(u) - \lambda f(u)$, где f – квазипотенциал оператора T. Не теряя общности, будем считать, что $f(0) = 0$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что*
1) A – линейный самосопряженный оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства E в сопряженное пространство E^*, пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств E_1 и E_2, $E_1 = \ker A$, причем существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что

$$(Au, u) \geq \alpha ||u||^2$$

для любого $u \in E_2$;
2) отображение T компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом f) и ограниченное на E, $f(0) = 0$ и для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u \in E_1, ||u|| \to +\infty} f(u) = -\infty;$$

3) если отображение T компактное, то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{t \to +0} (T(u + th) - Tu, h) \geq 0$$

для всех $u, h \in E$;
4) если отображение T антимонотонное, то дополнительно предполагается, что любая точка разрыва оператора T при $\lambda > \lambda_0 > 0$ регулярная для $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$ (λ_0 – величина, начиная с которой задача на собственные значения разрешима).
Тогда справедлива следующая оценка сверху для величины бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами:

$$\lambda_0 \leqslant \inf_{u_0 \in U} \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{\int\limits_0^1 (T(tu_0), u_0) dt},$$

где

$$U = \{u_0 \in E : \int\limits_0^1 (T(tu_0), u_0) dt > 0\}.$$

Доказательство теоремы. Сформулированная теорема является непосредственным следствием теоремы 2 из работы [1] и теоремы 2 из работы [2]. Действительно, из утверждений данных теорем следует, что $f^{\lambda}(u) < 0$. Отсюда имеем

$$\lambda f(u) > \frac{1}{2}(Au, u).$$

В силу условия 2) теоремы для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$. Отсюда имеем

$$\lambda > \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{f(u_0)}.$$

Положим
$$U = \{u_0 \in E : f(u_0) > 0\}$$
(в силу условия 2) теоремы данное множество непусто). Тогда для величины λ_0 справедлива следующая оценка сверху:
$$\lambda_0 \leqslant \inf_{u_0 \in U} \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{f(u_0)}.$$
Из определения квазипотенциальности имеем
$$f(u_0) = \int_0^1 (T(tu_0), u_0)dt.$$
Таким образом, справедлива следующая оценка сверху для величины λ_0 в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами:
$$\lambda_0 \leqslant \inf_{u_0 \in U} \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{\int_0^1 (T(tu_0), u_0)dt},$$
где
$$U = \{u_0 \in E : \int_0^1 (T(tu_0), u_0)dt > 0\}.$$
Теорема доказана.

Отметим, что факт выполнения условий доказанной теоремы для соответствующих эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями устанавливается аналогично тому, как это сделано в работах [1, 2]. Поэтому для величины бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями имеет место аналогичная оценка сверху, что подтверждает результаты работ [7, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павленко В.Н., Потапов Д.К. *О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами* // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919.
2. Потапов Д.К. *О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2004. Вып. 4. С. 125–132.
3. Гольдштик М.А. *Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313.
4. L.E. Fraenkel, M.S. Berger *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid* // Acta Math. 1974. Vol. 132, № 1. P. 13–51.
5. H.J. Kuiper *On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems* // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. 1971. Vol. 20, № 2–3. P. 113–138.
6. Потапов Д.К. *Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика* // Матем. заметки. 2010. Т. 87. Вып. 2. С. 262–266.
7. Потапов Д.К. *Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 715–716.
8. Потапов Д.К. *О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 150–152.
9. Потапов Д.К. *Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью.* СПб.: Изд-во ИБП. 2008. 99 с.

10. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* М.: Наука. 1972. 416 с.

Дмитрий Константинович Потапов,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru