ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 3-15.

УДК 517.5

О БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСАХ ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о существовании безусловных базисов из экспонент в общих гильбертовых пространствах $H = H(E)$, состоящих из функций на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяющих условиям

1. Норма в пространстве H слабее равномерной нормы на E, то есть для некоторой константы A и для любой ограниченной функции f из H выполняется оценка

$$||f||_H \leq A \sup_{z \in E} |f(z)|.$$

2. Экспоненты $\exp(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, принадлежат пространству H, и эта система полна в пространстве H.

Получено условие, при выполнении которого в пространстве H безусловных базисов из экспонент не существует.

В более конкретных пространствах доказана достаточность ослабленного условия.

Ключевые слова: ряды экспонент, безусловные базисы, гильбертово пространство.

1. Введение

Понятие безусловных базисов из экспонент является одним из обобщений классических систем Фурье в пространстве $L_2([-\pi;\pi])$. Пристальное внимание многих математиков привлекли прежде всего безусловные базисы из экспонент в весовых пространтвах $L_2(I, w)$. С современным состоянием исследований в этом направлении можно ознакомиться в монографии [13]. В работе [14] было начато изучение безусловных базисов из экспонент в гильбертовых подпространствах пространства $H(D)$ аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ функций. Для пространства Смирнова $E_2(D)$ на выпуклом многоугольнике были построены безусловные базисы из экспонент. В работе [15] была предпринята неудачная попытка построить базисы из экспонент в $E_2(D)$ на выпуклой области с гладкой границей. В диссертациии [16] доказано, что в пространствах Смирнова на выпуклых областях, содержащих на границе гладкую дугу, безусловных базисов из экспонент не существует. Наконец, в [7] показано, что в пространствах Бергмана на выпуклых областях, на границе которых есть точка с ненулевой кривизной, безусловных базисов из экспонент не существует. В диссертации [12] этот результат перенесен на весовые пространства на интервалах.

В данной работе мы обобщаем методы упомянутых работ на общие гильбертовы пространства и доказываем достаточные условия для отсутствия безусловных базисов из экспонент.

Во втором параграфе рассматриваются более конкретные весовые пространства на интервалах.

K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, Unconditional exponential bases in Hilbert spaces.

Поступила 18 декабря 2010 г.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00233-а).

Пусть $H(E)$ — некоторое гильбертово пространство функций, определенных на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Норма в пространстве H слабее равномерной нормы на E, то есть для некоторой константы A и для любой ограниченной функции f из H выполняется оценка

$$||f||_H \leq A \sup_{z \in E} |f(z)|.$$

2. Экспоненты $\exp(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, принадлежат пространству E, и эта система полна в пространстве H.

По теореме Банаха из второго условия следует, что преобразование Лапласа

$$L : S \longrightarrow \widehat{S}(\lambda) := S(e^{\lambda z}),\ \lambda \in \mathbb{C},\ S \in H^*,$$

является инъективным отображением из сопряженного пространства, а из первого легко следует, что оно вкладывет сопряженное пространство H^* в пространство целых функций $H(\mathbb{C})$. Образ при этом отображении $L(H^*)$ обозначим через $\widehat{H}$. В пространстве $\widehat{H}$ будем рассматривать наведенную структуру гильбертового пространства, то есть если $F_1, F_2 \in \widehat{H}$, $F_j = L(S_j)$, то

$$(F_1, F_2)_{\widehat{H}} = (S_1, S_2)_{H^*}.$$

Система элементов e_k, $k = 1, 2, ...$, в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [1]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для для любого набора чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ выполняется соотношение

$$c \sum_{j=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2 \leq || \sum_{j=1}^{n} c_k e_k||^2 \leq C \sum_{j=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2.$$

Известно (см. [2],[3]), что если система e_k, $k = 1, 2, ...,$ — безусловный базис, то любой элемент пространства H единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

причем

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2 \leq ||x||^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2.$$

2. Безусловные базисы из экспонент в гильбертовых пространствах функций

В этом параграфе мы рассматриваем безусловные базисы из экспонент в в гильбертовых пространствах, удовлетворяющих условиям 1, 2 из Введения.

Теорема 1. *Пусть*

$$K(\lambda) = ||e^{\lambda z}||^2.$$

Если система $\{e^{\lambda_k t}\}$ является безусловным базисом в пространстве H, то существует целая функция L с простыми нулями в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, для которой выполняется соотношение.

$$\frac{1}{P} K(\lambda) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L(\lambda)|^2 K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq P K(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где P — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Пусть
$$e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda) e^{\lambda_k z},\ z \in E,$$
и S_k — биортогональная система функционалов на H. Тогда
$$c_k(\lambda) = \widehat{S}_k(\lambda).$$
Следовательно, если $L(\lambda) = c_1(\lambda)(\lambda - \lambda_1)$, то в силу полноты системы $(e^{\lambda_k z})$
$$c_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)},\ k = 1, 2, ...$$
Утверждение теоремы следует из безусловной базисности системы экспонент $(e^{\lambda_k z})$. Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть*
$$K(\lambda) = ||e^{\lambda z}||^2$$
и $\delta_\lambda : F \longrightarrow F(\lambda)$ *— точечный функционал в пространстве* $\widehat{H}$*. Тогда* δ_λ *линейный непрерывный функционал на* $\widehat{H}$ *и*
$$K(\lambda) = ||\delta_\lambda||^2_{\widehat{H}^*},$$
то есть $\sqrt{K(\lambda)}$ *— функция Бергмана (см. [4]) пространства* $\widehat{H}$*. Кроме того,* $\ln K(\lambda)$ *— непрерывная субгармоническая функция на плоскости.*

Доказательство. С одной стороны, если $F \in \widehat{H}$, то $F = \widehat{S}$ для некоторого функционала $S \in H^*$, значит
$$\delta_\lambda(F) = F(\lambda) = S(e^{\lambda z}),$$
поэтому
$$|\delta_\lambda(F)| = |S(e^{\lambda z})| \le ||S|| \cdot ||e^{\lambda z}|| = ||F||\sqrt{K(\lambda)}.$$
Тем самым,
$$||\delta_\lambda|| \le \sqrt{K(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$
С другой стороны, при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $e^{\lambda z} \in H$ и порождает некоторый линейный непрерывный функционал $E \in H^*$. Имеем
$$\delta_\lambda(\widehat{E}) = \widehat{E}(\lambda) = E(e^{\lambda z}) = (e^{\lambda z}, e^{\lambda z})_H =$$
$$= ||e^{\lambda z}||^2 = \sqrt{K(\lambda)}||e^{\lambda z}||_H = \sqrt{K(\lambda)}||E||_{H^*} = \sqrt{K(\lambda)}||\widehat{E}||_{\widehat{H}}.$$
Субгармоничность функции $\ln K(\lambda)$ следует из того, что она является верхней огибающей семейства субгармонических функций $\{\ln|F(\lambda)|,\ F \in \widehat{H},\ ||F|| \le 1\}$. Теорема 2 доказана. □

Введем одну характеристику для непрерывных на плоскости функций u. Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z, r)$ обозначим круг $\{w :\ |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z, r)$ функции f положим
$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$
Пусть $d(f, z, r)$ — расстояние от функции f до пространства гармонических в $B(z, r)$ функций:
$$d(f, z, r) = \inf\{\|f - H\|_r,\ H \text{ — гармонична в } \ B(z, r)\}.$$
Для положительного числа p положим
$$\tau(u, z, p) = \sup\{r :\ d(u, z, r) \le p\}.$$

Непосредственно из определения следует, что если $\exists z_0 \ : \ \tau(u, z_0, p) = \infty$, то $\tau(u, z, p) = \infty$ для всех z. И если $\exists z_0 \ : \ \tau(u, z_0, p) < \infty$, то $\tau(u, z, p) < \infty$ для всех z. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\exists z \ : \ \tau(u, z, p) < \infty$. Тогда функция $\tau(z) = \tau(u, z, p)$ удовлетворяет условию Липшица: для всех z_1 и z_2*

$$|\tau(z_1) - \tau(z_2)| \leq |z_1 - z_2|.$$

Доказательство. По определению в круге $B(z_1, \tau(z_1))$ существует гармоническая функция $h_1(z)$, удовлетворяющая условию

$$|u(z) - h_1(z)| \leq p.$$

Если $|z_1 - z_2| < \tau(z_1)$, то это неравенство выполняется и в круге $B(z_2, \tau(z_1) - |z_1 - z_2|)$. Тем самым

$$\tau(z_2) \geq \tau(z_1) - |z_1 - z_2|.$$

Или $\tau(z_1) - \tau(z_2) \leq |z_1 - z_2|$. Если же $|z_1 - z_2| \geq \tau(z_1)$, то тем более

$$\tau(z_1) - \tau(z_2) \leq |z_1 - z_2|.$$

Поменяем местами z_1 и z_2:

$$\tau(z_2) - \tau(z_1) \leq |z_1 - z_2|.$$

Таким образом,

$$|\tau(z_1) - \tau(z_2)| \leq |z_1 - z_2|.$$

□

В работе [6] показано (лемма 1.1), что в случае, когда u — непрерывная субгармоническая функция, величина $\tau = \tau(u, \lambda, p)$ вполне определяется условием: если $H(z)$ — гармоническая мажоранта функции u в круге $B(\lambda, \tau)$, то

$$\max_{z \in \overline{B}(\lambda, \tau)} (H(z) - u(z)) = 2p. \tag{2}$$

Эту величину определим для функции $u(\lambda) = \ln K(\lambda)$ и числа $\ln(5P)$, где P — константа из соотношения (1). В дальнейшем ее будем обозначать просто через через $\tau(\lambda)$. Итак,

$$\inf_{v \in A(B(\lambda, \tau(\lambda)))} \max_{z \in \overline{B}(\lambda, \tau(\lambda))} |\ln K(z) - v(z)| = \ln(5P),$$

где через $A(B(\lambda, \tau))$ обозначено множество функций гармонических в круге $B(\lambda, \tau(\lambda))$ и непрерывных в замыкании $\overline{B}(\lambda, \tau(\lambda))$.

Теорема 3. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями λ_k, $k = 1, 2, ...,$ при некотором P удовлетворяющая двусторонней оценке*

$$\frac{1}{P} K(\lambda) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L(\lambda)|^2 K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq P K(\lambda).$$

Тогда

1) В любом круге $B(\lambda, 2\tau(\lambda))$ содержится хотя бы один нуль λ_k функции L.

2) Для любых $n, k, \ n \neq k$, выполняется неравенство

$$|\lambda_k - \lambda_n| \geq \frac{\max(\tau(\lambda_k), \tau(\lambda_n))}{10 P^{\frac{3}{2}}}.$$

3) Для любого k в круге $B(\lambda_k, \frac{\tau(\lambda_k)}{20 P^{\frac{3}{2}}})$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{5^6 P^8} K(\lambda) \leq \frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq P K(\lambda).$$

(см. [7], теорема 1).

Теорема 4. *Пусть $\lambda_k,\ k=1,2,...,$ — нули функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы. Тогда в любом конечном множестве нулей B, содержащем хотя бы два нуля, найдется индекс n так, что*

$$\sum_{\lambda_k\in B, k\neq n}\frac{\tau^2(\lambda_k)}{|\lambda_k-\lambda_n|^2}\leq (4P)^{12}. \tag{3}$$

Доказательство. По условию теоремы для любого λ выполняется оценка

$$\sum_{\lambda_k\in B}\frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2}\leq PK(\lambda). \tag{4}$$

Поскольку множество B конечно, то существует такой номер n, что

$$\frac{K(\lambda_n)\tau^2(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2}=\min_{\lambda_k\in B}\left(\frac{K(\lambda_k)\tau^2(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2}\right).$$

По пункту 3 теоремы 3 для точек λ, лежащих на границе круга $B\left(\lambda_n,\frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_n)\right)$, справедлива оценка

$$\frac{1}{5^6P^8}K(\lambda)\leq 20^2P^3\frac{K(\lambda_n)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)}$$

или

$$\frac{K(\lambda)}{|L(\lambda)|^2}\leq 4^25^8P^{11}\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)}.$$

Отсюда и из оценки (4) получим

$$4^25^8P^{11}\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)}\geq\frac{1}{P}\sum_{\lambda_k\in B}\frac{K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2}.$$

Следовательно, для точек λ, лежащих на границе круга $B\left(\lambda_n,\frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_n)\right)$,

$$4^25^8P^{12}\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)}\geq\sum_{\lambda_k\in B}\frac{K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2\tau^2(\lambda_k)}\cdot\frac{\tau^2(\lambda_k)}{|\lambda-\lambda_k|^2}.$$

Учитывая выбор номера n, для точек λ на границе $B\left(\lambda_n,\frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_n)\right)$ имеем

$$4^25^8P^{12}\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)}\geq\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)}\sum_{\lambda_k\in B}\frac{\tau^2(\lambda_k)}{|\lambda-\lambda_k|^2}$$

или

$$\sum_{\lambda_k\in B}\frac{\tau^2(\lambda_k)}{|\lambda-\lambda_k|^2}\leq 4^25^8P^{12}. \tag{5}$$

По пункту 2 теоремы 3 для указанных точек λ при $k\neq n$ выполняется оценка

$$|\lambda-\lambda_k|\leq|\lambda-\lambda_n|+|\lambda_n-\lambda_k|=\frac{\tau(\lambda_n)}{20P^{\frac{3}{2}}}+|\lambda_n-\lambda_k|\leq\frac{3}{2}|\lambda_n-\lambda_k|,$$

поэтому из (5) вытекает оценка

$$\sum_{\lambda_k\in B, k\neq n}\frac{\tau^2(\lambda_k)}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}\leq (4P)^{12}.$$

Теорема 4 доказана. $\square$

Следствие.

Пусть $\lambda_k,\ k=1,2,...,$ — нули функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы и $b=\frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}$. Тогда для любого конечного множества нулей B, содержащем хотя бы два нуля, найдется индекс n так, что

$$\sum_{\lambda_k\in B, k\neq n}\int_{B(\lambda_k,b\tau(\lambda_k))}\frac{dm(\lambda)}{|\lambda-\lambda_n|^2}\leq 4^{10}P^9. \qquad (6)$$

Доказательство. Поскольку для точек $\lambda\in B(\lambda_k,b\tau(\lambda_k))$ имеем

$$|\lambda-\lambda_n|\geq|\lambda_k-\lambda_n|-|\lambda-\lambda_k|\geq\frac{1}{2}|\lambda_k-\lambda_n|,$$

то

$$\int_{B(\lambda_k,b\tau(\lambda_k))}\frac{dm(\lambda)}{|\lambda-\lambda_n|^2}\leq\frac{4\pi b^2\tau^2(\lambda_k)}{|\lambda_k-\lambda_n|^2}.$$

Тогда

$$\sum_{\lambda_k\in B, k\neq n}\int_{B(\lambda_k,b\tau(\lambda_k))}\frac{dm(\lambda)}{|\lambda-\lambda_n|^2}\leq 4\pi b^2(4P)^{12}=\frac{4\pi}{400P^3}(4P)^{12}\leq 4^{10}P^9.$$

□

Теорема 5. *Пусть $H(E)$ — гильбертово пространство, удовлетворяющее условиям 1, 2 из Введения и $\sqrt{K(\lambda)}$ — функция Бергмана пространства $\widehat{H}$. Предположим, что для любого положительного числа p найдется число $\delta=\delta(p)>0$, такое, что функция $\tau(\lambda)=\tau(\ln K(z),\lambda,p)$ для всех $\lambda\in\mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\min_{z\in B(\lambda,2\tau(\lambda))}\tau(z)\geq\delta\tau(\lambda), \qquad (7)$$

и $\tau(\lambda)=o(|\lambda|)$, при $|\lambda|\longrightarrow\infty$. Тогда в пространстве H безусловных базисов из экспонент не существует.

Доказательство. Воспользуемся следующим утверждением (см [8], 216 стр.).

Лемма (Лемма о покрытиях шарами)

Пусть множество $A\subset\mathbb{R}^p$ покрыто шарами так, что каждая точка $x\in A$ является центром некоторого шара $S(x)$ радиуса $r(x)$. Если $\sup_{x\in A}r(x)<\infty$, то из системы $\{S(x)\}$ можно выделить не более чем счетную систему $\{S(x_k)\}$, покрывающую все множество A и имеющую кратность, не превосходящую некоторого числа $N(p)$, зависящего только от размерности пространства.

Нетрудно убедиться в том, что $N(2)=6$.

Проведем доказательство от противного: допустим, что условия теоремы выполнены, но в пространстве $\widehat{H}$ существует безусловный базис из экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}$. Тогда верны теоремы 1,3 и 4. В условии доказываемой теоремы положим $p=\ln(5P)$ и пусть $\tau(\lambda)=\tau(\ln K(z),\lambda,\ln(5P))$.

Выберем произвольное $\varepsilon>0$, и число R будем считать таким большим, чтобы выполнялось условие

$$\max_{|\lambda|\leq R}\tau(\lambda)\leq\varepsilon R. \qquad (8)$$

Такие R можно найти по условию на $\tau(\lambda)$. В самом деле, найдется R' такое, что при $|\lambda|\geq R'$ будет выполняться $\tau(\lambda)<\varepsilon|\lambda|$. Если положим $R=\frac{2R'}{\varepsilon}$, то при $|\lambda|\in[\frac{\varepsilon}{2}R;R]$ будем иметь $\tau(\lambda)<\varepsilon|\lambda|\leq\varepsilon R$. По лемме 1 выполняется соотношение $\tau(\lambda)\leq\tau(0)+|\lambda|$, поэтому если $|\lambda|\in[\tau(0);\frac{\varepsilon}{2}R]$, то $\tau(\lambda)\leq 2|\lambda|\leq\varepsilon R$. Наконец, выбирая R больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}\max\limits_{|z|\leq\tau(0)}\tau(z)$, получим соотношение (8).

Рассмотрим систему кругов $B(\lambda, 2\tau(\lambda))$, $\lambda \in B(0,R)$. По п.1 теоремы 3 в каждом из этих кругов содержится хотя бы один показатель λ_k, и эти круги покрывают весь круг $B(0,R)$. По лемме о покрытиях шарами можно выделить не более чем счетный набор кругов $B_n = B(z_n, 2\tau(z_n))$, покрывающих круг $B(0,R)$, при этом каждая точка этого круга попадает не более чем в $N(2) = 6$ кругов покрытия. В каждом из кругов B_n выберем по одному показателю $\lambda_{k(n)}$. При этом некоторые показатели $\lambda_{k(n)}$ могут оказаться выбранными неоднократно, но по свойствам выделенного покрытия кратность выбора одного показателя не больше шести. Перенумеруем систему выбранных показателей, присвоив им номер круга, в котором данный показатель выбран. Получим набор показателей (w_n), в котором каждый показатель повторяется не более шести раз. К полученному набору применим теорему 4. Найдется номер m так, что с учетом кратности будет выполняться оценка

$$\sum_{w_n \neq w_m} \frac{\tau^2(w_n)}{|w_n - w_m|^2} \leq 6(4P)^{12}. \tag{9}$$

В наших обозначениях $w_n \in B_n = B_n(z_n, 2\tau(z_n))$. Далее рассмотрим такие n, что $w_m \notin B'_n = B_n(z_n, 3\tau(z_n))$. Тогда для любого $w \in B_n$ имеем $|w - w_m| \geq \tau(z_n)$. Значит, для точки w, лежащей на пересечении отрезка $[w_n; w_m]$ и границы круга B_n, имеем

$$|w_n - w_m| = |w_n - w| + |w - w_m| \leq 4\tau(z_n) + |w - w_m| \leq 5|w - w_m|,$$

или

$$\frac{1}{|w - w_m|^2} \leq \frac{25}{|w_n - w_m|^2},\ w \in B_n,\ w_m \notin B'_n.$$

Интегрируя это неравенство по кругу B_n, получим

$$\int_{B_n} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq \frac{100\pi\tau^2(z_n)}{|w_n - w_m|^2},\ w_m \notin B'_n.$$

Так как $w_n \in B(z_n, 2\tau(z_n))$, то по условию (7) $\tau^2(w_n) \geq \delta^2\tau^2(z_n)$. Таким образом, из последней оценки и из (9) следует соотношение

$$\sum_{w_n \neq w_m \notin B'_n} \int_{B_n} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq \frac{100\pi}{\delta^2} \sum_{w_n \neq w_m \notin B'_n} \frac{\tau^2(w_n)}{|w_n - w_m|^2} \leq \frac{600(4P)^{12}}{\delta^2} := C. \tag{10}$$

Если номер n такой, что $w_m \in B'_n$, то для любого $w \in B_n$ имеем

$$|w - z_m| \leq |w - w_m| + |w_m - z_m| \leq |w - z_n| + |z_n - w_m| + 2\tau(z_m) \leq$$

$$\leq 2\tau(z_n) + 3\tau(z_n) + 2\tau(z_m) \leq 5\tau(z_n) + 2\tau(z_m).$$

По выбору числа R имеем $|w - z_m| \leq 7\varepsilon R$, то есть круги B_n полностью лежат в круге $B(z_m, 7\varepsilon R)$. Это значит, что круги покрытия, номера которых участвуют в суммировании в (10), покрывают множество $C(R) = B(0,R) \setminus B(z_m, 7\varepsilon R)$. Следовательно,

$$\int_{C(R)} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq C.$$

Применим замену переменных $w = R\zeta$, $w_m = R\zeta_m$, $\zeta_m \in B(0,1)$, получим

$$\int_{B(0,1)\setminus B(z_m, 7\varepsilon)} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta - \zeta_m|^2} \leq C.$$

Число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, устремив ε к нулю, получим противоречие.

Теорема 5 доказана. □

3. Безусловные базисы из экспонент в весовых гильбертовых пространствах на ограниченном интервале

В дальнейшем мы применим теорему 4 и ее следствие к более конкретным весовым гильбертовым пространствам функций на ограниченном интервале вещественной оси.

Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I,h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt} < \infty.$$

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_I f(t)\overline{g}(t)e^{-2h(t)}\, dt.$$

Нетрудно убедиться в том, что пространство $L^2(I,h)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 из введения.

В работах [9],[10],[11] описано пространство $\widehat{L}^2(I,h)$. Доказано, что пространство $\widehat{L}^2(I,h)$ изоморфно (как банахово пространство) пространству целых функций F, удовлетворяющих условиям

$$|F(z)| \le C_F\sqrt{K(z)},\ z \in \mathbb{C}.$$

$$||F||^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} d\widetilde{h}'(x)dy < \infty,$$

где

$$K(z) = \int_I |e^{2zt}|e^{-2h(t)}dt,\ \widehat{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - h(t)).$$

Теорема 6. *Пусть для любого $p > 0$ найдется некоторое число $\delta = \delta(p) > 0$ со свойством: существует последовательность $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, такая, что интервалы*

$$I_k = \{x :\ |x - x_k| \le 2\tau(\ln K(z), x_k, p)\}$$

попарно не пересекаются и

$$\min_{x\in I_k} \tau(\ln K(z), x, p) \ge \delta(p)\tau(\ln K(z), x_k, p).$$

Пусть далее для любого $\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[m; s]$, $s > m$, целочисленного ряда со свойствами

1) Если $I_{m,s} = \bigcup_{m\le k\le s} I_k$, $I^0_{m,s}$ — наименьший отрезок вещественной оси, содержащий $I_{m,s}$, $d_{m,s}$ — сумма длин интервалов, составляющих $I_{m,s}$, а $d^0_{m,s}$ — длина отрезка $I^0_{m,s}$, то $d_{m,s} \ge (1-\varepsilon)d^0_{m,s}$;

2) Выполняется оценка $\max_{k\in[m,s]} \tau(\ln K(z), x_k, p) \le \varepsilon d^0_{m,s}$.

Тогда в пространстве $L_2(I,h)$ базисов Рисса из экспонент не существует.

Доказательство. Проведем доказательство от противного: допустим, что в пространстве $L_2(I,h)$ существует безусловный базис из экспонент $\{e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда выполняются теоремы 1,3,4. Сохраним введенные в этих теоремах обозначения. В частности, через $\tau(\lambda)$ обозначена функция $\tau(\ln K(z), \lambda, \ln(5P))$, при этом

$$K(z) = ||e^{zt}||^2 = \int_I |e^{zt}|^2 e^{-2h(t)}dt = \int_I e^{2Re\, zt - 2h(t)}dt = K(Re\, z),$$

а постоянная P — из свойств базиса (соотношение (1)). Число $\delta(\ln(5P))$ будем обозначать просто δ. Положим $\tau(\ln K(z), x_k, \ln(5P)) = \tau_k$,

$$Q_{k,n} = \{x + iy : \ x \in I_k, \ 4n\tau_k \le y < 4(n+1)\tau_k\}, \ k = 0, 1, 2, ..., \ n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку квадрат $Q_{k,n}$ содержит круг $B(x_k + i(4n+2)\tau_k, 2\tau_k)$, то по п. 1 теоремы 3 в каждом из этих квадратов находится по крайней мере один нуль функции L. Выберем по одному нулю $\lambda_{k,n}$ в каждом из квадратов $Q_{k,n}$.

Возьмем положительное ε и отрезок $[m, s]$, о котором говорится в условии теоремы. Для большого натурального числа M рассмотрим множество нулей $B = \{\lambda_{k,n} : \ k \in [m, s], \ |n| \le M\}$. Применим теорему 4 к этому множеству нулей и найдем соответствующий индекс. Нуль с этим индексом обозначим через $\lambda^* = x^* + iy^*$. Не уменьшая общности, будем считать, что $y^* \le 0$. Точка λ^*, таким образом, является одним из нулей и зависит от параметров m, s, M.

Для каждого $k \in [m, s]$ положим

$$n(k) = \left[\frac{y^*}{4\tau_k} + \frac{4}{3}\right],$$

где $[t]$ означает целую часть t. Пусть $\tau_{k,n} = \tau(\lambda_{k,n})$. Если $n \ge n(k)$, то квадрат $Q_{k,n}$ и круг $B_{k,n} = B(\lambda_{k,n}, p\tau_{k,n})$ (напомним, что $p = \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}$) лежат в полуплоскости $Im\, z \ge y^* + \tau_k$. В самом деле, по определению числа $n(k)$, если $\lambda \in Q_{k,n}$, то

$$Im\, \lambda \ge 4n\tau_k \ge 4n(k)\tau_k \ge y^* + \frac{4}{3}\tau_k.$$

Если $x \in I_k$, то по лемме 1

$$\tau(x) \le \tau(x_k) + |x_k - x| \le 3\tau_k,$$

поэтому для точек $\lambda \in B_{k,n}$ имеем (заметим, что $p < 1/20$)

$$Im\, \lambda \ge Im\, \lambda_{k,n} - p\tau_{k,n} \ge Im\, \lambda_{k,n} - 3p\tau_k \ge y^* + \tau_k.$$

Если точка λ лежит в полуплоскости $Im\, z \ge y^* + \tau_k$, то

$$|\lambda - \lambda^*| \ge Im\, (\lambda - \lambda^*) \ge \tau_k$$

или

$$\tau_k \le |\lambda - \lambda^*|.$$

Таким образом, если точки λ, w лежат в $A = Q_{k,n} \bigcup B_{k,n}$, $n \ge n(k)$, то

$$|\lambda - \lambda^*| \le |w - \lambda^*| + |\lambda - w| \le |w - \lambda^*| + (4\sqrt{2} + 3p)\tau_k \le 7|w - \lambda^*|$$

(снова пользуемся тем, что $p < 1/20$). Следовательно,

$$\alpha := \max_{z \in A} \frac{1}{|z - \lambda^*|^2} \le 49 \min_{z \in A} \frac{1}{|z - \lambda^*|^2} := 49\beta.$$

Отсюда, поскольку по условию теоремы $\tau_{k,n}^2 \ge \delta^2\tau_k^2$, то имеем

$$\int_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z - \lambda^*|^2} \le 16\alpha\tau_k^2 \le \frac{16\alpha\tau_k^2}{\beta\pi(p\tau_{k,n})^2}\beta\pi(p\tau_{k,n})^2 \le \frac{784}{\pi p^2\delta^2} \int_{B_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z - \lambda^*|^2}.$$

Просуммируем полученные неравенства сначала по всем $n(k) \le n \le M$ при фиксированном k, затем по всем $k \in [m, s]$:

$$\sum_{k=m}^{s} \sum_{n=n(k)}^{M} \int_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z - \lambda^*|^2} \le \frac{784}{\pi p^2\delta^2} \sum_{k=m}^{s} \sum_{n=n(k)}^{M} \int_{B_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z - \lambda^*|^2}.$$

Точка λ^* выбрана по теореме 4, значит в силу соотношения (6)

$$\sum_{k=m}^{s}\sum_{n=n(k)}^{M}\int_{Q_{k,n}}\frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2}\le\frac{784}{\pi p^2\delta^2}4^{10}P^9:=C. \tag{11}$$

По определению квадратов $Q_{k,n}$

$$\bigcup_{n=n(k)}^{M}Q_{k,n}=\{x+iy:\ x\in I_k,\ 4n(k)\tau_k\le y\le 4(M+1)\tau_k\}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=n(k)}^{M}\int_{Q_{k,n}}\frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2}=\int_{I_k}\int_{4n(k)\tau_k}^{4(M+1)\tau_k}\frac{dydx}{|z-\lambda^*|^2}.$$

По определению номера $n(k)$ имеем $4n(k)\tau_k<y^*+6\tau_k$. В последнем интеграле произведем замену переменных $w=z-y^*$. Мы предполагаем, что $y^*\le 0$, в силу выбора номера $n(k)$ будем иметь

$$\sum_{n=n(k)}^{M}\int_{Q_{k,n}}\frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2}\ge\int_{I_k}\int_{6\tau_k}^{4(M+1)\tau_k}\frac{dm(w)}{|w-x^*|^2}.$$

Если бы оказалось, что $y^*>0$, то точно также мы бы получили оценку

$$\sum_{n=-M}^{-n(k)}\int_{Q_{k,n}}\frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2}\ge\int_{I_k}\int_{-4(M+1)\tau_k}^{-6\tau_k}\frac{dm(w)}{|w-x^*|^2},$$

которая в силу четности подинтегральной функции по y эквивалентна предыдущей оценке. Просуммируем эти оценки по всем $k\in[m,s]$:

$$\sum_{k=m}^{s}\sum_{n=n(k)}^{M}\int_{Q_{k,n}}\frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2}\ge\sum_{k=m}^{s}\int_{I_k}\int_{6\tau_k}^{4(M+1)\tau_k}\frac{dm(w)}{|w-x^*|^2}.$$

Воспользуемся оценкой (11)

$$\sum_{k=m}^{s}\int_{I_k}\int_{6\tau_k}^{4(M+1)\tau_k}\frac{dm(w)}{|w-x^*|^2}\le C.$$

По определению $x^*=Re\,\lambda^*$ и λ^* — одна из точек $\lambda_{k,n}$, $k\in[m,s]$, $|n|\le M$. Таким образом, при фиксированном отрезке $[m,s]$ число x^* при изменении числа M может меняться в пределах отрезка $I^0_{m,s}$. Тем самым, можно выбрать последовательность M_n, уходящую в $+\infty$ или $-\infty$ так, что соответствующие значения x^*_n будут сходиться к некоторому предельному значению x^*.

Учитывая ограниченность интегралов, можно перейти к пределу:

$$\sum_{k=m}^{s}\int_{I_k}\int_{6\tau_k}^{+\infty}\frac{dm(w)}{|w-x^*|^2}\le C. \tag{12}$$

Воспользуемся очевидными оценками: при $p\in[0;1)$

$$p\int_p^\infty\frac{dt}{1+t^2}\ge p\int_1^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}p\ge\frac{1}{2}p,$$

и при $p\ge 1$

$$p\int_p^\infty\frac{dt}{1+t^2}\ge p\int_p^\infty\frac{dt}{2t^2}=\frac{1}{2}.$$

Значит, при любых $p \geq 0$ имеем

$$p \int_p^\infty \frac{dt}{1+t^2} \geq \frac{1}{2}\min(p,1).$$

Отсюда для любого $a \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$ получаем

$$\int_a^\infty \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{|x|} \int_{\frac{a}{|x|}}^\infty \frac{dt}{1+t^2} \geq \frac{1}{2a} \min\left(\frac{a}{|x|}, 1\right) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{|x|}, \frac{1}{a}\right).$$

Таким образом, выполняется оценка

$$\int_{6\tau_k}^{+\infty} \frac{dy}{(x-x^*)^2+y^2} \geq \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{|x-x^*|}, \frac{1}{6\tau_k}\right).$$

Отсюда и из (12) получаем соотношение

$$\sum_{k=m}^{s} \int_{I_k} \min\left(\frac{1}{|x-x^*|}, \frac{1}{6\tau_k}\right) dx \leq 2C. \tag{13}$$

Через I_k^*, $k \in [m,s]$, обозначим интервал $(x^* - 6\tau_k; x^* + 6\tau_k)$. Множество всех индексов $k \in [m,s]$ разобъем на две части $A_1 = \{k \in [m,s] : \; I_k \bigcap I_k^* = \emptyset\}$ и $A_2 = \{k \in [m,s] : \; I_k \bigcap I_k^* \neq \emptyset\}$.

Через d_j обозначим суммарную длину всех интервалов I_k по $k \in A_j$, $j = 1, 2$.

Если $k \in A_2$, то $|x_k - x^*| \leq 8\tau_k$, значит весь интервал I_k лежит в отрезке $\{x : \; |x - x^*| \leq 10\tau_k\}$. Другими словами, все интервалы I_k, $k \in A_2$ лежат в отрезке $\{x : \; |x - x^*| \leq 10\tau^*\}$, где $\tau^* = 10\max_{k\in[m,s]} \tau_k$. Это значит $d_2 \leq 20\tau^*$ и по условию 2) доказываемой теоремы имеем

$$d_2 \leq 20\varepsilon d_{m,s}^0, \tag{14}$$

$$d_1 = d_{m,s} - d_2 \geq (1-20\varepsilon) d_{m,s}^0.$$

Множетсво индексов A_1 разобъем на две части A_1^+ — те индексы из A_1, для которых $x_k \geq x^*$, а A_1^- — остальные индексы из A_1. Через $d_1^\pm$ обозначим суммарную длину интервалов I_k с индексами из $A_1^\pm$. Одна из этих величин не меньше, чем половина d_1, пусть $d_1^+ \geq \frac{d_1}{2}$. Из предыдущей оценки видим, что тогда

$$d_1^+ \geq \frac{1-20\varepsilon}{2} d_{m,s}^0,$$

в частности, если $I_{m,s}^0 = (A; B)$, то

$$B - x^* \geq d_1^+ \geq \frac{1-20\varepsilon}{2} d_{m,s}^0. \tag{15}$$

Интервалы I_k, $k \in A_1^+$ сдвинем к правому краю интервала $(A;B)$, так, чтобы полученные интервалы I'_k заполнили интервал $(B - d_1^+; B)$. Длина интервала $(x^*; B - d_1^+)$ не превосходит суммарной длины интервалов I_k, $k \in A_2$ и линейной лебеговой меры множества $I_{m,s}^0 \setminus I_{m,s}$. Из условия 1) теоремы и из оценки (14) имеем

$$|B - d_1^+ - x^*| \leq 21\varepsilon d_{m,s}^0. \tag{16}$$

Продолжим оценку (13). Поскольку для $k \in A_1^+$

$$\int_{I_k} \frac{dx}{|x-x^*|} \geq \int_{I'_k} \frac{dx}{|x-x^*|},$$

то

$$\sum_{k\in A_1^+} \int_{I_k} \min\left(\frac{1}{|x-x^*|}, \frac{1}{6\tau_k}\right) dx = \sum_{k\in A_1^+} \int_{I_k} \frac{dx}{|x-x^*|} \geq \sum_{k\in A_1^+} \int_{I'_k} \frac{dx}{|x-x^*|}.$$

По соотношению (13) получаем
$$\sum_{k\in A_1^+}\int_{I_k'}\frac{dx}{|x-x^*|}\le 2C$$
или
$$\int_{B-d_1^+}^{B}\frac{dx}{|x-x^*|}\le 2C.$$
Из оценок (14) и (16) имеем
$$\ln\frac{1-20\varepsilon}{42\varepsilon}\le 2C.$$
В силу произвольной малости ε это невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему 5. □

Следующая теорема доказана в работе [12] (теорема 2.4).

Теорема 7. *Пусть I — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$— выпуклая функция на этом интервале,*
$$K(\lambda)=\int_I e^{2Re\,\lambda t-2h(t)}\,dt,\quad J=\{x:\ K(x)<\infty\}.$$
Предположим, что для некоторого $p>0$ существует последовательность промежутков $[a_m;b_m]$ и положительных чисел τ_m, $m=1,2,...$, так, что

1) для некоторого положительного числа δ и для всех $x\in[a_m;b_m]$
$$\delta\tau_m\le\tau(\ln K(z),x,p)\le\tau_m,\ m=1,2,...,$$
2) имеет место соотношение
$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{b_m-a_m}{\tau_m}=\infty,$$
тогда в пространстве $L^2(I,h)$ не существует базиса Рисса из экспонент.

Эта теорема вытекает из теоремы 6.

Известно, что при $q\ge p>0$ имеют место двусторонние оценки
$$\tau(\ln K(z),x,q)\ge\tau(\ln K(z),x,p)\ge\frac{p}{16q}\tau(\ln K(z),x,q)$$
(см. [5], лемма 5). Поэтому, если требуемая в теореме 7 последовательность интервалов существует для некоторого $p>0$, то такая последовательность существует для любого числа $p>0$. Каждый из интеравлов $[a_m;b_m]$ в теореме 7 следует представить в виде объединения непересекающихся интервалов вида $\{x:\ |x-y|\le 2\tau(y)\}$. Полностью покрыть интервал $[a_m;b_m]$ может не получиться, но покрыть так, чтобы покрылось больше половины длины, можно. Тогда в качестве множества $I_{m,s}$ в теореме 6 будет объединение интервалов из $[a_m;b_m]$. Отрезками $I^0_{m,s}$ будут они же, вернее, их замыкания. Поэтому условие 1) теоремы 6 выполняется тривиально. А условие 2) вытекает из условия 2) в теореме 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I* // Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука. 1965. 448 с.
3. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* М.: Наука. 1980.
4. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. 1950. V. 68, № 3. P. 337–404.

5. Башмаков Р.А., Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа* // Уфимский мат. журн. 2010. Т. 2, № 1. С. 3–16.
6. Юлмухаметов Р.С *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. ж. 1985. Т.26, № 4. С. 159–175.
7. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 6. С. 69–90.
8. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука.1966.
9. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 80–87.
10. Луценко В.И. *Теорема Пэли–Винера на неограниченном интервале* // Исследования по теории приближений. Уфа. 1989. С. 79–85.
11. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 20–22.
12. Башмаков Р.А. *Системы экспонент в весовых гильбертовх пространствах на R* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2006 г.
13. Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* М., 2005. 504 с.
14. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. мат., 39:3 (1975). С. 657–702.
15. Любарский Ю.И. *Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:3 (1988). С. 559–580.
16. Луценко В.И. *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 1992.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `orbit81@list.ru`

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `Yulmukhametov@mail.ru`