ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 4 (2010). С. 74-84.

УДК 517.955

О РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Р.Ч. КУЛАЕВ

Аннотация. В работе рассматривается начально-краевая задача параболического типа, заданная на геометрическом графе (пространственной сети). Предполагается, что коэффициенты уравнения удовлетворяют на ребрах графа условию Гельдера по пространственной и временной переменным. На границе графа ставятся неоднородные условия первого, второго или третьего рода. В узловых точках графа решение уравнения удовлетворяет условию согласования производных и может иметь разрывы. При этом предполагается, что коэффициенты из условий на границе и в узлах графа удовлетворяют условию Гельдера по временной переменной. Доказывается теорема существования смешанной задачи, дающая представление решения через тепловые потенциалы.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение на графе, фундаментальное решение для уравнения на графе, метод потенциала.

В настоящей работе устанавливается разрешимость смешанной задачи на графе для дифференциального уравнения

$$Lu \equiv p(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t), \tag{1}$$

где $(x,t) \in \Gamma \times (0,T] = \Gamma_T$, Γ — геометрический граф [1]. В каждой граничной вершине a графа Γ решение уравнения должно удовлетворять условию

$$\alpha(a,t)\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) + \beta(a,t)\,u(a,t) = h(a,t), \quad a \in \partial\Gamma, \quad t > 0. \tag{2}$$

А в каждой внутренней вершине a на решение уравнения (1) накладываются $|I(a)| - 1$ условий, связывающих значения неизвестной функции, и одно условие согласования

$$\begin{gathered} u_k(a,t) - u_{k_0}(a,t) = r_k(a,t), \quad k, k_0 \in I(a), \\ \sum_{k \in I(a)} \alpha_k(a,t)\frac{\partial u_k}{\partial x}(a,t) = h(a,t), \quad a \in V, t > 0. \end{gathered} \tag{3}$$

В условиях согласования (3) считаем, что все производные посчитаны в направлении от вершины a.

В начальный момент времени $t = 0$ ставится условие

$$u(x,0) = \psi(x). \tag{4}$$

Случай, когда коэффициенты уравнения (1) и краевых условий (2),(3) не зависят от времени, рассмотрен в работе [2], где показано, что решение смешанной задачи существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи.

Начнем с введения основных понятий и обозначений (например, см. [1]).

R.Ch. Kulaev, About resolvability of a parabolic problem on the graph.

Поступила 20 апреля 2010 г.

Под геометрическим графом в настоящей работе понимается одномерное стратифицированное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$ и обозначаемое через Γ. Ребра графа — это пространственные гладкие кривые, не имеющие самопересечений. Вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. Ребра графа и вершины заданы независимо друг от друга, при этом ребра графа обозначаются через γ или γ_k, если они занумерованы, а вершины — через a, a_j или b_j (при этом предполагается, что нумерация вершин независима от нумерации ребер).

Считая ребра графа Γ занумерованными, обозначим через V множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа, не принадлежащие V, будем называть граничными и обозначать их через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_k, то будем говорить, что ребро γ_k примыкает к вершине a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к внутренней вершине a, обозначим $I(a)$. Всюду далее полагаем, что граф Γ является конечным и связным множеством в $\mathbb{R}^n$.

Под функцией на графе понимается отображение $u : \Gamma \to \mathbb{C}$. Через u_k будем обозначать сужение функции u на ребро γ_k, т. е. $u_k(x) = u(x)$ при $x \in \gamma_k$, $u_k(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma\backslash\gamma_k$. Везде ниже полагаем, что все рассматриваемые функции равномерно непрерывны по переменной x на каждом ребре графа. Множество всех таких функций мы обозначим через $C[\Gamma]$. Далее, если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_k(a)$ понимается $\lim\limits_{x\to a} u_k(x),\ x \in \gamma_k$.

Дифференцирование функций по переменной $x \in \Gamma$ на каждом ребре $\gamma \in \Gamma$ осуществляется по параметру, причем подразумевается, что для этого ребро параметризовано в одном из двух возможных направлений.

Под интегралом функции $u \in C[\Gamma]$, взятым по графу Γ, понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа.

На протяжении всей работы считаем выполненными следующие условия:

(I) Коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям: $p, q, c \in C[\overline{\Gamma}_T]$, $p \in C^{1,1}[\overline{\Gamma}_T]$, $\inf\limits_{(x,t)\in\overline{\Gamma}_T} p(x,t) > 0$ и, кроме того, для всех $(x,t) \in \overline{\Gamma}_T$, $(x_0,t_0) \in \overline{\Gamma}_T$ и $0 < \omega < 1$

$$|p(x,t) - p(x_0,t_0)| \leqslant A(|x - x_0|^\omega + |t - t_0|^{\frac{\omega}{2}})$$
$$|q(x,t) - q(x_0,t_0)| \leqslant A(|x - x_0|^\omega)$$
$$|c(x,t) - c(x_0,t_0)| \leqslant A(|x - x_0|^\omega);$$

(II) Функции $f(x,t) \in C[\overline{\Gamma}_T]$, $\psi(x) \in C^1[\overline{\Gamma}]$;

(III) При каждом $a \in \partial\Gamma \bigcup V$ функции $\alpha, \alpha_k, \beta, h, r_k \in C[0,T]$, причем r_k удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} < \omega \leqslant 1$. Также полагаем, что $\alpha_k > 0$ на $[0,T]$, $\alpha(a,t)$– либо равна тождественно нулю, либо $\alpha(a,t) > 0$, $\beta(a,t) \leqslant 0$ на $[0,T]$ и $\alpha^2(a,t) + \beta^2(a,t) > 0$ при $a \in \partial\Gamma$, $t \in [0,T]$. При этом, если для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$ будет $\alpha(a,t) \equiv 0$, то считаем, что функция $h(a,t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} < \omega \leqslant 1$.

Определение 1. *Фундаментальным решением уравнения (1) в $\overline{\Gamma}_T$ назовем функцию $H(x,t;\xi,\tau)$, определенную для всех $(x,t) \in \overline{\Gamma}_T$, $(\xi,\tau) \in \overline{\Gamma}_T$, $t > \tau$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

a) для всех фиксированных $(\xi,\tau) \in \overline{\Gamma}_T$ она, как функция (x,t), $x \in \Gamma$, $\tau < t \leqslant T$, удовлетворяет однородному уравнению (1);

b) для каждой функции $\psi(x) \in C[\Gamma]$

$$\lim_{t\searrow\tau} \int\limits_\Gamma H(x,t;\xi,\tau)\psi(\xi)\,d\xi = \psi(x).$$

Пусть $H_k(x,t;\xi,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1), суженного на цилиндр $\overline{\gamma}_k\times[0,T]$ (см. [3]). Доопределим функции H_k на все множество $\overline{\Gamma}_T$, положив их равными тождественно нулю на $\overline{\Gamma}_T\setminus\{\overline{\gamma}_k\times[0,T]\}$. Тогда фундаментальное решение уравнения (1) можно представить в виде

$$H(x,t;\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{m}H_k(x,t;\xi,\tau)=Z(x,t;\xi,\tau)+Z_0(x,t;\xi,\tau),$$

где

$$Z(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & t\leqslant\tau;\\ \frac{\sqrt{p(\xi,\tau)}}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}exp\Big(-\frac{p(\xi,\tau)(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big), & a_k\leqslant x,\xi\leqslant b_k,\ \overline{\gamma}_k=[a_k,b_k];\\ 0, & x\in\overline{\gamma}_k,\ \xi\in\overline{\gamma}_n,\ k\neq n,\end{cases}$$

$$Z_0(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Gamma}Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)d\eta d\sigma,$$

$$\Phi(x,t;\xi,\tau)=LZ(x,t;\xi,\tau)+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Gamma}LZ(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)d\eta d\sigma.$$

Из результатов [3] следует, что $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ разлагается в ряд

$$\Phi(x,t;\xi,\tau)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(LZ)_\nu(x,t;\xi,\tau),$$

где $(LZ)_1=LZ$ и $(LZ)_{\nu+1}=\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Gamma}LZ(x,t;\eta,\sigma)(LZ)_\nu(\eta,\sigma;\xi,\tau)d\eta d\sigma$, а для фундаментального решения $H(x,t;\xi,\tau)$, при x и ξ принадлежащих одному и тому же ребру, имеют место оценки:

$$\begin{gathered}\big|H(x,t;\xi,\tau)\big|\leqslant\frac{C}{(t-\tau)^\mu}\frac{1}{|x-\xi|^{1-2\mu}},\\ \left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant\frac{C}{(t-\tau)^\mu}\frac{1}{|x-\xi|^{2-2\mu-\omega}},\quad 1-\frac{\omega}{2}<\mu<1.\end{gathered}\tag{5}$$

При этом сужения H_k, $\frac{\partial H_k}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 H_k}{\partial x^2}$, $\frac{\partial H_k}{\partial t}$ непрерывны по совокупности переменных $(x,t;\xi,\tau)$, когда x и ξ изменяются в γ_k, $k=\overline{1,2m}$, и $0\leqslant\tau<t\leqslant T$.

Пусть $a\in\partial\Gamma\bigcup V$, γ_k — некоторое ребро графа Γ, примыкающее к вершине a, и $\varphi_k(a,t)\in C[0,T]$. Рассмотрим потенциал простого слоя с плотностью φ_k

$$U_k(x,t,a)=\int\limits_{0}^{t}H_k(x,t;a,\tau)\varphi_k(a,\tau)d\tau,\quad x\in\gamma_k.$$

Согласно [3] имеет место соотношение на скачке

$$\lim_{x\to a}\frac{\partial U_k}{\partial x}(x,t)=-\frac{1}{2}\varphi_k(x,t)+\int\limits_{0}^{t}\frac{\partial H_k}{\partial x}(x,t;a,\tau)\varphi_k(a,\tau)d\tau,\quad x\in\gamma_k.$$

Обозначим через γ_k^0 ограниченную гладкую кривую, содержащую $\overline{\gamma}_k$. Применяя теорему о продолжении непрерывных функций [4, 5], для каждого $k=\overline{1,2m}$ продолжим коэффициенты p_k, q_k и c_k оператора L на множество γ_k^0 так, чтобы выполнялись условия (I), и обозначим через $H_k(x,t;\xi,\tau)$ фундаментальное решение уравнения (1), суженного на цилиндр $\overline{\gamma}_k^0 \times [0,T]$. Тогда фундаментальное решение $H(x,t;\xi,\tau)$ на $\overline{\Gamma}_T$ можно представить в виде $H(x,t;\xi,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m} H_k(x,t;\xi,\tau)$. При этом для функции H остаются справедливыми все описанные выше свойства. Более того, в этом случае H_k и $\frac{\partial H_k}{\partial x}$ определены и непрерывны для x и ξ из окрестности каждого ребра$\overline{\gamma}_k$.

Теорема 1. *При условиях (I) – (III) существует решение задачи (1)–(4).*

Доказательство. Решение задачи (1)–(4) будем искать в виде

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{a_j \in \partial\Gamma \bigcup V} \sum_{k \in I(a_j)} U_k(x,t,a_j) \\ + \int\limits_{\Gamma} H(x,t;\xi,0)\psi(\xi)d\xi - \int\limits_0^t \int\limits_{\Gamma} H(x,t;\eta,a_j,\tau) f(\xi,\tau)d\xi d\tau = \\ = \sum_{a_j \in \partial\Gamma \bigcup V} \sum_{k \in I(a_j)} \int\limits_0^t H_k(x,t;a_j,\tau)\varphi(a_j,\tau)d\tau + \int\limits_{\Gamma} H(x,t;\xi,0)\psi(\xi)d\xi \\ - \int\limits_0^t \int\limits_{\Gamma} H(x,t;\eta,a_j,\tau) f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\varphi_k \in C[0,T]$ подлежат определению. Подставляя выражение для $u(x,t)$ в краевые условия (2), (3), с помощью соотношения на скачке, получаем систему из $2m$ интегральных уравнений.

Для граничных условий имеем

$$\begin{gathered} -\frac{\alpha(a_n,t)}{2}\varphi_{k_0}(a_n,t) + \int\limits_0^t \Big[\beta(a_n,t)H_{k_0}(a_n,t;a_n,\tau) + \\ +\alpha(a_n,t)\frac{\partial H_{k_0}}{\partial x}(a_n,t;a_n,\tau)\Big]\varphi_{k_0}(a_n,\tau)d\tau + \\ + \int\limits_0^t \Big[\beta(a_n,t)H_{k_0}(a_n,t;a_s,\tau) + \alpha(a_n,t)\frac{\partial H_{k_0}}{\partial x}(a_n,t;a_s,\tau)\Big]\varphi_{k_0}(a_s,\tau)d\tau + \\ +F(a_n,t) = h(a_n,t), \end{gathered} \tag{7}$$

где $a_n \in \partial\Gamma, \gamma_{k_0} = [a_n, a_s]$,

$$\begin{gathered} F(a_n,t) = \int\limits_{\Gamma} \Big[\beta(a_n,t)H(a_n,t;\xi,0) + \alpha(a_n,t)\frac{\partial H}{\partial x}(a_n,t;\xi,0)\Big]\psi(\xi)d\xi - \\ - \int\limits_0^t \int\limits_{\Gamma} \Big[\beta(a_n,t)H(a_n,t;\xi,\tau) + \alpha(a_n,t)\frac{\partial H}{\partial x}(a_n,t;\xi,\tau)\Big] f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \end{gathered}$$

Условия непрерывности дают равенства

$$\int_0^t \Big[H_k(a_n,t;a_k,\tau)\varphi_k(a_k,\tau)+H_k(a_n,t;a_n,\tau)\varphi_k(a_n,\tau)\Big]d\tau-$$
$$-\int_0^t \Big[H_{k_0}(a_n,t;a_{k_0},\tau)\varphi_{k_0}(a_{k_0},\tau)+H_{k_0}(a_n,t;a_n,\tau)\varphi_{k_0}(a_n,\tau)\Big]d\tau \qquad (8)$$
$$+F_k(a_n,t)=r_k(a_n,t),$$

где

$$F_k(a_n,t)=\int_\Gamma \Big[H_k(a_n,t;\xi,0)+H_{k_0}(a_n,t;\xi,0)\Big]\psi(\xi)d\xi-\int_0^t\int_\Gamma \Big[H_k(a_n,t;\xi,\tau)+$$
$$+H_{k_0}(a_n,t;\xi,\tau)\Big]f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad a_n\in\partial\Gamma, \gamma_k=[a_k,a_n], k\in I(a_n);$$

а условия согласования дают

$$-\frac{1}{2}\sum_{k\in I(a_n)}\alpha_k(a_n,t)\varphi_k(a_n,t)+$$
$$+\int_0^t\sum_{k\in I(a_n)}\Big[\alpha_k(a_n,\tau)\frac{\partial H_k}{\partial x}(a_n,t;a_k,\tau)\varphi_k(a_k,\tau)+ \qquad (9)$$
$$+\alpha_k(a_n,\tau)\frac{\partial H_k}{\partial x}(a_n,t;a_n,\tau)\varphi_k(a_n,\tau)\Big]d\tau+F(a_n,t)=h(a_n,t),$$

где

$$F(a_n,t)=\int_\Gamma\sum_{k\in I(a_n)}\alpha_k(a_n,t)\frac{\partial H_k}{\partial x}(a_n,t;\xi,0)\psi_k(\xi)d\xi-$$
$$-\int_0^t\int_\Gamma\sum_{k\in I(a_n)}\alpha_k(a_n,t)\frac{\partial H_k}{\partial x}(a_n,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad a_n\in V.$$

При этом функции $F(a_n,t)$ и $F_k(a_n,t)$ непрерывны по Гельдеру с любым показателем $\nu\in(0,1)$ как сумма функций, непрерывных по Гельдеру (см. [3]).

В равенствах (7)–(9) все интегральные уравнения, получающиеся из условий (2), (3), не содержащих производную по x функции $u(x,t)$, являются уравнениями Вольтерра 1-го рода. Сведем их к уравнениям второго рода. Для этого умножим обе части каждого уравнения 1-го рода на $(z-t)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем по t от 0 до z. Меняя порядок интегрирования по t и τ, получим, например, для уравнения (8)

$$\int_0^z\Big[\overline{H}_k(a_n,z;a_k,\tau)\varphi_k(a_k,\tau)+\overline{H}_k(a_n,z;a_n,\tau)\varphi_k(a_n,\tau)\Big]d\tau-$$
$$-\int_0^z\Big[\overline{H}_{k_0}(a_n,z;a_{k_0},\tau)\varphi_{k_0}(a_{k_0},\tau)+\overline{H}_{k_0}(a_n,z;a_n,\tau)\varphi_{k_0}(a_n,\tau)\Big]d\tau=R_k(a_n,z); \qquad (10)$$

где

$$\overline{H}_k(a_n,z;a_k,\tau)=\int_\tau^z(z-t)^{-\frac{1}{2}}H_k(a_n,t;a_k,\tau)dt,$$

$$R_k(a_n, z) = \int\limits_0^z (z-t)^{-\frac{1}{2}}[r_k(a_n,t) - F_k(a_n,t)]dt = \int\limits_0^z (z-t)^{-\frac{1}{2}}\overline{R}_k(a_n,t)dt.$$

Из определения функций $H(x,t;\xi,\tau)$ и $Z(x,t;\xi,\tau)$ следует, что

$$\overline{H}_k(a_n, z; a_k, z) = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{p_k(a_n,z)}, & k = n. \end{cases}$$

В силу условий (I)–(III), мы можем применить в равенстве (10) следущую лемму работы [6]:

Лемма 1. *Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем ν, $\frac{1}{2} < \nu \leqslant 1$, то функцию*

$$R(t) = \int\limits_a^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} f(s)ds$$

можно дифференцировать по t, причем

$$R'(t) = f(t)(t-a)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_a^t (t-s)^{-\frac{3}{2}}(f(t) - f(s))ds.$$

Дифференцируя (10) в точке $z = t$, получим

$$\begin{gathered} t^{-\frac{1}{2}}\overline{R}_k(a_n,t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}}(\overline{R}_k(a_n,t) - \overline{R}_k(a_n,\tau))d\tau = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\big(\sqrt{p_k(a_n,t)}\varphi_k(a_n,t) - \sqrt{p_{k_0}(a_n,t)}\varphi_{k_0}(a_{k_0},\tau)\big) + \\ + \int\limits_0^t \left[\frac{\partial \overline{H}_k}{\partial t}(a_n,t;a_k,\tau)\varphi_k(a_k,\tau) + \frac{\partial \overline{H}_k}{\partial t}(a_n,t;a_n,\tau)\varphi_k(a_n,\tau)\right]d\tau - \\ - \int\limits_0^t \left[\frac{\partial \overline{H}_{k_0}}{\partial t}(a_n,t;a_{k_0},\tau)\varphi_{k_0}(a_{k_0},\tau) + \frac{\partial \overline{H}_{k_0}}{\partial t}(a_n,t;a_n,\tau)\varphi_{k_0}(a_n,\tau)\right]d\tau. \end{gathered} \tag{11}$$

Если в каком-нибудь из условий на границе $\alpha(a_n,t) \equiv 0$, то аналогично можно показать, что соответствующее интегральное уравнение приводится к виду:

$$\begin{gathered} t^{-\frac{1}{2}}\overline{F}(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}}(\overline{F}(t) - \overline{F}(\tau))d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{p_{k_0}(a_n,t)}\varphi_{k_0}(a_n,t) + \\ + \int\limits_0^t \left[\frac{\partial \overline{H}_{k_0}}{\partial t}(a_n,t;a_s,\tau)\varphi_{k_0}(a_s,\tau) + \frac{\partial \overline{H}_{k_0}}{\partial t}(a_n,t;a_n,\tau)\varphi_{k_0}(a_n,\tau)\right]d\tau \end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, система уравнений (7)–(9) сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода (7) (или (12)), (9), (11).

Покажем, что систему уравнений 2-го рода можно записать в виде

$$\Psi(t) = \mu(t) + \int\limits_0^t N(t,\tau)\Psi(\tau)d\tau, \tag{13}$$

где

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \dots \\ \phi_{2m}(t) \end{pmatrix},$$

$\mu(t)$ — вектор-столбец, $N(t,\tau) = \|N_{ji}(t,\tau)\|$ — матричная функция, $j,i = \overline{1,2m}$.

Пусть $a_n \in V$, $I(a_n) = \{k_0, k_1, \dots, k_s\}$. С вершиной a_n будет связано s уравнений вида (13) и одно уравнение вида (9). Обозначим через $\Psi(a_n,t)$ вектор-столбец $\begin{pmatrix} \varphi_{k_0}(a_n,t) \\ \varphi_{k_1}(a_n,t) \\ \dots \\ \varphi_{k_s}(a_n,t) \end{pmatrix}$, а через $\overline{\Psi}(a_n,t)$ — вектор-столбец $\begin{pmatrix} \varphi_{k_0}(a_{k_0},t) \\ \varphi_{k_1}(a_{k_1},t) \\ \dots \\ \varphi_{k_s}(a_{k_s},t) \end{pmatrix}$, где $a_{k_0}, a_{k_1}, \dots, a_{k_s}$ — вершины, смежные с a_n. Тогда систему из s уравнений, связанных с вершиной a_n, можно записать в матричной форме

$$\frac{1}{2}A(a_n,t)\Psi(a_n,t) = M(a_n,t) + \int\limits_0^t \mathcal{N}_1(t,\tau)\Psi(a_n,\tau) + \mathcal{N}_2(t,\tau)\overline{\Psi}(a_n,\tau)d\tau, \tag{14}$$

где $A(a_n,t)$ — матрица вида

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\pi p_{k_0}(a_n,t)} & -\sqrt{\pi p_{k_1}(a_n,t)} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\pi p_{k_0}(a_n,t)} & 0 & -\sqrt{\pi p_{k_2}(a_n,t)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\pi p_{k_0}(a_n,t)} & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{\pi p_{k_s}(a_n,t)} \\ \alpha_{k_0}(a_n,t) & \alpha_{k_1}(a_n,t) & \alpha_{k_2}(a_n,t) & \dots & \alpha_{k_s}(a_n,t) \end{pmatrix}$$

Поскольку $detA(a_n,t) = \sum\limits_{i\in I(a_n)} \alpha_{k_i}(a_n,t)\sqrt{\pi p_{k_0}(a_n,t)} \neq 0$, то матрица $A(a_n,t)$ обратима. Умножая обе части системы (14) на $A^{-1}(a_n,t)$, и переобозначая неизвестные функции, получим систему интегральных уравнений вида (13).

Рассмотрим теперь случай $a_n \in \partial\Gamma$. Здесь мы имеем уравнение либо вида (7), либо вида (11), которые, с учетом условий (I) и (III), легко разрешаются относительно $\varphi_{k_0}(a_n,t)$.

Покажем теперь, что система (13) имеет непрерывное ограниченное решение, представимое в виде

$$\Psi(t) = \mu(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_0^t \mathcal{R}_\nu(t,\tau)\mu(\tau)d\tau,$$

где

$$\mathcal{R}_1(t,\tau) = N(t,\tau),$$

$$\mathcal{R}_\nu(t,\tau) = \int_0^t N(t,\eta)\mathcal{R}_{\nu-1}(\eta,\tau)d\eta.$$

Оценим порядок особенностей ядра $N(t,\tau)$ интегрального уравнения (13). Заметим, что функции $N_{ji}(t,\tau)$ являются линейными комбинациями функций $H_k(a_n,t;a_j,\tau)$, $\frac{\partial H_k}{\partial x}(a_n,t;a_j,\tau)$, и $\frac{\partial \overline{H}_k}{\partial t}(a_n,t;a_j,\tau)$. Оценки для $H_k(a_n,t;a_j,\tau)$ и $\frac{\partial H_k}{\partial x}(a_n,t;a_j,\tau)$ даются в (5), поэтому остается оценить $\frac{\partial \overline{H}_k}{\partial t}(a_n,t;a_j,\tau)$.

Имеем

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}(a,t;b,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}H(a,s;b,\tau)ds =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}Z(a,s;b,\tau)ds +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{s}\int\limits_{\Gamma}Z(a,s;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;b,\tau)d\eta d\sigma ds =$$

$$= I_1 + I_2,$$

Оценим сначала интеграл I_1. Для этого применим следующую лемму (см. [6]):

Лемма 2. *Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем ν, $\frac{1}{2} < \nu \leqslant 1$, то функцию*

$$R(t) = \int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}(s-\tau)^{-\frac{1}{2}}f(s)ds$$

можно дифференцировать по t, причем

$$R'(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{2}}(s-\tau)^{-\frac{1}{2}}(f(t)-f(s))ds.$$

Имеем

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}(s-\tau)^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{p(b,\tau)}}{2\pi}\exp\left(-\frac{p(b,t)(a-b)^2}{4(s-\tau)}\right)ds =$$

$$= \frac{\sqrt{p(b,\tau)}}{2\pi}\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}(s-\tau)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{p(b,t)(a-b)^2}{4(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{p(b,t)(a-b)^2}{4(s-\tau)}\right)\right]ds.$$

Если $a = b$, то, очевидно, $I_1 = 0$. Рассмотрим случай, когда $a \neq b$. По теореме о среднем,

$$\exp\left(-\frac{p(b,t)(a-b)^2}{4(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{p(b,t)(a-b)^2}{4(s-\tau)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}(s-\tau+\theta(t-s))^{-2}(t-s)p(b,\tau)(a-b)^2\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{p(b,t)(a-b)^2}{4(s-\tau+\theta(t-s))}\right)d\theta,$$

поэтому

$$I_1 = \frac{\sqrt{p(b,\tau)}}{2\pi}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}(s-\tau)^{-\frac{1}{2}}\frac{p(b,t)(a-b)^2}{4(s-\tau+\theta(t-s))^2}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{p(b,t)(a-b)^2}{4(s-\tau+\theta(t-s))}\right)dsd\theta.$$

Применяя неравенство

$$z\exp(-z)\leqslant 2e^{-2}\exp(-\frac{z}{2}),\quad 0\leqslant z<+\infty,$$

получим

$$I_1\leqslant C\int\limits_0^1\int\limits_\tau^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}(s-\tau)^{-\frac{1}{2}}(s-\tau+\theta(t-s))^{-1}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{p(b,t)(a-b)^2}{8(s-\tau+\theta(t-s))}\right)dsd\theta.$$

Так как

$$\begin{gathered}t-\tau\geqslant s-\tau+\theta(t-s)=\\=(s-\tau+\theta(t-s))^\nu((s-\tau)(1-0)+\theta(t-\tau))^{1-\nu}\geqslant\\\geqslant(s-\tau)^\nu(t-\tau)^{1-\nu}\theta^{1-\nu},\end{gathered}\tag{15}$$

то, используя сначала правую часть неравенства (15), а затем левую, найдем при $0<\nu<\frac{1}{2}$

$$I_1\leqslant C\exp\left(-\frac{p(b,\tau)(a-b)^2}{8(t-\tau)}\right)(t-\tau)^{\nu-1}\times$$
$$\times\int\limits_0^1\theta^{\nu-1}d\theta\int\limits_\tau^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}(s-\tau)^{-\frac{1}{2}-\nu}ds=\frac{C}{t-\tau}\exp\left(-\frac{p(b,\tau)(a-b)^2}{8(t-\tau)}\right).$$

Наконец неравенство

$$(t-\tau)^{-\nu}\exp\left(-\frac{p(b,\tau)(a-b)^2}{8(t-\tau)}\right)\leqslant C(a-b)^{-2\nu}p(b,\tau)^{-\nu}$$

дает оценку

$$I_1\leqslant\frac{C}{(t-\tau)^{1-\nu}},\quad \nu\in\left(0,\frac{1}{2}\right).\tag{16}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I_2=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\tau^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}Z_0(a,s;b,\tau)ds.$$

Применяя к I_2 лемму 1, получим

$$I_2=Z_0(a,t;b,\tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int_\tau^t(t-s)^{-\frac{3}{2}}\Big[Z_0(a,t;b,\tau)-Z_0(a,s;b,\tau)\Big]ds.$$

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в работе [7], можно показать, что при фиксированных (ξ,τ) объемный потенциал $Z_0(x,t;\xi,\tau)$ непрерывен по Гельдеру на каждом множестве $\overline{\gamma}_k\times[0,T]$ по переменной t с любым показателем $\nu\in(0,1)$. Поэтому, с учетом определения параметрикса Z, имеем оценку

$$I_2\leqslant\frac{C_1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}+C_2\int\limits_\tau^t(t-s)^{-\frac{3}{2}+\nu}ds\leqslant\frac{C_1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}},\quad \nu\in\left(\frac{1}{2},1\right).\tag{17}$$

Если в формуле (16) положить $\nu=\frac{\omega}{2}$,то из оценок (5), (16) и (17) следует, что ядро $N(t,\tau)$ системы (13) имеет особенность вида

$$\big|N(t,\tau)\big|\leqslant\frac{C}{(t-\tau)^{1-\frac{\omega}{2}}}.$$

Поэтому для решения системы (13) применим обычный метод последовательных приближений, откуда следует существование непрерывного и ограниченного решения $\Psi(t)$ системы.

Таким образом, если в формуле (7) в качестве $\varphi_k(a_j,t)$ взять компоненты решения $\Psi(t)$, то функция $u(x,t)$ будет удовлетворять всем условиям (2), (3). То, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), следует из равенства $LH=0$ и следующего результата (см. [3]):

Теорема 2. *Если функция $f(x,t)$ непрерывна на $[a,b]\times[0,T]$ и локально непрерывна по Гельдеру по переменной $x\in(a,b)$, равномерно по t, то функция*

$$W(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_a^b H(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

будет непрерывной функцией в $[a,b]\times[0,T]$, а $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial W}{\partial t}$ будут непрерывны при $x\in[a,b]$, $t\in(0,T]$, и $LW(x,t)=-f(x,t)$.

Остается доказать, что $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию (4). Полагая в формулах (5) $\mu\in(\frac{1}{2},1)$, получим

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma H(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right|\leqslant\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma\frac{C}{(t-\tau)^\mu|x-\xi|^{1-2\mu}}d\xi d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu}\int\limits_\Gamma\frac{d\xi}{|x-\xi|^{1-2\mu}}\leqslant C\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu},$$

$$\left|\int\limits_0^t H(x,t;a_j,\tau)\varphi(a_j,\tau)d\tau\right|\leqslant C\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu}|x-a_j|^{2\mu-1}\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu}.$$

Из последних неравенств и определения фундаментального решения $H(x,t;\xi,\tau)$ имеем

$$\lim_{t\to 0}u(x,t)=\lim_{t\to 0}\int\limits_\Gamma H(x,t;\xi,0)\psi(\xi)d\xi=\psi(x).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* М.: Физматлит, 2007. 272 с.
2. Кулаев Р.Ч. *Метод конечного интегрального преобразования для параболической задачи на графе* // Сибирский математический журнал. Т. 50, вып. 2. 2009. С. 350–355.
3. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир, 1969. 272 с.
4. L.M. Graves, *The theory of functions of real variables.* McGraw-Hill, 1956. 308 p.

5. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989. 464 с.
6. Камынин Л.И. *О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами* // Известия академии наук СССР (сер. матем.). Т. 28. С. 721–744.
7. W. Pogorzelsky, *Proprietes des integrales de l'equation parabolique normale* // Annales polonici mathematici. V. 4. 1957. P. 61–92.

Руслан Черменович Кулаев
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
E-mail: `kulaev@smath.ru`