ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 81-105.

УДК 517.5

АСИМПТОТИКА δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ АССОЦИИРОВАННЫХ МЕР

А.А. РУМЯНЦЕВА

Аннотация. Изучается вопрос о связи аимптотического поведения разности двух субгармонических функций $u_1 - u_2$ в окрестности бесконечности и разности их ассоциированных мер $\mu_1 - \mu_2$. Асимптотическое поведение разности рассматривается вне исключительных множеств "степенной"малости, а именно, вне множества, которое при любом γ допускает покрытие кругами $B(z_j, r_j)$, удовлетворяющее условию

$$\sum_{R/2\le|z_j|\le R} r_j = o(R^{\gamma+1}),\ R \longrightarrow \infty.$$

Асимптотика разности ассоциированных мер характеризуется поведением функции

$$\max_{R\le|z|/2}\left|\int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right|$$

в бесконечности. Доказано, например, что эта функция ведет себя как $o(|z|^\sigma)$, если разность $|u_1(z) - u_2(z)|$ вне исключительного множества "степенной"малости ведет себя как $o(|z|^\sigma)$. Если $\sigma \notin \mathbb{N}$, то вернго и обратное утверждение.

Ключевые слова: Субгармонические функции, ассоциированная мера, формула Йенсена, гармонические функции, представление Рисса.

Введение

Изучается вопрос об асимптотическом поведении δ-субгармонической функции $u = u_1 - u_2$ в терминах ассоциированных мер μ_1, μ_2 субгармонических функций u_1, u_2. Вводятся исключительные множества "степенной"малости. Так названы множества, для которых при любом $\gamma \in \mathbb{R}$ найдется покрытие кругами $B(z_j, r_j)$ так, что выполняется соотношение

$$\sum_{R/2\le|z_j|\le R} r_j = o(R^{\gamma+1}),\ R \longrightarrow \infty.$$

Одной из причин для введения таких исключительных множеств является следующая теорема из работы [2], играющая заметную роль в теории субгармонических и целых функций.

Теорема A. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста. Тогда существует целая функция $f(z)$, которая для любого γ вне некоторого множества $A_\gamma \in C_\gamma$ удовлетворяет соотношению*

$$|v(z) - \ln|f(z)|| \le C_\gamma \ln|z|.$$

А.А. Rumyantseva, Asyptotic of δ-subharmonic functions and their associated measures.

Работа поддержана РФФИ № 10-01-00233 а.

Поступила 20 июня 2010 г.

Возникает естественный вопрос, каким образом должны быть распределены нули целой функции f, для того чтобы имело место указанное соотношение. Основная теорема данной работы, в частности, в некоторой степени отвечает на этот вопрос.

Основная теорема данной работы обобщает результаты, изложенные в работе [7].

Результаты в данном направлении находят применение в вопросах полноты систем экспонент в различных весовых пространствах (см. [8], [9]).

1. Подготовительные утверждения и формулировка основной теоремы

1.1. Исключительные множества. Круг с центром в точке z радиуса r будем обозначать через $B(z,r)$. Для заданного числа $\gamma \in \mathbb{R}$ множество A на плоскости будем называть множеством класса C_γ, если существует покрытие множества A кругами $B(z_j,r_j)=\{z:|z_j-z|<r_j\}$, $j=1,2,...$, так,что выполняется условие

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} r_j = o(R^{\gamma+1}), \quad R\longrightarrow\infty. \tag{1}$$

Ясно, что можно считать центры кругов различными и что множество центров не имеет конечных предельных точек. Значит, если кругов в покрытие бесконечно много, то $|z_j|\longrightarrow+\infty$, когда $j\longrightarrow\infty$. Кроме того, из соотношения (1) следует, что

$$r_j = o(|z_j|^{1+\gamma}), \quad j\longrightarrow\infty. \tag{2}$$

Перечислим простейшие свойства введенных классов.

1. Всякое ограниченное множество принадлежит любому классу C_γ.

2. Объединение конечного набора множеств класса C_γ принадлежит классу C_γ.

3. Если $\gamma_1\ge\gamma_2$, то $C_{\gamma_1}\supseteq C_{\gamma_2}$.

4. Множества класса C_0 являются C_0-множествами в классическом (см. [1]) смысле.

5. При $\gamma>0$ класс C_γ содержит всю плоскость, значит, любое подмножество $\mathbb{C}$. В этом можно убедиться, если рассмотреть покрытие из кругов с центрами в точках $z_{nk}=n^2e^{i\frac{\pi k}{n}}$ радиусами $t_{nk}=2\pi(n+1)$, $n\in\mathbb{N}$, $k=1,2,...,n$. Эти круги покрывают всю плоскость, и при этом выполняется соотношение ($\gamma>0$)

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} r_j \le \text{Const.}\ R = o(R^{\gamma+1}), \quad R\longrightarrow\infty.$$

Таким образом, в качестве исключительных множеств имеет смысл рассматривать лишь множества класса C_γ при $\gamma\le 0$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\gamma\le 0$. Для $\gamma\ne -1$ классы C_γ описываются несколько более простым образом.

Утверждение 1. *Множество A принадлежит классу C_γ тогда и только тогда, когда существует покрытие этого множества кругами $B(z_j,r_j)$ так, что выполняется условие*

1. Если $\gamma>-1$, то

$$\sum_{|z_j|\le R} r_j = o(R^{\gamma+1}). \tag{3}$$

2. Если $\gamma<-1$, то

$$\sum_{|z_j|\ge R} r_j = o(R^{\gamma+1}). \tag{3'}$$

Доказательство утверждения 1.

То, что из условия (3) или (3′) вытекает условие (1), очевидно.

Пусть $\gamma \neq -1$ и покрытие множества A кругами $B(z_j, r_j) = \{z : |z_j - z| < r_j\}$, $j = 1, 2, ...$, удовлетворяет условию (1). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, чтобы для всех $R \geq 2^m$ выполнялась оценка

$$\sum_{R/2 \leq |z_j| \leq 2R} r_j \leq \frac{\varepsilon(1 - 2^{-|\gamma+1|})}{2} R^{\gamma+1}. \tag{4}$$

1. Пусть $\gamma > -1$. Покажем, что покрытие множества A удовлетворяет условию (3). По выбору номера m для натуральных $n > m$ в силу соотношения (4) имеем

$$\sum_{2^m < |z_j| \leq 2^{n+1}} r_j = \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{2^k < |z_j| \leq 2^{k+2}} r_j \leq \frac{\varepsilon(1 - 2^{-(\gamma+1)})}{2} \sum_{k=m}^{n-1} 2^{(k+1)(\gamma+1)} =$$

$$= \frac{\varepsilon(1 - 2^{-(\gamma+1)})}{2} 2^{(\gamma+1)n} \sum_{k=0}^{n-m-1} 2^{-k(\gamma+1)} < \frac{\varepsilon}{2} 2^{(\gamma+1)n}. \tag{5}$$

Число R_1 выберем настолько большим, чтобы

$$\sum_{|z_j| \leq 2^m} r_j \leq \frac{\varepsilon}{2} R_1^{\gamma+1}. \tag{6}$$

Возьмем произвольное $R \geq \max(R_1, 2^m)$. Тогда если $2^n \leq R \leq 2^{n+1}$, то

$$\sum_{|z_j| \leq R} r_j \leq \sum_{|z_j| \leq 2^m} r_j + \sum_{2^m < |z_j| \leq 2^{n+1}} r_j.$$

Суммы в правой части оценим по соотношениям (5) и (6).

$$\sum_{|z_j| \leq R} r_j \leq \frac{\varepsilon}{2} R_1^{\gamma+1} + \frac{\varepsilon}{2} 2^{n(\gamma+1)} \leq \varepsilon R^{\gamma+1}.$$

Итак, в силу произвольности ε соотношение (1) выполнено.

2. Пусть $\gamma < -1$. Возьмем произвольное $R \geq 2^m$, если $2^n \leq R \leq 2^{n+1}$, то $2^{n+1} > 2^m$ и по соотношению (4) имеем

$$\sum_{|z_j| \geq R} r_j \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{2^k \leq |z_j| \leq 2^{k+2}} r_j \leq \frac{\varepsilon(1 - 2^{-|\gamma+1|})}{2} \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-(k+1)|\gamma+1|} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} 2^{-(n+1)|\gamma+1|} = \frac{\varepsilon}{2} 2^{(n+1)(\gamma+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} R^{\gamma+1}.$$

Утверждение 1 доказано.

Классические C_0-множества в теории целых функций применяются на основе такого свойства этих множеств: *для любого C_0-множества A и для всех достаточно больших R найдется окружность $C(0, t)$ радиуса $t \in (R; 2R)$, не пересекающаяся с множеством A.*

В следующем утверждении доказывается соответствующее свойство для множеств класса C_γ.

Утверждение 2. *Пусть $\gamma \leq 0$ и $A \in C_\gamma$. Тогда для любого положительного числа $q > 0$ (если $\gamma = 0$, то $q < \frac{1}{8}$) и для всех $z \in \mathbb{C}$ с достаточно большим $|z|$ найдется $t \in (q; 2q)$ такое, что окружность $C(z, t) = \{w : \ |w - z| = t|z|^{\gamma+1}\}$ не пересекается с множеством A.*

Доказательство утверждения 2.

Пусть $\mathcal{B} = \{B(z_j, r_j)\}$, $j = 1, 2, ...,$ — система кругов, покрывающих множество A так, что выполняется соотношение (1). Учитывая свойство покрытий (2), можем найти число $R_1 > 1$ так, что при $|z| > R_1$ будет выполняться неравенство $r_j < \frac{1}{8}|z_j|$. Для $z \in \mathbb{C}$

через $\mathcal{B}(z)$ обозначим множество кругов $B(z_j, r_j)$ из покрытия $\mathcal{B}$, пересекающихся с кругом $B = B(z, 2q|z|^{\gamma+1})$. Если круг покрытия $B(z_j, r_j) \in \mathcal{B}(z)$, то $|z - z_j| \le r_j + 2q|z|^{\gamma+1}$ или

$$|z_j| \le |z| + (r_j + 2q|z|^{\gamma+1}) < |z| + \frac{1}{8}|z_j| + 2q|z|^{\gamma+1}$$

Отсюда, учитывая, что $\gamma \le 0$ и условие на q при $\gamma = 0$, получим для $|z| > R_1$ таких, что $2q|z|^\gamma < \frac{3}{4}$

$$\frac{7}{8}|z_j| \le |z|(1 + 2q|z|^\gamma) < \frac{7}{4}|z|,$$

таким образом, $|z_j| < 2|z|$. С другой стороны,

$$|z_j| \ge |z| - (r_j + 2q|z|^{\gamma+1}) > |z| - \frac{1}{8}|z_j| - 2q|z|^{\gamma+1},$$

поэтому для $|z| > R_1$ таких, что $2q|z|^\gamma < \frac{7}{16}$

$$\frac{9}{8}|z_j| > |z|(1 - 2q|z|^\gamma) > \frac{9}{16}|z|$$

или $|z_j| > \frac{1}{2}|z|$. Мы доказали, что если круг покрытия $B(z_j, r_j)$ попадает в множество $\mathcal{B}(z)$, то при достаточно больших $|z|$ будет выполняться

$$\frac{1}{2}|z| < |z_j| < 2|z|. \tag{7}$$

Поворотом вокруг точки z спроецируем круги покрытия из $\mathcal{B}(z)$ на луч $\{w = z+\tau,\ \tau > 0\}$, и объединение полученных проекций обозначим через $b(z)$. Из неравенства (7) следует, что

$$\sum_{B(z_j,r_j)\in\mathcal{B}(z)} r_j \le \sum_{\frac{|z|}{2} \le |z_j| < 2|z|} r_j$$

Из условия (1) следует, что при достаточно больших $|z|$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{B(z_j,r_j)\in\mathcal{B}(z)} r_j < q|z|^{\gamma+1}.$$

Это значит, что линейная лебегова мера множества $b(z)$ меньше $q|z|^{\gamma+1}$ и в отрезке $[z + q|z|^{\gamma+1}; z + 2q|z|^{\gamma+1}]$ найдется точка $z+t$, не принадлежащая $b(z)$. Тогда по построению число t удовлетворяет условиям утверждения 2.

Утверждение 2 доказано.

Пересечение всех классов C_γ обозначим через $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \bigcap_\gamma C_\gamma.$$

Следующее утверждение устанавливает связь между классами C_γ и $\mathcal{C}$.

Утверждение 3. *Пусть $u(z)$ — некоторая вещественнозначная функция на плоскости, $v(t)$ — неотрицательная функция на $(0, +\infty)$. Тогда если для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ найдутся множество $A_\gamma \in C_\gamma$ и постоянная M_γ такие, что выполняется соотношение*

$$u(z) \le M_\gamma v(|z|), \quad z \notin A_\gamma, \tag{8}$$

то для любой положительной монотонно возрастающей до $+\infty$ функции $\chi(t)$ на $(0, +\infty)$ найдется множество $A \in \mathcal{C}$ так, что выполняется соотношение

$$u(z) \le v(|z|)\chi(|z|), \quad z \notin A. \tag{9}$$

Доказательство утверждения 3. Возьмем произвольное натуральное число n. По условию (8) найдется множество $A_{-n} \in C_{-n}$ и постоянная M_{-n} такие, что выполняется соотношение

$$u(z) \le M_{-n} v(|z|), \quad z \notin A_{-n}. \tag{10}$$

Множество A_{-n} покрывается системой кружков $\mathcal{B}_n = \{B(z_j^{(n)}, r_j^{(n)})\}$, $j = 1, 2, ...$, так, что для некоторой постоянной T_{-n} будет выполняться оценка

$$\sum_{R/2<|z_j^{(n)}|<2R} r_j^{(n)} \le T_{-n} R^{-n}, \quad R > 1. \tag{11}$$

Переходя при необходимости к последовательности $T_{-n} := \max_{k=1,\dots,n} T_{-k}$, можно считать, что последовательность констант T_{-n} не убывает при возрастании n. Положим

$$R'_n = \min\{t > 0 : \ \chi(t) \ge M_{-n}\},$$

и определим возрастающую последовательность положительных чисел рекуррентными формулами $R_1 = 0$,

$$R_{n+1} = \max(2R_n, R'_{n+1}, 3T_{-(n+3)}), \ n = 1, 2, ...$$

Положим

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_{-n} \bigcap \{z : \ R_n \le |z| < R_{n+1}\} \right).$$

Возьмем произвольное $z \notin A$ и пусть $R_n \le |z| \le R_{n+1}$. По определению множества A точка z не принадлежит A_{-n}, значит выполняется оценка (10). По определению последовательности R_n имеем $|z| \ge R_n \ge R'_n$, а по определению последовательности R'_n получим $\chi(|z|) \ge M_{-n}$. Следовательно,

$$u(z) \le v(|z|)\chi(|z|), \quad z \notin A.$$

Тем самым, мы доказали соотношение (9).

Докажем, что $A \in \mathcal{C}$. Пусть система кругов $\mathcal{B} = \{B(z_j, r_j)\}$ состоит из кругов $B(z_j^{(n)}, r_j^{(n)})$, для которых $R_n \le |z_j^{(n)}| \le R_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$ Возьмем произвольное $R > 1$ и пусть $R_n \le R \le R_{n+1}$. По определению последовательности R_n имеем $\frac{R}{2} \ge \frac{R_n}{2} \ge R_{n-1}$ и $2R \le 2R_{n+1} \le R_{n+2}$. Таким образом, интервал $(\frac{R}{2}; 2R)$ может пересекаться с интервалами $(R_{k-1}; R_k)$ при $k = n, n+1, n+2$. Значит, если центр z_j круга покрытия из системы $\mathcal{B}$ попал в кольцо $\{z : \ |z| \in (\frac{R}{2}; 2R)\}$, то это может быть центром $z_s^{(k)}$ круга покрытия из системы $\mathcal{B}_k$ для $k = n, n+1, n+2$. Отсюда по свойствам (11) систем $\mathcal{B}_k$ получаем

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \le \sum_{k=n}^{n+2} \sum_{\frac{R}{2}<|z_s^{(k)}|<2R} r_s^{(k)} \le T_{-n}R^{-n} + T_{-(n+1)}R^{-(n+1)} + T_{-(n+2)}R^{-(n+2)}.$$

Так как последовательность T_{-n} возрастающая, то

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \le R^{-n}(T_{-n} + T_{-(n+1)} + T_{-(n+2)}) \le 3R^{-n}T_{-(n+2)}.$$

По определению $R_n \ge 3T_{-(n+2)}$ и $R_n \le R$, следовательно,

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \le 3R^{-n}T_{-(n+2)} \le R^{-n}R_n \le R^{-(n-1)}.$$

Таким образом, покрытие $\mathcal{B}$ множества A кругами $B(z_j, r_j)$ обладает свойством: для любого $R > 1$ если $R \in (R_n; R_{n+1})$, то

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \leq R^{-(n-1)}. \tag{12}$$

Возьмем произвольное число γ и пусть натуральное число $m \geq -\gamma + 1$, например, $m = -[\gamma] + 1$. Возьмем произвольное число $R > 1$.

Множество $A' = A \bigcap B(0, 4R_m)$ как ограниченное множество принадлежит классу C_γ.

Выше определили систему кругов $\mathcal{B} = B(z_j, r_j)$, покрывающую множество A. Часть $\mathcal{B}'$, состоящая из кругов $B(z_j, r_j)$, для которых $|z_j| > 2R_m$, покрывает множество $A'' = A \setminus B(0, 3R_m)$. Возьмем произвольное число $R > 1$ и пусть $R_n \leq R \leq R_{n+1}$. Если $n + 1 \leq m$, то $R_{n+1} \leq R_m$ и в покрытии $\mathcal{B}'$ нет кругов с центром в кольце $\{\frac{R}{2} \leq |z| \leq 2R\}$. Если $n + 1 > m$, то $n + 1 \geq m + 1 \geq -\gamma + 2$, значит $-(n-1) \leq \gamma$ и по соотношению (12)

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \leq R^{-(n-1)} \leq R^\gamma = o(R^{\gamma+1}).$$

Это значит, что множество A'' принадлежит классу C_γ, следовательно, и множество $A = A' \bigcup A''$ принадлежит классу C_γ при любом γ.

Утверждение 3 доказано.

1.2. Оценочные функции. Через $k(t)$ будем обозначать функции на $(0, +\infty)$, используемые для характеристики роста δ-субгармонических функций и ассоциированных мер. Общие требования к этим функциям:

K1) функция $k(t) > 0$ и монотонно не убывающая и $\ln t = O(k(t))$;

K2) для некоторой константы K и для всех $t > 0$ верно

$$k(et) \leq Kk(t).$$

Утверждение 4. *Для функции $k(t)$, удовлетворяющей условиям K1), K2), выполняются также следующие условия*

1. Для всех $t \geq e$ имеет место неравенство

$$k(t) \leq k(e)t^{\ln K},$$

в частности,

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{\ln k(t)}{\ln t} = \sigma \leq \ln K.$$

2. Если $q = [\sigma]$ — целая часть σ, то

а) функция

$$k_q(t) = t^q \int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+1}}$$

удовлетворяет условию K1) и при при $t \geq e$ — условию K2):

$$k_q(et) \leq (K + e^q)k_q(t).$$

б) функция

$$k_{00}(t) = \int_1^t \left(\int_1^r \frac{k(\tau)d\tau}{\tau} \right) \frac{k(r)dr}{r}$$

удовлетворяет условию K1) и при $t \geq e^2$ — условию K2):

$$k_{00}(et) \leq (K + 2)k_{00}(t).$$

в) если интеграл сходится, то функция

$$\overline{k}_q(t) = t^{q+1} \int_t^\infty \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+2}}$$

при $t \geq 0$ *обладает свойствами К1), К2):*

$$\overline{k}_q(et) \leq e^{q+1}\overline{k}_q(t).$$

г) если функцию $k_{00}(t)$ *продолжить на отрезок [0,1] нулем, то функция* $k_{00}(|z|)$ *субгармонична на плоскости, причем*

$$\Delta k_{00}(|z|) = k(|z|)|z|^{-2}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство утверждения 4.

Докажем пункт 1. Пусть $e^n \leq t < e^{n+1}$. Тогда $n \leq \ln t$ и по свойствам К1, К2 имеем

$$k(t) \leq k(e^{n+1}) \leq Kk(e^n) \leq ... \leq K^n k(e) \leq k(e)K^{\ln t} = k(e)t^{\ln K}.$$

Докажем пункт 2. Свойство К1 не очевидно только для функции $\overline{k}_q(t)$. Монотонность этой функции вытекает из неотрицательности ее производной:

$$\overline{k}'_q(t) = (q+1)t^q \int_t^\infty \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+2}} - \frac{k(t)}{t} \geq k(t)\left(t^q \int_t^\infty \frac{(q+1)d\tau}{\tau^{q+2}} - \frac{1}{t}\right) = 0.$$

Для функции $\overline{k}_q(t)$ свойство К2 очевидно. Пункт 2в доказан.

Докажем пункт 2а. По свойству К2 для функции $k(t)$ имеем при $t \geq e$

$$k_q(et) = e^q t^q \left(\int_e^{et} \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+1}} + \int_1^e \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+1}}\right) \leq$$

$$\leq t^q \int_1^t \frac{k(e\tau)d\tau}{t^{q+1}} + e^q t^q \int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{t^{q+1}} \leq (K + e^q)k_q(t).$$

Докажем пункт 2б. Поскольку

$$k_{00}(t) = \int_1^t \frac{k_0(\tau)d\tau}{\tau},$$

то при $t \geq e^2$ по пункту 2а

$$k_{00}(t) = \int_{e^2}^{et} \frac{k_0(\tau)d\tau}{\tau} + \int_1^{e^2} \frac{k_0(\tau)d\tau}{\tau} \leq \int_e^t \frac{k_0(e\tau)d\tau}{\tau} + \int_1^t \frac{k_0(\tau)d\tau}{\tau} \leq (K+2)\overline{k}_{00}(t).$$

Пункт 2г) доказывается непосредственным вычислением оператора Лапласа в полярных координатах.

Утверждение 4 доказано.

Определение. Будем говорить, что некоторое асимптотическое соотношение выполняется вне множеств степенной малости, если для любого γ найдется множество $A_\gamma \in C_\gamma$, вне которого это соотношение выполняется.

Для борелевской меры μ на плоскости через $\mu(z,t)$ будем обозначать μ-меру круга $B(z,t) = \{w : |w - z| < t\}$ и положим

$$M(\mu)(z) = \max_{R \leq |z|/2} \left| \int_0^R \frac{\mu(z,t)}{t} dt \right|.$$

Сформулируем основной результат, доказываемый в данной работе.

Основная теорема.

I. *Пусть* u_1, u_2 *— субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный порядок роста,* μ_1, μ_2 *— ассоциированные по Риссу меры этих функций и функция* $k(t)$ *удовлетворяет условиям К1, К2. Тогда если соотношение*

$$|u_1(z) - u_2(z)| = O(k(|z|)), \quad |z| \longrightarrow \infty,$$

выполняется вне множеств степенной малости, то соотношения

$$M(\mu_1-\mu_2)(z)=O(k(|z|)), |z|\longrightarrow\infty,$$

тоже выполняется вне множеств степенной малости.

II. *Пусть*

$$\sigma=\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}]\frac{\ln k(t)}{\ln t}$$

и $q=[\sigma]$ *— целая часть* σ. *Если соотношение*

$$M(\mu_1-\mu_2)(z)=O(k(|z|)), |z|\longrightarrow\infty,$$

выполняется вне множеств степенной малости, то существует гармоническая на всей плоскости функция $H(z)$ *так, что соотношение*

$$|u_1(z)-u_2(z)+H(z)|=O\left(\int_1^{|z|}\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t}+\frac{1}{q+1}\int_1^{|z|}\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}+\right.$$

$$\left.+\chi(q)|z|^q\int_1^{|z|}\frac{k(t)dt}{t^{q+1}}+\frac{1}{q+1}|z|^{q+1}\int_{|z|}^{\infty}\frac{k(t)dt}{t^{q+2}}+k(1)\ln|z|\right), \qquad (*)$$

где $\chi(0)=0$ *и* $\chi(q)=\frac{1}{q}$ *при* $q>0$, *выполняется вне множеств степенной малости.*

Довольно сложный вид соотношения $(*)$ во второй части теоремы связан с тем, что доказателство этой части основано на теореме B, которая, в свою очередь, основана на первичных множителях Веерштрассе. Однако, в некоторых частных случаях неравенство $(*)$ записывается просто. Так, если $k(t)=t^\sigma$ и $\sigma\notin\mathbb{N}$, то $(*)$ приобретает вид

$$|u_1(z)-u_2(z)+H(z)|=O(k(|z|)).$$

Если же $\sigma\in\mathbb{N}$, то можно оценить погрубее

$$|u_1(z)-u_2(z)+H(z)|=O(k(|z|)\ln|z|).$$

Более общим образом, такие оценки верны, когда $k(t)=t^\sigma s(t)$, где $s(t)$ — возрастающая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию $rs'(r)=o(s(r))$.

2. Доказательство первой части основной теоремы

Теорема 1. *Пусть* u_1,u_2 *— субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный порядок роста,* μ_1,μ_2 *— ассоциированные по Риссу меры этих функций, и функция* $k(t)$ *удовлетворяет условиям K1, K2. Тогда если для любого* γ *существует некоторое исключительное множество* $A_\gamma\in C_\gamma$ *такое, что выполняется оценка*

$$|u_1(z)-u_2(z)|\le k(|z|),\quad z\notin A_\gamma,$$

то для любого γ *существуют некоторое исключительное множество* $A'_\gamma\in C_\gamma$ *и постоянная* M_γ *такие, что выполняются соотношения*

$$\left|\int_0^R\frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right|\le M_\gamma k(|z|),\quad z\notin A'_\gamma,\ R\in\left(0,\frac{|z|}{2}\right).$$

Для доказательства этой теоремы докажем две подготовительные леммы.

Лемма 1. *Пусть неотрицательная борелевская мера на плоскости удовлетворяет условию*

$$\mu(0,t)\le Ct^\rho,\quad t>1,$$

и $\alpha\in\mathbb{R}$. *Тогда множество точек* z, *не удовлетворяющих условию*

$$\mu(z,t)\le|z|^\alpha t,\quad t\in(0,\frac{|z|}{2}), \qquad (13)$$

принадлежит классу C_γ для любого $\gamma > \rho - \alpha - 1$. Более точно, это множество покрывается кругами $B(z_j, r_j)$ таким образом, что имеет место соотношение

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} r_j \le Const.R^{\rho-\alpha}, \quad R > 1.$$

Доказательство.

Возьмем число α и множество точек, не удовлетворяющих условию (13), обозначим через E. Таким образом, для каждой точки $z \in E$ найдется число $t_z \in (0, \frac{|z|}{2})$, так, что имеет место неравенство

$$\mu(z, t_z) > |z|^\alpha t_z.$$

Воспользуемся следующим утверждением (см. [4], стр. 246)

Лемма (О покрытиях шарами).

Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^p$ покрыто шарами так, что каждая точка $x \in A$ является центром некоторого шара $S(x)$ радиуса $r(x)$. Если $\sup_{x\in A} r(x) < \infty$, то из системы $\{S(x)\}$ можно выделить не более чем счетную систему $\{S(x_k)\}$, покрывающую все множество A и имеющую кратность, не превосходящую некоторого числа $N(p)$, зависящего только от размерности пространства.

Через E_n, $n = 1, 2, ...$, обозначим пересечение множества E с кольцом $\{2^{n-1} \le |z| \le 2^n\}$, $E_0 = E \bigcap B(0, 1)$. Множество E_n покрыто кругами $B(z, t_z)$, $z \in E_n$. Поскольку $t_z < \frac{|z|}{2}$, то это покрытие удовлетворяет условиям леммы о покрытиях. Значит, при каждом n найдется система точек $z_j^{(n)} \in E_n$, такая, что система кругов $\mathcal{B}_n = \{B(z_j^{(n)}, t_j^{(n)})\}$, где $t_j^{(n)} = t_{z_j^{(n)}}$, покрывает все множество E_n, при этом любая точка плоскости попадает не более чем в $N(2)$ из этих кругов. Объединение всех систем $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n = \{B(z_k, t_k)\}$, $k \ge 1$, покрывает все множество E, и при этом любая точка плоскости попадает не более чем в $3N(2)$ из этих кругов. Поскольку

$$\mu(z_j, t_j) > |z_j|^\alpha t_j,$$

то

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} t_j < \sum_{R/2<|z_j|<2R} |z_j|^{-\alpha} \mu(z_j, t_j).$$

Рассматривая отдельно случаи $\alpha \ge 0$ и $\alpha < 0$, получим отсюда

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} t_j < 2^{\alpha^+} R^{-\alpha} \sum_{R/2<|z_j|<2R} \mu(z_j, t_j),$$

где $\alpha^+ = \max(\alpha, 0)$. Теперь из обозначенных свойств покрытия $\mathcal{B}$ и из того, что $t_j < \frac{|z_j|}{2}$ следует оценка

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} t_j < 3N(2) \cdot 2^{\alpha^+} R^{-\alpha} \mu(0, 4R) \le 4^{\rho+1} N(2) C 2^{\alpha^+} R^{\rho-\alpha}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющяя конечный порядок роста, то есть для некоторых δ, ρ*

$$u(z) \le \delta |z|^\rho, \quad |z| > 1, \tag{14}$$

и A — открытое множество на плоскости. Тогда существует постоянная C, не зависящая от множества A, такая, что для всех $w \in \mathbb{C}$, $|w| > 1$, и $R \in \left(0, \frac{|w|}{2}\right)$ выполняется оценка

$$\int_{C(w,R)\bigcap A} |u(\zeta)| ds(\zeta) \le C|w|^\rho s(C(w, R) \bigcap A) \ln \frac{2\pi|w|e}{s(C(w, R) \bigcap A)},$$

где $ds(\zeta)$ *— элемент длины дуги окружности* $C(w,R)=\{z:|w-z|=R\}$.

Доказательство.

1. Очевидно, что функция $u^+(z)$ удовлетворяет неравенству (14), значит, для некоторого δ_1 для всех $z\in\mathbb{C}$ выполняется оценка $u^+(z)\le\delta_1(|z|+1)^\rho$. Следовательно, для всех $w\in\mathbb{C}$, $|w|\ge 1$ и $R\in\left(0,\frac{|w|}{2}\right)$ имеем

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}u^+(\zeta)ds(\zeta)\le\delta_1 2^\rho|w|^\rho s(C(w,R)\bigcap A), \tag{15}$$

Из представления $|u|=2u^+-u$ получаем, что теперь для доказательства леммы 2 нужно соответствующим образом оценить снизу интеграл

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}u(\zeta)ds(\zeta).$$

Положим $T=4|w|$ и воспользуемся представлением Грина функции u в круге $B=B(0,T)$:

$$u(\zeta)=H(\zeta)-\int_B G(\zeta,z)d\mu(z), \tag{16}$$

где

$$H(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T^2-|\zeta|^2}{|Te^{i\varphi}-\zeta|^2}u(Te^{i\varphi})d\varphi$$

— гармоническая мажоранта функции u в круге B и

$$G(\zeta,z)=\ln\left|\frac{\zeta\overline{z}-T^2}{(z-\zeta)T}\right|$$

— функция Грина круга B, μ — ассоциированная мера функции u. Если ζ лежит на окружности $C(w,R)$, где $R<\frac{|w|}{2}$, то $|\zeta|\le|w|+R\le 2|w|\le T/2$, поэтому $|Te^{i\varphi}-\zeta|^2\ge T^2/4$ и $T^2-|\zeta|^2\le T^2$. Следовательно,

$$\frac{T^2-|\zeta|^2}{|Te^{i\varphi}-\zeta|^2}\le 4$$

и для $\zeta\in C(w,R)$ имеем

$$H(\zeta)\ge\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T^2-|\zeta|^2}{|Te^{i\varphi}-\zeta|^2}(u-u^+)(Te^{i\varphi})d\varphi\ge\frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u-u^+)(Te^{i\varphi})d\varphi$$

Поскольку u^+ удовлетворяет неравенству вида (14), то

$$H(\zeta)\ge\frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Te^{i\varphi})d\varphi-4^{\rho+1}\delta|w|^\rho,$$

и так как усреднение субгармонической функции по окружности не убывает при возрастании радиуса окружности, то для некоторой положительной постоянной C'

$$H(\zeta)\ge\frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\varphi})d\varphi-4^{\rho+1}\delta|w|^\rho\ge -C'|w|^\rho,\quad |w|\ge 1.$$

Таким образом, на основе представления (16) имеем

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}u(\zeta)ds(\zeta)\ge -\mathrm{Const.}\ |w|^\rho s(C(w,R)\bigcap A)-$$

$$-\int_{C(w,R)\bigcap A}\int_B G(\zeta,z)d\mu(z)ds(\zeta). \tag{17}$$

Нам остается требуемым образом оценить сверху интеграл

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}\int_B G(\zeta,z)d\mu(z)ds(\zeta)=\int_B\left(\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)\right)d\mu(z). \tag{18}$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменных $\zeta = w\zeta_1$ и введем обозначения $z = wz_1,\ R = |w|R_1,\ A = wA_1,\ T = |w|T_1$, через $G_1(\zeta_1, z_1)$ обозначим функцию Грина круга $B_1 = B(0, T_1)$. Имеем

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)=|w|\int_{C(1,R_1)\bigcap A_1}G_1(\zeta_1,z_1)ds(\zeta_1). \tag{19}$$

Поскольку $T_1 = 4$, то

$$G(\zeta_1,z_1)=\ln\left|\frac{\zeta_1\overline{z_1}-T_1^2}{(z_1-\zeta_1)T_1}\right|\le\ln\frac{2T_1}{|z_1-\zeta_1|}=\ln\frac{8}{|z_1-\zeta_1|}. \tag{20}$$

Нам нужно оценить интеграл от правой части (20) при произвольном фиксированном z_1 и в оценке должна присутствовать только длина пересечения $C(1,R_1)\bigcap A_1$, поэтому z_1 можем считать вещественным. Если $z_1 \in \mathbb{R}$ и $\zeta_1 \in C(1, R_1)$, то есть $\zeta_1 = 1 + R_1e^{i\varphi}$, то

$$|z_1-\zeta_1|\ge\min(|(1-R_1)-\zeta_1|,|(1+R_1)-\zeta_1|)=R_1\min|1\pm e^{i\varphi}|.$$

Поэтому

$$\ln\frac{8}{|z_1-\zeta_1|}\le\max\ln\frac{8}{R_1|1\pm e^{i\varphi}|}\le\ln\frac{8}{R_1|1-e^{i\varphi}|}+\ln\frac{8}{R_1|1+e^{i\varphi}|}=2\ln\frac{4}{R_1|\sin\varphi|}.$$

Из этого неравенства вместе с (19) и (20) получим

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)\le 2R\int_a\ln\frac{4|w|}{R|\sin\varphi|}d\varphi,$$

где $a = \{\varphi \in [-\pi;\pi] : 1 + R_1e^{i\varphi} \in A_1\}$. Запишем это неравенство в виде

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)\le 2s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{|w|}{R}+$$

$$+2R\int_a\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi. \tag{21}$$

Если положить $a' = a\bigcap[-\pi/2;\pi/2]$, $a'' = (a\setminus a') + \pi$, то

$$\int_a\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi=\int_{a'}\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi+\int_{a''}\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi.$$

Воспользуемся простым неравенством $|\sin\varphi| \ge \frac{2}{\pi}|\varphi|$, когда $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$:

$$\int_a\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi\le\int_{a'}\ln\frac{2\pi}{|\varphi|}d\varphi+\int_{a''}\ln\frac{2\pi}{|\varphi|}d\varphi$$

Для оценки интегралов в правой части применим следующее утверждение (см. [5], стр. 56)

Лемма. Пусть $\varphi(x)$ — действительная интегрируемая на интервале $(-a, a)$, четная невозрастающая на $(0, a)$ функция (допускается $\varphi(0) = +\infty$). Пусть $E \subset (-a, a)$ — измеримое подмножество, $\mathrm{mes}\ E = 2b$. Тогда

$$\int_E\varphi(x)dx\le\int_{-b}^{b}\varphi(x)dx.$$

Пусть d' — длина множества a'. По лемме имеем

$$\int_{a'}\ln\frac{2\pi}{|\varphi|}d\varphi\le 2\int_0^{d'}\ln\frac{2\pi}{\varphi}d\varphi=2d'\ln\frac{2\pi e}{d'}.$$

Функция $x\ln\frac{2\pi e}{x}$ возрастающая на интервале $(0;2\pi]$. Если через d обозначим длину всего множества a, то $d'\le d\le 2\pi$. Поэтому

$$\int_{a'}\ln\frac{2\pi}{|\varphi|}d\varphi\le 2d\ln\frac{2\pi e}{d}.$$

Аналогичным образом оценивается интеграл по множеству a'', и в результате получим

$$\int_{a}\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi\le 4d\ln\frac{2\pi e}{d}.$$

Подставим эту оценку в соотношение (21). Учитывая, что

$$d=\frac{s(C(1,R_1)\bigcap A_1)}{R_1}=\frac{s(C(w,R)\bigcap A)}{|w|R_1}=\frac{s(C(w,R)\bigcap A)}{R},$$

получим

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)\le 8s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}.$$

Полученную оценку применим в соотношении (18):

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}\int_B G(\zeta,z)d\mu(z)ds(\zeta)\le 8\int_B s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}d\mu(z)=$$

$$=8s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}\mu(B).$$

Из условия (14) следует оценка на считающую функцию $\mu(0,t)$ (см. [6])

$$\mu(0,t)\le\delta' t^{\rho},\quad t>1,$$

следовательно,

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}\int_B G(\zeta,z)d\mu(z)ds(\zeta)\le 8\delta' 4^{\rho}|w|^{\rho}s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}.$$

Отсюда и из соотношения (17) получим

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}u(\zeta)ds(\zeta)\ge-\mathrm{Const.}\ |w|^{\rho}s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}.$$

Вместе с оценкой (15) и равенством $|u|=2u^{+}-u$ получаем утверждение леммы 2.

Лемма 2 доказана.

Следствие леммы 2.

Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста, то есть для некоторых δ,ρ

$$u(z)\le\delta|z|^{\rho},\quad |z|>1.$$

Тогда существует постоянная C такая, что для всех $w\in\mathbb{C}$, $|w|>1$, и $R\in\left(0,\frac{|w|}{2}\right)$ выполняются оценки

$$\int_0^{2\pi}|u(w+Re^{i\varphi})|d\varphi\le C|w|^{\rho}\ln\frac{|w|e}{R},\tag{22}$$

$$\int_{B(w,r)}|u(w+\zeta)|dm(\zeta)\le C|w|^{\rho}r^2\ln\frac{|w|e}{r},\tag{23}$$

Для того чтобы убедиться в оценке (22), достатоточно в лемме 2 в качестве множества A взять всю плоскость. Оценка (23) следует из оценки (22).

Приступим к доказательству теоремы 1.

Будем считать, что функции u_1, u_2 имеют нормальный тип при порядке ρ, то есть $u_j(z) \le \delta |z|^\rho$, $|z| \ge 1$. Как известно, ассоциированные меры при этом удовлетворяют условию $\mu_j(0,t) \le \delta_1 t^\rho$, $t \ge 1$.

Зафиксируем произвольное отрицательное $\gamma \in \mathbb{R}$ и любое положительное $\varepsilon > 0$. Пусть A_j, $j = 1, 2$, — множество тех z, для которых не выполняется условие

$$\mu_j(z,t) \le |z|^{\rho-\gamma+\varepsilon} t, \quad t \in (0; \frac{|z|}{2}). \tag{24}$$

По лемме 1 каждое из этих множеств принадлежит классу C_γ, значит, $A_1 \bigcup A_2 \in C_\gamma$.

Далее будем рассматривать $z \notin A_1 \bigcup A_2$ — точки в которых выполняются соотношения (24). Возьмем произвольное $R \in (0; \frac{|z|}{2})$.

1. Пусть $R < k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}$. В силу условия (24) имеем

$$\left| \int_0^R \frac{\mu_1(z,t) - \mu_2(z,t)}{t} dt \right| \le 2|z|^{\rho-\gamma+\varepsilon} R \le 2k(|z|). \tag{25}$$

2. Пусть $R \ge k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}$. Возьмем произвольное число $\gamma_1 < 2\gamma - 4\rho - 2\varepsilon - 1$. По предположению теоремы 1 существует множество A класса $C_{\gamma_1} \subseteq C_\gamma$, вне которого выполняется соотношение

$$|u_1(z) - u_2(z)| \le \mathrm{Const.}\ k(|z|), \quad z \notin A.$$

Отсюда для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, с учетом свойства К2, имеем

$$\frac{1}{2\pi R} \left| \int_{C(z,R)\setminus A} (u_1(\zeta) - u_2(\zeta)) ds(\zeta) \right| \le \mathrm{Const.}\ k(|z|). \tag{26}$$

Применяя лемму 2 к множеству A и к каждой из функций u_1, u_2 для $R \in (0, \frac{|z|}{2})$, получим оценку

$$\frac{1}{2\pi R} \left| \int_{C(z,R)\bigcap A} (u_1(\zeta) - u_2(\zeta)) ds(\zeta) \right| \le$$
$$\le \mathrm{Const.}\ \frac{|z|^\rho s(z,R)}{2\pi R} \ln \frac{2\pi |z| e}{s(z,R)}, \tag{27}$$

здесь для краткости через $s(z,R)$ обозначена длина пересечения $C(z,R) \bigcap A$. Пусть $B(z_j, r_j)$, $j = 1, 2, ...,$ — круги, покрывающие множество A, о существовании которых говорится в определении класса C_{γ_1}, то есть, в частности,

$$\sum_{R/2 < |z_j| < R} r_j \le \mathrm{Const.}\ R^{\gamma_1+1}, \quad R > 1.$$

Так как γ_1 — отрицательное число, то для досаточно больших j $r_j \le \frac{|z_j|}{4}$. Если некоторый круг $B(z_j, r_j)$ пересекается с окружностью $C(z,R)$, то $|z - z_j| \le R + r_j$. Значит,

$$|z_j| \ge |z| - R - r_j \ge \frac{|z|}{2} - \frac{|z_j|}{4}.$$

Отсюда $|z_j| > \frac{|z|}{2}$. С другой стороны, для таких j имеем

$$|z_j| \le |z| + R + r_j \le \frac{3}{2}|z| + \frac{|z_j|}{4},$$

значит, $|z_j| \le 2|z|$.

Длина пересечения круга $B(z_j, r_j)$ с окружностью $C(z,R)$ не превосходит πr_j. Если сумму радиусов кругов $B(z_j, r_j)$, пересекающихся с окружностью $C(z,R)$, обозначить через $\Sigma(z,R)$, то

$$s(z,R) \le \Sigma(z,R) \le \pi \sum_{\frac{|z|}{2} \le |z_j| \le 2|z|} r_j \le \mathrm{Const.}\ |z|^{\gamma_1+1}. \tag{28}$$

В частности, в силу отрицательности $\gamma_1 + 1$ можно считать, что для достаточно больших $|z|$ длина $s(z,R)$ не превосходит 1. Учитывая, что в этом пункте мы предполагаем $R \geq k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}$, соотношение (27) можем записать в виде (напомним, что $k(t) \geq 1$)

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)\bigcap A}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq$$

$$\leq \text{Const. } |z|^{2\rho-\gamma+\varepsilon}(s(z,R)\ln(2\pi|z|e) - s(z,R)\ln s(z,R)).$$

Считая, что $s(z,R) \leq 1$, получим

$$-\sqrt{s(z,R)}\ln s(z,R) \leq \max_{0<x\leq 1}(-\sqrt{x}\ln x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}},$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)\bigcap A}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq \text{Const. } |z|^{2\rho-\gamma+\varepsilon}\sqrt{s(z,R)}\ln(2\pi|z|e).$$

Отсюда и из (28) вытекает соотношение

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)\bigcap A}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq \text{Const. } |z|^{\frac{\gamma_1+1}{2}+2\rho-\gamma+\varepsilon}\ln(2\pi|z|e).$$

По выбору числа γ_1 имеем

$$\frac{\gamma_1+1}{2} + 2\rho - \gamma + \varepsilon = \frac{\gamma_1 + 4\rho - 2\gamma + 2\varepsilon}{2} < 0,$$

следовательно, для $z \notin A$ и $R \geq k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)\bigcap A}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq \text{Const. } \leq \text{Const. } k(|z|).$$

Это соотношение вместе с (26) влечет соотношение, верное для всех $z \notin A$ и $R \in (k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}; \frac{|z|}{2})$

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq \text{Const. } k(|z|)$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(u_1-u_2)(z+Re^{i\varphi})d\varphi\right| \leq \text{Const. } k(|z|).$$

По формуле Привалова (см. [5], стр.65)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_1-u_2)(z+Re^{i\varphi})d\varphi = (u_1(z)-u_2(z)) + \int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt.$$

Отсюда и из последней оценки следует, что если z не принадлежит множеству A и $R \in (k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}; \frac{|z|}{2})$, то

$$\left|\int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right| \leq \text{Const. } k(|z|).$$

Вместе с (25) получаем, что это соотношение верно для всех $z \notin A_1 \bigcup A_2 \bigcup A$ и $R \in (0; \frac{|z|}{2})$. Так как множества A_1, A_2, A лежат в классе C_γ, то теорема 1 доказана.

3. Доказательство второй части основной теоремы

Теорема 2. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный порядок роста, μ_1, μ_2 — ассоциированные по Риссу меры этих функций, и функция $k(t)$ удовлетворяет условиям K1, K2. Тогда если для любого γ существует некоторое исключительное множество $A_\gamma \in C_\gamma$ такое, что выполняется оценка*

$$\left|\int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right| \le k(|z|), \quad z \notin A_\gamma,\ R \in \left(0, \frac{|z|}{2}\right), \tag{29}$$

то найдется гармоническая на всей плоскости функция $H(z)$ так, что для любого γ существуют некоторое исключительное множество $A'_\gamma \in C_\gamma$ и постоянная M'_γ такие, что выполняется соотношение

$$|u_1(z)-u_2(z)+H(z)| \le M'_\gamma 4^{q+2}(q+2)\left(\int_1^{|z|}\left(\int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t} + \frac{1}{q+1}\int_1^{|z|}\frac{k(\tau)d\tau}{\tau} + \right.$$

$$\left. + \chi(q)|z|^q\int_1^{|z|}\frac{k(t)dt}{t^{q+1}} + \frac{1}{q+1}|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty \frac{k(t)dt}{t^{q+2}} + k(1)\ln|z|\right), \tag{30}$$

где $\chi(0)=0$ и $\chi(q)=\frac{1}{q}$ при $q>0$.

Предварительно докажем, что утверждение (30) теоремы 2 следует из более жесткого предположения:

для всех $z \in \mathbb{C}$ и всех $R \in (0; \frac{|z|}{2})$ выполняется оценка

$$\left|\int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right| \le k(|z|). \tag{29$'$}$$

Пусть $\alpha(x)$ — неотрицательная четная бесконечно дифференцируемая функция на вещественной оси, равная нулю вне интервала $(-1;1)$ и

$$2\pi\int_0^{+\infty}\alpha(x)xdx = 1.$$

Положим $\alpha(z)=\alpha(|z|)$, $z\in\mathbb{C}$. Тогда $\alpha(z)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{C}$ и

$$\int_{\mathbb{C}}\alpha(z)dm(z) = 1,$$

здесь $m(z)$ обозначает плоскую меру Лебега.

Лемма 3. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Через u обозначим разность u_1-u_2 и для произвольного $\delta>0$, положим*

$$\widetilde{u}_\delta(z) = \int u(z+\delta\zeta)\alpha(\zeta)dm(\zeta).$$

Тогда для $z\in\mathbb{C}$, $|z|\ge 2\delta$, имеют место оценки

$$|\widetilde{u}_\delta(z)-u(z)| \le k(|z|), \tag{31}$$

$$|\Delta\widetilde{u}_\delta(z)| \le \alpha_0 k(|z|)\delta^{-2}, \tag{32}$$

где $\alpha_0 = \max|\alpha''(x)x+\alpha'(x)|$ и $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2x^2}+\frac{\partial^2}{\partial^2y^2}$ — оператор Лапласа.

Доказательство.

В интеграле в определении функции $\widetilde{u}$ перейдем к полярным координатам

$$\widetilde{u}_\delta(z) = 2\pi \int_0^{+\infty} \alpha(r) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \delta r e^{i\varphi}) d\varphi \right) r dr$$

и применим формулу Привалова (см. [5], стр. 65) во внутреннем интеграле. Учитывая свойства функции α, получим

$$\widetilde{u}_\delta(z) = u(z) + 2\pi \int_0^1 r\alpha(r) \left(\int_0^{\delta r} \frac{\mu_1(z,t) - \mu_2(z,t)}{t} dt \right) dr.$$

Если $|z| \geq 2\delta$, то при $r < 1$ $\delta r < \delta \leq \frac{|z|}{2}$, значит из условия $29'$, с учетом свойств функции α, получим соотношение (31).

Дифференцируя под знаком интеграла (в обобщенном смысле), получим

$$\Delta\widetilde{u}_\delta(z) = \int \Delta u(z + \delta\zeta)\alpha(\zeta) dm(\zeta).$$

После замены переменных $w = z + \delta\zeta$ имеем

$$\Delta\widetilde{u}_\delta(z) = \delta^{-2} \int \Delta u(w) \alpha \left(\frac{w - z}{\delta} \right) dm(w) = 2\pi\delta^{-2} \int \alpha \left(\frac{w - z}{\delta} \right) d\mu(w),$$

полагая теперь $w = z + te^{i\varphi}$, получим

$$\Delta\widetilde{u}_\delta(z) = 2\pi\delta^{-2} \int_0^{+\infty} \alpha \left(\frac{t}{\delta} \right) d\mu(z,t).$$

Дважды применим интегрирование по частям

$$\Delta\widetilde{u}_\delta(z) = -2\pi\delta^{-2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\delta} \alpha' \left(\frac{t}{\delta} \right) \mu(z,t) dt =$$

$$= 2\pi\delta^{-2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\delta^2} \alpha'' \left(\frac{t}{\delta} \right) + \frac{1}{\delta} \alpha' \left(\frac{t}{\delta} \right) \right) \left(\int_0^t \frac{\mu(z,\tau)}{\tau} d\tau \right) dt.$$

По свойствам функции α можно считать, что $t < \delta \leq \frac{|z|}{2}$, поэтому

$$|\Delta\widetilde{u}_\delta(z)| = \left| 2\pi\delta^{-2} \int_0^{+\infty} (x\alpha''(x) + \alpha'(x)) \left(\int_0^{x\delta} \frac{\mu(z,\tau)}{\tau} d\tau \right) dt \right| \leq$$

$$\leq 2\pi\alpha_0 k(|z|)\delta^{-2}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Через и обозначим разность $u_1 - u_2$ и пусть функция $\widetilde{u}_\delta(z)$ определена как в лемме 3. Через $G_{z,\delta}(w,\zeta)$ обозначим функцию Грина круга $B(z,\delta)$, то есть*

$$G_{z,\delta}(w,\zeta) = \ln \left| \frac{\delta^2 - (w - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})}{\delta(w - z)} \right|.$$

Тогда если $|z| \geq 2\delta$, то для всех $\zeta \in B(z,\delta)$ имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta) |\Delta\widetilde{u}_\delta(w) dm(w) \right| \leq \frac{\pi K \alpha_0}{2} k(|z|).$$

Доказательство.

Если $w, \zeta \in B(z,\delta)$, то $|\zeta| \le |z| + \delta \le 2|z|$. По соотношению (32) леммы 3, с учетом свойства К2, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)|\Delta\widetilde{u}_\delta(w)dm(w)\right| \le$$
$$\le K\alpha_0 k(|z|)\delta^{-2}\left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)|dm(w)\right|. \tag{33}$$

Ассоциированная мера функции $q(\zeta) = |\zeta - z|^2$ равна $\frac{4}{2\pi}dm(\zeta)$, а гармоническая мажоранта этой функции в круге $B(z,\delta)$ равна тождественно δ^2. По формуле Грина

$$q(\zeta) = \delta^2 - \frac{2}{\pi}\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)dm(w),$$

следовательно,

$$max_{\zeta\in B(z,\delta)}\frac{2}{\pi}\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)dm(w) = max_{\zeta\in B(z,\delta)}(\delta^2 - |\zeta - z|^2) = \delta^2.$$

Подставим эту оценку в соотношение (33) и получим утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Через μ обозначим разность $\mu_1 - \mu_2$, а через $G_{z,\delta}(w,\zeta)$ обозначим функцию Грина круга $B(z,\delta)$. Если $|z| \ge 2\delta$, то для всех $\zeta \in B(z,\delta)$ имеет место оценка*

$$\left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)|d\mu(w)\right| \le (2 + \pi\alpha_0)Kk(|z|).$$

Доказательство.

Пусть функция $\widetilde{u}_\delta(\zeta)$ определена как в лемме 3 и

$$H_{z,\delta}(\zeta) = \widetilde{u}_\delta(\zeta) + \int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)\frac{\Delta\widetilde{u}_\delta(w)}{2\pi}dm(w)$$

Тогда функция $H_{z,\delta}(\zeta)$ гармонична в круге $B(z,\delta)$ и равна $\widetilde{u}_\delta$ на границе этого круга. Поскольку

$$|u(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| \le |u(\zeta) - \widetilde{u}_\delta(\zeta)| +$$
$$+|\widetilde{u}_\delta(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| = |u(\zeta) - \widetilde{u}_\delta(\zeta)| + \left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)\frac{\Delta\widetilde{u}_\delta(w)}{2\pi}dm(w)\right|,$$

то по леммам 3 и 4, с учетом свойства К2, получаем

$$|u(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| \le k(|\zeta|) + \frac{K\pi\alpha_0}{2}k(|z|) \le (1 + \frac{\pi\alpha_0}{2})Kk(|z|), \quad \zeta \in B(z,\delta).$$

Если через $H(\zeta)$ обозначим гармоническое продолжение функции u с окружности на круг $B(z,\delta)$, то из последнего неравенства получим, что на границе круга выполняется оценка

$$|H(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| \le (1 + \frac{\pi\alpha_0}{2})Kk(|z|), \quad \zeta \in C(z,\delta),$$

которая по принципу максимума для гармонических функций продолжается на весь круг. По формуле Грина для функции u в круге $B(z,\delta)$ имеем

$$\left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)|d\mu(w)\right| = |u(\zeta) - H(\zeta)| \le |u(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| + |H_{z,\delta}(\zeta) - H(\zeta)| \le$$
$$\le (2 + \pi\alpha_0)Kk(|z|), \quad \zeta \in B(z,\delta).$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Через μ обозначим разность $\mu_1 - \mu_2$. Если $\varphi(\zeta) \in C_0^\infty(B(z,\delta))$, где $\delta < \frac{|z|}{2}$, то*

$$\left|\int \varphi(\zeta)d\mu(\zeta)\right| \leq \frac{(2+\pi\alpha_0)K}{2\pi}k(|z|)\int |\Delta\varphi(\zeta)|dm(\zeta).$$

Доказательство.

По формуле Грина имеем

$$\varphi(\zeta) = \int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)\frac{\Delta\varphi(w)}{2\pi}dm(w).$$

Следовательно,

$$\left|\int_{B(z,\delta)} \varphi(\zeta)d\mu(\zeta)\right| = \left|\int_{B(z,\delta)}\left(\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)\frac{\Delta\varphi(w)}{2\pi}dm(w)\right)d\mu(\zeta)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B(z,\delta)}\left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)d\mu(\zeta)\right||\Delta\varphi(w)|dm(w).$$

Отсюда и из леммы 5 получаем утверждение леммы 6.

Лемма 7. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Положим $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $u = u_1 - u_2$ и*

$$\widetilde{u}(\zeta) = \int u(\zeta + \frac{1}{2}\zeta z)\alpha(z)dm(z), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Тогда имеют место оценки

$$|\widetilde{u}(\zeta) - u(\zeta)| \leq k(|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

$$|\Delta\widetilde{u}(\zeta)| \leq Mk(|\zeta|)|\zeta|^{-2}, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

где $M = 4K\alpha_1(2+\pi\alpha_0)$ и α_1 — некоторая постоянная, определяемая функцией $\alpha(x)$.

Доказательство.

В интеграле, определяющем функцию $\widetilde{u}$, перейдем к полярным координатам, полагая $z = re^{i\varphi}$ и $\zeta = te^{i\theta}$:

$$\widetilde{u}(\zeta) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} u(\zeta + \frac{1}{2}tre^{\varphi+\theta})\alpha(r)rd\varphi dr = 2\pi\int_0^\infty\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta+\frac{1}{2}tre^{\varphi+\theta})d\varphi\right)\alpha(r)rdr =$$

.

$$= 2\pi\int_0^\infty\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta+\frac{1}{2}tre^{\psi})d\psi\right)\alpha(r)rdr.$$

Во внутреннем интеграле воспользуемся формулой Привалова

$$\widetilde{u}(\zeta) = 2\pi\int_0^\infty\left(u(\zeta) + \int_0^{\frac{1}{2}tr}\frac{\mu(\zeta,\tau)}{\tau}d\tau\right)\alpha(r)rdr.$$

По свойствам функции α получим

$$|\widetilde{u}(\zeta) - u(\zeta)| = 2\pi\int_0^\infty\left|\int_0^{\frac{1}{2}tr}\frac{\mu(\zeta,\tau)}{\tau}d\tau\right|\alpha(r)rdr.$$

По условию $29'$ получаем первое утверждение леммы 7.

Непосредственно дифференцируя (в обобщенном смысле) под знаком интеграла, получим

$$\Delta\widetilde{u}(\zeta) = \int (\Delta u)\left(\zeta(1+\frac{z}{2})\right)\left|1+\frac{z}{2}\right|^2\alpha(z)dm(z).$$

Произведем замену переменных $w = \zeta(1+\frac{z}{2})$:

$$\Delta\widetilde{u}(\zeta) = 2\pi\int\left|\frac{w}{\zeta}\right|^2\alpha\left(2(\frac{w}{\zeta}-1)\right)\frac{\Delta u}{2\pi}(w)\frac{4}{|\zeta|^2}dm(w) = \frac{8\pi}{|\zeta|^2}\int\beta(\frac{w}{\zeta})d\mu(w),$$

где

$$\beta(z) = |z|^2\alpha(2(z-1)).$$

По свойствам функции α функция $\beta(z)$ принадлежит $C_0^\infty(B(1,\frac{1}{2}))$, следовательно, $\beta(\frac{w}{\zeta}) \in C_0^\infty(B(\zeta,\frac{|\zeta|}{2}))$ и к последнему интегралу можно применить лемму 6. Получим

$$|\Delta\widetilde{u}(\zeta)| \le 4K(2+\pi\alpha_0)k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}\int|\Delta_w\beta(\frac{w}{\zeta})|dm(w) =$$

$$= 4K(2+\pi\alpha_0)k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}\int|(\Delta\beta)(\frac{w}{\zeta})||\zeta|^{-2}dm(w) =$$

$$= 4K(2+\pi\alpha_0)k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}\int|(\Delta\beta)(z)|dm(z) = 4K\alpha_1(2+\pi\alpha_0)k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть функция $k(t)$ удовлетворяет условиям K1, K2 и, кроме того,*

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}\frac{\ln k(t)}{\ln t} = \sigma$$

(см. свойство K2'). Положим $q = [\sigma]$ и пусть

$$G_q(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^q}{q}}$$

— первичный множитель (см. [1], стр.16), а непрерывная функция $a(w)$ удовлетворяет оценке

$$|a(w)| \le Ak(|z|)(|z|^2+1)^{-1}, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{34}$$

Тогда функция

$$u(z) = \int_{|w|<1}\ln|z-w|a(w)dm(w) + \int_{|w|\ge1}\ln G_q(\frac{z}{w})a(w)dm(w),$$

при $|z|\ge 2$ удовлетворяет оценке

$$|u(z)| \le 2\pi A'4^{q+2}(q+2)\left(k_{00}(|z|)+\frac{k_0(|z|)}{q+1}+\chi(q)k_q(|z|)+\frac{\overline{k}_q(|z|)}{q+1}\right)+$$
$$+A\pi k(1)\ln|z|$$

Доказательство.

Положим $a^+ = \max(a,0)$ и $a^- = \max(-a,0)$, тогда $a^\pm \ge 0$ и $a = a^+ - a^-$. Очевидно, каждая из функций $a^\pm(w)$ удовлетворяет оценке (34). Следовательно, нам достаточно доказать лемму в предположении, что функция $a(z)$ неотрицательна. В этом случае функция $u(z)$ субгармонична на всей плоскости. Если $|z|\ge 2$ и $|w|\le 1$, то $|z-w|\ge 1$ и $\ln|z-w|\ge 0$, поэтому

$$0 \le \int_{B(0,1)}\ln|z-w|a(w)dm(w) \le A\pi k(1)\frac{1}{\pi}\int_{B(0,1)}\ln|z-w|dm(w) = A\pi k(1)\ln|z|. \tag{35}$$

Нам остается оценить функцию

$$u_0(z) = \int_{|w|\ge1}\ln G_q(\frac{z}{w})a(w)dm(w).$$

Воспользуемся леммой 4.4. из [3] (стр. 163), которую сформулируем применительно к рассматриваемому нами случаю и используя применяемые здесь обозначения.

Теорема B. *Предположим, что μ — неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{C}$, и пусть $\mu(t)$ — мера круга $B(0,t)$, $\mu(0)=0$ и функция*

$$N(r)=\int_0^r \frac{\mu(t)}{t}dt$$

принадлежит классу сходимости порядка не выше $q+1$, то есть

$$\int^{\infty}\frac{N(r)dr}{r^{q+2}}<\infty.$$

Тогда интеграл

$$v(z)=\int_{|w|\geq 1}\ln G_q(\frac{z}{w})d\mu(w)$$

сходится абсолютно в окрестности ∞ и равномерно для $|z|\leq R$ при любом фиксированном положительном R. Кроме того, если $|z|\geq 1$, то

$$v(z)\leq 4^{q+2}(q+2)\left(q|z|^q\int_1^{|z|}\frac{N(r)dr}{r^{q+1}}+(q+1)|z|^{q+1}\int_{|z|}^{\infty}\frac{N(r)dr}{r^{q+2}}\right).$$

Если через $\mu(z)$ обозначим сужение меры $a(z)dm(z)$ на внешность круга $B(0,1)$, то $\mu(t)=0$ при $t\leq 1$, а при $t\geq 1$

$$\mu(t)=\int_{|z|<t}a(z)dm(z)=2\pi A\int_1^t\frac{k(r)}{r}dr\leq k(t)\ln t, \tag{36}$$

в частности,

$$\mu(t)\leq k(t)\ln^+ t,\quad t\geq 0. \tag{37}$$

Отсюда

$$N(r)\leq\int_1^r\frac{k(t)\ln^+ t}{t}dt\leq k(r)(\ln^+ r)^2,\quad r\geq 0.$$

По определению числа σ для любого положительного ε имеем

$$k(r)\leq \text{Const. } r^{\sigma+\varepsilon},\ r\geq 1.$$

Значит, можно взять достаточно малое $\varepsilon>0$ так, что при больших r будет выполняться

$$N(r)\leq\begin{cases}\text{Const. } r^{\sigma+\varepsilon}(\ln^+ r)^2\leq \text{Const. } r^{q+1-\varepsilon}, & \text{если } \sigma \text{ нецелое,}\\ \text{Const. } r^{q+\varepsilon}(\ln^+ r)^2\leq \text{Const. } r^{q+1-\varepsilon}, & \text{если } \sigma \text{ целое.}\end{cases} \tag{38}$$

Тем самым, функция $N(r)$ принадлежит классу сходимости порядка $q+1$ и, кроме того, $N(r)=o(r^{q+1})$. Следовательно, условия теоремы B выполнены, и для $|z|\geq 1$ выполняется соотношение

$$u_0(z)\leq 4^{q+2}(q+2)\left(q|z|^q\int_1^{|z|}\frac{N(r)dr}{r^{q+1}}+(q+1)|z|^{q+1}\int_{|z|}^{\infty}\frac{N(r)dr}{r^{q+2}}\right). \tag{39}$$

Оценим первое слагаемое в правой части соотношения (39) при $q>0$. Интегрируя по частям, учитывая, что $N(1)=0$, получим

$$\int_1^r\frac{N(t)dt}{t^{q+1}}=-\frac{N(r)}{qr^q}+\frac{1}{q}\int_1^r dN(t)t^{q+1}\leq\frac{1}{q}\int_1^r\frac{\mu(t)dt}{t^{q+1}}.$$

Отсюда и из оценки (36) имеем

$$\int_1^r\frac{N(t)dt}{t^{q+1}}\leq\frac{2\pi A}{q}\int_1^r\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t^{q+1}}=\frac{2\pi A}{q}\int_1^r\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)d\left(-\frac{1}{qt^q}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2\pi A}{q^2}\int_1^r\frac{k(t)dt}{t^{q+1}}.$$

Таким образом, при $|z| \ge 1$ и $q > 0$ выполняется оценка

$$q|z|^q \int_1^{|z|} \frac{N(t)dt}{t^{q+1}} \le \frac{2\pi A}{q}|z|^q \int_1^{|z|} \frac{k(t)dt}{t^{q+1}}. \tag{40}$$

Оценим второе слагаемое в соотношении (39). Интегрируя по частям и учитывая оценку (36), получим

$$\int_r^\infty \frac{N(t)dt}{t^{q+2}} = \frac{N(r)}{(q+1)r^{q+1}} + \frac{1}{q+1}\int_r^\infty \frac{\mu(t)dt}{t^{q+2}} \le \frac{N(r)}{(q+1)r^{q+1}}+$$
$$+\frac{2\pi A}{q+1}\int_r^\infty \left(\int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right) d\left(-\frac{1}{(q+1)t^{q+1}}\right) = \frac{N(r)}{(q+1)r^{q+1}}+$$
$$+\frac{2\pi A}{(q+1)^2 r^{q+1}}\int_1^r \frac{k(t)dt}{t} + \frac{2\pi A}{(q+1)^2}\int_r^\infty \frac{k(t)dt}{t^{q+2}}.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$(q+1)|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty \frac{N(t)dt}{t^{q+2}} \le 2\pi A \int_1^{|z|}\left(\int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t}+$$
$$+\frac{2\pi A}{q+1}\int_1^{|z|}\frac{k(\tau)d\tau}{\tau} + \frac{2\pi A}{q+1}|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty \frac{k(t)dt}{t^{q+2}}.$$

Отсюда и из соотношений (35), (40) получаем, что при $|z| \ge 2$ выполняется оценка сверху

$$u(z) \le 4^{q+2}(q+2)\left(2\pi A\int_1^{|z|}\left(\int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t} + \frac{2\pi A}{q+1}\int_1^{|z|}\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}+\right.$$
$$\left.+\,2\pi A\chi(q)|z|^q\int_1^{|z|}\frac{k(t)dt}{t^{q+1}} + \frac{2\pi A}{q+1}|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty \frac{k(t)dt}{t^{q+2}}\right) + \pi A k(1)\ln|z|, \tag{41}$$

где $\chi(0) = 0$ и $\chi(q) = 1/q$ при $q > 0$. В обозначениях утверждения 4 это неравенство запишется в виде

$$u(z) \le 4^{q+2}(q+2)\left(2\pi A k_{00}(|z|) + \frac{2\pi A}{q+1}k_0(|z|) + 2\pi A\chi(q)k_q(|z|) + \frac{2\pi A}{q+1}\overline{k}_q(|z|)\right)+$$
$$+\pi A k(1)\ln|z|. \tag{42}$$

Докажем нижние оценки для $u_0(z)$. Введем обозначение

$$\widetilde{k}(t) = 4^{q+2}(q+2)\left(2\pi A k_{00}(|z|) + \frac{2\pi A}{q+1}k_0(|z|) + \frac{2\pi A\chi(q)}{q}k_q(|z|) + \frac{2\pi A}{q+1}\overline{k}_q(|z|)\right).$$

Тогда по утверждению 4 функция $\widetilde{k}(t)$ при $t \ge e^2$ обладает свойствами K1, K2 и

$$u_0(z) \le \widetilde{k}(t), \quad t \ge 2. \tag{43}$$

Возьмем произвольное $z \in \mathbb{C}$, положим $T = 2|z|$ и воспользуемся представлением Грина функции u в круге $B = B(0,T)$:

$$u_0(z) = H(z) - \int_B G(z,w)d\mu(w), \tag{44}$$

где

$$H(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{T^2 - |\zeta|^2}{|Te^{i\varphi} - \zeta|^2}u_0(Te^{i\varphi})d\varphi$$

— гармоническая мажоранта функции u_0 в круге B и

$$G(\zeta, w) = \ln\left|\frac{\zeta\overline{w} - T^2}{(w-\zeta)T}\right|$$

— функция Грина круга B. По определению T $|Te^{i\varphi}-z|^2 \geq T^2/4$ и $T^2-|\zeta|^2 \leq T^2$. Следовательно,
$$\frac{T^2-|z|^2}{|Te^{i\varphi}-z|^2} \leq 4,$$
значит,
$$H(z) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T^2-|z|^2}{|Te^{i\varphi}-z|^2}(u_0-u_0^+)(Te^{i\varphi})d\varphi \geq \frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_0-u_0^+)(Te^{i\varphi})d\varphi.$$

Поскольку u_0^+ удовлетворяет неравенству
$$u_0^+(w) \leq \widetilde{k}(w),$$
то для некоторой константы $\widetilde{K}$ выполняется оценка
$$H(z) \geq \frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_0(Te^{i\varphi})d\varphi - 4\widetilde{k}(2|z|) \geq -4\widetilde{K}\widetilde{k}(|z|),\ t \geq e^2.$$
Таким образом, на основе представления (44) имеем
$$u_0(z) \geq -\widetilde{K}\widetilde{k}(|z|) - \int_B G(z,w)d\mu(w). \tag{45}$$
Нам остается требуемым образом оценить сверху потенциал Грина
$$\int_B G(z,w)d\mu(w) = \int_{B\setminus B(0,1)} G(z,w)a(w)dm(w)$$
В силу условия на функцию $a(w)$ и неотрицательности функции Грина получим
$$\int_B G(z,w)d\mu(w) \leq A\int_{B\setminus B(0,1)} G(z,w)k(|w|)|w|^{-2}dm(w).$$
В определении функции $k_{00}(t)$ функцию $k(t)$ будем полагать равной 0 в отрезке $[0;1]$. Тогда $k_{00}(|\zeta|)$ становится дважды дифференцируемой функцией, равной нулю в круге $B(0,1)$, причем
$$\Delta k_{00}(|\zeta|) = k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}.$$
Через $h(\zeta)$ обозначим гармоническую мажоранту функции $k_{00}(|\zeta|)$ в круге B, то есть $h(\zeta) \equiv k_{00}(2|z|)$. По формуле Грина имеем
$$\int_{B\setminus B(0,1)} G(z,w)k_{00}(|w|)|w|^{-2}dm(w) = 2\pi(h(z)-k_{00}(|z|)) \leq k_{00}(2|z|).$$
Отсюда по утверждению 4 получаем
$$\int_{B\setminus B(0,1)} G(z,w)k_{00}(|w|)|w|^{-2}dm(w) \leq (K+2)k_{00}(|z|),\ |z| \geq e^2.$$
Отсюда и из соотношений (45), (42) следует утверждение леммы 8.

Лемма 8 доказана.

Докажем, что из условия (29′) следует утверждение теоремы 2.

Пусть
$$v(z) = \int_{|w|<1}\ln|z-w|\frac{\Delta\widetilde{u}(w)}{2\pi}dm(w) + \int_{|w|\geq 1}\ln G_q(\frac{z}{w})\frac{\Delta\widetilde{u}(w)}{2\pi}dm(w).$$
По леммам 7 и 8 имеет место оценка
$$|v(z)| \leq 2\pi A'4^{q+2}(q+2)\left(k_{00}(|z|) + \frac{k_0(|z|)}{q+1} + \chi(q)k_q(|z|) + \frac{\overline{k}_q(|z|)}{q+1}\right) +$$
$$+A\pi k(1)\ln|z|, \quad |z|>1.$$

Функция

$$H(z) = v(z) - \widetilde{u}(z)$$

гармонична на всей плоскости. Снова по утверждениям лемм 7 и 8 имеем

$$|u_1(z) - u_2(z) + H(z)| \le |u(z) - \widetilde{u}(z)| + |v(z)| \le$$

$$\le 2\pi A' 4^{q+2}(q+2)\left(k_{00}(|z|) + \frac{k_0(|z|)}{q+1} + \chi(q)k_q(|z|) + \frac{\overline{k}_q(|z|)}{q+1}\right) +$$

$$+A\pi k(1)\ln|z|, \quad |z| > 1.$$

Таким образом, мы доказали, что если выполнено условие (29′), то имеет место соотношение (30).

Пусть теперь выполняется только условие (29).

Лемма 9. *Пусть ассоциированные меры μ_1, μ_2 субгармонических функций u_1, u_2 удовлетворяют условию (29) и функции $\widetilde{u}_j,\ j = 1, 2$ определены как в лемме 7, то есть*

$$\widetilde{u}_j(\zeta) = \int u_j(\zeta + \frac{1}{2}\zeta z)\alpha(z)dm(z), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Тогда вне множеств степенной малости выполняется соотношение

$$|\widetilde{u}(z) - u(z)| = O(k(|z|)),$$

где $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$, $u = u_1 - u_2$. Кроме того, если функции u_j имеют конечный тип при порядке ρ, то

$$|\mathrm{grad}\widetilde{u}(z)| \le M(\alpha)|z|^{\rho-1},\ |z| \ge 1.$$

Доказательство леммы 9. Первое утверждение леммы доказывается так же, как и соответствующее утверждение в лемме 7. Оценим градиент. Заменой переменных

$$z = 2\left(\frac{w}{\zeta} - 1\right)$$

получим представление

$$\widetilde{u}(\zeta) = \int u(w)\alpha\left(2\left(\frac{w}{\zeta} - 1\right)\right)\frac{4}{|\zeta|^2}dm(w).$$

Непосредственными вычислениями получим

$$\left|\mathrm{grad}\left(\alpha\left(2\left(\frac{w}{\zeta} - 1\right)\right)\frac{4}{|\zeta|^2}\right)\right| \le M(\alpha)|\zeta|^{-3}, \quad |z| > 1,$$

где постоянная $M(\alpha)$ зависит только от функции α. Следовательно,

$$|\ \mathrm{grad}\widetilde{u}_j(\zeta)| \le M(\alpha)|\zeta|^{-3}\int_{B(\zeta, \frac{|\zeta|}{2})} |u_j(w)|dm(w), \quad j = 1, 2,\ |z| > 1.$$

Интеграл от модуля функции u_j оценим по соотношению (23) вследствие леммы 2. Если $|\widetilde{u}_j(z)| \le \delta|z|^\rho$ при $|z| > 1$, то

$$|\ \mathrm{grad}\widetilde{u}_j(\zeta)| \le M(\alpha)C|\zeta|^{\rho-1}, \quad j = 1, 2,\ |z| > 2.$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Ассоциированные меры $\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2$ субгармонических функций $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2$ удовлетворяют условию* (29′)

Доказательство леммы 10.

Поскольку по лемме 9 для любого γ вне некоторого множества $A_\gamma \in C_\gamma$ выполняется оценка

$$|(\widetilde{u}_1(z) + u_2(z)) - (u_1(z) + \widetilde{u}_2(z)| = |(\widetilde{u}_1(z) - \widetilde{u}_2(z)) - (u_1(z) - u_2(z))| =$$
$$= |\widetilde{u}(z) - u(z)| \leq M_\gamma k(z),$$

то по доказанной теореме 1 получим, что вне некоторого множества A'_γ для всех $R \in (0; |z|/2)$ выполняется оценка

$$\left| \int_0^R \frac{(\widetilde{\mu}_1(z,t) + \mu_2(z,t)) - (\mu_1(z,t) + \widetilde{\mu}_2(z,t))}{t} dt \right| \leq M'_\gamma k(z).$$

то есть

$$\left| \int_0^R \frac{\widetilde{\mu}_1(z,t) - \widetilde{\mu}_2(z,t))}{t} dt - \int_0^R \frac{\mu_1(z,t) - \mu_2(z,t))}{t} dt \right| \leq M'_\gamma k(z).$$

По условию (29) на меры μ_1, μ_2 вне некоторых множеств A_γ имеем

$$\left| \int_0^R \frac{\widetilde{\mu}_1(z,t) - \widetilde{\mu}_2(z,t))}{t} dt \right| \leq \left| \int_0^R \frac{\mu_1(z,t) - \mu_2(z,t))}{t} dt \right| +$$
$$+ M'_\gamma k(z) \leq M_\gamma k(z), \; R \in (0; \frac{|z|}{2}). \tag{46}$$

Из оценки градиента в лемме 9 для z', z таких, что $|z'|, |z| > 1$ и $|z' - z| \leq 2|z|$, имеем

$$|\widetilde{u}_j(z') - \widetilde{u}_j(z)| \leq \max_{w \in B(z,|z|/4} |\operatorname{grad} \widetilde{u}_j(w)||z - z'| \leq \text{Const.}\ |z|^{\rho-1}|z - z'|. \tag{47}$$

Возьмем произвольное число $\gamma < -\rho$ и пусть $A_\gamma \in C_\gamma$ — множество, вне которого выполняется соотношение (46). По утверждению 2 для всех достаточно больших z найдется точка z' на расстоянии не более чем $|z|^{\gamma+1}$ от точки z, не попадающая в множество A_γ. По соотношению (47) имеем

$$|\widetilde{u}(z) - \widetilde{u}(z')| \leq \text{Const.}\ ,$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widetilde{u}(z + Re^{i\varphi}) - \widetilde{u}(z' + Re^{i\varphi})| d\varphi \leq \text{Const.}\ .$$

Применим к мерте $\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}_1 - \widetilde{\mu}_2$ формулу Привалова в точках z, z' соответственно и получим для всех $R \in (0; |z|/2)$

$$\left| \int_0^R \frac{\widetilde{\mu}(z,t)}{t} dt \right| \leq \left| \int_0^R \frac{\widetilde{\mu}(z',t)}{t} dt \right| + \text{Const.}\ .$$

Поскольку точка $z' \notin A_\gamma$, то выполняется соотношение (46), следовательно,

$$\left| \int_0^R \frac{\widetilde{\mu}(z,t)}{t} dt \right| \leq M_\gamma k(|z|) + \text{Const.}\ .$$

Таким образом, для всех $R \in (0; |z|/2)$

$$\left| \int_0^R \frac{\widetilde{\mu}(z,t)}{t} dt \right| \leq M'_\gamma k(|z|), \; z \in \mathbb{C},$$

и лемма 10 доказана.

По доказанному найдется гармоническая функция $H(z)$ такая, что вне множества степенной малости

$$|\widetilde{u}(z) + H(z)| = O(k(|z|)),$$

а по лемме 9 это же верно и для функции u.

Теорема 2 доказана.

В заключении автор выражает глубокую признательность профессору Юлмухаметову Р.С. за большую помощь и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распеределение корней целых функций.* Гос. изд.-во тех.-теор. лит. М: 1956. 632с.
2. Юлмухаметов Р.С. Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica, 1985. Т. 11. С.257–282.
3. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Изд.-во "Мир". М.: 1980. 304 с.
4. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966, 516 с.
5. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* М.: Наука, 1970, 591 с.
6. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.:Наука, 1971.
7. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика разности субгармонических функций* // Математические заметки, 1987. Т. 41, № 3. С. 348–355.
8. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // ДАН, 2009. Т. 429, № 2, С. 155–158.
9. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // Уфимский мат. журнал, 2010, Т. 2, № 1, С. 97–109.

Алла Александровна Румянцева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: AllaRum@mail.ru