ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 44-51.

УДК 517.54, 517.574

О ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛОГАРИФМОМ МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

В.И. ЛУЦЕНКО, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Изучается степень возможной точности асимптотической аппроксимации субгармонической функции логарифмом модуля целой функции. Доказано, что если субгармоническая функция u дважды дифференцируема и удовлетворяет условию

$$m \le |z|\Delta u(z) \le M, \ |z| > 0,$$

где $M, m > 0$, то аппроксимация с точностью $q \ln |z| + O(1)$ с константой $q \in (0, \frac{1}{4})$ возможна лишь вне множеств, не являющихся C_0-множеством. С другой стороны, показано, что аппроксимация с точностью $q \ln |z| + O(1)$ с константой $q \ge \frac{1}{4}$ возможна вне множеств, допускающих покрытие кругами $B(z_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|z_k| \le R} r_k = O(R^{\frac{3}{4}-q})$$

при $q \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ и

$$\sum_{|z_k| \ge R} r_k = O(R^{\frac{3}{4}-q})$$

при $q > \frac{3}{4}$. В частности, эти множества являются C_0-множествами при $q > \frac{1}{4}$. Во втором случае аппроксимирующая функция одна и та же для всех $q \ge \frac{1}{4}$, и эта функция получается небольшой модификацией функций типа синуса, построенных Любарским Ю. и Содиным М.

Ключевые слова: субгармонические функции, целые функции.

1. Введение

В работе [1] В.С. Азариным доказано, что для любой субгармонической функции $u(z)$, имеющей конечный тип при порядке $\rho > 0$, то есть удовлетворяющей условию

$$u(z) \le Const.|z|^\rho, \quad z \in \mathbb{C}, \ |z| > 1,$$

существует целая функция f, удовлетворяющяя соотношению

$$|u(z) - \ln |f(z)|| = o(|z|^\rho), \quad |z| \longrightarrow \infty, \ z \notin E.$$

При этом исключительное множество E является C_0-множеством, это значит, что множество E можно покрыть системой кругов $D(z_j, r_j)$ так, что

$$\sum_{|z_j| \le R} r_j = o(R), \quad R \longrightarrow \infty.$$

V.I. Lutsenko, R.S. Youlmukhametov, On the accuracy of the asymptotic approximation of subharmonic functions of the logarithm of the modulus of an entire function.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00233-а).

Поступила 3 июля 2010 г.

(см. [2], стр. 120). Эта теорема явилась далеко идущим обобщением известных в теории целых функций утверждений о существовании целых функций вполне регулярного роста с заданной индикатриссой роста (см. [2], стр.151). В 1985 г. теорема Азарина В.С. была существенно уточнена в работе [3], где доказано утверждение

Теорема А. *Для любой субгармонической функции $u(z)$ конечного порядка существует целая функция f такая, что для любого $\alpha \geq 0$ найдется постоянная $C_\alpha > 0$ так, что*

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \leq C_\alpha \ln|z|, \quad |z| \longrightarrow \infty, \; z \notin E_\alpha.$$

При этом исключительное множество E_α можно покрыть системой кругов $D(z_j, r_j)$ так, что

$$\sum_{|z_j| \geq R} r_j = o(R^{-\alpha}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Целые функции с такими асимптотическими свойствами находят эффективное использование в вопросах полноты, минимальности и базисности систем экспонент. Именно в работе [4] для такого использования Б.Я. Левиным было введено понятие целой функции типа синуса. Так названы целые функции f, которые вне кругов некоторого радиуса δ с центрами в нулях удовлетворяют оценке

$$\ln|f(z)| = |\mathrm{Re}\; z| + O(1), \quad |z| \longrightarrow \infty.$$

Затем в работе [5] были введены и использованы функции типа синуса для функции $h_D(z) = \max_{w \in D}(\mathrm{Re}\; zw)$, где D — ограниченный выпуклый многоугольник. В последующем функции типа синуса построены для функции h_D, когда кривизна $\chi(z)$ границы в точках $z \in \partial D$ удовлетворяет условию $0 < m \leq \chi(z) \leq M < \infty$ (см.[6]). Приведем здесь теорему из этой работы в несколько общей форме.

Теорема В. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция, дважды непрерывно дифференцируемая при $z \neq 0$. Если для некоторых постоянных $m, M > 0$ выполнены условия*

$$m \leq |z| \Delta u(z) \leq M, \quad |z| > 1,$$

тогда существует целая функция f, такая, что для некоторого $\varepsilon > 0$ круги $D(z_k, \varepsilon\sqrt{|z_k|})$, где z_k, $k = 1, 2, ...,$ — нули функции f попарно не пересекаются и вне объединения этих кругов выполняется оценка

$$|u(z) - \ln|f(z)|| = O(1), \quad |z| \longrightarrow \infty.$$

В работе [7] вводится следующее, более общее определение функций типа синуса.

Определение. *Пусть u непрерывная субгармоническая функция на плоскости и $\tau(u, z)$ — радиус наибольшего круга с центром в точке z, в котором функция u отклоняется от пространства гармонических функций на этом круге не более чем на 1:*

$$\tau(u, z) = \sup\{r : \; \exists h(w) \text{ — гармоническая функция в круге } B(z, r) : \max_{w \in B(z,r)} |h(w) - u(w)| \leq 1\}.$$

Функцией типа синуса для функции u будем называть целую функцию L, удовлетворяющую условиям

1. Все нули z_n, $n \in \mathbb{N}$, функции L простые и при некотором $\varepsilon > 0$ круги $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n))$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

2. При любом $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n))$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется соотношение

$$|\ln|L(z)| - u(z)| \leq A(\varepsilon).$$

Из соображений субгармоничности и из определения величины $\tau(u, z)$ вытекает свойство

$2'$. Для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется оценка сверху

$$\ln|L(z)| \leq u(z) + A_1(\varepsilon).$$

То, что данное определение включает в себя все введенные ранее определения функци типа синуса, легко проверяется вычислением величины $\tau(u, z)$ для соответствующих функций u.

В этой работе мы докажем, что приведенные выше теоремы A и B по существу не улучшаемы. А также будет показано, что определение функции типа синуса, данное выше, означает допустимо возможную точность асимптотики.

Теорема 1. *Пусть субгармоническая на плоскости функция $u(z)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{|z|} \leq \Delta u(z) \leq \frac{2}{|z|}, \quad |z| \geq 1. \tag{1}$$

Если для целой функции $f(z)$ при некотором $q \in (0; \frac{1}{4})$ выполняется неравенство

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \leq q \ln|z|, \quad z \notin E, \tag{2}$$

то для любого покрытия множества E кругами $D(z_j, r_j)$ найдется $R_q > 0$ так, что выполняется соотношение

$$\sum_{\frac{R}{2} \leq |z_j| \leq R} r_j \geq \frac{R}{64}, \ R > R_q.$$

Таким образом, исключительное множество E при $q < \frac{1}{4}$ не может быть C_0-множеством.

Доказательство предварим двумя простыми леммами.

Лемма 1. *Если круг $K = \{z : |z - a| < r\}$ не пересекается с кругом $\{z : |z| < 1\}$ и $h(z)$ — гармоническая мажоранта функции $u(z)$ в этом круге, то выполняются оценки*

$$\frac{r^2 - |z-a|^2}{4(|a| + r|)} \leq h(z) - u(z) \leq \frac{r^2 - |z-a|^2}{2(|a| - r)}, \quad z \in K. \tag{3}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $G(z, w)$ — ядро Грина круга K. Ассоциированная мера функции $u(z)$ равна $\frac{\Delta u(z) dm(z)}{2\pi}$, где $dm(z)$ — плоская мера Лебега, и по формуле Пуассона-Иенсена (см. [1], стр. 138) имеем

$$h(z) - u(z) = \int_K G(z, w) \frac{\Delta u(w) dm(w)}{2\pi}.$$

По условию (1) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int G(z, w) \frac{dm(w)}{|w|} \leq h(z) - u(z) \leq \frac{1}{\pi} \int G(z, w) \frac{dm(w)}{|w|}.$$

Для $w \in K$, очевидно, $|a| - r \leq |w| \leq |a| + r$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi(|a| + r)} \int G(z, w) dm(w) \leq h(z) - u(z) \leq \frac{1}{\pi(|a| - r)} \int G(z, w) dm(w).$$

Ассоциированная мера функции $|z - a|^2$ равна $\frac{2dm(z)}{\pi}$, а ее гармоническая мажоранта в круге K равна тождественно r^2, следовательно, по формуле Пуассона-Иенсена

$$\int G(z, w) dm(w) = \frac{\pi}{2}(r^2 - |z - a|^2).$$

Из последних двух соотношений вытекает утверждение леммы 1. □

Лемма 2. *Для $a \in \mathbb{C}$ через $D_0(a)$ обозначим круг $\{z : |z - a| < 7\sqrt{q|a| \ln|a|}\}$. Пусть для целой функции f выполнены условия теоремы. Тогда для всех a, таких, что*

$$|a| \geq e^8, \quad 144q \ln|a| < |a| \tag{$*$}$$

и для любого покрытия кругами $D(w_j, r_j)$ множества $E \bigcap D_0(a)$ выполняется оценка

$$\sum r_j \geq e^{-6q} \sqrt{q} |a|^{\frac{1}{2} - 2q}.$$

Доказательство. Для сокращения записи будем пользоваться обозначением $r_a = \sqrt{q|a|\ln|a|}$. Из условий $(*)$ вытекает, что $r_a < \frac{|a|}{12}$, в частности, круг $D(a) = \{z : |z-a| < 6r_a\}$ не содержит точку $z = 0$.

1. Предположим, что каждая окружность $C = \{z : |z-a| = r\}$ при $r \in [5r_a; 6r_a]$ пересекается с исключительным множеством E. Проецируя круги покрытия $D(w_j, r_j)$ по окружностям с центром в точке a на луч $\{[a; a+x) : \ x > 0\}$, получим, что сумма радиусов больше, чем $\frac{1}{2}r_a$, то есть поскольку $|a| \geq e^4$, то

$$\sum r_j \geq \frac{1}{2}\sqrt{q|a|\ln|a|} \geq \sqrt{q}|a|^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

и в этом случае утвердение леммы верно.

2. Теперь предположим, что некоторая окружность $C = \{z : |z-a| = r\}$, $r \in [5r_a; 6r_a]$, свободна от точек E.

2.1. Допустим, что в круге $K = \{z : |z-a| < r\}$ нет нулей функции f, то есть в этом круге функция $\ln|f(z)|$ гармонична. Пусть $h(z)$ — гармоническая мажоранта функции $u(z)$ в круге K. Поскольку $\ln|z|$ тоже гармоническая и на границе круга выполняется соотношение (2), то по принципу максимума

$$|h(z) - \ln|f(z)|| \leq q\ln|z|$$

во всем круге K. В круге $K_1 = \{z : |z-a| < r_a\}$ по лемме 1 имеем

$$h(z) - u(z) \geq \frac{r^2 - r_a^2}{4(|a|+r)} \geq \frac{6r_a^2}{(|a|+6r_a)}$$

и если a удовлетворяет условию $(*)$, в частности $r_a < \frac{|a|}{12}$, то

$$h(z) - u(z) \geq 4q\ln|a|. \ z \in K_1$$

Значит, в этом круге K_1 имеем

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \geq |u(z) - h(z)| - |h(z) - \ln|f(z)|| \geq 4q\ln|a| - q\ln|z|.$$

Если a удовлетворяет условию $(*)$ и $z \in K_1$, то $|z| \leq |a| + r_a \leq \frac{13}{12}|a|$, значит, $4\ln|a| \geq 2\ln|a| + 2\ln\frac{12}{13} + 2\ln|z| > 2\ln|z|$, поэтому в круге K_1 выполняется оценка

$$|u(z) - \ln|f(z)|| > q\ln|z|.$$

Следовательно, круг K_1 лежит в множестве E. Снова проецируя круги покрытия на луч $\{[a; a+x) : \ x > 0\}$, получаем, что сумма радиусов кругов больше, чем $\frac{1}{2}r_a$, значит, выполняется соотношение (4), и утверждение леммы 2 верно и в этом случае.

2.2. Остается рассмотреть случай, когда в круге K имеется по крайней мере один нуль функции f. Обозначим этот нуль через b, итак, $b \in K \subset \{z : |z-a| < 6r_a\}$ и $f(b) = 0$. Окружности $\{z : |z-b| = r\}, \ r \in [\sqrt{q|a|}; 2\sqrt{q|a|}]$ лежат в круге $D_0(a)$. Если все эти окружности пересекаются с множеством E, то сумма радиусов кругов покрытия будет не меньше $\sqrt{q|a|}$, и утверждение леммы верно. Пусть окружность $\partial K_2 = \{z : |z-b| = r\}$ при некотором $r \in [\sqrt{q|a|}; 2\sqrt{q|a|}]$ свободна от точек E. Пусть $H(z)$ — гармоническая мажоранта $u(z)$ в круге K_2, $H_f(z)$ — гармоническая мажоранта $\ln|f(z)|$ в этом же круге K_2. По лемме 1 имеем

$$|H(z) - u(z)| \leq \frac{r^2}{2(|b|-r)} \leq \frac{q|a|}{2(|a| - 6r_a - 2\sqrt{q|a|})}.$$

Отсюда, учитывая условие $(*)$ на точку a, получим

$$|H(z) - u(z)| \leq 2q. \tag{5}$$

Граница круга K_2 не пересекается с множеством E, значит, на ней выполняется соотношение (2), то есть

$$|H(z) - H_f(z)| \leq q\ln|z|, \ z \in \partial K_2.$$

в силу гармоничности $\ln|z|$ и по принципу максимума это соотношение верно и во всем круге K_2:

$$|H(z) - H_f(z)| \leq q\ln|z|, \ z \in K_2. \tag{6}$$

По формуле Пуассона-Иенсена

$$H_f(z)-\ln|f(z)|=\int G(z,w)d\mu_f(w)=\sum_{b_k\in K_2}G(z,b_k),$$

где $G(z,w)$ — функция Грина круга K_2, b_k — нули функции f. Отсюда

$$H_f(z)-\ln|f(z)|\geq G(z,b)=\ln\frac{r}{|z-b|}\geq\ln\frac{\sqrt{q|a|}}{|z-b|},$$

Отсюда и из оценок (5), (6) получаем, что в круге K_2 выполняется нижняя оценка

$$|\ln|f(z)|-u(z)|\geq|\ln|f(z)|-H_f(z)|-|H_f(z)-H(z)|-|H(z)-u(z)|\geq$$

$$\geq\ln\frac{\sqrt{q|a|}}{|z-b|}-q\ln|z|-Mq.$$

Если $z\in\{|z-b|<e^{-6q}\sqrt{q}|a|^{\frac{1}{2}-2q}\}$, то

$$|\ln|f(z)|-u(z)|\geq 4q+2q\ln|a|-q\ln|z|.$$

При выполнении условий $(*)$ для $z\in K_2$ будет верно $|a|\geq e^{-2}|z|$, поэтому

$$|\ln|f(z)|-u(z)|>q\ln|z|,$$

и круг $D(b,e^{-6q}\sqrt{q}|a|^{\frac{1}{2}-2q})$ полностью лежит в множестве E. Проецируя круги покрытия по окружностям с центром в точке b на луч, исходящий из точки b, получим, что сумма радиусов кругов покрытия не меньше, чем $e^{-6q}\sqrt{q}|a|^{\frac{1}{2}-2q}$, и утверждение леммы 2 снова верно.

Лемма 2 доказана. □

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть D — некоторое покрытие кругами $D(z_j,r_j)$ исключительного множества E. Зафиксируемся достаточно большим числом R. Через J обозначим множество индексов j, таких, что $|z_j|\leq R$. Если для некоторого $j\in J$ будет $r_j\geq R$, то

$$\sum_{|z_j|\leq R}r_j\geq R,$$

поэтому далее будем считать, что $r_j<R,\ j\in J$. Положим

$$d=7\max_{|a|\leq R}r_a,\quad n=\left[\frac{R}{2d}\right],$$

где $[x]$ означает целую часть x, а величина r_a определена в начале докзательства леммы 2. Разобьем отрезок $[\frac{R}{2};R]$ на n равных отрезков, длина которых будет не меньше, чем d. Середины этих отрезков обозначим через x_k и каждую окружность $\{z:|z|=x_k\}$ разделим на n равных дуг. Середины дуг обозначим через a_{km} и через B обозначим систему кругов $D_{km}=D(a_{km},d)$, $k,m=1,2,...n$. Круги D_{km} попарно не пересекаются, и общее количество N этих кругов при достаточно больших R удовлетворяет оценке

$$N=n^2>\frac{R^2}{8d^2}.\tag{6}$$

Разобьем множество индексов J на две части: J' — множество индексов $j\in J$, для которых радиус $r_j>d$ и $J''=J\setminus J'$.

Систему B кругов D_{km} тоже разобьем на две части: B$'$ — круги, которые пересекаются с объединением кругов покрытия $D(z_j,r_j)$ по $j\in J'$, B$''$ = B$\setminus$B$'$ — остальные круги. Пусть N_1,N_2 — количество кругов соответственно в системе B$'$ и B$''$, при этом $N_1+N_2=N$ и, следовательно, либо N_1, либо N_2 больше половины N. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Предположим, что

$$N_1\geq\frac{N}{2}\geq\frac{R^2}{16d^2}.$$

Поскольку радиусы кругов покрытия с индексами из J' больше радиуса любого круга из B, то система кругов $D(z_j,2r_j)$ покрывает все объединение кругов из системы B$'$. Значит, площадь объединения этих кругов $D(z_j, 2r_j)$ покрытия с $j \in J'$ больше площади объединения кругов из системы B'. Таким образом,

$$\pi \sum_{j \in J'} 4r_j^2 \geq \left| \bigcup_{B_{km} \in \mathrm{B}'} B_{km} \right| \geq N_1 \pi d^2.$$

В рассматриваемом случае имеем

$$\sum_{j \in J'} r_j^2 \geq \frac{R^2}{64}.$$

Поскольку мы предполагаем, что $r_j < R$, то

$$\sum_{j \in J'} \frac{r_j}{R} > \sum_{j \in J'} \frac{r_j^2}{R^2} \geq \frac{1}{64},$$

и

$$\sum_{j \in J} r_j > \frac{1}{64} R.$$

Утверждение теоремы в этом случае доказано.

2. Предположим, что

$$N_2 > \frac{N}{2} \geq \frac{R^2}{16d^2}. \tag{7}$$

Части E, попавшие в круги из системы B'', покрываются только кругами $D(z_j, r_j)$, $j \in J''$. Радиусы этих кругов покрытия не превосходят d. Радиусы кругов из системы B'' равны d. Из этих оценок сравнением площадей нетрудно убедиться в том, что каждый круг покрытия может пересекаться с не более чем 4 кругами из системы B. В самом деле, пусть некоторый круг $D(z, r)$ покрытия пересекается с m кругами из системы B. Тогда все эти круги из системы B лежат полностью в круге $D(z, r+d)$, и их суммарная площадь меньше (они попарно не пересекаются), чем площадь круга $D(z, r+d)$:

$$m\pi d^2 < \pi(r+d)^2 \leq 4\pi d^2.$$

Это значит, что если через J_{km} обозначим множество индексов из J'' кругов покрытия, имеющих непустое пересечение с множеством $E \bigcap B_{km}$, то каждый индекс из J'' попадает в не более чем 4 множеств J_{km}. По лемме 2 имеем

$$\sum_{j \in J_{km}} r_j \geq e^{-6q} \sqrt{q} |a_{km}|^{\frac{1}{2} - 2q} \geq e^{-6q} \sqrt{q} 2^{2q - \frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2} - 2q}.$$

Просуммируем эти неравенства

$$4 \sum_{J''} r_j \geq N_2 e^{-6q} \sqrt{q} 2^{2q - \frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2} - 2q}.$$

Отсюда и из условия (7) получаем, что для некоторой положительной постоянной C_q будет выполняться оценка

$$\sum_J r_j \geq C_q \frac{R R^{\frac{1}{2} - 2q}}{\ln R},$$

и если $q < \frac{1}{4}$, то при достаточно больших R имеем

$$\sum_{|z_j| \leq R} r_j \geq R.$$

Теорема 1 доказана. □

Число $q = \frac{1}{4}$ точное в смысле следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть субгармоническая на плоскости функция $u(z)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условию*

$$\frac{A}{|z|} \le \Delta u(z) \le \frac{B}{|z|}, \quad |z| \ge 1.$$

Тогда существует целая функция $f(z)$, для которой найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \ge 0$ вне множества

$$E_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(z_k, \delta |z_k|^{-\varepsilon}),$$

где z_k — нули функции f, выполняется соотношение

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) \ln|z| + Const. \ , \quad z \notin E_\varepsilon.$$

При этом исключительное множество E_ε покрывается кругами $B(z_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|z_k| \le R} r_k = O(R^{1-\varepsilon}), \ R \longrightarrow \infty,$$

если $\varepsilon \le 1$ и

$$\sum_{|z_k| \ge R} r_k = O(R^{1-\varepsilon}), \ R \longrightarrow \infty,$$

если $\varepsilon > 1$.

Доказательство. За основу возьмем функции типа синуса из работы [6]. Пусть функция $\beta(z)$ неотрицательна, непрерывна, имеет компактный носитель и

$$\int \beta(z) dm(z) = \frac{1}{4}.$$

Тогда функция

$$u_0(z) = u(z) + \int \ln|z - w| \beta(w) dm(w)$$

удовлетворяет условиям теоремы B, причем

$$u_0(z) = u(z) + \frac{1}{4} \ln|z| + O(1), \ |z| \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

По этой теореме существует целая функция f с нулями z_k, такая, что при некотором $\delta > 0$ круги $B_k = B(z_k, \delta\sqrt{|z_k|})$ попарно не пересекаются и вне этих кругов выполняется оценка

$$|u_0(z) - \ln|f(z)|| \le C_0. \tag{9}$$

Можно считать, что $|z_k| > 1$ и $\delta < 1$. Положим $r_k = \delta\sqrt{|z_k|}$ и через $h_k(z)$ обозначим гармоническую мажоранту функции u_0 в круге $B_k = B(z_k, r_k)$. По лемме 1 в круге $B(z_k, r_k)$ имеем

$$|u_0(z) - h_k(z)| \le C_1. \tag{10}$$

Значит, на границе круга выполняется оценка

$$|h_k(z) - \ln|f(z)|| \le C_0 + C_1.$$

По принципу максимума для субгармонических функций соотношение

$$\ln|f(z)| - h_k(z) \le C_0 + C_1 \tag{11}$$

выполняется во всем круге. Функция $g_k(z) = \frac{f(z) r_k}{z - z_k}$ аналитична в круге B_k и не имеет в нем нулей. Из (10) и (9) следует, что на границе круга имеет место оценка

$$|h_k(z) - \ln|g_k(z)|| \le C_0 + C_1,$$

которая по принципу максимума (минимума) для гармонических функций продолжается на весь круг. Поэтому в круге B_k имеем

$$\ln|g_k(z)| \ge h_k(z) - C_1 - C_0,$$

или

$$\ln|f(z)| \ge h_k(z) - \ln r_k + \ln|z - z_k| - C_1 - C_0.$$

Если при этом $z \notin E_\varepsilon$, то
$$\ln|f(z)| \geq h_k(z) - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln|z_k| - C_1 - C_0.$$
Поскольку внутри круга B_k верно
$$\ln|z_k| = \ln|z| + O(1),$$
то
$$\ln|f(z)| \geq h_k(z) - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln|z| + O(1).$$
Отсюда, учитывая (10) и (11), получаем
$$u_0(z) - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln|z| + O(1) \leq \ln|f(z)| \leq u_0(z) + O(1).$$
Вместе с (8) имеем
$$u(z) - \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\ln|z| + O(1) \leq \ln|f(z)| \leq u(z) + \frac{1}{4}\ln|z| + O(1)$$
или
$$|u(z) - \ln|f(z)|| \leq \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\ln|z| + O(1).$$

В качестве покрытия исключительного множества, удовлетворяющего условиям теоремы можно взять круги, из которых состоит это множество E_ε.

$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азарин В.С. *О лучах вполне регулярного роста целой функции* // Матем. сб. 1969. Т. 79, № 4. С. 463–476.
2. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.*
3. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica. 1985. Т. 11. С. 257–282.
4. Левин Б.Я. *О базисах показательных функций в* $L^2(-\pi,\pi)$ // Записки физ.-мат. фак.-та Харьковского гос. ун.-та и Харьковск. матем. об.-ва. 1961. Т. 27, № 4. С. 39–48.
5. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 3. С. 657–702.
6. Любарский Ю.И., Содин М.Л. *Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей.* Препринт №17. Харьков: Физико-технического института низких температур АН УССР. 1986. 42 с.
7. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение* // Алгебра и Анализ. 2010. Т. 22, № 5.

Луценко Владимир Иванович,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: Lutsenko_v_i@mail.ru

Юлмухаметов Ринад Салаватович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yulmukhametov@mail.ru