ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 111-117.

УДК 517.9

ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА БЕЗ РАСХОЖДЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Для дифференциально-инвариантной подмодели газовой динамики с нулевой дивергенцией рассмотрены решения с линейным полем скоростей. В лагранжевом описании получена подмодель из обыкновенных дифференциальных уравнений с одним конечным соотношением, переопределяющим систему. Для плоского случая найдены все решения.

Ключевые слова: газовая динамика, дифференциально-инвариантные решения, линейное поле скоростей.

Введение

Решения уравнений газовой динамики [1] с дивергенцией, равной нулю, удовлетворяют переопределенной системе уравнений, являющейся дифференциально-инвариантной подмоделью для любой допускаемой подгруппы:

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\vec{u} = 0, \quad \rho_t + \vec{u}\cdot\nabla\rho = 0, \quad p_t + \vec{u}\cdot\nabla p = 0, \tag{0.1}$$

где $\vec{u}$, p, ρ — скорость, давление и плотность, ∇ — градиент. Система справедлива для любого уравнения состояния, из которого определяется энтропия. Система (0.1) не приведена в инволюцию даже в плоском случае. Мы рассмотрим подмодель с линейным полем скоростей в плоском случае $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$.

1. Эйлерово и лагранжево описание движения с линейным полем скоростей

Решение системы (0.1) разыскиваем в виде

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t). \tag{1.1}$$

Система (0.1) записана в эйлеровых переменных t, $\vec{x}$. При подстановке (1.1) система (0.1) принимает вид

$$\nabla p = -\rho\left(\left(A' + A^2\right)\vec{x} + \vec{u}_0' + A\vec{u}_0\right), \quad p_t + (A\vec{x} + \vec{u}_0)\cdot\nabla p = 0,$$

$$\mathrm{tr}A = 0, \quad \rho_t + (A\vec{u} + \vec{u}_0)\cdot\nabla\rho = 0.$$

Совместность уравнений для давления приводит к подмодели из обыкновенных дифференциальных уравнений (эйлерово описание)

$$\begin{gathered} A' + A^2 = B, \quad B' + A^TB + BA = 0, \quad \mathrm{tr}\,A = 0, \\ \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{a}, \quad \vec{a}' + A^T\vec{a} + B\vec{u}_0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

S.V. Khabirov, Plane gas motions with the linear field of the velocity without divergence.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00047-а) и Советом по грантам Президента РФ для государсвтенной поддержки научных школ (№НШ-2826.2008.1).

Поступила 13 апреля 2010 г.

Остаются уравнения для плотности

$$\rho_t + (A\vec{x} + \vec{u}_0)\cdot\nabla\rho = 0, \quad \rho B + \nabla\rho\otimes(B\vec{x} + \vec{a}) = \rho B^T + (B\vec{x} + \vec{a})\otimes\nabla\rho,$$

которые проще интегрировать в лагранжевых переменных.

Лагранжевы переменные t, $\vec{\xi}$ вводятся как решение задачи

$$\vec{x}\,' = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad \vec{x}|_{t=t_0} = \vec{\xi} \tag{1.3}$$

и задаются формулами

$$\vec{x} = \vec{x}_0(t) + M(t)\vec{\xi}, \quad M(t_0) = I, \quad \vec{x}_0(t) = 0. \tag{1.4}$$

Из (1.3), (1.4) следуют выражения для матриц A, B и векторов $\vec{u}_0$, $\vec{a}$ через матрицу M и вектор $\vec{x}_0$

$$A = M'M^{-1}, \quad B = M''M^{-1}, \quad \vec{u}_0 = \vec{x}_0' - M'M^{-1}\vec{x}_0, \quad \vec{a} = \vec{x}_0'' - M''M^{-1}\vec{x}_0.$$

Из (1.2) следуют уравнения (лагранжево описание)

$$M^TM'' = C, \quad M^T\vec{x}_0'' = \vec{c}, \quad \det M = |M| = 1, \tag{1.5}$$

где C, $\vec{c}$ — постоянные матрица и вектор. Здесь мы пользовались тождеством $|M|' = |M|\mathrm{tr}(M'M^{-1})$.

Начальные условия для системы (1.5) имеют вид

$$M(t_0) = I, \quad M'(t_0) = M_1 = S_1 + \Omega_1, \tag{1.6}$$

где $S_1 = S_1^T = ||s_{ij}^1||$, $\Omega_1 = -\Omega_1^T = E < \vec{\omega}_1 >= \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_1^3 & \omega_1^2 \\ \omega_1^3 & 0 & -\omega_1^1 \\ -\omega_1^2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}$ при $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^3$. В плоском случае $\Omega_1 = \omega_1\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \omega_1\Sigma$.

Заметим, что ранги матриц C и B совпадают, так как справедливо тождество $C = M^TBM$.

В лагранжевых переменных уравнения (0.1) принимают вид

$$p_t = 0, \quad \rho_t = 0, \quad \nabla_\xi p = -\rho(\vec{\xi})(C\vec{\xi} + \vec{c}). \tag{1.7}$$

Подставим матрицу C в виде суммы симметричного и антисимметричного слагаемых

$$C = S_0 + \Omega_0, \quad S_0 = S_0^T = ||s_{ij}^0||, \quad \Omega_0 = -\Omega_0^T = E < \vec{\omega}_0 > .$$

В плоском случае $\Omega_0 = \omega_0\Sigma$.

Условие совместности переопределенной системы (1.7) принимает вид

$$\nabla_\xi\rho\times\left(S_0\vec{\xi} + \vec{c} + \vec{\omega}_0\times\vec{\xi}\right) = -2\rho\vec{\omega}_0.$$

Отсюда следуют равенства

$$\vec{\omega}_0\cdot\nabla_\xi\rho = 0, \quad \nabla_\xi\rho\times(S_0\vec{\xi} + \vec{c}) + \vec{\omega}_0(\vec{\xi}\nabla_\xi\rho + 2\rho) = 0, \tag{1.8}$$

$$\nabla_\xi\rho\left(\vec{\omega}_0\cdot(S_0\vec{\xi} + \vec{c})\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad S_0\vec{\omega}_0 = 0, \quad \vec{\omega}_0\cdot\vec{c} = 0. \tag{1.9}$$

Если $\vec{\omega}_0 = 0$, то из (1.8) и (1.7) следуют выражения для плотности и давления

$$\rho = p'(J_0), \quad J_0 = \frac{1}{2}\vec{\xi}\cdot S_0\vec{\xi} + \vec{c}\cdot\vec{\xi}, \quad p = P_0 - p(J_0),$$

где P_0 — постоянная, $p(J_0)$ — произвольная возрастающая функция.

Случай $\vec{\omega}_0 \neq 0$ рассмотрим для плоского случая $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^2$. Трехмерный случай рассматривается аналогично в силу первого уравнения (1.8).

Пусть $\Delta = s^0_{11}s^0_{22} - s^0_{12} + \omega_0^2 \neq 0$, тогда после замены

$$\xi^1 = \eta^1 + \xi^1_0(t), \quad \xi^2 = \eta^2 + \xi^2_0(t),$$

где $\xi^1_0 = \Delta^{-1}\left(c^2(s^0_{12} - \omega_0) - c^1 s^0_{22}\right)$, $\xi^2_0 = \Delta^{-1}\left(c^1(s^0_{12} + \omega_0) - c^2 s^0_{11}\right)$, уравнение (1.8) становится инвариантным относительно растяжения

$$\rho_{\eta^1}\left((s^0_{12} + \omega_0)\eta^1 + s^0_{22}\eta^2\right) - \rho_{\eta^2}\left(s^0_{11}\eta^1 + (s^0_{12} - \omega_0)\eta^2\right) = -2\omega_0\rho.$$

С инвариантом в качестве независимой переменной $I = \eta^2(\eta^1)^{-1}$ уравнение интегрируется

$$\rho = R''(J)\exp\left(2\omega_0\int\frac{dI}{P(I)}\right), \quad p = P_0 - (R(J) - JR'(J))\,\mathrm{sign}P,$$

где $R''(J) > 0$, $R(J)$ — произвольная функция переменной

$$J = \alpha_1\sqrt{|P|}\exp\left(\omega_0\int\frac{dI}{P(I)}\right), \quad P(I) = s^0_{22}I^2 + 2s^0_{12}I + s^0_{11}.$$

Пусть $\Delta = 0$, тогда после замены $I = (s^0_{12} + \omega_0)\xi^1 + s^0_{22}\xi^2$ уравнение (1.8) допускает перенос по ξ^1:

$$\rho_{\xi^1}(I + c^2) - \rho_I s^0_{22}(\lambda I + c^1) = -2\omega_0\rho, \quad \lambda = (s^0_{12} - \omega_0)(s^0_{22})^{-1} = s^0_{11}(s^0_{12} + \omega_0)^{-1}.$$

Решение представим в виде

$$\rho = \frac{Jp'(J)}{2\omega_0 I + (\omega_0 + s^0_{12})c^2 - s^0_{22}c^1}, \quad p = P_0 - p(J),$$

$$J = \left|I + \frac{c^2(\omega_0 + s^0_{12}) - s^0_{22}c^1}{2\omega_0}\right|^k \exp\left(\frac{\xi^1(\omega_0 - s^0_{12}) - \xi^2 s^0_{22}}{2\omega_0}\right),$$

$$k = \frac{c^2(\omega_0 - s^0_{12}) + c^1 s^0_{22}}{2\omega_0},$$

где P_0 — постоянная, $p(J)$ — произвольная функция.

2. Решение с линейной матрицей

Матрица M линейна по t, если $C = 0$: $M = I + M_1 t$. В плоском случае из условия $|M| = 1$ следует $|M_1| = 0$, $\mathrm{tr}\, M_1 = 0$, т.е.матрица M_1 нильпонентна $M_1^2 = 0$, $M^{-1} = I - M_1 t$, $A = M'M^{-1} = M_1 - M_1^2 t$.

Уравнение (1.5) с условием (1.4) определяет вектор $\vec{x}_0$:

$$\vec{x}_0 = -\frac{1}{6}t^3 M_1^T\vec{c} + \frac{1}{2}t^2\vec{c}_1 \tag{2.1}$$

где $\vec{c}_1$ — постоянный вектор.

Формула (2.1) определяет лагранжево решение в виде многочлена третьей степени по времени.

Далее разыскиваем решения с матрицей $C \neq 0$.

3. Интегралы модели

Матричное уравнение (1.5) имеет интеграл ($t_0 = 0$):

$$M^T M' - M^{T\prime} M = 2t\Omega_0 + 2\Omega_1 = 2\omega\Sigma, \quad \Sigma = \left\|\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad \omega = \omega_0 t + \omega_1 \tag{3.1}$$

в плоском случае.

Замечание 1. *Уравнения* (1.5) *допускают перенос по* t. *Поэтому при* $\omega_0 \neq 0$ *можно считать* $\omega_1 = 0$.

Представим матрицу M в виде произведения ортогональной и симметричной матриц
$$M = O\Lambda, \quad O^T O = OO^T = I, \quad \Lambda^T = \Lambda, \quad |M| = |\Lambda| = 1, \tag{3.2}$$
где $\Lambda(t_0) = I = O(t_0)$.

Матрица $O_1 = O^T O' = -O_1^T$ антисимметрична и $O_1(t_0) = \Omega_1$, $\Lambda'(t_0) = S_1$. Интеграл (3.1) принимает вид $\Lambda\Lambda' - \Lambda'\Lambda + 2\Lambda O_1 \Lambda = 2\omega\Sigma$. Отсюда определяется O_1:
$$O_1 = \omega\Lambda^{-1}\Sigma\Lambda^{-1} + \frac{1}{2}(\Lambda^{-1}\Lambda' - \Lambda'\Lambda^{-1}). \tag{3.3}$$
Матричное уравнение (1.5) в силу (3.3) запишем для Λ^2: $|\Lambda^2| = 1$,
$$\Lambda^{2\prime\prime} - \frac{1}{2}\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}\Lambda^{2\prime} + \omega(\Sigma\Lambda^{-2}\Lambda^{2\prime} - \Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}\Sigma) + 2\omega^2\Sigma\Lambda^{-2}\Sigma = 2S_0 \tag{3.4}$$
с начальными условиями
$$\Lambda^2(t_0) = I, \quad \Lambda^{2\prime}(t_0) = 2S_1. \tag{3.5}$$

Дополнительные уравнения на симметричную матрицу Λ^2 получаются дифференцированием условия $|\Lambda^2| = 1$:
$$\mathrm{tr}\,(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}), \quad \mathrm{tr}\,(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})' = 0, \quad \mathrm{tr}\,(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})'' = 0, \ldots \tag{3.6}$$

Удобно использовать следующую запись уравнения (3.4)
$$\begin{gathered}(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})' = -\frac{1}{2}(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})^2 + \omega(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}\Sigma\Lambda^{-2} - \Sigma\Lambda^{-2}\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}) + \\ +2\omega^2 I + 2S_0\Lambda^{-2}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Из уравнений (3.6) в силу (3.7) и равенства $(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})^2 = -|\Lambda^{2\prime}|I$ следуют интегралы
$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})^2 = 4\omega^2 + 2\mathrm{tr}\,(S_0\Lambda^{-2}) \quad \Rightarrow \quad |\Lambda^{2\prime}| + 4\omega^2 + 2S_0 : \Lambda^{-2} = 0, \\ \mathrm{tr}\,(S_0\Lambda^{-2\prime}) + \omega^{2\prime} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_0 : \Lambda^{-2} + \omega^2 = \mathrm{tr}\,S_0 + \omega_1^2.\end{gathered} \tag{3.8}$$

При $t = t_0$ из равенств (3.6), (3.8) получаем условия на постоянные параметры
$$\mathrm{tr}\,S_1 = 0, \quad |S_1| + \omega_1^2 + 2^{-1}\mathrm{tr}\,S_0 = 0 \tag{3.9}$$
в силу начальных условий.

4. Уравнения на собственные числа

Представим решение задачи (3.4), (3.5) с помощью диагональной матрицы $\mathcal{D} = \mathrm{diag}\,(d_1, d_2)$ из собственных чисел матрицы Λ^2 и ортогональной матрицы поворота $O = \left\|\begin{matrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{matrix}\right\|$: $\Lambda^2 = O\mathcal{D}O^T$. Величины d_i задают сингулярные числа матрицы M [2]. Матрица $O_1 = O^T O' = -\varphi'\Sigma$ — антисимметрична. Из условия $|\Lambda^2| = 1$ следует $d_1 = d$, $d_2 = d^{-1}$. Интегралы (3.8) принимают вид: $d(t_0) = 1$,
$$\frac{d'^2}{d^2} + \varphi'^2(d - d^{-1})^2 = 2(\omega^2 + \omega_1^2 + \mathrm{tr}\,S_0), \tag{4.1}$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,S_0(d + d^{-1}) - (d - d^{-1})k\cos 2(\varphi + \varphi_0) + \omega^2 = \omega_1^2 + \mathrm{tr}\,S_0, \tag{4.2}$$
где $4k^2 = (s_{11}^0 - s_{22}^0)^2 + 4(s_{12}^0)^2 = (\mathrm{tr}\,S_0)^2 - 4|S_0|$, $\mathrm{tr}\,2\varphi_0 = 2s_{12}^0(s_{11}^0 - s_{22}^0)^{-1}$ (при $s_{11}^0 = s_{22}^0$, $k = s_{12}^0$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$).

Матричное уравнение (3.4) перейдет в следующее

$$\mathcal{D}'' + (-2\varphi' d'(1+d^{-2}) + \varphi''(d^{-1}-d)) \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| - 2\varphi'^2(\mathcal{D}-\mathcal{D}^{-1}) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d'}{d}\right)^2 + \varphi'^2(d-d^{-1})^2\right)\mathcal{D} +$$

$$+2\omega\left(\frac{d'}{d}\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| + \varphi'(\mathcal{D}^2 - I)\right) - 2\omega^2\mathcal{D} =$$

$$= I \operatorname{tr} S_0 + (s_{11}^0 - s_{22}^0)\left\| \begin{matrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{matrix} \right\| + 2s_{12}^0 \left\| \begin{matrix} -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \end{matrix} \right\|.$$

Из матричного уравнения следует три скалярных равенства

$$\varphi''(d^{-1}-d) - 2\varphi'(d-d^{-1})' + 2\omega\frac{d'}{d} = 2k\sin 2(\varphi+\varphi_0); \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} d'' - 2\varphi'^2(d-d^{-1}) - \frac{1}{2}\left(\frac{d'^2}{d} + \varphi'^2(d^{-1}-d)^2 d\right) + 2\omega\varphi'(d^2-1) - \\ -2\omega^2 d = \operatorname{tr} S_0 + 2k\cos 2(\varphi+\varphi_0), \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered} d^{-1\prime\prime} - 2\varphi'^2(d^{-1}-d) - \frac{1}{2}\left((d^{-1\prime})^2 d + \varphi'^2(d^{-1}-d)^2 d^{-1}\right) + \\ +2\omega\varphi'(d^{-2}-1) - 2\omega^2 d^{-1} = \operatorname{tr} S_0 - 2k\cos 2(\varphi+\varphi_0). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) тождественно выполняется в силу (4.3), (4.2), (4.1). Если дифференцировать по t (4.1), то в силу (4.3), (4.4), (4.2) получим тождество. Значит, (4.1) есть интеграл (4.3), (4.4), (4.2), и уравнение (4.4) есть следствие интегралов (4.1), (4.2) и уравнения (4.3). Следовательно, переопределенная подмодель задается уравнениями (4.1), (4.2), (4.3).

Начальные данные для функций φ, d определяются из равенств

$$\Lambda^2(t_0) = O(t_0)\mathcal{D}(t_0)O^T(t_0) = I, \quad \Lambda^{2\prime}(t_0) = O(t_0)\mathcal{D}'(t_0)O^T(t_0) = 2S_1.$$

Если $O(t_0)$ задает поворот на угол φ_1, то начальные данные определяются элементами матрицы S_1:

$$\begin{gathered} d(t_0) = 1, \quad d'(t_0) = 2(-|S_1|)^{1/2}, \quad \varphi(t_0) = \varphi_1, \\ s_{11}^1 = -s_{22}^1, \quad \operatorname{tg} 2\varphi_1 = s_{12}^1(s_{22}^1)^{-1}. \end{gathered} \tag{4.6}$$

5. Простейшее решение задачи

Пусть $d = 1$, тогда из (4.1) следует $\omega_0 = 0$, $2\omega_1^2 + \operatorname{tr} S_0 = 0$. Из (3.9) получим $\operatorname{tr} S_1 = 0$, $|S_1| = 0$. Значит, $S_1 = 0$. Уравнение (4.2) тождественно выполняется, а из (4.3) следует $\varphi = -\varphi_0$.

Итак, получили простейшее решение

$$d = 1, \quad \varphi = -\varphi_0, \quad \operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2s_{12}^0}{s_{11}^0 - s_{22}^0} \quad (\text{при} \quad s_{11}^0 = s_{22}^0, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}) \tag{5.1}$$

при условии на параметры задачи $S_1 = 0$, $\omega_0 = 0$, $2\omega_1^2 + \operatorname{tr} S_0 = 0$. При этом матрица $M = e^{\omega_1 t\Sigma} = I\cos(\omega_1 t) + \Sigma\sin(\omega_1 t)$.

Пусть $\omega_0 = 0$, $\omega = \omega_1$, $d \neq 1$, тогда из (4.2) следует $d = \dfrac{\operatorname{tr} S_0 + 2k\cos 2(\varphi+\varphi_0)}{\operatorname{tr} S_0 - 2k\cos 2(\varphi+\varphi_0)}$ и $\operatorname{tr} S_0 \neq 0$. Если φ — постоянно, то из (4.1) и (4.6) следует $d = 1$. Значит, φ переменная величина ($\varphi' \neq 0$).

Уравнение (4.1) принимает вид

$$4k\operatorname{tr} S_0\varphi' = \sqrt{-|S_1|}\left((\operatorname{tr}S_0)^2 - 4k^2\cos^2 2(\varphi+\varphi_0)\right).$$

В силу этого уравнения (4.3) становится тождеством по $\cos^2 2(\varphi+\varphi_0)$:

$$16\sqrt{-|S_1|}k^3\cos^2 2(\varphi+\varphi_0)\operatorname{tr} S_0 + |S_1|\left((\operatorname{tr} S_0)^4 - 16k^4\cos^4 2(\varphi+\varphi_0)\right) +$$

$$+\left(k^2\operatorname{tr}S_0 - 2\omega_1\sqrt{-|S_1|}k\right)\left((\operatorname{tr} S_0)^2 - 4k^2\cos^2 2(\varphi+\varphi_0)\right) = 0.$$

Отсюда следует $|S_1| = 0$ и $\varphi' = 0$ противоречие. Итак, при $\omega_0 = 0$ возможно только простейшее решение.

6. Случай $\omega_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$

Замечание в пункте 3 позволяет считать $t_0 = 0$, $\omega_1 = 0$, если $\omega_0 \neq 0$. Уравнения (4.1), (4.2), (4.3) допускают подобие $\sqrt{\omega_0}t \to t$, $\omega_0^{-1}S_0 \to S_0$, а также перенос по φ. После таких преобразований можно считать $\omega_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$ ($s_{12}^0 = 0$), и уравнения принимают вид в силу формул (3.9):

$$-|S_1|(d + d^{-1} - 2) + t^2 = (d - d^{-1})k\cos 2\varphi, \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{d'}{d}\right)^2 + \varphi'^2(d - d^{-1})^2 = 2(t^2 - 2|S_1|), \tag{6.2}$$

$$\varphi''(d - d^{-1}) + 2\varphi'(d - d^{-1})' - 2t\frac{d'}{d} + 2k\sin 2\varphi = 0, \tag{6.3}$$

где $k = \dfrac{1}{2}(s_{11}^0 - s_{22}^0)$, $|S_1| = -\dfrac{1}{2}(s_{11}^0 + s_{22}^0)$, $\operatorname{tr} S_1 = 0$.

В силу начальных данных (4.6) решение (6.1) $\div$ (6.3) представим рядами

$$d = 1 + 2t\sqrt{-|S_1|} + d_2t^2 + d_3t^3 + d_4t^4 + \cdots, \quad \varphi = \varphi_1 + t\varphi_2 + t^2\varphi_3 + t^3\varphi_4 + \cdots \tag{6.4}$$

Подставим ряды 6.4 в 6.1, 6.2, 6.3 и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях t.

Из (6.1) при степенях t, t^2, t^3 получим

$$k|S_1|\cos 2\varphi_1 = 0, \tag{6.5}$$

$$2k\left(d_2\cos 2\varphi_1 - 4(-|S_1|)^{1/2}\varphi_2\sin 2\varphi_1\right) = 1 + 4|S_1|^2, \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered} 2(d_2 + 2|S_1|)\left((-|S_1|)^{3/2} + k\varphi_2\sin 2\varphi_1\right) + \\ +4(-|S_1|)^{1/2}k\varphi_3\sin 2\varphi_1 = d_3k\cos 2\varphi_1. \end{gathered} \tag{6.7}$$

Из (6.2) при степенях t и t^2 получим

$$|S_1|(d_2 + 2|S_1|) = 0, \tag{6.8}$$

$$1 + 16|S_1|\varphi_2^2 = 6d_3(-|S_1|)^{1/2} + 4|S_1|^2 + 2(d_2 + 2|S_1|)^2. \tag{6.9}$$

Из (6.3) коэффициент при t и свободный член дают

$$(-|S_1|)^{1/2}\varphi_2 = -\frac{1}{4}k\sin 2\varphi_1, \tag{6.10}$$

$$6\varphi_3(-|S_1|)^{1/2} + 2\varphi_2(d_2 + 2|S_1|) + k\varphi_2\cos 2\varphi_1 = (-|S_1|)^{1/2}. \tag{6.11}$$

Из (6.6) следует $k \neq 0$.

Если $|S_1| \neq 0$, то из (6.5), (6.8) получим $\cos 2\varphi_1 = 0$, $\sin 2\varphi_1 = 1$, $d_2 = -2|S_1|$. Из (6.7) следует $\varphi_3 = 0$, а из (6.11) следует $\varphi_3 = \dfrac{1}{6}$. Противоречие. Значит, $|S_1| = 0$, а так как $\operatorname{tr} S_1 = 0$, то симметричная матрица $S_1 = 0$ и $\operatorname{tr} S_0 = 0$, т.е. матрица $S_0 = k \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|$. Из (6.6) $\div$ (6.11) следует $\varphi_1 = 0$,

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = k, \quad d_3 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при t^4 в уравнении (6.1), получим $d_4 = \dfrac{1}{4}$. Приравнивая нулю коэффициенты при t^2 и t^3 в уравнении (6.2), получим $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$. Коэффициент при t^2 в (6.3) приводит к противоречию.

Итак, кроме простейшего решения (5.1) и решения (2.1) с линейной матрицей $M = I + M_1 t$ других решений с линейным полем скоростей подмодель (0.1) не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* Москва-Ижевск. 2003. 336 с.
2. Годунов С.К. *Современные аспекты линейной алгебры.* Новосибирск. Научная книга. 1997. 390 с.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики УНЦ РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru