ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 37-43.

УДК 517.537.7

# ПОВЕДЕНИЕ МИНИМУМА МОДУЛЯ РЯДА ДИРИХЛЕ НА СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ

**А.М. ГАЙСИН, Ж.Г. РАХМАТУЛЛИНА**

**Аннотация.** Рассматривается задача об асимптотической эквивалентности логарифмов точной верхней грани модуля суммы целого ряда Дирихле на вертикальной прямой и ее минимума модуля. В общем случае минимум модуля берется по некоторому компакту, в определенном смысле мало отличающемуся от вертикального отрезка фиксированной длины.

Найдены оптимальные ограничения на последовательность показателей ряда, при которых требуемое соотношение имеет место всюду на положительном луче кроме, быть может, множества конечной меры.

**Ключевые слова:** ряды Дирихле, минимум модуля.

## 1. Формулировка теоремы.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it) \tag{1}$$

— ряд Дирихле, абсолютно сходящийся на всей плоскости.

Если выполняется условие

$$S_\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty\,, \tag{2}$$

то говорят, что последовательность $\Lambda$ имеет лакуны Фейера, а ряды вида (1) называют *рядами Дирихле с лакунами Фейера.*

Пусть

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma+it)|, \quad m_F(\sigma,h) = \min_{|t|\leqslant h} |F(\sigma+it)|, \quad 0 < h < \infty.$$

Через $\mu(\sigma) = \max_n\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\}$ обозначим максимальный член ряда (1).

Предположим дополнительно, что

$$\int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2}\, dt < \infty\,, \tag{3}$$

A.M. Gaisin, Zh.G. Rakhmatullina, Behaviour of the minimum of the modulus of the Dirichlet series on the system of segments.

© Гайсин А.М., Рахматуллина Ж.Г. 2010.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00779-а, грант 08-01-97023-Р-а Поволжье).

*Поступила 1 июля 2010 г.*

где $c(t) = \max_{\lambda_n \leqslant t} q_n,\ q_n = -\ln|q'(\lambda_n)|$,

$$q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\Big)\,. \tag{4}$$

Отметим, что (2) есть условие роста, а (3) — условие на шаг (близость) и концентрацию точек последовательности $\Lambda$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Для того чтобы для любой функции $F$ вида (1) при $\sigma \to \infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой плотности имело место асимптотическое равенство
$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln|F(\sigma)|\,, \tag{5}$$
необходимо [1] и достаточно [2], чтобы выполнялись условия (2) и (3).
2. Пусть выполняется условие (3). Если
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \ln\frac{\lambda_n}{n} < \infty\,, \tag{6}$$
то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой плотности [2]
$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F(\sigma, h)\,. \tag{7}$$
3. Если выполнены условия (2) и (3), то для любой кривой $\gamma$, уходящей в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \to \infty$, то $\operatorname{Re} s \to +\infty$, верно равенство [1]
$$d(F;\gamma) \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{\substack{s\in\gamma \\ s\to\infty}} \frac{\ln|F(s)|}{\ln M_F(\operatorname{Re} s)} = 1 \tag{8}$$
(необходимость условий доказана в [3] и [1] соответственно).

Таким образом, видим, что если $\gamma$ лежит в некоторой горизонтальной полосе $S_h = \{s\colon |\operatorname{Im} s| \leqslant h\}$, а пару условий (2), (3) заменить на условия (3), (6), то вместо (8) имеет место более сильное асимптотическое равенство (7). Возникает естественный вопрос: сохранится ли асимптотическое равенство (7), если отказаться от условия (6)? Оказывается, в этом случае имеет место некоторое промежуточное между равенствами (7) и $d(F;\gamma) = 1$ утверждение, а именно, справедлива

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия* (2), (3). *Тогда существует множество* $E \subset [0, \infty)$ *конечной меры, такое, что для любого вертикального отрезка* $I_H(\sigma) = \{s = \sigma + it\colon |t - t_0| \leqslant H\}$ $(H = \text{const})$ *для всех* $\sigma \geqslant \sigma_0$ *вне* $E$ *найдется измененный отрезок* $I_H^*(\sigma)$, *обладающий свойствами:*

1) $\operatorname{mes}(I_H(\sigma) \cap I_H^*(\sigma)) \to 2H$ *при* $\sigma \to \infty$;
2) $\ln M_F(\sigma + d(\sigma)) < \ln M_F(\sigma) + o(1)$ *при* $\sigma \to \infty$ *вне* $E$,
*где* $d(\sigma) = \max_{s \in I_H^*(\sigma)} |\operatorname{Re} s - \sigma|$;
3) $\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma)$ *при* $\sigma \to \infty$ *вне* $E$,
*где* $m_F^*(\sigma) = \min_{s \in I_H^*(\sigma)} |F(s)|$.

Заметим, что в данной теореме отрезок $I_H(\sigma)$ — любой, и он, вообще говоря, не обязан содержаться при всех значениях $\sigma$ в какой-то фиксированной полосе $S_h$.

## 2. Вспомогательные леммы.

Для различных классов монотонных функций введем следующие обозначения. Пусть $L$ — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ функций $w = w(x)$, таких, что $0 < w(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$, $W = \Big\{ w \in L\colon \int\limits_1^\infty \frac{w(x)}{x^2}\,dx < \infty \Big\}$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность показателей ряда Дирихле (1), $n(t)$ — считающая функция последовательности $\Lambda$: $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Вместе с $n(t)$ рассмотрим также функцию $N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}\,dx$.

Заметим, что при условии (2) функция $N(t)$ принадлежит классу $W$. Действительно, $S_\Lambda < \infty$ равносильно сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dn(t)}{t} < \infty$, и все следует из равенства

$$\int\limits_1^\infty \frac{N(t)}{t^2}\,dt = -\left.\frac{N(t)}{t}\right|_1^\infty + \int\limits_1^\infty \frac{dN(t)}{t} = -\left.\frac{N(t)+n(t)}{t}\right|_1^\infty + \int\limits_1^\infty \frac{dn(t)}{t}\,.$$

Для характеристики исключительных множеств вещественной оси, вне которых будут получены оценки, будем пользоваться понятием $\nu$-меры.

Пусть $\nu(r)$ — неубывающая абсолютно непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция. Она определяет $\nu$-меру на $\mathbb{R}_+$ по правилу

$$\nu\text{-mes}\,(e) = \int\limits_e \nu'(r)\,dr,$$

где $e$ — произвольное борелевское множество из $\mathbb{R}_+$.

Верхней $\nu$-плотностью измеримого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ называется величина

$$\nu\text{-}\overline{\mathrm{dens}}\,E = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\nu\text{-mes}\,E_r}{\nu(r)}, \quad E_r = E \cap [0,r].$$

Если в последнем равенстве знак $\varlimsup$ заменить знаком $\varliminf$, получим определение нижней $\nu$-плотности ($\nu$-$\underline{\mathrm{dens}}\,E$). Если $\nu$-$\overline{\mathrm{dens}}\,E = \nu$-$\underline{\mathrm{dens}}\,E$, то говорят, что множество $E$ имеет $\nu$-плотность ($\nu$-$\mathrm{dens}\,E$). При $\nu(r) \equiv r$ $\nu$-плотность называется линейной, а при $\nu(r) \equiv \ln r$ — логарифмической.

В дальнейшем (если не оговорено противное) считаем, что все исключительные множества $E$ из $\mathbb{R}_+$ допускают покрытие отрезками вида $\Delta_n = [a_n, a_n']$, $a_n \uparrow \infty$ (отрезки попарно не имеют общих внутренних точек), причем, говоря о мере множества $E$, всегда будем иметь в виду меру множества $E' = \bigcup\limits_n \Delta_n$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1** ([4], [5]). *Пусть функция $g(z)$ аналитична и ограничена в круге $\{z\colon |z| < R\}$, $|g(0)| \geqslant 1$. Если $0 < r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, то существует не более чем счетное множество кружков*

$$V_n = \big\{z\colon |z - z_n| \leqslant \rho_n\big\}, \quad \sum_n \rho_n \leqslant Rr^N(1-r),$$

*таких, что для всех $z$ из круга $\{z\colon |z| \leqslant Rr\}$, но вне $\bigcup\limits_n V_n$ справедлива оценка*

$$\ln|g(z)| \geqslant \frac{R - |z|}{R + |z|} \ln|g(0)| - 5NL\,, \tag{9}$$

*где*

$$L = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |g(Re^{i\theta})|\, d\theta - \ln|g(0)|.$$

Отметим, что $L \geqslant 0$. При $L = 0$ оценка (9) следует из неравенства Гарнака, и она верна всюду в круге $\{z\colon |z| < R\}$ (см. в [4]).

Оказывается, в условиях леммы 1 об исключительных кружках можно сказать нечто большее. Верна

**Лемма 2.** *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда имеется конечное число кружков* $V_n = \{z\colon |z - z_n| < \rho_n\}$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$ *с общей суммой радиусов*

$$\sum_{n=1}^{m} \rho_n \leqslant Rr^N, \quad r < 1 - \frac{1}{N} \ (N > 1), \tag{10}$$

*вне которых в круге* $\{z\colon |z| \leqslant Rr\}$ *верна оценка*

$$\ln|g(z)| - \frac{R - |z|}{R + |z|}\ln|g(0)| \geqslant -6NL\,. \tag{11}$$

*Доказательство.* При $L = 0$ утверждение верно (см. замечание к лемме 1). Пусть теперь $L > 0$.

Оценка (9) справедлива в каждой так называемой легкой точке круга $\overline{D} = \{z\colon |z| \leqslant Rr\}$ [4] (см. также в [6]). Остальные точки круга $\overline{D}$ называются тяжелыми. С каждой тяжелой точкой $z$ связан некоторый круг (см. в [7], [4]) $K_z = \{\xi\colon |\xi - z| \leqslant \rho_z\}$. Как известно, из покрытия множества тяжелых точек кругами $K_z$ ограниченного радиуса $\rho_z$ можно выделить не более чем счетное, при котором каждая тяжелая точка будет покрыта не более чем шестью кружками [8]. В круге $\overline{D}$ функция $g$ имеет лишь конечное число нулей $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Очевидно, они все являются тяжелыми точками.

Несколько увеличивая радиусы исключительных кружков, можно считать, что оценка (9) верна вне объединения открытых кружков $V_n = \{z\colon |z - z_n| < \rho_n\}$ с общей суммой радиусов

$$\sum_{n} \rho_n \leqslant Rr^N, \quad r < 1 - \frac{1}{N},\ N > 1.$$

Тогда для всех $z \in \overline{D}$ вне $V = \bigcup\limits_n V_n$ подавно верна оценка

$$y(z) > -6NL, \quad y(z) = \ln|g(z)| - \frac{R - |z|}{R + |z|}\ln|g(0)|. \tag{12}$$

Далее, выкидывая из $\overline{D}$ все открытые кружки из $V$, содержащие $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (их не более $6n$ штук), получим замкнутое множество, которое обозначим через $C$. Пусть

$$B = \bigl\{z \in C\colon y(z) \leqslant -6NL\bigr\}.$$

Множество $B$ замкнуто и $B \subset V$. Следовательно, по лемме Гейне–Бореля существует конечное число кружков из $V$, покрывающих $B$. Значит, для любого $z$ из $C\backslash B$ вне указанных кружков верна оценка (12).

Таким образом, для любого $L \geqslant 0$ справедливо неравенство (11). $\square$

## 3. Доказательство теоремы.

Пусть выполнена пара условий (2), (3). Через $w = w(t)$ обозначим любую, но фиксированную функцию из класса $W$, такую, что $\max(\sqrt{t},\, N(et),\, c(t)) \leqslant w(t)$. Здесь $c(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{-\ln|q'(\lambda_n)|\}$ ($q$ — произведение Вейерштрасса (4)). Ввиду условий (2), (3) такая функция $w$ имеется. Найдется $w^* \in W$ вида $w^*(t) = \beta(t)w(t)$ ($\beta \in L$, $1 \leqslant \beta(t)$). Как и в [2] через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$w_1(v) = 3\ln\mu(\sigma)\,,$$

где $w_1(t) = \sqrt{\beta(t)}w(t)$, $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (1). Показано [2], что при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры имеют место оценки:

$$\begin{aligned} &1)\quad \ln M_F(\sigma+\delta^*) < (1+o(1))\ln M_F(\sigma);\\ &2)\quad M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|\xi-\alpha|\leqslant\delta} |F(\xi)|, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\alpha$ ($\operatorname{Re}\alpha = \sigma$)— любое комплексное число, $\delta = \delta(v) = \dfrac{w_1(v)}{v}$, $\delta^* = \delta^*(v) = \dfrac{w^*(v)}{v}$, $v = v(\sigma)$.

Пусть $D_a = \mathbb{R}_+ \setminus E$ ($D_a$ называется асимптотическим множеством). Тогда для $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to \infty$ из (13), очевидно, имеем

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{\xi\in K}|F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{14}$$

где $\xi^* \in \partial K$, $K$ — описанный вокруг круга $\overline{D}(\alpha,\delta) = \{\xi\colon |\xi-\alpha| \leqslant \delta\}$ квадрат, стороны которого параллельны осям координат.

Применим теперь лемму 2 к функции $g(z) = F(z+\xi^*)$, полагая $N = 4$, $R = \delta^*$, $r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta(v)}}$. Так как $Rr = 2\sqrt{2}\,\delta$ — длина диагонали квадрата $K$, то $K \subset \overline{D}(\xi^*, Rr)$. Если $r < 1 - \dfrac{1}{N}$, то согласно лемме 2 для всех $z$ из круга $\overline{D}(\xi^*, Rr)$ вне конечного числа исключительных кружков $V_n$, радиусы которых удовлетворяют условию (10), при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to \infty$ верна оценка

$$|F(\xi^*)| \leqslant |F(z)|^{1+o(1)} \leqslant M_F^{1+o(1)}(\sigma+\delta^*). \tag{15}$$

Количество исключительных кружков для каждого квадрата свое. Обозначая это число через $m(K)$, имеем

$$\sum_{n=1}^{m(K)} \rho_n \leqslant Rr^4 \leqslant \frac{64\,\delta}{\beta^{3/2}(v)}. \tag{16}$$

Таким образом, из (14), (15) получаем, что при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma) = (1+o(1))\ln|F(z)|, \tag{17}$$

если $z \in K \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{m(K)} V_n$ ($K$ — рассмотренный выше квадрат с центром в точке $\alpha = \sigma + it$).

Для любого $\sigma \in D_a$ рассмотрим прямоугольник $P = \{z = x+iy\colon |\sigma - x| \leqslant \delta$, $|y - t_0| \leqslant H\}$ ($H = \mathrm{const}$). В [2] показано, что если выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{\lambda_n}{n} < \infty,$$

то общая сумма диаметров исключительных кружков квадратов типа $K$, покрывающих $P$, есть величина $o(\delta)$ при $\sigma \to \infty$. Поэтому прямоугольник $P$ содержит некоторый вертикальный отрезок $I$ длины $|I| = 2H$, не пересекающийся с исключительным множеством. В условиях теоремы 1, как видно из оценки (16), каждый квадрат $K$ обладает таким свойством, но общая сумма диаметров кружков из $P$ есть $O\Big(\dfrac{1}{\beta^{3/2}(v)}\Big)$ при $\sigma \to \infty$. По этой причине $P$ может и не содержать никакого вертикального отрезка длины $2H$, целиком свободного от точек исключительного множества (функция $\beta(v)$ может расти не так быстро). Поэтому поступим следующим образом.

Рассмотрим минимальное число квадратов типа $K$, не имеющих попарно общих внутренних точек и покрывающих $P$. Исключительное множество $e = \{e_i\}$ прямоугольника $P$ состоит из исключительных кружков $e_i$ квадратов покрытия и их конечное число. Кружки $e_i$ могут пересекаться и образовывать так называемые гроздья $d_K = \bigcup\limits_{i=1}^{m_K} e_i$ — связные компоненты $e$.

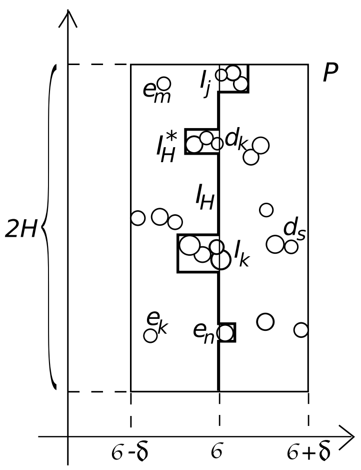


Рис. 1. Измененный отрезок

Пусть $\Pi$ — проекция множеств $d_K$, имеющих непустое пересечение с отрезком $I_H(\sigma)$, на этот отрезок. Тогда $\Pi = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$, где $I_j$ — некоторые попарно не пересекающиеся отрезки, $I_j \subset I_H(\sigma)$, причем в силу (16)

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| \leqslant 2\sum_{j=1}^{n} \rho_j \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\beta^{3/2}(v)} \leqslant qH \quad (0 < q < 1)$$

при $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Измененный отрезок $I_H^*(\sigma)$ строится следующим образом. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ находим наименьший прямоугольник $P_j$ со стороной $I_j$ и охватывающий соответствующие множества $d_K$. Участок $I_j$ отрезка $I_H(\sigma)$ заменим на ломаную $\gamma_j = \partial P_j \setminus I_j$. Если $P_j$ примыкает к какой-то горизонтальной стороне $P$, то из $\gamma_j$ исключаем и отрезок, целиком лежащий на этой стороне $P$. Проделав эту процедуру с каждым отрезком $I_j$, получим требуемый “отрезок” $I_H^*(\sigma)$ (см. рис. 1).

Из непрерывности функции $F$ следует справедливость оценки (17) и на границах гроздей $d_K$. Следовательно, оценка (17) имеет место на всем “отрезке” $I_H^*(\sigma)$ и при $\sigma \in D_a$, и $\sigma \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma),$$

где $m_F^*(\sigma) = \min\limits_{s \in I_H^*(\sigma)} |F(s)|$.

Теорема полностью доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Матем. сб. Т. 194, №8. 2003. С. 55–82.
2. Гайсин А.М. *Об одной теореме Хеймана* // Сиб. матем. журн. Т. 39, №3. 1998. С. 501–516.
3. Юсупова Н.Н. *Асимптотика рядов Дирихле заданного роста.* Дисс. ...канд. физ.-мат. наук, Башкирский гос. ун-т, Уфа. 2009.
4. Гайсин А.М. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН. Сер. мат. Т. 58, №2. 1994. С. 73–92.
5. Гайсин А.М. *Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста* // Матем. заметки. Т. 50, №4. 1991. С. 47–56.
6. Гайсин А.М. *Асимптотические свойства функций, заданных рядами экспонент.* Дисс. ...докт. физ.-мат. наук, Ин-т матем. с ВЦ УНЦ РАН, Уфа. 1994.
7. Говоров Н.В. *Об оценке снизу функции, субгармонической в круге* // Теория функций, функц. анал. и их прил., Харьков №6. 1968. С. 130–150.
8. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука. 1966.



Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `gaisinam@mail.ru`

Жанна Геннадьевна Рахматуллина,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `rakhzha@gmail.com`