ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 29-36.

УДК 517.16 + 517.574 + 517.555

ТРИ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ИНТЕГРАЛОВ

Р.А. БАЛАДАЙ, Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. В работе выдвигается гипотеза о точной оценке некоторого определенного несобственного интеграла, зависящего от параметра $\lambda \in (0, +\infty)$, через заданную оценку другого определенного интеграла, зависящего от двух параметров $t \in [0, +\infty)$ и λ. Такая точная оценка доказана здесь для $\lambda \leqslant 1$. Кроме того, получена некоторая оценка и при $\lambda > 1$. Последняя оценка, по-видимому, не точная. Мы приводим также две гипотезы, эквивалентные исходной. Истоки наших гипотез — экстремальные задачи для целых, мероморфных и плюрисубгармонических функций нескольких переменных.

Ключевые слова:несобственный интеграл, оценка, неравенство, целая функция, мероморфная функция, плюрисубгармоническая функция, проблема Пэли.

1. Введение

«*Положительность*» («*отрицательность*») всюду в работе означает "$\geqslant 0$" (соотв.[1] "$\leqslant 0$"), где отношение порядка $\leqslant$ и нулевой элемент 0 на рассматриваемом множестве, как правило, естественны по контексту.

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ обозначаем множества всех соотв. *натуральных*, *целых*, *вещественных* и *комплексных* чисел; $[-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — *расширенная вещественная ось* с естественным отношением порядка.

Функция $\phi\colon I \to [-\infty, +\infty]$, $I \subset [-\infty, +\infty]$, *возрастающая* (соотв. *убывающая*), если для любых $x_1, x_2 \in I$ неравенство $x_1 \leqslant x_2$ влечет за собой *нестрогое неравенство* $\phi(x_1) \leqslant \phi(x_2)$ (соотв. $\phi(x_1) \geqslant \phi(x_2)$). Если же для любых $x_1, x_2 \in I$ из *строгого неравенства* $x_1 < x_2$ следует *строгое неравенство* $\phi(x_1) < \phi(x_2)$ (соотв. $\phi(x_1) > \phi(x_2)$), то ϕ — *строго возрастающая* (соотв. *строго убывающая*) функция на I. Через $\mathrm{Inc}(I)$ обозначаем множество всех возрастающих функций на I. Верхний индекс "$^+$", наряду с тем, что обозначает положительную часть $a^+ := \max\{a, 0\}$ (соотв. $\phi^+ := \sup\{\phi, 0\}$) числа a или функции $\phi\colon \cdot \to [-\infty, +\infty]$, используется также для обозначения всех положительных элементов из множества или класса функций. Так, подмножество всех положительных функций из $\mathrm{Inc}(I)$ обозначаем $\mathrm{Inc}^+(I)$.

Функция $\phi\colon [a, b) \to \mathbb{R}$, $[a, b) \subset [0, +\infty]$, *выпуклая относительно*[2] log, если функция $x \mapsto \phi(e^x)$ выпуклая на интервале $[\log a, \log b) \subset [-\infty, +\infty]$.

В связи с исследованием в работе [1, Теоремы 1, 2] экстремальных задач о росте плюрисубгармонических, целых и мероморфных функций комплексных переменных в завершение обзора [2, Commentary] была выдвинута

R.A.Baladai, B.N. Khabibullin, Three equivalent conjectures on an estimate of integrals.

Работа поддержана РФФИ (гранты 09-01-00046-а, 08-01-97023-р_поволжье_а) и программой "Государственная поддержка ведущих научных школ", проект НШ–3081.2008.1.

Поступила 15 июня 2010 г.

[1]Далее сокращение «соотв.» используется для наречия или предлога «соответственно».

[2]Если не указано основание логарифма у log, то оно равно числу e, т. е. это функция ln.

Гипотеза 1. *Пусть функция* $S \in \operatorname{Inc}^+\bigl([0,+\infty)\bigr)$ *выпуклая относительно* $\log$ *и для* $\lambda \geqslant 1/2$ *и* $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство*

$$\int_0^1 S(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x \leqslant t^\lambda \quad \text{для всех} \quad t \in [0,+\infty). \tag{1}$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} S(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr). \tag{2}$$

Если Гипотеза 1 верна, то в точности оценки (2) при условии (1) легко убедиться на примере возрастающей выпуклой относительно $\log$ функции

$$S_{\lambda,n}(t) := 2(n-1)\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr)\,t^\lambda =: c_{\lambda,n}t^\lambda, \quad t \in [0,+\infty), \quad \lambda \geqslant \frac{1}{2}\,,$$

где постоянная $c_{\lambda,n}$ определена последним равенством. Для $S_{\lambda,n}$ в (1) и (2) достигается равенство. Действительно, в обозначениях Γ и B для классических гамма- и бета-функций Эйлера [3, гл. VII, § 1] получаем (см. (1))

$$\begin{aligned}
\int_0^1 S_{\lambda,n}(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x &= \frac{c_{\lambda,n}}{2}\,t^\lambda\int_0^1 x^{(\lambda/2+1)-1}(1-x)^{(n-1)-1}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{c_{\lambda,n}}{2}\,t^\lambda \mathrm{B}(\lambda/2+1,n-1) = \frac{c_{\lambda,n}}{2}\,t^\lambda\frac{\Gamma(\lambda/2+1)\;\Gamma(n-1)}{\Gamma(\lambda/2+n)}\\
&= \frac{c_{\lambda,n}}{2}\,t^\lambda\frac{(\lambda/2)\Gamma(\lambda/2)\;(n-2)!}{\Gamma(\lambda/2)\;(\lambda/2)\;(\lambda/2+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda/2+(n-1))}\\
&= c_{\lambda,n}\,\frac{1}{2(n-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\dfrac{\lambda}{2\,k}\Bigr)}\,t^\lambda = t^\lambda,
\end{aligned} \tag{3}$$

а также (см. (2))

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} S_{\lambda,n}(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{c_{\lambda,n}}{2\lambda}\int_0^{+\infty} t^\lambda\,\mathrm{d}\frac{1}{1+t^{2\lambda}}\\
&= \frac{c_{\lambda,n}}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{2\lambda}}\,\mathrm{d}t^\lambda = \frac{c_{\lambda,n}}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr).
\end{aligned} \tag{4}$$

2. Случай лишь положительной возрастающей функции S

В этом разделе мы получим некоторые оценки для интеграла (2) от функции S *без каких-либо условий выпуклости*. Так, при $\lambda \leqslant 1$ справедлив следующий более общий вариант Гипотезы 1.

Утверждение 1. *Пусть* $S \in \operatorname{Inc}^+\bigl([0,+\infty)\bigr)$ *— непрерывная функция и для*

$$\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1$$

и $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ *выполнено* (1). *Тогда имеет место неулучшаемая оценка* (2).

Доказательство. Сначала дадим грубую оценку функции S при *произвольном* значении параметра λ. Такая оценка, в частности, необходима нам для сходимости возникающих в ходе доказательства различных интегралов и для существования некоторых пределов. Применения этой Леммы 1 далее не объявляются.

Лемма 1. *Пусть* $S \in \mathrm{Inc}^+\big([0,+\infty)\big)$, $\lambda \geqslant 0$ *и для* $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ *выполнено* (1). *Тогда*

$$S(x) \leqslant 2(n-1)\left(1+\frac{\lambda}{2(n-1)}\right)^{n-1}\Big(1+\frac{2(n-1)}{\lambda}\Big)^{\lambda/2} x^{\lambda} \qquad \text{при всех } x \geqslant 0.$$

Доказательство леммы 1. Для произвольного числа $a \in [0,1]$ в силу возрастания S имеем

$$S(at) \leqslant \int_a^1 S(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x \Bigg/ \int_a^1 (1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{(1)}{\leqslant} t^{\lambda} \Bigg/ \int_a^1 (1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x = \frac{2(n-1)}{(1-a^2)^{n-1}}\,t^{\lambda} = 2(n-1)\frac{1}{a^{\lambda}(1-a^2)^{n-1}}\,(at)^{\lambda}.$$

Используя замену $x = at$, а затем минимизируя по $a \in [0,1]$ дробь в правой части, получаем требуемое (1). □

Далее нам удобнее перейти к новым переменным: обозначить переменную t через r, rx заменить на t, а вместо функции S рассмотреть функцию

$$T := \frac{1}{2(n-1)}\,S.$$

Тогда неравенство (1) записывается в виде

$$2(n-1)\int_0^r T(t)(r^2-t^2)^{n-2}t\,\mathrm{d}t \leqslant r^{\lambda+2(n-1)} \quad \text{для любых } r \geqslant 0, \tag{5}$$

а неравенство (2) перейдет в требующее доказательства неравенство

$$\int_0^{+\infty} T(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t \overset{?}{\leqslant} \frac{\pi}{4\lambda}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\lambda}{2k}\Big). \tag{6}$$

Для непрерывной функции f на $[0,+\infty)$ введем интегральный оператор

$$I_k(r;f) := \int_0^r f(t)(r^2-t^2)^k t dt, \quad r \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

В частности, интеграл из (5) есть в точности $I_{n-2}(r;T)$.

Далее, введем в рассмотрение операторы L и M, действующие на дифференцируемые функции $g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$L[g](r) := \frac{1}{r}\cdot g'(r), \quad M[g](r) := -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\cdot g(t)\right)\Bigg|_{t=r}, \quad r > 0. \tag{8}$$

Легко показать, что

$$L^p[I_k(\cdot;f)](r) = 2^p\frac{k!}{(k-p)!}\,I_{k-p}(r;f), \quad p \leqslant k, \tag{9}$$
$$L^{k+1}[I_k(\cdot;f)](r) = 2^k k!\,f(r), \tag{10}$$

где p-ая степень оператора означает его k-кратную суперпозицию.

Лемма 2. *Предположим, что функции* g *и* φ *соотв.* p *раз и* $q+1$ *раз непрерывно дифференцируемы на* $(0,+\infty)$ *и существуют пределы*

$$\lim_{t\to 0,+\infty}\frac{1}{t}\,L^{p-1}[g](t)\cdot M^q[\varphi](t) = 0.$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} L^p[g](t)\,M^q[\varphi](t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} L^{p-1}[g](t)\,M^{q+1}[\varphi](t)\,\mathrm{d}t,$$

если интегралы сходятся.

Лемму 2 легко доказать интегрированием по частям.

Лемма 3. *Пусть*

$$\varphi_\lambda(t) := \frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}, \quad t \geqslant 0. \tag{11}$$

Тогда для всех $q = 0, 1, \ldots$ имеют место соотношения

$$M^q[\varphi_\lambda](t) = O(t^{-2\lambda-1-2q}) \quad \text{при } t \to +\infty, \tag{12}$$

$$M^q[\varphi_\lambda](t) = O(t^{2\lambda-1-2q}) \quad \text{при } t \to 0. \tag{13}$$

Кроме того, при $\lambda \leqslant 1$ выполнено условие положительности

$$M^q[\varphi_\lambda](t) \geqslant 0 \quad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{14}$$

Доказательство. Соотношения (12) и (13) можно получить, представляя функцию φ_λ в виде ряда по степеням от соотв. $t^{-\lambda}$ при $t \to +\infty$ и t^λ при $t \to 0$.

Для доказательства (14) при $\lambda \leqslant 1$ введем для $0 \leqslant \beta \leqslant 2$ класс функций $K(\beta)$, являющихся линейными комбинациями с положительными коэффицентами функций вида

$$\psi(t) = \frac{1}{t^\alpha(1+t^\beta)^k}, \quad \alpha \geqslant -1, \ k \geqslant 0.$$

Например, для нашей функции из (11) имеем $\varphi_\lambda \in K(2\lambda)$ при $\lambda \leqslant 1$. Поэтому для получения (14) достаточно показать, что $M[\psi] \in K(\beta)$ для $\psi \in K(\beta)$. Для $0 \leqslant \beta \leqslant 2$ и $\alpha \geqslant -1$ получаем

$$M[\psi](t) = -\frac{d}{dt}\frac{1}{t^{1+\alpha}(1+t^\beta)^k} = \frac{1+\alpha}{t^{2+\alpha}(1+t^\beta)^k} + \frac{k\beta}{t^{2-\beta+\alpha}(1+t^\beta)^{k+1}} \in K(\beta).$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Для всех $k = 0, 1, \ldots$ и $p = 0, 1, \ldots, k+1$*

$$L^p[I_k(\cdot; T)](r) = O\left(r^{\lambda+2(k+1-p)}\right), \quad r \to 0, +\infty. \tag{15}$$

Доказательство. Для $p = k+1$ из равенства (10) имеем

$$L^{k+1}[I_k(\cdot; T)](r) = 2^k \cdot k!\, T(r) = O(r^\lambda) = O\big(r^{\lambda+2(k+1-p)}\big), \quad r \to 0, +\infty.$$

Для $p \leqslant k$ из равенства (9) следует

$$\begin{aligned} L^p[I_k(\cdot; T)](t) &= O\big(I_{k-p}(r; T)\big) = O\Big(\int_0^r t^{\lambda+1}(r^2-t^2)^{k-p}\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= O\Big(r^{2(k-p)}\int_0^r t^{\lambda+1}\,\mathrm{d}t\Big) = O\big(r^{\lambda+2(k+1-p)}\big), \quad r \to 0, +\infty. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Для $p + q = n - 1$, где $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$, имеем*

$$\lim_{t \to 0, +\infty} \frac{1}{t}\, L^{p-1}[I_{n-2}(\cdot, T)](t)\, M^q[\varphi_\lambda](t) = 0.$$

Доказательство. По Леммам 3 и 4 при $t \to 0$ получаем

$$\frac{1}{t}\, L^{p-1}[I_{n-2}(\cdot, T)](t)\, M^q[\varphi_\lambda](t) = \frac{1}{t}\, O\big(t^{\lambda+2(n-p)}\big) \cdot O\big(t^{2\lambda-1-2q}\big) = O(t^{3\lambda}).$$

По тем же Леммам 3 и 4 при $t \to +\infty$ имеем

$$\frac{1}{t}\, L^{p-1}[I_{n-2}(\cdot, T)](t)\, M^q[\varphi_\lambda](t) = \frac{1}{t}\, O\big(t^{\lambda+2(n-p)}\big) \cdot O\big(t^{-2\lambda-1-2q}\big) = O(t^{-\lambda}).$$

Лемма 5 доказана. □

Закончим доказательство Гипотезы 1 для $\lambda \leqslant 1$. По (10) левая часть (6) равна

$$J \overset{(11)}{:=} \int_0^{+\infty} T(t)\varphi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \overset{(8)-(7)}{=} \frac{1}{2^{n-2}\cdot(n-2)!}\int_0^{+\infty} L^{n-1}[I_{n-2}(\cdot,T)](t)\,M^0[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t$$

Используем $n-1$ раз Лемму 2 и получим

$$J = \frac{1}{2^{n-2}\cdot(n-2)!}\int_0^{+\infty} L^0[I_{n-2}(\cdot,T)](t)\,M^{n-1}[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n-2}\cdot(n-2)!}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t T(\tau)(t^2-\tau^2)^{n-2}\tau\,\mathrm{d}\tau\right)M^{n-1}[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда по соотношению (14) Леммы 2 из условия (5) ввиду положительности функции $M^{n-1}[\varphi_\lambda]$ для $\lambda \leqslant 1$ получаем

$$J \leqslant \frac{1}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{\lambda+2(n-1)}\,M^{n-1}[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\int_0^{+\infty} L^0\big[t^{\lambda+2(n-1)}\big]\,M^{n-1}[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t.$$

Вновь, используя $n-1$ раз Лемму 2, устанавливаем оценку

$$J \leqslant \frac{1}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\int_0^{+\infty} L^{n-1}\big[t^{\lambda+2(n-1)}\big]\varphi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{t^{3\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}dt\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda+2k) = \frac{1}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2}}{(1+t)^2}dt\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\lambda}{2k}\Big).$$

Отсюда, интегрируя по частям последний интеграл, получаем

$$J \leqslant \frac{1}{4\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-1/2}}{(1+t)}\,\mathrm{d}t\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\lambda}{2k}\Big).$$

Интеграл здесь легко (после Л. Эйлера) вычисляется с помощью вычетов и равен π [3, гл. V, 74, Пример 3]. Значит последнее неравенство совпадает с неравенством (6). Это завершает доказательство Гипотезы 1 для $\lambda \leqslant 1$. □

3. Эквивалентные версии Гипотезы 1

Лемма 6 ([4, Предложение 5.1])**.** *Функция* $S\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *с* $S(0)=0$ — *возрастающая и выпуклая относительно* log*, если и только если найдется возрастающая функция* $s\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$*, дающая представление*

$$S(x) = \int_0^x \frac{s(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Используя Лемму 6 вместе с Леммой 1 для условия $S(0)=0$, можем записать интеграл из (1) в виде

$$\int_0^1 S(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1\left(\int_0^{tx}\frac{s(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)\,\mathrm{d}(1-x^2)^{n-1}.$$

Интегрирование по частям дает равенство

$$\int_0^1 S(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 \frac{s(tx)}{x}(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$

Аналогично для интеграла (2) имеем

$$\int_0^{+\infty} S(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{s(t)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^{2\lambda})}\,.$$

Таким образом, соотношения (1) и (2) переходят соотв. в неравенства

$$\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 \frac{s(tx)}{x}(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x \leqslant t^\lambda \quad \text{для всех } \ 0\leqslant t<+\infty\,,$$

$$\frac{1}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{s(t)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2\lambda}} \leqslant \frac{\pi(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr) = \frac{\pi(n-1)}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{B}(\lambda/2,n)}\,,$$

где функция $s\geqslant 0$ — возрастающая, а в последнем равенстве использованы те же свойства бета-функции Эйлера [3, гл. VII, § 1], что и в (3). Но мы не уменьшим общности рассмотрения, если вместо такой произвольной функции s будем рассматривать произвольную возрастающую функцию $h\geqslant 0$, определенную заменой $h(x^2):=\frac{1}{4(n-1)}\,s(x)$, $x\geqslant 0$, что преобразует последнюю пару соотношений в условие и неравенство

$$2\int_0^1 \frac{h(t^2x^2)}{x}(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x \leqslant (t^2)^{\lambda/2} \quad \text{для всех } \ 0\leqslant t<+\infty\,,$$

$$2\int_0^{+\infty}\frac{h(t^2)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2\lambda}} \leqslant \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr) = \frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mathrm{B}(\lambda/2,n)}\,,$$

Отсюда после замен

$$x^2=x',\quad t^2=t',\quad \lambda/2=\alpha>1/2$$

и переобозначения переменных x' и t' прежними x и t получаем

$$\int_0^1 \frac{h(tx)}{x}\,(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \leqslant t^\alpha \quad \text{для всех } \ 0\leqslant t<+\infty\,, \tag{18a}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{h(t)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2\alpha}} \leqslant \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\alpha}{k}\Bigr) = \frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,n)}\,. \tag{18b}$$

Таким образом, Гипотезе 1 с $\lambda>1$ эквивалентна более простая

Гипотеза 2. *Пусть $\alpha>1/2$. Для любой возрастающей функции $h\geqslant 0$ на $[0,+\infty)$ из условия* (18a) *следует неравенство* (18b).

Возможна еще одна версия рассмотренных гипотез. Во-первых отметим, что из некоторых соображений достаточно доказывать наши гипотезы для гладких функций. Так, можем предполагать, что функция h в Гипотезе 2 непрерывно дифференцируема, т. е. $q:=h'\geqslant 0$ на $(0,+\infty)$. Тогда интегрированием по частям получается эквивалентная Гипотезам 1 и 2

Гипотеза 3. *Пусть $\alpha>1/2$. Если q — положительная непрерывная функция на* $[0,+\infty)$*, то из условия*

$$\int_0^1\Bigl(\int_x^1 (1-y)^{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{y}\Bigr)q(tx)\,\mathrm{d}x \leqslant t^{\alpha-1} \quad \textit{для всех } \ 0\leqslant t<+\infty \tag{19}$$

следует оценка

$$\int_0^{+\infty} q(t)\log\Big(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant \pi\alpha\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\alpha}{k}\Big) = \frac{\pi}{\mathrm{B}(\alpha,n)}\,.$$

Внутренний интеграл в левой части (19) легко вычисляется и может быть заменен на сумму:

$$\int_x^1 (1-y)^{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\log x + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}\,(1-x^k).$$

4. Некоторые оценки интеграла из (2) при условии (1)

В этом последнем разделе мы приведем некоторые оценки, которые не “дотягивают” до Гипотезы 1, но представляют некоторый интерес. Первая из них сразу следует из заключения eqrefest:S Леммы 1 и цепочки равенств (4).

Утверждение 2. *Пусть* $S\in \mathrm{Inc}^+\big([0,+\infty)\big)$, $\lambda\geqslant 0$ *и для* $2\leqslant n\in\mathbb{N}$ *выполнено условие* (1). *Тогда справедлива оценка*

$$\int_0^{+\infty} S(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+2\cdot\frac{n-1}{\lambda}\right)^{\lambda/2}. \tag{20}$$

По схеме доказательства последнего неравенства в [1, Основная лемма] может быть установлено

Утверждение 3. *В условиях Гипотезы* 1 *справедлива оценка*

$$\int_0^{+\infty} S(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1} b\Big(\frac{\lambda}{2k}\Big), \tag{21}$$

где функция $b\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *определена по правилу*

$$b(x) := \begin{cases} e^x & \text{при } \ x\leqslant 1,\\ ex & \text{при } \ x>1,\end{cases}$$

и удовлетворяет неравенству $b(x)\leqslant e(1+x)$ *при всех* $x\geqslant 0$.

Обсуждения Гипотезы 1 приведены также в [5] и [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабибуллин Б. Н., *Проблема Пэли для плюрисубгармонических функций конечного нижнего порядка* // Математический сборник. 1999. Т. 190. №2. С. 145–157.
2. Хабибуллин Б. Н., *The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results* // Математическая физика, анализ, геометрия (Украина). 2002. Т. 9. № 2. С. 146–167. Электронная версия по адресам http://arxiv.org/abs/math.CV/0502433 или http://math.bsunet.ru/khb .
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного* «Наука». Москва. 1987. 688 стр.
4. Кондратюк А. А. *Ряды Фурье и мероморфные функции* Изд-во «Вища школа». Львов. 1988.
5. Khabibullin B. N. *A conjecture on some estimates for integrals* // В электронном архиве http://arxiv.org/abs/1005.3913 , arXiv:1005.3913v1 [math.CV]
6. *Khabibullin's conjecture on integral inequalities* // Статья в Википедии. 2010. Электронный адрес http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Inequalities .

Рустам Алексеевич Баладай,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `baladaichik@mail.ru`

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Khabib-Bulat@mail.ru`