ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 1 (2024). С. 35-53.

УДК 517.954

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ СТРУН НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ В УЗЛЕ

М.Б. ЗВЕРЕВА, М.И. КАМЕНСКИЙ

Аннотация. Рассматривается система из n струн, расположенная в положении равновесия вдоль геометрического графа-звезды. Предполагается, что ребра графа имеют одинаковую длину, и граф ориентирован к узлу. Изучается случай, когда начальная скорость каждой струны равняется нулю. Начальная форма каждой из струн определена с помощью заданных на ребрах функций. Предполагается, что в граничных вершинах струны жестко закреплены. Исследуется колебательный процесс для случая, когда узловая точка струнной системы находится внутри ограничителя на перемещение. При этом предполагается, что ограничитель сам может двигаться в перпендикулярном к плоскости графа направлении. Пока ограничитель не соприкасается с узловой точкой струнной системы, выполняется условие трансмиссии (условие Кирхгофа). Как только происходит соприкосновение узловой точки с ограничителем, начинается их совместное движение, при этом появляется дополнительное ограничение на знак суммы производных в узле. Таким образом, в узле выполняется условие гистерезисного типа.

В работе получена формула представления решения, доказана единственность решения. Для частного случая рассмотрен вопрос о периодических колебаниях узловой точки струнной системы. Решена задача граничного управления колебательным процессом, в предположении, что время колебаний не превосходит длины струн.

Ключевые слова: волновое уравнение, sweeping процесс, гистерезис, геометрический граф.

Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L20, 35R02

1. Введение

Дифференциальные уравнения на пространственных сетях (геометрических графах), привлекшие внимание математиков несколько десятилетий назад, актуальны в самых разных разделах техники и естествознания. Они возникают при описании явлений в непрерывных системах сетеподобной структуры (электрических, гидравлических, акустических сетях, тепловодах, волноводах, нейронных и вычислительных системах, упругих решетчатых конструкциях, электронных системах и т.д.). Активный математический интерес к исследованию таких задач привел к появлению многочисленных публикаций. Особенно отметим работы [1]-[3], [7]-[15], [17]-[21]. Однако во всех этих работах рассматривались задачи с линейными граничными условиями. В статьях [2], [3] начато исследование задач о деформациях струнных систем на графах с различными нелинейными условиями. Однако колебательные процессы для такого рода систем недостаточно изучены.

M.B. Zvereva, M.I. Kamenskii, Problem on strings system vibrations on a star-shaped graph with a nonlinear condition at a node.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

Поступила 10 апреля 2023 г.

В данной работе получена формула представления решения начально-краевой задачи, описывающей колебания струнной системы, расположенной вдоль геометрического графа-звезды с условием гистерезисного типа в узле. Такое условие возникает за счет установленного в узле ограничителя на колебательный процесс. В свою очередь, ограничитель может перемещаться в перпендикулярном к плоскости графа направлении так, что его движение задается отображением $C(t) = [-h, h] + \xi(t)$, $t \geqslant 0$. Всюду далее будем пользоваться терминологией из [9].

Опишем постановку задачи. Пусть точки O, A_1, A_2, ..., A_n принадлежат горизонтальной плоскости π. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n струн, которые в положении равновесия совпадают с отрезками OA_1, OA_2, ..., OA_n. Концы струн связаны в точке O. Геометрический граф-звезда Γ состоит из ребер (интервалов) OA_1, OA_2, ..., OA_n, узла O и граничных вершин A_1, A_2, ..., A_n. Мы предполагаем, что в процессе колебаний струны отклоняются от положения равновесия в перпендикулярном к плоскости π направлении и рассматриваем случай малых колебаний.

Пусть ребра графа имеют одинаковую длину, и граф ориентирован к узлу. Введенная параметризация ставит в соответствие узлу графа точку $x = l$, а граничным вершинам соответствуют $x = 0$. Обозначим через $u(x,t)$ заданную на графе функцию, описывающую отклонение струнной системы от положения равновесия в точке x в момент времени t. Сужение $u(x,t)$ на ребра будем обозначать через $u^i(x,t)$, $i = 1, 2, ..., n$. Таким образом, каждая функция $u^i(x,t)$ определяет форму i-й струны. В точках $x = 0$ и $x = l$ функции $u^i(x,t)$ заданы соответствующими предельными значениями. Условие соединения струн в узле означает, что $u(l,t) = u^1(l,t) = u^i(l,t) = ... = u^n(l,t)$. Предположим, что начальная форма струн задана функциями $\varphi^i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Рассмотрим случай, когда начальная скорость для всех струн равняется нулю. Будем предполагать, что концы струн жестко закреплены в граничных вершинах, что означает выполнение условий $u^i(0,t) = 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Предполагается, что в ходе колебательного процесса узловая точка струнной системы $u(l,t)$ находится внутри ограничителя, т.е. выполнено условие $u(l,t) \in C(t)$. Пока $u(l,t)$ является внутренней точкой $C(t)$, выполняется условие трансмиссии (условие Кирхгофа) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) = 0$. Производные в узле для каждой функции $u^i(x,t)$ понимаются как соответствующие односторонние. Если узловая точка струнной системы касается граничных точек ограничителя, то в течении некоторого времени выполнены условия

$$u(l,t) = \xi(t) + h, \quad \text{при этом} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \leqslant 0,$$

или

$$u(l,t) = \xi(t) - h, \quad \text{при этом} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \geqslant 0.$$

Условие на знак суммы производных в узле описывает влияние силы реакции опоры со стороны ограничителя, блокирующей перемещение узловой точки. Таким образом, должно выполняться

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)),$$

где множество $N_{C(t)}(u(l,t))$ обозначает внешний нормальный конус к $C(t)$ в точке $u(l,t) \in C(t)$, определяемый как

$$N_{C(t)}(u(l,t)) = \{\xi \in R^1 : \xi \cdot (c - u(l,t)) \leqslant 0 \quad \forall c \in C(t)\}.$$

Заметим, что если $u(l,t)$ — внутренняя точка $C(t)$, то $N_{C(t)}(u(l,t)) = 0$. Если $u(l,t) = \xi(t) + h$, то $C(t) = [0, +\infty)$. Когда $u(l,t) = \xi(t) - h$, то $C(t) = (-\infty, 0]$.

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (i = 1, 2, ..., n), \\ u^i(x, 0) = \varphi^i(x), \\ \dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u^1(l,t) = u^2(l,t) = ... = u^n(l,t) = u(l,t), \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)), \\ u^i(0,t) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n), \\ u(l,t) \in C(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

Всюду далее будем предполагать выполнение условий $\varphi(l) = \varphi^1(l) = \varphi^2(l) = ... = \varphi^n(l)$, $\varphi(l) \in C(0)$, $\varphi^1(0) = \varphi^2(0) = ... = \varphi^n(0) = 0$. В настоящей работе для задачи (1.1) будет получен аналог формулы Даламбера для представления решения.

2. Предварительные сведения

В этом пункте мы приведем некоторые понятия и определения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть H — гильбертово пространство. Скалярное произведение в H будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Для замкнутого выпуклого множества $C \subset H$ и $x \in C$ множество

$$N_C(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x \rangle \leqslant 0 \quad \forall c \in C\}$$

обозначает внешний нормальный конус к C в точке x. Заметим, что всегда $0 \in N_C(x)$, $N_{\{x\}}(x) = H$, и $N_C(x) = \{0\}$ для $x \in intC$, где $intC$ — множество внутренних точек C (предполагается, что $intC \neq \emptyset$). Последнее соотношение показывает, что внешний нормальный конус нетривиален только при $x \in \partial C$, где ∂C — граница множества C.

Хаусдорфово расстояние $d_H(C_1, C_2)$ между замкнутыми множествами C_1 и C_2 задается формулой

$$d_H(C_1, C_2) = \max\{\sup_{x \in C_2} \operatorname{dist}(x, C_1), \sup_{x \in C_1} \operatorname{dist}(x, C_2)\},$$

где $dist(x, C) = inf\{\|x - c\|, c \in C\}$.

Рассмотрим так называемый sweeping процесс [16].

$$-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \quad t \in [0, T], \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0 \in C(0). \tag{2.2}$$

Функция $u : [0, T] \to H$ называется решением sweeping процесса (2.1), (2.2), если
(a) $u(0) = u_0$;
(b) $u(t) \in C(t)$ для всех $t \in [0, T]$;
(c) u дифференцируема для почти всех $t \in [0, T]$;
(d) $-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t))$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Нам понадобятся следующие теоремы из [16].

Теорема 2.1. *Предположим, что отображение $t \to C(t)$ удовлетворяет условию Липшица в смысле расстояния по Хаусдорфу, т.е.*

$$d_H(C(t), C(s)) \leqslant L|t-s|,$$

где $C(t) \subset H$ — непустое, замкнутое и выпуклое множество для всех $t \in [0,T]$. Пусть $u_0 \in C(0)$. Тогда существует решение $u : [0,T] \to H$ задачи (2.1), (2.2), которое удовлетворяет условию Липшица с константой L. При этом $|u'(t)| \leqslant L$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Теорема 2.2. *Решение (2.1), (2.2) единственно в классе абсолютно-непрерывных функций.*

Далее мы будем применять классы функций, введенные В.А. Ильиным в [5]. Обозначим через Q_T прямоугольник

$$Q_T = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T].$$

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если $u(x,t)$ непрерывна в Q_T и имеет в этом прямоугольнике обе обобщенные частные производные $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2[0 \leqslant x \leqslant l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2[0 \leqslant t \leqslant T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

Будем говорить, что $\Phi(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, если функция $\Phi(x,t)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в Q_T, и если $\Phi(x,t)$ имеет в этом прямоугольнике все обобщенные частные производные второго порядка, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2[0 \leqslant x \leqslant l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2[0 \leqslant t \leqslant T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

3. Задача на графе с нелинейным условием в узле

Решением задачи (1.1) будем называть функцию $u(x,t)$ такую, что:

1) сужения $u(x,t)$ на ребра совпадают с $u^i(x,t)$ $(i = 1,2,...,n)$, причем, $u^i(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ для всех $T > 0$;
2) для всех $t \geqslant 0$ выполнены условия
$$u^1(l,t) = u^2(l,t) = ... = u^n(l,t) = u(l,t), \quad u(l,t) \in C(t), \quad u^i(0,t) = 0;$$
3) для почти всех $t \geqslant 0$ выполнено условие $-\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$;
4) условия $u^i(x,0) = \varphi^i(x)$ выполнены для всех $x \in [0,l]$, а условия $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0$ выполнены для почти всех $x \in [0,l]$, $i = 1,2,...,n$;
5) для любых $T > 0$ выполняется интегральное равенство

$$\sum_{i=1}^n \int_0^l \int_0^T u^i(x,t)[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial x^2}(x,t)]\,dx\,dt + \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,0)\varphi^i(x)\,dx$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^T (u^i(l,t)\frac{\partial \Psi^i}{\partial x}(l,t) - \Psi^i(l,t)\frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t))\,dt = 0, \qquad (3.1)$$

где произвольные функции $\Psi^i \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, такие, что

$$\Psi^i(0,t) = 0, \quad \Psi^i(x,T) = 0, \quad \frac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,T) = 0, \quad \Psi^1(l,t) = \Psi^2(l,t) = ... = \Psi^n(l,t).$$

Рассмотрим функции Φ^i следующего вида:

- если $x \in [0,l]$, то $\Phi^i(x) = \varphi^i(x)$;
- если $x \in [(m+1)l, (m+2)l]$, и m — четное число, то

$$\Phi^i(x) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} g_{2k}(x - (m+1-2k)l) - \varphi^i((m+2)l - x);$$

- если $x \in [(m+1)l, (m+2)l]$, и m — нечетное число, то

$$\Phi^i(x) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} g_{2k-1}(x - (m+2-2k)l) + \varphi^i(x - (m+1)l);$$

$$\Phi^i(-x) = -\Phi^i(x).$$

Здесь функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$ — решения задач

$$\begin{cases} -g_0'(t) \in N_{C(t)}(g_0(t)) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(l-t), \quad t \in [0,l], \\ g_0(0) = \varphi(l), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -g_1'(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(t-l), \quad t \in [l,2l], \\ g_1(l) = g_0(l). \end{cases}$$

Функции $g_m(t)$, где $t \in [ml, (m+1)l]$, для четных номеров $m \geqslant 2$ — решения задач

$$\begin{cases} -g_m'(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} g_{2k}'(t - ml + 2kl) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(ml + l - t), \\ g_m(ml) = g_{m-1}(ml), \end{cases}$$

а для нечетных $m \geqslant 3$, где $t \in [ml, (m+1)l]$ — решения задач

$$\begin{cases} -g_m'(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} g_{2k-1}'(t - l - ml + 2kl) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(t - ml), \\ g_m(ml) = g_{m-1}(ml). \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Пусть функции $\xi(t)$ и $\varphi^i(x)$ удовлетворяют условию Липшица на своих областях определения. Тогда решение задачи (1.1) может быть представлено в виде*

$$u^i(x,t) = \frac{\Phi^i(x-t) + \Phi^i(x+t)}{2}, \tag{3.2}$$

где $i = 1, 2, ..., n$.

Доказательство. Предположим формально, что решение задачи (1.1) имеет вид (3.2). Тогда $u^i(x,0) = \Phi^i(x) = \varphi^i(x)$, где $x \in [0,l]$. Из условия $u^i(0,t) = 0$ следует, что функции $\Phi^i(x)$ должны определяться при $x < 0$ нечетным образом. Поскольку

$$u_x^i(x,t) = \frac{\Phi^{i'}(x-t) + \Phi^{i'}(x+t)}{2}, \quad u_t^i(x,t) = \frac{-\Phi^{i'}(x-t) + \Phi^{i'}(x+t)}{2},$$

то $-u_t^i(l,t) = -u_x^i(l,t) + \Phi^{i'}(l-t)$, и следовательно,

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_t^i(l,t) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_x^i(l,t) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(l-t).$$

Обозначим $g(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u^i(l,t) = u(l,t)$. Заметим, что поскольку

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)), \quad \text{то и} \quad -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)),$$

и следовательно,

$$-g'(t) \in N_{C(t)}(g(t)) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(l-t).$$

Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant t \leqslant l$. Тогда $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(l-t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(l-t)$. Введем функцию $g_0(t)$, равную $g(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant l$. Получим, $g_0(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} -g_0'(t) \in N_{C(t)}(g_0(t)) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(l-t), \quad t \in [0,l], \\ g_0(0) = \varphi(l). \end{cases} \tag{3.3}$$

Покажем, что данная задача имеет единственное решение, которое определено для всех $t \in [0,l]$.

Рассмотрим функцию

$$w(t) = g_0(t) + \int_0^t \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(l-s)\, ds$$

и множество

$$D(t) = C(t) + \int_0^t \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(l-s)\, ds.$$

Так как функции $\xi(t)$ и $\varphi^i(x)$ удовлетворяют условию Липшица, то отображение $D(t)$ также удовлетворяет условию Липшица (в смысле расстояния по Хаусдорфу). Заметим, что $N_{C(t)}(g_0(t)) = N_{D(t)}(w(t))$. Таким образом, получаем задачу

$$-\frac{d}{dt}w(t) \in N_{D(t)}(w(t)), \quad w(0) = \varphi(l) \in D(0), \quad t \in [0,l].$$

Согласно Теоремам 2.1 и 2.2, эта задача имеет единственное решение $w(t)$, определенное на всем отрезке $[0,l]$. Функция $w(t)$ удовлетворяет условию Липшица, и ее производная почти всюду ограничена. Тогда задача (3.3) имеет единственное решение $g_0(t)$, где $g_0(t) \in C(t)$, и $g_0(t)$ также удовлетворяет условию Липшица. Поскольку

$$\Phi^i(l-t) + \Phi^i(l+t) = 2g_0(t),$$

то мы получаем

$$\Phi^i(x) = 2g_0(x-l) - \varphi^i(2l-x),$$

где $x \in [l,2l]$. Заметим, что каждая функция $\Phi^i(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[l,2l]$, имеет почти всюду ограниченную производную. Таким образом, $\Phi^i \in W_2^1[l,2l]$. Покажем, что $\Phi^i(l-0) = \Phi^i(l+0)$. Имеем

$$\Phi^i(l-0) = \varphi(l), \quad \text{и} \quad \Phi^i(l+0) = 2g_0(0) - \varphi^i(l) = 2\varphi(l) - \varphi(l) = \varphi(l).$$

Рассмотрим случай, когда $t \in [l, 2l]$ и определим на данном отрезке функцию $g_1(t) = g(t)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}g_1(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(l-t), \quad t \in [l, 2l], \\ g_1(l) = g_0(l). \end{cases}$$

Заметим, что для всех $i = 1, 2, ..., n$ выполнено $\Phi^i(l-t) = -\varphi^i(t-l)$. Таким образом, получаем задачу

$$\begin{cases} -g_1'(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(t-l), \quad t \in [l, 2l], \\ g_1(l) = g_0(l). \end{cases}$$

Аналогично (3.3) доказывается, что последняя задача имеет единственное решение $g_1(t)$, где $g_1(t) \in C(t)$, и $g_1(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Таким образом, можем определить $\Phi^i(x)$, где $x \in [2l, 3l]$ как

$$\Phi^i(x) = 2g_1(x-l) + \varphi^i(x-2l).$$

Заметим, что $\Phi^i \in W_2^1[2l, 3l]$. Покажем, что $\Phi^i(2l-0) = \Phi^i(2l+0)$. Имеем $\Phi^i(2l-0) = 2g_0(l) - \varphi^i(0) = 2g_0(l)$, и $\Phi^i(2l+0) = 2g_1(l) + \varphi^i(0) = 2g_0(l)$.

Аналогично рассмотрим случай, когда $t \in [2l, 3l]$. Определим функцию $g_2(t) = g(t)$, где $t \in [2l, 3l]$. Тогда $g_2(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}g_2(t) \in N_{C(t)}(g_2(t)) + 2g_0'(t-2l) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(3l-t), \quad t \in [2l, 3l], \\ g_2(2l) = g_1(2l). \end{cases}$$

Теперь можем определить каждую функцию $\Phi^i(x)$ на отрезке $x \in [3l, 4l]$ как

$$\Phi^i(x) = 2g_2(x-l) + 2g_0(x-3l) - \varphi^i(4l-x).$$

Рассмотрим случай $t \in [3l, 4l]$. Определив $g_3(t) = g(t)$ получим, что $g_3(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}g_3(t) \in N_{C(t)}(g_3(t)) + 2g_1'(t-2l) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(t-3l), \quad t \in [3l, 4l], \\ g_3(3l) = g_2(3l), \end{cases}$$

и при $x \in [4l, 5l]$ определим функции

$$\Phi^i(x) = 2g_3(x-l) + 2g_1(x-3l) + \varphi^i(x-4l).$$

Покажем, что при $x \in [(m+1)l, (m+2)l]$, где m — четное число

$$\Phi^i(x) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} g_{2k}(x-(m+1-2k)l) - \varphi^i((m+2)l-x);$$

если же m — нечетное число, то

$$\Phi^i(x) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} g_{2k-1}(x-(m+2-2k)l) + \varphi^i(x-(m+1)l).$$

В свою очередь, функции $g_m(t)$, где $t \in [ml,(m+1)l]$, для четных номеров $m \geqslant 2$ — решения задач

$$\begin{cases} -g'_m(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\sum\limits_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} g'_{2k}(t-ml+2kl) + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(ml+l-t), \\ g_m(ml) = g_{m-1}(ml), \end{cases}$$

а для нечетных $m \geqslant 3$ — решения задач

$$\begin{cases} -g'_m(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\sum\limits_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} g'_{2k-1}(t-l-ml+2kl) + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(t-ml), \\ g_m(ml) = g_{m-1}(ml). \end{cases}$$

Для $m = 2, 3$ утверждение доказано. Предположим, что оно верно для $m \leqslant M$. Покажем справедливость утверждения для $m = M+1$. Рассмотрим случай, когда M — четное число. Покажем, что

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=1}^{\frac{M+2}{2}} g_{2k-1}(x-(M+3-2k)l) + \varphi^i(x-(M+2)l),$$

где $x \in [(M+2)l,(M+3)l]$. Определив $g(t) = g_{M+1}(t)$, где $t \in [(M+1)l,(M+2)l]$, получим

$$-g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(l-t).$$

Поскольку

$$\Phi^{i'}(l-t) = 2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} g'_{2k-1}(t-l-(M+1-2k)l) + \varphi^{i'}(t-l-Ml),$$

то

$$-g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + 2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} g'_{2k-1}(t-2l-Ml+2kl) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(t-l-Ml).$$

Заметим, что

$$g_{M+1}((M+1)l) = \frac{\Phi((2+M)l) - \Phi(Ml)}{2}.$$

Т.к.

$$\Phi((M+2)l) = 2\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} g_{2k}(l+2kl) \quad \text{и} \quad \Phi(Ml) = 2\sum_{k=0}^{\frac{M-2}{2}} g_{2k}(l+2kl),$$

то

$$g_{M+1}((M+1)l) = g_M((M+1)l).$$

Задача

$$\begin{cases} -g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + 2\cdot\sum\limits_{k=1}^{\frac{M}{2}} g'_{2k-1}(t-2l-Ml+2kl) + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(t-l-Ml), \\ g_{M+1}((M+1)l) = g_M((M+1)l) \end{cases}$$

имеет единственное решение $g_{M+1}(t)$, определенное на промежутке $[(M+1)l,(M+2)l]$.

Тогда
$$g_{M+1}(t)=\frac{\Phi^i(l-t)+\Phi^i(l+t)}{2}.$$
Значит
$$\Phi^i(x)=2g_{M+1}(x-l)-\Phi^i(2l-x),$$
где $x\in[(M+2)l,(M+3)l]$. Так как
$$\Phi^i(2l-x)=-2\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}}g_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl)-\varphi^i(x-2l-Ml),$$
то
$$\begin{aligned}\Phi^i(x)&=2g_{M+1}(x-l)+2\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}}g_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl)+\varphi^i(x-2l-Ml)\\&=2\sum_{k=1}^{\frac{M+2}{2}}g_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl)+\varphi^i(x-2l-Ml),\end{aligned}$$
что и требовалось. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Таким образом, получено представление для функций $\Phi^i(x)$ $(i=1,2,...,n)$. Покажем, что функции $u^i(x,t)$, определенные равенством (3.2), являются решением задачи (1.1). Заметим, что $u^i\in\widehat{W}_2^1(Q_T)$ для всех T, поскольку функции $\Phi_i(x)$ непрерывны на всей оси, и $\Phi^i\in W_2^1[ml,(m+1)l]$ для $m=0,1,2,...$, а при $x<0$ функции $\Phi^i(x)$ определены нечетным образом.

Поскольку $u(l,t)=g(t)$, где $g(t)=g_m(t)$ при $t\in[ml,(m+1)l]$, $g_m(ml)=g_{m-1}(ml)$ и $g_m(t)\in C(t)$, то $u(l,t)\in C(t)$ для всех $t\geqslant 0$. Заметим, что условия $u^i(0,t)=0$, $u^1(l,t)=u^2(l,t)=...=u^n(l,t)=g(t)$ выполнены для всех $t\geqslant 0$; $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0)=0$ выполнено для почти всех $x\in[0,l]$; $u^i(x,0)=\varphi^i(x)$ выполнено для всех $x\in[0,l]$.

Поскольку почти всюду
$$\begin{aligned}&-u_x^i(l,t)=-\frac{1}{2}(\Phi^{i'}(l-t)+\Phi^{i'}(l+t)),\\&\Phi^{i'}(l+t)=2g'(t)+\Phi^{i'}(l-t),\end{aligned}$$
то
$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_x^i(l,t)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi^{i'}(l-t)-g'(t).$$
Поскольку $-g'(t)\in N_{C(t)}(g(t))+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Phi^{i'}(l-t)$, то
$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_x^i(l,t)\in N_{C(t)}(g(t))=N_{C(t)}(u(l,t)),$$
и следовательно, почти всюду
$$-\sum_{i=1}^{n}u_x^i(l,t)\in N_{C(t)}(u(l,t)).$$

Покажем теперь, что выполняется интегральное тождество.

Интегральное равенство (3.1) может быть представлено как

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left(\int_0^T u^i(x,t)\Psi^i_{tt}(x,t)\,dt\right)\,dx-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left(\int_0^l u^i(x,t)\Psi^i_{xx}(x,t)\,dx\right)\,dt$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\Psi^i_t(x,0)\varphi^i(x)\,dx-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i_x(l,t)u^i(l,t)\,dt$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\big(u^i(x,T)\Psi^i_t(x,T)-u^i(x,0)\Psi^i_t(x,0)\big)\,dx-\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T u^i_t(x,t)\Psi^i_t(x,t)\,dt\,dx$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\big(\Psi^i_x(l,t)u^i(l,t)-\Psi^i_x(0,t)u^i(0,t)\big)\,dt+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l u^i_x(x,t)\Psi^i_x(x,t)\,dx\,dt$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\Psi^i_t(x,0)\varphi^i(x)\,dx-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i_x(l,t)u^i(l,t)\,dt$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l u^i_x(x,t)\Psi^i_x(x,t)\,dx\,dt-\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T u^i_t(x,t)\Psi^i_t(x,t)\,dx\,dt-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l\Big(\Phi^{i'}(x-t)+\Phi^{i'}(x+t)\Big)\,\Psi^i_x(x,t)\,dx\,dt$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T\Big(\Phi^{i'}(x+t)-\Phi^{i'}(x-t)\Big)\,\Psi^i_t(x,t)\,dt\,dx-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\Psi^i_x(x,T)(-\Phi^i(x-T)+\Phi^i(x+T))\,dx-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\Psi^i_x(x,0)(-\Phi^i(x)+\Phi^i(x))\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l\Psi^i_{xt}(x,t)(\Phi^i(x+t)-\Phi^i(x-t))\,dx\,dt-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i_t(l,t)(\Phi^i(l+t)-\Phi^i(l-t))\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i_t(0,t)(\Phi^i(t)-\Phi^i(-t))\,dt+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T\Psi^i_{tx}(x,t)(\Phi^i(x+t)-\Phi^i(x-t))\,dx\,dt$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi(l,t)u^i_x(l,t)\,dt=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i_t(l,t)(\Phi^i(l+t)-\Phi^i(l-t))\,dt$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T(\Phi^{i'}(l-t)+\Phi^{i'}(l+t))\Psi^i(l,t)\,dt=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i_t(l,t)(\Phi^i(l+t)-\Phi^i(l-t))\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Psi^i_t(l,t)(\Phi^i(l+t)-\Phi^i(l-t))\,dt=0.$$

Теорема доказана. □

Замечание 3.1. *Заметим, что задача (1.1) имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что функции $u^i(x,t)$ составляют решение задачи (1.1). Тогда функция $\widetilde{u}(x,t) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} u^i(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \widetilde{u}(x,0) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^i(x), \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(\widetilde{u}(l,t)), \\ \widetilde{u}(l,t) \in C(t), \\ \widetilde{u}(0,t) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Задача (3.4) имеет единственное решение. В самом деле, если $\varphi(l) \in (-h + \xi(0), h + \xi(0))$, то для всех $t \in [0, t_1]$ функция $\widetilde{u}(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < t_1, \\ \widetilde{u}(x,0) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^i(x), \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,0) = 0, \\ \widetilde{u}(0,t) = 0, \\ \widetilde{u}'_x(l,t) = 0. \end{cases}$$

Как известно [4], последняя задача имеет единственное решение $\widetilde{u}(x,t)$. В момент времени t_1 выполняется условие $\widetilde{u}(l,t_1) = -h + \xi(t)$, либо $\widetilde{u}(l,t_1) = h + \xi(t)$, и для $t \in [t_1, t_2]$ функция $\widetilde{u}(x,t)$ является решением одной из задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}^*}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}^*}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t_1 < t < t_2, \\ \widetilde{u}^*(x,t_1) = \widetilde{u}(x,t_1), \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}^*}{\partial t}(x,t_1) = \widetilde{u}'_t(x,t_1), \\ \widetilde{u}(0,t) = 0, \\ \widetilde{u}(l,t) = \pm h + \xi(t). \end{cases}$$

Такие задачи также имеют единственное решение на $[t_1, t_2]$ [4]. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что исходная задача может иметь лишь единственное решение.

Введем функции $\omega^i(x,t) = u^i(x,t) - \widetilde{u}(x,t)$ $(i = 1, 2, ...n)$. Заметим, что $\omega^i(x,t)$ $(i = 1, 2, ...n)$ являются решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega^i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \omega^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (i = 1, 2, ...n), \\ \omega^i(x,0) = \varphi^i(x) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varphi^j(x), \\ \dfrac{\partial \omega^i}{\partial t}(x,0) = 0, \\ \omega^i(0,t) = 0, \\ \omega^i(l,t) = 0. \end{cases}$$

Согласно [4], для каждого $i = 1, 2, ..., n$ функции $\omega^i(x,t)$ определены единственным образом. Следовательно, функции $u^i(x,t)$ могут быть определены лишь единственным образом, что и требовалось. □

Рассмотрим пример нахождения решения задачи вида (1.1). А именно, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (i = 1, 2, ..., n), \\ u^i(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0, \\ u^1(l,t) = u^2(l,t) = ... = u^n(l,t) = u(l,t), \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)), \\ u^i(0,t) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n), \\ u(l,t) \in C(t), \end{cases}$$

где $C(t) = [-h, h] + \xi(t)$, и $\xi(t)$ задана как l-периодическая функция вида

$$\xi(t) = \begin{cases} \dfrac{8h}{l} t, \quad t \in \left[0, \dfrac{l}{4}\right], \\ \dfrac{-8h}{l}\left(t - \dfrac{l}{2}\right), \quad t \in \left[\dfrac{l}{4}, \dfrac{3l}{4}\right], \\ \dfrac{8h}{l}(t - l), \quad t \in \left[\dfrac{3l}{4}, l\right]. \end{cases}$$

Заметим, что функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \dfrac{8h}{l}$. Как было доказано выше, такая задача имеет единственное решение, где

$$u^i(x,t) = \frac{\Phi^i(x-t) + \Phi^i(x+t)}{2}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Каждая из функций $\Phi^i(x)$ имеет следующее представление:
1) если $x \in [0, l]$ то $\Phi^i(x) = 0$;
2) если $x \in [(m+1)l, (m+2)l]$, и m — четное, то

$$\Phi^i(x) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} g_{2k}(x - (m+1-2k)l);$$

3) а если m — нечетное, то

$$\Phi^i(x) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} g_{2k-1}(x - (m+2-2k)l);$$
$$\Phi^i(-x) = -\Phi^i(x).$$

Здесь функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$ — решения задач

$$\begin{cases} -g_0'(t) \in N_{C(t)}(g_0(t)), \quad t \in [0, l], \\ g_0(0) = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} -g_1'(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)), \quad t \in [l, 2l], \\ g_1(l) = g_0(l). \end{cases} \tag{3.6}$$

Функции $g_m(t)$ для четных номеров $m \geqslant 2$ — решения задач

$$\begin{cases} -g_m'(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\sum\limits_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} g_{2k}'(t - ml + 2kl), \quad t \in [ml, (m+1)l], \\ g_m(ml) = g_{m-1}(ml), \end{cases}$$

а для нечетных $m \geqslant 3$ — решения задач

$$\begin{cases} -g_m'(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\sum\limits_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} g_{2k-1}'(t - l - ml + 2kl), \quad t \in [ml, (m+1)l], \\ g_m(ml) = g_{m-1}(ml). \end{cases}$$

Рассмотрим задачу (3.5). Решив ее, получим, что

$$g_0(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in \left[0, \frac{l}{8}\right], \\ \xi(t) - h, \quad t \in \left[\frac{l}{8}, \frac{l}{4}\right], \\ h, \quad t \in \left[\frac{l}{4}, \frac{l}{2}\right], \\ \xi(t) + h, \quad t \in \left[\frac{l}{2}, \frac{3l}{4}\right], \\ -h, \quad t \in \left[\frac{3l}{4}, l\right]. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу (3.6). Ее решение имеет вид

$$g_1(t) = \begin{cases} \xi(t) - h, \quad t \in \left[l, \dfrac{5l}{4}\right], \\ h, \quad t \in \left[\dfrac{5l}{4}, \dfrac{3l}{2}\right], \\ \xi(t) + h, \quad t \in \left[\dfrac{3l}{2}, \dfrac{7l}{4}\right], \\ -h, \quad t \in \left[\dfrac{7l}{4}, 2l\right]. \end{cases}$$

Покажем, что для всех $m \in N$

$$g_m(t) = \begin{cases} \xi(t) - h, \quad t \in \left[ml, \dfrac{l(4m+1)}{4}\right], \\ h, \quad t \in \left[\dfrac{l(4m+1)}{4}, \dfrac{l(2m+1)}{2}\right], \\ \xi(t) + h, \quad t \in \left[\dfrac{l(2m+1)}{2}, \dfrac{l(4m+3)}{4}\right], \\ -h, \quad t \in \left[\dfrac{l(4m+3)}{4}, l(m+1)\right]. \end{cases}$$

Для $m = 1$ утверждение верно. Предположим, что утверждение верно для $m \leqslant N$. Покажем справедливость для $m = N + 1$. Рассмотрим случай, когда N — четное число, т.е. $N = 2M$. Докажем, что

$$g_{2M+1}(t) = \begin{cases} \xi(t) - h, \quad t \in \left[2Ml + l, 2Ml + \dfrac{5l}{4}\right], \\ h, \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{5l}{4}, 2Ml + \dfrac{3l}{2}\right], \\ \xi(t) + h, \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{3l}{2}, 2Ml + \dfrac{7l}{4}\right], \\ -h, \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{7l}{4}, 2Ml + 2l\right]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Имеем

$$\begin{cases} -g'_{2M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{2M+1}(t)) + 2\sum\limits_{k=1}^{M} g'_{2k-1}(t - 2l - 2Ml + 2kl), \\ g_{2M+1}((2M+1)l) = -h, \quad t \in [(2M+1)l, (2M+2)l]. \end{cases}$$

Обозначим

$$v(t) = g_{2M+1}(t) + 2\int\limits_{(2M+1)l}^{t} \sum_{k=1}^{M} g'_{2k-1}(s - 2l - 2Ml + 2kl)\, ds.$$

Имеем

$$\begin{aligned} v(t) &= g_{2M+1}(t) + 2\sum_{k=1}^{M}(g_{2k-1}(t - 2l - 2Ml + 2kl) - g_{2k-1}((2k-1)l) \\ &= g_{2M+1}(t) + 2\sum_{k=1}^{M} g_{2k-1}(t - 2l - 2Ml + 2kl) + 2Mh. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{\xi}(t) = \xi(t) + 2Mh + 2\sum_{k=1}^{M} g_{2k-1}(t - 2l - 2Ml + 2kl),$$
$$D(t) = [-h, h] + \tilde{\xi}(t), t \in [(2M+1)l, (2M+2)l].$$

С учетом индуктивного предположения и представления функции $\xi(t)$, имеем

$$\tilde{\xi}(t) = \begin{cases} (1+2M)\xi(t), \quad t \in \left[2Ml + l, 2Ml + \dfrac{5l}{4}\right], \\ \xi(t) + 4Mh, \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{5l}{4}, 2Ml + \dfrac{3l}{2}\right], \\ \xi(t) + 4Mh + 2M\xi(t), \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{3l}{2}, 2Ml + \dfrac{7l}{4}\right], \\ \xi(t), \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{7l}{4}, 2Ml + 2l\right]. \end{cases}$$

Так как $v(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} -v'(t) \in N_{D(t)}(v(t)), \quad t \in [(2M+1)l, (2M+2)l], \\ v((2M+1)l) = -h, \end{cases}$$

то

$$v(t) = \begin{cases} -h + \xi(t) + 2M\xi(t), \quad t \in \left[2Ml + l, 2Ml + \dfrac{5l}{4}\right], \\ h + 4Mh, \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{5l}{4}, 2Ml + \dfrac{3l}{2}\right], \\ \xi(t) + 4Mh + 2M\xi(t) + h, \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{3l}{2}, 2Ml + \dfrac{7l}{4}\right], \\ -h, \quad t \in \left[2Ml + \dfrac{7l}{4}, 2Ml + 2l\right]. \end{cases}$$

Следовательно, $g_{2M+1}(t) = v(t) - \tilde{\xi}(t) + \xi(t)$, и мы получим (3.7) для функции $g_{2M+1}(t)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Определим функцию $g(t)$, совпадающую на каждом промежутке $t \in [ml, (m+1)l]$ с функцией $g_m(t)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. Поскольку $u(l,t) = g(t)$, то узловая точка струнной системы будет периодически колебаться с периодом l, начиная с момента времени $t = \frac{l}{4}$. При этом соприкосновение с ограничителем будет происходить в моменты времени $\frac{l}{8}$, $\frac{nl}{2}$, где $n \in N$.

4. Задача граничного управления

Задачи граничного управления колебательными процессами на отрезке в случае линейных граничных условий изучались, например, в работах В.А. Ильина, Е.И. Моисеева [4]–[6]. Рассмотрим такого рода задачу на графе-звезде для случая нелинейного условия в узле:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \quad (i = 1, 2, ...n), \\ u^i(x, 0) = \varphi^i(x), \\ \dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t)), \\ u(l, t) = u^1(l, t) = u^2(l, t) = ... = u^n(l, t), \\ u(l, t) \in C(t), \\ u^i(0, t) = \mu^i(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

Требуется найти функции $\mu^i(t) \in W_2^1[0, T]$ такие, что

$$u^i(x, T) = \varphi *^i (x), \quad (u^i)'_t(x, T) = \psi *^i (x),$$

где $\varphi *^i \in W_2^1[0, l]$, $\psi *^i \in L^2[0, l]$ — заданные функции. Предположим, что функции $\xi(t)$ и $\varphi^i(x)$ удовлетворяют условию Липшица на своих областях определения.

Решением задачи (4.1) будем называть функцию $u(x, t)$ такую, что:
1) сужения $u(x, t)$ на ребра совпадают с $u^i(x, t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, причем, $u^i(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$;
2) для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ выполнены условия $u^1(l, t) = u^2(l, t) = ... = u^n(l, t) = u(l, t)$, $u(l, t) \in C(t)$, $u^i(0, t) = \mu^i(t)$;
3) для почти всех $0 \leqslant t \leqslant T$ выполнено условие $-\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t))$;
4) условия $u^i(x, 0) = \varphi^i(x)$ выполнены для всех $x \in [0, l]$, а условия $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x, 0) = 0$ выполнены для почти всех $x \in [0, l]$, $i = 1, 2, ..., n$;
5) выполняется интегральное равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^l \int_0^T u^i(x, t)[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial x^2}(x, t)]\, dx\, dt + \sum_{i=1}^{n} \int_0^l \frac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x, 0)\varphi^i(x)\, dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^T (u^i(l, t)\frac{\partial \Psi^i}{\partial x}(l, t) - \Psi^i(l, t)\frac{\partial u^i}{\partial x}(l, t))\, dt - \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \frac{\partial \Psi^i}{\partial x}(0, t)\mu^i(t)\, dt = 0,$$

где произвольные функции $\Psi^i \in \widehat{W}_2^2(Q_T)(i = 1, 2, ..., n)$, такие, что

$$\Psi^i(0, t) = 0, \quad \Psi^i(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x, T) = 0, \quad \Psi^1(l, t) = \Psi^2(l, t) = ... = \Psi^n(l, t).$$

Рассмотрим случай, когда $T < l$.

Теорема 4.1. *Для $T < l$ решение задачи (4.1) определено единственным образом. Функции $\mu^i(t)$ должны иметь вид*

$$\mu^i(t) = \frac{1}{2}(\varphi^i(t) - \widehat{\psi *^i}(T - t) + \varphi *^i (T - t)).$$

При этом для всех $i = 1, 2, ..., n$ начальные и финальные данные должны быть связаны между собой равенствами

$$\widehat{\psi *^i}(x) - \varphi *^i (x) + \varphi^i(x-T) \equiv 0, \quad T \leqslant x \leqslant l,$$
$$\widehat{\psi *^i}(x) + \varphi *^i (x) - \varphi^i(x+T) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l-T,$$
$$\widehat{\psi *^i}(x) + \varphi *^i (x) - 2g_0(T+x-l) + \varphi^i(2l-x-T) \equiv 0, \quad l-T \leqslant x \leqslant l.$$

Здесь для каждого $i = 1, 2, ..., n$ через $\widehat{\psi *^i}$ обозначена первообразная для функции $\psi *^i$, удовлетворяющая равенству

$$\widehat{\psi *^i}(x_0^i) - \varphi *^i (x_0^i) + \varphi^i(x_0^i - T) = 0,$$

$x_0^i \in [T, l]$ — фиксированы; $g_0(t)$ — решение задачи (3.3).

Доказательство. Введем функции

$$\underline{\mu}^i(t) = \begin{cases} \mu^i(t), & t \geqslant 0, \\ 0, t < 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, ..., n$. Обозначим через $v^i(x,t)$ решение задачи (1.1) ($i = 1, 2, ..., n$). Аналогично теореме 3.1, непосредственной проверкой выполнения условий устанавливается, что $u^i(x,t) = \underline{\mu}^i(t-x) + v^i(x,t)$ — решение задачи (4.1) ($i = 1, 2, ..., n$). Таким образом,

$$u^i(x,t) = \underline{\mu}^i(t-x) + \frac{\Phi^i(x-t) + \Phi^i(x+t)}{2}.$$

Тогда

$$\underline{\mu}^i(T-x) + \frac{\Phi^i(x-T) + \Phi^i(x+T)}{2} = \varphi *^i (x),$$

и следовательно,

$$-\underline{\mu}^{i'}(T-x) + \frac{\Phi^{i'}(x+T) + \Phi^{i'}(x-T)}{2} = \varphi *^{i'} (x). \tag{4.2}$$

С другой стороны,

$$\underline{\mu}^{i'}(T-x) + \frac{\Phi^{i'}(x+T) - \Phi^{i'}(x-T)}{2} = \psi *^i (x). \tag{4.3}$$

Вычитая из (4.3) равенство (4.2), получим

$$2\underline{\mu}^{i'}(T-x) - \Phi^{i'}(x-T) = \psi *^i (x) - \varphi *^{i'} (x). \tag{4.4}$$

Рассмотрим случай, когда $T \leqslant x \leqslant l$. Воспользовавшись представлениями для функций $\underline{\mu}^i$ и Φ^i, получим

$$\widehat{\psi *^i}(x) - \varphi *^i (x) + \varphi^i(x-T) \equiv 0, \quad T \leqslant x \leqslant l,$$

где первообразную $\widehat{\psi *^i}(x)$ функции $\psi *^i (x)$, выберем так, чтобы она удовлетворяла равенству

$$\widehat{\psi *^i}(x_0^i) - \varphi *^i (x_0^i) + \varphi^i(x_0^i - T) = 0,$$

$x_0^i \in [T, l]$ — фиксирован для каждого $i = 1, 2, ..., n$.

Рассмотрим равенство (4.4) для $0 \leqslant x \leqslant T$. Получим

$$2\mu^i(T-x) = \varphi^i(T-x) - \widehat{\psi *^i}(x) + \varphi *^i (x),$$

откуда для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ получим

$$\mu^i(t) = \frac{1}{2}(\varphi^i(t) - \widehat{\psi *^i}(T-t) + \varphi *^i (T-t)).$$

Сложив (4.2) и (4.3), получим

$$\Phi^{i'}(x+T) = \psi *^i (x) + \varphi *^{i'} (x). \tag{4.5}$$

Рассмотрим случай, когда $l-T \leqslant x \leqslant l$. Воспользовавшись полученными в теореме 3.1 представлениями для функций Φ^i, имеем

$$\widehat{\psi *^i}(x)+\varphi *^i(x)-2g_0(T+x-l)+\varphi^i(2l-x-T)\equiv 0.$$

Если же $0 \leqslant x \leqslant l-T$, то

$$\widehat{\psi *^i}(x)+\varphi *^i(x)-\varphi^i(x+T)\equiv 0.$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Т. Диаб, Б.К. Калдыбекова, О.М. Пенкин. *О кратности собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля на графах* // Матем. заметки. **99**:4 (2016), 489–501.
2. М.Б. Зверева. *Модель деформаций струнной системы на графе — звезде с нелинейным условием в узле* // Современная математика. Фундаментальные направления. **63**:4 (2022), 635–652.
3. М.Б. Зверева. *Модель деформаций системы стилтьесовских струн с нелинейным условием* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. **32**:4 (2022), 528–545.
4. В.А. Ильин. *Избранные труды В.А. Ильина: В 2-х томах.* М.:МАКС Пресс. 2008.
5. В.А. Ильин. *Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией* // Дифференц. уравн. **36**:11 (2000), 1513–1528.
6. В.А. Ильин, Е.И. Моисеев. *Оптимизация граничных управлений колебаниями струны* // Успехи матем. наук. **60**:6 (366) (2005), 89–114.
7. Р.Ч. Кулаев. *О свойстве неосцилляции уравнения на графе* // Сиб. матем. журн. **57**:1 (2016), 85–97.
8. Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева. *Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвертого порядка на графе* // Матем. заметки. **111**:6 (2022), 947–952.
9. Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* М.: Физматлит. 2005.
10. Ю.В. Покорный, В.Л. Прядиев. *Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети* // Успехи матем. наук. **59**:3(357) (2004), 315–350.
11. Ю.В. Покорный, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских. *Волновое уравнение на пространственной сети* // Доклады РАН. **388**:1(357) (2003), 16–18.
12. В.В. Провоторов, В.Н. Хоанг. *Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций* // Вестник российских университетов. Математика. **27**:137 (2022), 80–94.
13. J. von Below, J. Lubary, B. Vasseur. *Some remarks on the eigenvalue multiplicities of the Laplacian on infinite locally finite trees* // Results. Math. **63** (2013), 1331–1350.
14. M. Burlutskaya. *Fourier method in a mixed problem for the wave equation on a graph* // Dokl. Math. **92**:3 (2015), 735–738.
15. M. Kramar Fijavz, D. Mugnolo, S. Nicaise. *Dynamic transmission conditions for linear hyperbolic systems on networks* // J. Evol. Equ. **21**:3 (2021), 3639–3673.
16. M. Kunze, M. Monteiro Marques. *An introduction to Moreau's sweeping process* // Impacts in Mechanical Systems. Lecture Notes in Physics. **551** (2000), 1–60.
17. Yu.V. Pokornyi, V.L. Pryadiev. *On conditions for transmission in the Sturm-Liouville problem on a network* // J. Math. Sci. **130**:5 (2005), 5013–5045.
18. Yu.V. Pokornyi, A.V. Borovskikh. *Differential equation on networks (geometric graphs)* // J. Math. Sci. **119**:6 (2004), 691–718.
19. Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, Zh.I. Bakhtina. *On Stieltjes differentials on geometric graphs* // Dokl. Math. **78**:3 (2008), 877–879.

20. Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, Zh.I. Bakhtina. *Stieltjes differential method in the modeling of an irregular system on a geometric graph* // Diff. Equat. **48**:8 (2012), 1103–1111.
21. V.A. Yurko. *Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks* // Russian Math. Surveys. **71**:3 (2016), 539–584.

Маргарита Борисовна Зверева,
Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1,
394018, г. Воронеж, Россия

Воронежский государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 86,
394043, г. Воронеж, Россия
E-mail: margz@rambler.ru

Михаил Игоревич Каменский,
Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1,
394018, г. Воронеж, Россия

Воронежский государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 86,
394043, г. Воронеж, Россия
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru