ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 1 (2024). С. 81-98.

УДК 517.958

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕПОЛОГИХ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО НУЛЕВОЙ ГЛАВНОЙ КРИВИЗНЫ

С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

Аннотация. Изучается разрешимость краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих непологих изотропных неоднородных оболочек с незакрепленными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко. В основе метода исследования лежат интегральные представления для обобщенных перемещений, содержащие произвольные функции, в том числе, произвольные голоморфные функции. Произвольные функции определяются таким образом, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли линейной системе уравнений и линейным граничным условиям, выделенным из исходной краевой задачи. Голоморфные функции ищутся в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями. Интегральные представления позволяют свести исходную краевую задачу к нелинейному операторному уравнению относительно обобщенных перемещений в соболевском пространстве. При исследовании разрешимости операторного уравнения наиболее существенным моментом является его обращение относительно линейной части. В результате исходная задача сводится к уравнению, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: непологая изотропная неоднородная оболочка типа Тимошенко нулевой главной кривизны, нелинейная краевая задача, дифференциальные уравнения с частными производными, обобщенное решение, голоморфная функция, операторное уравнение, теорема существования.

Mathematics Subject Classification: 35G30, 74G25

1. Введение

В настоящее время разрешимость нелинейных краевых задач равновесия упругих пологих оболочек достаточно полно изучена в рамках простейшей модели Кирхгофа-Лява ([1]–[5] и цитированная литература). В то же время актуальной задачей является исследование подобных краевых задач в рамках более сложных моделей теории оболочек, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа-Лява [1, с. 349]. На сегодняшний день имеется ряд работ [6]–[12], в которых в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко исследована разрешимость нелинейных краевых задач для пологих оболочек. В основе исследований в [6]–[12] лежат интегральные представления для обобщенных перемещений, содержащие произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям. В настоящей статье метод работ [6]–[12] развивается на случай непологих неоднородных изотропных оболочек

S.N. Timergaliev, Solvability of nonlinear boundary value problems for non-sloping Timoshenko-type isotropic shells of zero principal curvature.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00212.
Поступила 22 февраля 2023 г.

типа Тимошенко нулевой главной кривизны, отнесенных к евклидовой системе координат. Переход к непологим оболочкам существенно усложняет исследование краевой задачи.

2. Постановка задачи

В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
&T^{j\lambda}_{\alpha^\lambda} - B_{j\lambda}T^{\lambda\mu}\omega_\mu - B_{j\lambda}T^{\lambda 3} + R^j = 0, \quad j = 1,2,\\
&(T^{\lambda\mu}\omega_\mu)_{\alpha^\lambda} + T^{\lambda 3}_{\alpha^\lambda} + B_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + R^3 = 0,\\
&M^{j\lambda}_{\alpha^\lambda} - T^{j3} + L^j = 0, \quad j = 1,2,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$\begin{aligned}
&T^{j1}d\alpha^2/ds - T^{j2}d\alpha^1/ds = P^j(s), \quad j = 1,2,\\
&T^{13}d\alpha^2/ds - T^{23}d\alpha^1/ds + (T^{1\lambda}d\alpha^2/ds - T^{2\lambda}d\alpha^1/ds)\omega_\lambda = P^3(s),\\
&M^{j1}d\alpha^2/ds - M^{j2}d\alpha^1/ds = N^j(s), \quad j = 1,2.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В (2.1), (2.2) и ниже используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&T^{ij} \equiv T^{ij}(\gamma) = D^{ijkn}_{\lambda-1}\gamma^{\lambda-1}_{kn}, \quad M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma) = D^{ijkn}_{\lambda}\gamma^{\lambda-1}_{kn},\\
&\gamma = (\gamma^0, \gamma^1), \quad \gamma^k = (\gamma^k_{11}, \gamma^k_{12}, \gamma^k_{13}, \gamma^k_{22}, \gamma^k_{23}, \gamma^k_{33}), \quad k = 0,1;\\
&D^{ijkn}_m = D^{ijkn}_m(\alpha^1,\alpha^2) = \int\limits_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)(\alpha^3)^m d\alpha^3, \quad m = \overline{0,2}, \quad i,j,k,n = \overline{1,3};\\
&B^{1111} = B^{2222} = E/(1-\nu^2), \quad B^{1122} = \nu E/(1-\nu^2),\\
&B^{1212} = E/(2(1+\nu)), \quad B^{1313} = B^{2323} = E\kappa^2/(2(1+\nu));\\
&\omega_j = w_{3\alpha^j} + B_{j1}w_1 + B_{j2}w_2, \quad j = 1,2;\\
&\gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - B_{jj}w_3 + \omega_j^2/2, \quad j = 1,2,\\
&\gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2B_{12}w_3 + \omega_1\omega_2, \quad \gamma^1_{jj} = \psi_{j\alpha^j}, \quad j = 1,2,\\
&\gamma^1_{12} = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, \quad \gamma^0_{j3} = \omega_j + \psi_j, \quad j = 1,2, \quad \gamma^0_{33} = \gamma^1_{k3} \equiv 0, \quad k = \overline{1,3};
\end{aligned} \tag{2.3}$$

остальные B^{ijkn} равны нулю, $\alpha^j = \alpha^j(s)$ $(j = 1,2)$ — уравнения кривой Γ, s — длина дуги Γ; нижний индекс α^λ в (2.1)–(2.3) и далее означает дифференцирование по α^λ, $\lambda = 1,2$.

Система (2.1) совместно с граничными условиями (2.2) описывает состояние равновесия упругой непологой изотропной неоднородной оболочки с незакрепленными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [13, с. 164–173], отнесенной к евклидовой системе координат. При этом: T^{ij} — усилия, M^{ij} — моменты; γ^k_{ij} $(i,j = \overline{1,3},\ k = 0,1)$ — компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, отождествляемой с областью Ω; w_j $(j = 1,2)$ и w_3 — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0; ψ_i $(i = 1,2)$ — углы поворота нормальных сечений S_0; B_{ij} $(i,j = 1,2)$ — составляющие тензора кривизны поверхности S_0, R^j, P^j $(j = \overline{1,3})$, L^k, N^k $(k = 1,2)$ — компоненты внешних сил, действующих на оболочку; ν-коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, κ^2 — коэффициент сдвига, $h_0 = const$ — толщина оболочки; α^1, α^2 — декартовы координаты точек области Ω.

В (2.1)–(2.3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам — от 1 до 2.

Задача (1), (2). Требуется найти решение системы (2.1), удовлетворяющее граничным условиям (2.2).

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия:

(a) $B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3) \in (W_p^{(1)}(\Omega)\cap C_\beta(\overline{\Omega}))\times L_1[-h_0/2,h_0/2]$, $\quad i,j,k,n=\overline{1,3}$;

(b) $B_{\lambda\mu}(\alpha^1,\alpha^2)\in C^1(\overline{\Omega})$, $\lambda,\mu=1,2$, при этом $B_{11}B_{22}-B_{12}^2=0$, $B_{12}\neq 0$ в $\overline{\Omega}$;

(c) компоненты внешних сил R^j $(j=\overline{1,3})$ и L^k $(k=1,2)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j $(j=\overline{1,3})$, N^k $(k=1,2)$ — пространству $C_\beta(\Gamma)$ и внешние силы самоуравновешены;

(d) Ω — произвольная односвязная область с границей $\Gamma\in C_\beta^1$.

Здесь и далее везде: $2<p<4/(2-\beta)$, $0<\beta<1$.

Определение 2.1. *Назовем вектор обобщенных перемещений* $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ *обобщенным решением задачи (1), (2), если a принадлежит пространству* $W_p^{(2)}(\Omega)$, *почти всюду удовлетворяет системе* (2.1) *и поточечно граничным условиям* (2.2).

Здесь $W_p^{(j)}(\Omega)$ $(j=1,2)$ — пространства Соболева. В силу теорем вложения для Соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p>2$ обобщенное решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\overline{\Omega})$. Здесь и везде далее $\alpha=(p-2)/p$. Заметим, что при $2<p<4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha<\beta/2$.

Соотношения для компонент деформаций в (2.3) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k = e_{sij}^k + e_{cij}^k + \chi_{ij}^k, \quad i,j=\overline{1,3}, \quad k=0,1, \tag{2.4}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
&e_{sjj}^0 = w_{j\alpha^j}, \quad e_{sj3}^0 = w_{3\alpha^j}+\psi_j, \quad e_{sjj}^1=\psi_{j\alpha^j}, \quad j=1,2,\\
&e_{s12}^0 = w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1}, \quad e_{s12}^1=\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1},\\
&e_{cjj}^0 = -B_{jj}w_3, \quad e_{cij}^1\equiv 0, \quad j=1,2, \quad e_{c12}^0=-2B_{12}w_3,\\
&e_{cj3}^0 = B_{j1}w_1+B_{j2}w_2, \quad \chi_{jj}^0=\omega_j^2/2, \quad i,j=1,2, \quad \chi_{12}^0=\omega_1\omega_2,\\
&\chi_{ij}^1=\chi_{j3}^0=e_{s33}^0=e_{sj3}^1=e_{c33}^k\equiv 0, \quad i,j=\overline{1,3}, \quad k=0,1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Построение интегральных представлений для обобщенных перемещений

Введем в рассмотрение две комплексные функции

$$\begin{aligned}
\upsilon_j =&\upsilon_j(z) = D_{j-1}^{1111}(w_{1\alpha^1}+w_{2\alpha^2}) + D_j^{1111}(\psi_{1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2})\\
&+ i[D_{j-1}^{1212}(w_{2\alpha^1}-w_{1\alpha^2}) + D_j^{1212}(\psi_{2\alpha^1}-\psi_{1\alpha^2})], \quad j=1,2, \quad z=\alpha^1+i\alpha^2.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В системе (2.1) усилия T^{jk}, моменты M^{jk} и компоненты деформаций γ_{jk}^n заменим их выражениями из (2.3), (2.4). Прибавляя после этого к первому уравнению в (2.1) второе, умноженное на мнимую единицу i, а к четвертому уравнению — пятое, умноженное также на i, систему (2.1) при помощи функций $\upsilon_j(z)$ из (3.1) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\begin{aligned}
&\upsilon_{j\bar z} + h^j(a) = f_c^j(a) + f_\chi^j(a) - F^j(z), \quad j=1,2,\\
&D_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1}+w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) = f_c^3(a)+f_\chi^3(a) - F^3(z), \quad z\in\Omega,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\upsilon_{j\bar z} = (\upsilon_{j\alpha^1} + i\upsilon_{j\alpha^2})/2, \quad j=1,2,\\
&h^j(a) = (-1)^{\mu-1}(D^{1212}_{j+\lambda-2\alpha^{3-\mu}}\nu_{\lambda 2\alpha^\mu} + iD^{1212}_{j+\lambda-2\alpha^\mu}\nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}) - (j-1)D_0^{1313}(e^0_{s13} + ie^0_{s23})/2,\\
&\nu_{1j} = w_j,\ \nu_{2j} = \psi_j, j=1,2; \quad h^3(a) = D^{1313}_{0\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\lambda} + (D_0^{1313}\psi_\lambda)_{\alpha^\lambda};\\
&f_c^j(a) = (f_{c3j-2} + if_{c3j-1})/2, \quad f_\chi^j(a) = (f_{\chi 3j-2} + if_{\chi 3j-1})/2, \quad j=1,2,\\
&f_c^3(a) = f_{c3}(a), \quad f_\chi^3(a) = f_{\chi 3}(a), \quad f_{cj}(a) = -T^{j\lambda}_{\alpha^\lambda}(e_c) + B_{j\lambda}T^{\lambda 3}(\gamma),\\
&f_{c3+j}(a) = -M^{j\lambda}_{\alpha^\lambda}(e_c) + T^{j3}(e_c), \quad j=1,2, \qquad\qquad (3.3)\\
&f_{c3}(a) = -T^{\lambda 3}_{\alpha^\lambda}(e_c) - B_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(e), \quad f_{\chi j}(a) = -T^{j\lambda}_{\alpha^\lambda}(\chi) + B_{j\lambda}T^{\lambda\mu}(\gamma)\omega_\mu,\\
&f_{\chi 3+j}(a) = -M^{j\lambda}_{\alpha^\lambda}(\chi), \quad j=1,2, \quad f_{\chi 3}(a) = -(T^{\lambda\mu}\omega_\mu)_{\alpha^\lambda} - B_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\chi),\\
&F^1 = (R^1 + iR^2)/2, \quad F^2 = (L^1 + iL^2)/2, \quad F^3 = R^3;\\
&e = e_s + e_c, \quad e_s = (e_s^0, e_s^1), \quad e_c = (e_c^0, e_c^1), \quad e_s^k = (e^k_{s11}, e^k_{s12}, e^k_{s13}, e^k_{s22}, e^k_{s23}, e^k_{s33}),\\
&e_c^k = (e^k_{c11}, e^k_{c12}, e^k_{c13}, e^k_{c22}, e^k_{c23}, e^k_{c33}), \quad k=0,1; \quad \chi = (\chi^0_{11}, \chi^0_{12}, \chi^0_{22});
\end{aligned}$$

e^k_{sij}, e^k_{cij}, χ^k_{ij} определены в (2.5).

Отметим, что через e и χ обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации γ, поэтому справедливо представление $\gamma = e + \chi$.

Аналогично, граничные условия (2.2) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&Re[(-i)^j t'\upsilon_k(t)] + 2(-1)^j D^{1212}_{k+\delta-2}\nu_{\delta 3-j\alpha^\lambda} d\alpha^\lambda/ds\\
&\qquad = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k,j=1,2, \qquad (3.4)\\
&D_0^{1313}[(w_{3\alpha^2} + \psi_2)d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1} + \psi_1)d\alpha^2/ds] = \varphi_{c3}(a)(t) + \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\varphi_{cj}(a)(t) = T^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds - T^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds,\\
&\varphi_{c3+j}(a)(t) = M^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds - M^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds,\\
&\varphi_{c3}(a)(t) = T^{13}(e_c)d\alpha^2/ds - T^{23}(e_c)d\alpha^1/ds;\\
&\varphi_{\chi j}(a)(t) = T^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds - T^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds, \qquad\qquad (3.5)\\
&\varphi_{\chi 3+j}(a)(t) = M^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds - M^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds, \quad j=1,2,\\
&\varphi_{\chi 3}(a)(t) = [(T^{11}(\gamma)\omega_1 + T^{12}(\gamma)\omega_2]d\alpha^2/ds - [T^{22}(\gamma)\omega_2 + T^{12}(\gamma)\omega_1]d\alpha^1/ds;\\
&F^{3+j} = -P^j, \quad j=1,2, \quad F^6(s) = P^3(s), \quad F^{6+k} = -N^k, \quad k=1,2;
\end{aligned}$$

усилия T^{jk}, моменты M^{jk} определены в (2.3).

В основе исследования системы уравнений (3.2) при граничных условиях (3.4) лежат интегральные представления для обобщенных перемещений w_j $(j=\overline{1,3})$, ψ_k $(k=1,2)$. Для их вывода введем в рассмотрение уравнения

$$\upsilon_{j\bar z} = \rho^j \quad (j=1,2), \quad D_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \qquad (3.6)$$

где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$, $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ — произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (3.6) представляют собой неоднородные уравнения Коши-Римана. Их общие решения даются формулами [14, с. 29]

$$\begin{aligned}
&\upsilon_j(z) = \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \upsilon_j(\Phi_j;\rho^j)(z),\\
&T\rho^j(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta, \quad j=1,2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

где $\Phi_j(z)$ — произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно [14, с. 39–41, 46], что T — вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и $C^{k+1}_\alpha(\overline{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar z} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta, \tag{3.8}$$

где S — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p > 1$ и $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$.

Представления (3.7) в свою очередь при помощи функций $\upsilon^0_1 = w_2 + iw_1$, $\upsilon^0_2 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши-Римана

$$\upsilon^0_{j\bar z} = i(d_{2j-1}[\upsilon_1] + d_{2j}[\upsilon_2]) \equiv iT_j\upsilon, \quad j = 1, 2, \quad \upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2), \tag{3.9}$$

общие решения которых имеют вид

$$\upsilon^0_j(z) = \Psi_j(z) + iTT_j\upsilon(z) \equiv \upsilon^0_j(\Psi_j; \upsilon)(z), \quad j = 1, 2. \tag{3.10}$$

В (3.9), (3.10) приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
&d_{2j+\lambda-2}[\upsilon_\lambda] = d^1_{2j+\lambda-2}\upsilon_\lambda + (-1)^{j+\lambda} d^2_{2j+\lambda-2}\overline{\upsilon_\lambda}, \quad j, \lambda = 1, 2,\\
&d^j_{3k-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{D^{1111}_{4-2k}}{\delta_0} + (-1)^j \frac{D^{1212}_{4-2k}}{\delta_1}\right),\\
&d^j_2 = d^j_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{D^{1212}_1}{\delta_1} + (-1)^j \frac{D^{1111}_1}{\delta_0}\right), \quad k, j = 1, 2,\\
&\delta_0 = D^{1111}_0 D^{1111}_2 - \left(D^{1111}_1\right)^2, \quad \delta_1 = D^{1212}_0 D^{1212}_2 - \left(D^{1212}_1\right)^2;
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$\Psi_j(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ — произвольные голоморфные функции.

Третье уравнение в (3.6) представим в виде

$$w_{3z\bar z} = \widetilde{\rho}_3/4, \quad \widetilde{\rho}_3 = \rho_3/D^{1313}_0, \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда получим

$$w_3(z) = Re\Psi_3(z) - \widetilde{T}\widetilde{\rho}_3 \equiv w_3(\Psi_3; \rho_3)(z), \quad \widetilde{T}\widetilde{\rho}_3 = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} \widetilde{\rho}_3(\zeta) \ln\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\xi\, d\eta, \tag{3.12}$$

где $\Psi_3(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ — произвольная голоморфная функция.

Соотношения (3.10), (3.12) представляют собой искомые интегральные представления для обобщённых перемещений. Для их частных производных первого и второго порядков при помощи формул (3.7)–(3.12) и (8.20) из [14, с. 58] получаем представления

$$\begin{aligned}
&\nu_{jk\alpha^k} = Im[\upsilon^0_{j\bar z} - (-1)^k \upsilon^0_{jz}], \quad \nu_{jk\alpha^n} = Re[\upsilon^0_{jz} + (-1)^k \upsilon^0_{j\bar z}],\ k \neq n,\ j, k, n = 1, 2;\\
&\upsilon^0_{jz} = \Psi'_j(z) + iST_j\upsilon(z), \quad \upsilon^0_{j\bar z} = iT_j\upsilon, \quad w_{3\alpha^j} = 2Re\left(i^{j-1} w_{3z}\right),\ j = 1, 2,\\
&w_{3z} = \Psi'_3(z)/2 + T\widetilde{\rho}_3(z)/4; \quad \nu_{kn\alpha^j\alpha^j} = -Re\{i^n[\upsilon^0_{kz\bar z} + (-1)^j(\upsilon^0_{kzz} + \upsilon^0_{k\bar z\bar z})]\},\\
&\nu_{kn\alpha^1\alpha^2} = Re\{i^{n-1}(\upsilon^0_{kzz} - \upsilon^0_{k\bar z\bar z})\}, \quad w_{3\alpha^j\alpha^j} = 2[w_{3z\bar z} + (-1)^{j-1} Rew_{3zz}],\ k, n, j = 1, 2,\\
&w_{3\alpha^1\alpha^2} = -2Imw_{3zz}; \quad \upsilon^0_{kz\bar z} = T_{k1}\upsilon + S_{k1}(\Phi'_0; \rho_0), \quad \upsilon^0_{k\bar z\bar z} = T_{k2}\upsilon + S_{k2}(\Phi'_0; \rho_0),\\
&\upsilon^0_{kzz} = \Psi''_k(z) + S\upsilon^0_{k\zeta\bar\zeta}(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{T_k\upsilon(\tau)}{(\tau - z)^2} d\overline{\tau},\ k = 1, 2, \quad \Phi'_0 = (\Phi'_1, \Phi'_2),\ \rho_0 = (\rho^1, \rho^2),\\
&w_{3zz} = \Psi''_3(z)/2 + S\widetilde{\rho}_3/4, \quad w_{3z\bar z} = \widetilde{\rho}_3/4, \quad T_{jk}\upsilon = i[d^1_{2j+\mu-2,k}\upsilon_\mu + (-1)^{j+\mu} d^2_{2j+\mu-2,k}\overline{\upsilon_\mu}],\\
&S_{jk}(\Phi'_0; \rho_0) = i[d^1_{2j+\mu-2}\upsilon_{\mu,k} + (-1)^{j+\mu} d^2_{2j+\mu-2}\overline{\upsilon_{\mu,3-k}}], \quad \upsilon_{j,1} \equiv \upsilon_{jz} = \Phi'_j(z) + S\rho^j(z),\\
&\upsilon_{j,2} \equiv \upsilon_{j\bar z} = \rho^j, \quad d^j_{m,1} \equiv d^j_{mz}, \quad d^j_{m,2} \equiv d^j_{m\bar z},\ j, k = 1, 2,\ m = \overline{1, 4}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

4. Решение задачи (1), (2)

Интегральные представления (3.10), (3.12) для обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ $(j = 1, 2)$, $\Psi_k(z)$ $(k = \overline{1,3})$ и произвольные функции $\rho^j(z)$ $(j = \overline{1,3})$. Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (3.2) и граничным условиям (3.4), при этом правые части уравнений (3.2) и граничных условий (3.4) временно считаем известными. С этой целью соотношения (3.10), (3.12), (3.13) подставим в левые части системы (3.2) и граничных условий (3.4). В результате система уравнений (3.2) запишется в виде

$$\rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\Phi)(z) = f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) - F^j(z), \quad j = \overline{1,3}, \quad z \in \Omega, \tag{4.1}$$

где через $h_1^j(\rho)(z)$ и $h_2^j(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$ в (3.3), которые содержат функции $\rho = (\rho^1, \rho^2, \rho^3)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (3.4) с учетом представлений

$$\begin{aligned}
&S(T_j\Phi_0)^+(t) = -(\overline{t}')^2[d_{2j-1}^1(t)\Phi_1(t) + d_{2j}^1(t)\Phi_2(t)] + K_{0j}(\Phi_0)(t), \quad \Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2),\\
&K_{0j}(\Phi_0)(t) = -\frac{d_{2j+\mu-2}^1(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\tau - t}\Phi_\mu(\tau)d\tau - (-1)^{j+\mu}\frac{d_{2j+\mu-2}^2(t)}{2\pi i}\\
&\quad\cdot\int\limits_\Gamma \frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{\Phi_\mu(\tau)}d\overline{\tau} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{d_{2j+\mu-2}^1(\zeta) - d_{2j+\mu-2}^1(t)}{(\zeta - t)^2}\Phi_\mu(\zeta)d\xi d\eta\\
&\quad - \frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{d_{2j+\mu-2}^2(\zeta) - d_{2j+\mu-2}^2(t)}{(\zeta - t)^2}\overline{\Phi_\mu(\zeta)}d\xi d\eta, \quad j = 1, 2,\\
&\psi(\tau,t) = (\overline{\tau} - \overline{t})/(\tau - t), \quad \psi(t,t) = (\overline{t}')^2,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

получаемых при помощи соотношений (3.7)–(3.9), формул (4.7), (4.9) из [14, с. 28] и формул Сохоцкого [15, с. 66], преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
&(-1)^j d_{k\lambda}(t)Re[i^j t'\Phi_\lambda(t)] - 2D_{\lambda+k-2}^{1212}(t)Re[i^{j-1}t'\Psi_\lambda'(t)] - 2D_{\lambda+k-2}^{1212}(t)Re[i^j t' K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)]\\
&\qquad + H_{3(k-1)+j}\rho(t) = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2,\\
&D_0^{1313}(t)Re[it'\Psi_3'(t)] + K_{03}(\Phi)(t) + H_3\rho(t) = \varphi_{c3}(a)(t) + \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&H_{3(k-1)+j}\rho(t) = Re[(-i)^j t' T\rho^k(t)] - 2D_{k+\lambda-2}^{1212}(t)Re\{i^j t'(I+S)(T_\lambda T\rho_0)^+(t)\},\\
&k, j = 1, 2, \quad H_3\rho(t) = D_0^{1313}(t)Re[it'(T\widetilde{\rho}_3(t)/2 + TT_2T\rho_0(t))],\\
&K_{03}(\Phi)(t) = D_0^{1313}(t)Re\{t'[\Psi_2(t) + iTT_2\Phi_0(t)]\};\\
&d_{kj}(t) = (-1)^{j-1}[2(-1)^\lambda D_{\lambda+k-2}^{1212}(t)d_{2\lambda+j-2}^2(t) + 3 - k - j], \quad k, j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

I — тождественный оператор, операторы T, S, T_λ и функции $d_j^k(t)$ определены в (3.7), (3.8), (3.9), (3.11) соответственно; $\Phi_\lambda(t) \equiv \Phi_\lambda^+(t)$, $t \in \Gamma$; символ $\Phi_\lambda^+(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Phi_\lambda(z)$ при $z \to t \in \Gamma$ изнутри области Ω.

Таким образом, для определения функций $\rho^j \in L_p(\Omega)$ $(j = \overline{1,3})$, $\Phi_k(z) \in C_\alpha(\overline{\Omega})$ $(k = 1, 2)$, $\Psi_j(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ $(j = \overline{1,3})$ получили систему уравнений (4.1), (4.3). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями:

$$\begin{aligned} &\Phi_k(z) = \Theta(\mu_{2k})(z) \equiv \Phi_k(\mu_{2k})(z), \quad k = 1, 2, \\ &\Psi'_j(z) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta(\mu_{2j-1})(z) \equiv \Psi'_j(\mu_{2j-1})(z), \quad j = \overline{1,3}, \\ &\Theta(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau - z)}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $\mu_j(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ $(j = \overline{1,5})$ — произвольные действительные функции, $\tau' = d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой Γ.

Для функций $\Psi_j(z)$ $(j = \overline{1,3})$ имеем представления:

$$\begin{aligned} &\Psi_j(z) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta^0(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j} \equiv \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j}, \quad j = \overline{1,3}, \\ &\Theta^0(f)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau'}\, ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где c_j $(j = \overline{1,6})$ — произвольные действительные постоянные, под $ln(1 - z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

Используя формулы Сохоцкого [15, с. 66], находим $\Phi_k(t)$ $(k = 1, 2)$, $\Psi'_j(t)$ $(j = \overline{1,3})$, $t \in \Gamma$. Подставляя их выражения, а также представления (4.6) в систему (4.1), (4.3), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho \in L_p(\Omega)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) \in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} &\rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\mu)(z) = f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) + g_c^j(z) - F^j(z),\ z \in \Omega,\ j = \overline{1,3}, \\ &\sum_{n=1}^5 \left[a_{jn}(t)\mu_n(t) + b_{jn}(t)\int\limits_\Gamma \frac{\mu_n(\tau)}{\tau - t}\, d\tau\right] + K_j\,\mu(t) + H_j\rho(t) \\ &\qquad = \varphi_{cj}(a)(t) + \varphi_{\chi j}(a)(t) + g_c^{3+j}(t) - F^{3+j}(t), \quad t \in \Gamma, \quad j = \overline{1,5}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

в которой приняты обозначения:

$$\begin{aligned} &K_{3(n-1)+j}\mu(t) = (-1)^j d_{n\lambda}(t)\{Re[i^j t'\Theta(\mu_{2\lambda})(t)] - iRe(i^{j-1})\Theta(\tau'\mu_{2\lambda})(t)\} \\ &\ + 2D^{1212}_{\lambda+n-2}(t)\{Re[i^{j+1}t'\Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)] - iRe(i^j)\Theta(\tau'\mu_{2\lambda-1})(t) - Re[i^j t' K_{0\lambda}(\mu_0)(t)]\}, \\ &n, j = 1, 2, \quad K_3\mu(t) = K_{03}(\mu)(t) - D_0^{1313}(t)Re[t'\Theta(\mu_5)(t)]; \\ &g_c^2(z) = D_0^{1313}(c_4 + ic_3)/2, \quad g_c^3(z) = -c_4 D^{1313}_{0\alpha^1} - c_3 D^{1313}_{0\alpha^2}, \\ &g_c^6(t) = D_0^{1313}(t)(c_4 d\alpha^2/ds - c_3 d\alpha^1/ds), \quad g_c^1(z) = g_c^{3+j}(t) \equiv 0, \quad j = 1, 2, 4, 5; \\ &a_{3(k-1)+j\ 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t)Re(i^j)/2, \quad b_{3(k-1)+j\ 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t)Re(i^{j-1})/(2\pi), \\ &a_{3(k-1)+j\ 2\lambda-1}(t) = -D^{1212}_{\lambda+k-2}(t)Re(i^{j-1}), \quad b_{3(k-1)+j\ 2\lambda-1}(t) = D^{1212}_{\lambda+k-2}(t)Re(i^j)/\pi, \\ &k, j, \lambda = 1, 2, \quad a_{35}(t) = -D_0^{1313}(t)/2; \end{aligned} \tag{4.8}$$

остальные a_{jk}, b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z) \equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_0)(t) \equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$, $j = 1, 2$; $K_{03}(\mu)(t) \equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu) = (\Phi_1(\mu_2), \Phi_2(\mu_4), \Psi_1(\mu_1), \Psi_2(\mu_3), \Psi_3(\mu_5))$, $\mu_0 = (\mu_2, \mu_4)$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:*

1) $h_1^j(\rho)$ $(j = \overline{1,3})$ — линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$;

2) $h_2^j(\mu)$ $(j = \overline{1,3})$ — линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ $\forall\nu \in (0,1)$ в $L_p(\Omega)$;

3) $K_j\,\mu$ $(j = \overline{1,5})$ — линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ $\forall\nu \in (0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall\gamma < \beta/2$;

4) $H_j\,\rho$ $(j=\overline{1,5})$ — линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_{\alpha'}(\Gamma)$ $\forall\,\alpha'<\alpha$ и ограниченные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\Gamma)$;

5) имеют место включения $f_c^j(a)(z), f_\chi^j(a)(z), F^j(z), g_c^j(z)\in L_p(\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$; $\varphi_{cj}(a)(t)$, $\varphi_{\chi j}(a)(t)\in C_\alpha(\Gamma)$, $F^{3+j}(t), g_c^6(t), a_{jk}(t), b_{jk}(t)\in C_\beta(\Gamma)$, $j,k=\overline{1,5}$.

Доказательство. Известно [14, с. 26-27], что интеграл типа Коши $\theta(f)$ в (4.5) представляет собой ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, а его производная $\theta'(f)$ — ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_q(\Omega)$, $1<q<2/(1-\alpha)$. Кроме того, нетрудно показать, что $\theta(f)$ — вполне непрерывный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ $\forall p>1$ и в $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$ $\forall\alpha'<\alpha$. Учитывая это, а также свойства операторов T,S, определенных в (3.7), (3.8), используя представления для производных первого порядка обобщенных перемещений в (3.13) и выражения для операторов $h^j(a)$ в (3.3), получаем, что первые два утверждения леммы справедливы.

Так как $\psi(\tau,t)\in C_\beta(\Gamma)\times C_\beta(\Gamma)$ [15, с. 28–32], $d_{k\lambda}(t)\in C_\beta(\Gamma)$, $d_j^k(z), D_0^{1313}(z)\in C_\beta(\overline{\Omega})$, то принимая во внимание следствие 4.3 из [16, с. 124], легко убеждаемся в том, что первые два слагаемых правой части представления для оператора $K_{0j}(\mu_0)$ в (4.2) суть вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ $\forall\nu\in(0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall\gamma<\beta$. Также нетрудно показать, что третье и четвертое слагаемые этого представления в (4.2) суть вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ $\forall\nu\in(0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall\gamma<\beta$. Тогда получаем, что $K_{oj}(\mu_0)$ $(j=1,2)$ — линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ $\forall\nu\in(0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall\gamma<\beta$. Аналогично из представления оператора $K_{03}(\mu)$ в (4.4) следует, что $K_{03}(\mu)$ — линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\beta(\Gamma)$ для всех $\nu\in(0,1)$.

Далее, первые два слагаемых в правой части формулы для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (4.8) преобразуем к виду

$$\frac{(-i)^j}{2}d_{n\lambda}(t)\left\{\frac{(-1)^j-1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'}\frac{\tau'-t'}{\tau-t}d\tau+\frac{(-1)^j}{\pi}\int\limits_\Gamma\frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'}Im\left(\frac{t'}{\tau-t}\right)d\tau\right\}.$$

Следовательно, с учетом включений $\tau', d_{n\lambda}\in C_\beta(\Gamma)$ и равенства

$$Im[t'/(\tau-t)]=k_*(\tau,t)/|\tau-t|^{1-\beta/2},$$

где $k_*(\tau,t)\in C_{\beta/2}(\Gamma)\times C_{\beta/2}(\Gamma)$ [15, с. 31–32, 55–56], а также следствий 4.4, 4.5 из [16, с. 125] получаем, что первые два слагаемых в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (4.8) определяют линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ для любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta/2$. Аналогично показываем, что третье и четвертое слагаемые в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (4.8) обладают этим же свойством. Тогда из представлений операторов $K_j\mu$ $(j=\overline{1,5})$ в (4.8) вытекает справедливость третьего утверждения леммы. Справедливость четвертого ее утверждения следует из представлений операторов $H_j\rho$ $(j=\overline{1,5})$ в (4.4) с учетом свойств операторов T,S, интеграла типа Коши и соотношений

$$S(T_\lambda T\rho_0)^+(t)=T\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}T_\lambda T\rho_0\right)(t)-\frac{1}{2}(\overline{t}')^2T_\lambda T\rho_0(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{T_\lambda T\rho_0(\tau)}{\tau-t}d\overline{\tau},\quad \lambda=1,2,$$

которые получаются с использованием формул (8.20) из [14, с. 58] и Сохоцкого. Справедливость пятого утверждения леммы непосредственно вытекает из формул (3.3), (3.5), (4.8). Лемма доказана. □

Исследуем разрешимость системы уравнений (4.7) в пространстве $L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha'<\alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho,\mu)\in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (4.7) в силу леммы 4.1 принадлежит пространству $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ из (4.8), вычисляем определитель

$$det[A(t)-\pi iB(t)]=D_0^{1313}\delta_1(a_1^2-a_0a_2)/(32\delta_0),\quad a_n=D_n^{1111}+D_n^{1122},\quad n=0,1,2,$$

где δ_0, δ_1 определены в (3.11), а $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ — квадратные матрицы пятого порядка. Итак, $det[A(t) - \pi i B(t)] \neq 0$ на Γ и для индекса системы (4.7) получаем

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\left[arg\frac{det(A-\pi iB)}{det(A+\pi iB)}\right]_\Gamma = 0$$

(здесь символ $[arg\varphi]_\Gamma$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (4.7) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho,\mu) \in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ — решение системы (4.7) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (4.5), (4.6) с постоянными $c_j = 0$ $(j = \overline{1,6})$ соответствуют голоморфные функции $\Phi_k(z)$, $\Psi_j(z)$, которые в свою очередь по формулам (3.10), (3.12) определяют функции w_j $(j = \overline{1,3})$, ψ_k $(k = 1,2)$. Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (3.2) $(f_c^j + f_\chi^j - F^j \equiv 0$, $j = \overline{1,3})$ и однородным линейным граничным условиям (3.4) $(\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} - F^{3+j} \equiv 0, j = \overline{1,5})$. Действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (3.2) умножим соответственно на w_1 и w_2, второго уравнения — соответственно на ψ_1 и ψ_2, а третье уравнение — на w_3. После этого проинтегрируем по области Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий (3.4) получаем, что w_j $(j = \overline{1,3})$, ψ_k $(k = 1,2)$ удовлетворяют системе $\nu_{j1\alpha^1} = 0$, $\nu_{j2\alpha^2} = 0$, $\nu_{j1\alpha^2} + \nu_{j2\alpha^1} = 0$, $w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0$, $j = 1,2$, решение которой имеет вид

$$w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad w_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad w_3 = -c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6, \quad \psi_1 = c_4, \quad \psi_2 = c_5, \qquad (4.9)$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Так как $\Psi_j(0) = 0$ $(j = \overline{1,3})$, $w_3(0) = 0$, то из (4.9) будем иметь: $w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1$, $w_2 = c_0\alpha^1 + c_2$, $w_3 = \psi_1 = \psi_2 \equiv 0$. Тогда $\upsilon_j(z) = 2ic_0D^{1212}_{j-1}$, $j = 1,2$ и из уравнений (3.6) следуют равенства

$$\rho^j(z) = 2ic_0D^{1212}_{j-1\bar{z}}, \quad j = 1,2, \quad \rho^3(z) \equiv 0, \quad z \in \Omega. \qquad (4.10)$$

Используя формулы (3.7), (3.10), (3.12) и представление для υ^0_{jz} в (3.13), находим $\Phi_k(z)$ $(k = 1,2)$, $\Psi'_j(z)$ $(j = \overline{1,3})$ и подставляя их в (4.5), получаем

$$\mu_1(t)/t' - c_0(\overline{t}')^2 = F_1^-(t), \quad \mu_{2j}(t)/t' - 2ic_0D^{1212}_{j-1}(t) = F^-_{2j}(t), \quad j = 1,2,$$
$$\mu_{2j-1}(t)/t' = F^-_{2j-1}(t), \quad j = 2,3,$$

где $F_j^-(t)$ — граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана-Гильберта с краевым условием $Re[it'\,F_j^-(t)] = f_j^-(t)$, $j = \overline{1,5}$, где $f_1^-(t) = c_0Re(it')$, $f^-_{2j}(t) = 2c_0D^{1212}_{j-1}(t)Ret'$, $j = 1,2$, $f^-_{2j-1}(t) = 0$, $j = 2,3$. Используя решение этой задачи [17, с. 253], для функций $\mu_j(t)$ получаем представления

$$\mu_j(t) = c_0\mu_j^0(t) + \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 1,2,4, \quad \mu_j(t) = \beta_{0j}\mu^1_j(t), \quad j = 3,5, \qquad (4.11)$$

где $\mu_j^k(t)$ — известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$; c_0, β_{0j} — произвольные действительные постоянные.

Решения (4.10), (4.11) показывают, что однородная система уравнений (4.7) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (4.1) умножим соответственно на действительные функции $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$ и проинтегрируем по области Ω, а левые части уравнений в (4.3) умножим на действительные функции $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5 \in C_\alpha(\Gamma)$, проинтегрируем по кривой Γ. После этого их сложим и приравняем нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi'_k(z)$ их выражениями из (4.5), (4.6) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, при помощи традиционных рассуждений после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\overline{v^j(z)} - T_{3+j}v(z) + 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0,\ j = 1,2, \quad ReT_3v(z) = 0,\ z \in \Omega,\\
&Re\{i[T_{3+j}v(t) - 2\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)]\} = 0,\ j = 1,2, \quad Re[Tg(v)(t) + \Theta^-(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(t)] = 0,\\
&Re\{T[D^{1212}_{\lambda+j-2\bar\zeta}v^\lambda](t) - 2\Theta^-(\tau' D^{1212}_{\lambda+j-2}\nu^\lambda)(t)\\
&\qquad + (j-1)[iT^0g(v)(t) - T^0_\Gamma(D_0^{1313}\tau'\nu_3)(t)]\} = 0,\ t \in \Gamma,\ j = 1,2;\\
&v^j = v_{3j-2} + iv_{3j-1}, \quad \nu^j = \nu_{3j-2} + i\nu_{3j-1},\ j = 1,2,\ v^3 = v_3,\ \nu^3 = \nu_3.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

В уравнениях (4.12) приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
&T_3v(z) = -2Tg(v)(z) + 2D_0^{1313}(z)v_3(z) - 2\Theta(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(z),\\
&T_{3+j}v(z) = 2Td_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + Td_{2+j}[T_3v](z), \quad v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5),\\
&S_jv(z) = S[D^{1212}_{j+\lambda-2\bar\zeta}v^\lambda](z) - D^{1212}_{j+\lambda-2z}v^\lambda(z) - 2\Theta'(\tau' D^{1212}_{j+\lambda-2}\nu^\lambda)(z), \quad j = 1,2,\\
&g(v)(z) = D^{1313}_{0\bar z}(z)v_3(z) - D_0^{1313}(z)v^2(z)/4,\\
&T^0f(z) = -\frac{1}{\pi i}\iint\limits_\Omega f(\zeta)ln\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)d\xi d\eta,\\
&T^0_\Gamma f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\tau)ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right)d\sigma, \quad \Theta'(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau'(\tau - z)^2};
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$\Theta^-(f)(t)$ — граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при $z \to t \in \Gamma$ извне Ω; операторы Tf, Sf, $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены в (3.7), (3.8), (3.11), (4.5) соответственно.

Система (4.12), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (4.12) под $v \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, $\nu \in C_\alpha(\Gamma)$ будем подразумевать некоторое её решение.

Заметим, что операторы T, T^0, T^0_Γ, введенные в (3.7), (4.13), определяют функции $Tf(z)$, $T^0f(z)$, T^0_Γ, $f(z)$, которые голоморфны во внешности области Ω и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладает и функция $\theta(f)(z)$. Поэтому последние пять равенств на кривой Γ в (4.12) представляют собой краевые условия задачи Римана-Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне Ω и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Следовательно, эти пять равенств на кривой Γ преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
&T_{3+j}v(z) - 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j = 1,2, \quad Tg(v)(z) + \Theta(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(z) = 0,\\
&T[D^{1212}_{\lambda+j-2\bar\zeta}v^\lambda](z) - 2\Theta(\tau' D^{1212}_{\lambda+j-2}\nu^\lambda)(z) + (j-1)[iT^0g(v)(z) - T^0_\Gamma(D_0^{1313}\tau'\nu_3)(z)] = 0,\\
&j = 1,2, \quad z \in \Omega_1 \equiv \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость.

Из первых трех равенств в (4.12) следует, что функции v_j $(j = \overline{1,5})$ принадлежат пространству $W^{(1)}_{q_1}(\Omega) \cap C_\alpha(\overline{\Omega})$, $1 < q_1 < 2/(1-\alpha)$. В них перейдем к пределу при $z \to t \in \Gamma$ изнутри области Ω, а в первых трех равенствах в (4.14) — извне области Ω и последние прибавим к первым трем соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций вида $Tf(z)$ при $f \in L_p(\Omega)$ на $\mathbb{C}$ и используя формулы Сохоцкого, получаем

$$v^j(t) = -2\nu^j(t), \quad j = 1,2, \quad v_3(t) = \nu_3(t), \quad t \in \Gamma. \tag{4.15}$$

Продифференцируем первые два равенства в (4.12) по $\overline{z}$. С учетом (3.8) получим равенства

$$\overline{v^j}_{\overline{z}} = 2d_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + d_{2+j}[T_3 v](z), \quad j=1,2, \quad z\in\Omega,$$

откуда, рассматривая их как систему относительно $X_1 = 2S_1 v$, $X_2 = 2S_2 v + T_3 v$ и решая ее, будем иметь:

$$X_j = (D^{1111}_{j+\lambda-2} - D^{1212}_{j+\lambda-2})\overline{v^\lambda_z} + (D^{1111}_{j+\lambda-2} + D^{1212}_{j+\lambda-2})v^\lambda_z, \quad j=1,2, \quad z\in\Omega. \tag{4.16}$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D^{1212}_j (j=0,1,2), \quad D^{1313}_0 \in W^{(2)}_p(\Omega). \tag{4.17}$$

Используя соотношения для функций $T_3 v(z)$, $S_j v(z)$ $(j=1,2)$ в (4.13), находим $X_{j\overline{z}}$ $(j=1,2)$, которые, как нетрудно видеть, принадлежат пространству $L_{q_1}(\Omega)$, $1<q_1<2/(1-\alpha)$. Теперь эти выражения $X_{j\overline{z}}$ $(j=1,2)$ подставим в левые части соотношений, полученных дифференцированием по $\overline{z}$ равенств (4.16). Третье равенство в (4.12) дифференцируем по z и $\overline{z}$. При помощи несложных преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция $\widetilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ является решением системы линейных уравнений (3.2) при нулевой правой части.

Далее, от решения (v,ν) союзной системы уравнений (4.12) потребуем, чтобы $\nu(t)\in C^1_\alpha(\Gamma)$. Тогда, как нетрудно видеть, $v(z)\in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$. Теперь в равенствах (4.16) переходим к пределу при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω, при этом левую часть $X^+_j(t)$ заменим выражением, полученным с использованием представлений $(S_j v)(z)$, $T_3 v(z)$ в (4.13). Затем из них вычитаем соответственно равенства, которые получаются дифференцированием по z последних двух соотношений в (4.14) с последующим переходом в них к пределу при $z\to t\in\Gamma$ извне Ω. Далее, третьи равенства в (4.12) и (4.14) продифференцируем по z, в получившихся равенствах перейдем к пределу при $z\to t\in\Gamma$ соответственно изнутри и извне области Ω и затем вычтем их друг из друга. При помощи полученных таким образом равенств на кривой Γ, используя соотношения (4.15), формулы

$$(Sf)^+(t) - (Sf)^-(t) = -f(t)\cdot(\overline{t}')^2, \quad \theta'^+(\tau' f)(t) - \theta'^-(\tau' f)(t) = f_t + f_{\overline{t}}\cdot(\overline{t}')^2, \quad t\in\Gamma,$$

в которых операторы Sf, $\Theta'(f)$ определены в (3.8), (4.13), и считая $t=0\in\Gamma$, что не ограничивает общности наших рассуждений, после несложных преобразований приходим к тому, что функции $v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5$ удовлетворяют также и однородным линейным граничным условиям в (3.4). Таким образом, вектор $\widetilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ является решением однородной системы линейных уравнений в (3.2), удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям в (3.4). Следовательно, в соответствии с (4.9) для компонент вектора $\widetilde{v}$ получим следующие представления:

$$v_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad v_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad v_3 = (-c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6)/2, \quad v_4 = c_4, \quad v_5 = c_5,$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и v_k связаны друг с другом формулами (4.15). Следовательно, решение $(v,\nu)^T$, $v=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)$ союзной системы (4.12) можно представить в виде $(v,\nu)^T = c_0\gamma_1 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_3 + c_4\gamma_4 + c_5\gamma_5 + c_6\gamma_6$, где $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, ..., \gamma_{k10})$ $(k=\overline{1,6})$ — линейно независимые решения системы (4.12). Тогда для разрешимости системы (4.7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\iint\limits_\Omega \big\{Re\,\big[(f^1_c + f^1_\chi + g^1_c - F^1)(z)(\gamma_{k1} - i\gamma_{k2})(z)$$
$$+(f^2_c + f^2_\chi + g^2_c - F^2)(z)(\gamma_{k4} - i\gamma_{k5})(z)\big] + (f^3_c + f^3_\chi + g^3_c - F^3)(z)\gamma_{k3}(z)\big\}\, d\alpha^1 d\alpha^2$$

$$+\sum_{j=1}^{5}\int\limits_{\Gamma}(\varphi_{cj}+\varphi_{\chi j}+g_c^{3+j}-F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t)ds=0,\quad k=\overline{1,6},$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\begin{gathered}
\iint\limits_{\Omega}R^j d\alpha^1 d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}P^j ds-\iint\limits_{\Omega}B_{j\lambda}[T^{\lambda 3}(\gamma)+T^{\lambda\mu}(\gamma)\omega_\mu]d\alpha^1 d\alpha^2=0,\quad j=1,2,\\
\iint\limits_{\Omega}(R^1\alpha^2-R^2\alpha^1)d\alpha^1 d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}(P^1\alpha^2-P^2\alpha^1)ds\\
+\iint\limits_{\Omega}(\alpha^1 B_{2\lambda}-\alpha^2 B_{1\lambda})[T^{\lambda\mu}(\gamma)\omega_\mu+T^{\lambda 3}(\gamma)]d\alpha^1 d\alpha^2=0,\\
\iint\limits_{\Omega}(\alpha^j R^3-L^j)d\alpha^1 d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}(\alpha^j P^3-N^j)ds+\iint\limits_{\Omega}\alpha^j B_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\gamma)d\alpha^1 d\alpha^2\\
-\iint\limits_{\Omega}T^{j\mu}(\gamma)\omega_\mu d\alpha^1 d\alpha^2=0,\quad j=1,2,\\
\iint\limits_{\Omega}R^3 d\alpha^1 d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}P^3 ds+\iint\limits_{\Omega}B_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\gamma)d\alpha^1 d\alpha^2=0,
\end{gathered}\tag{4.18}$$

где R^j, P^j $(j=\overline{1,3})$, L^k, N^k $(k=1,2)$ — компоненты внешних сил, γ — произвольно фиксированный вектор деформации, ω_μ — произвольно фиксированная функция.

При выполнении условий (4.18) общее решение системы (4.7) можно представить в виде

$$\begin{gathered}
(\rho,\mu)=(\rho_c,\mu_c)(a)+(\rho_\chi,\mu_\chi)(a)+(\rho_*,\mu_*)+(\rho_F,\mu_F),\quad (\rho_c,\mu_c)(a)=\mathfrak{R}f_c(a),\\
(\rho_\chi,\mu_\chi)(a)=\mathfrak{R}f_\chi(a),\quad (\rho_*,\mu_*)=\mathfrak{R}g_c+(\widetilde{\rho},\widetilde{\mu}),\quad (\rho_F,\mu_F)=-\mathfrak{R}F,
\end{gathered}\tag{4.19}$$

где

$$f_c(a)=(f_c^1,f_c^2,f_c^3,\varphi_{c1},...,\varphi_{c5}),\quad f_\chi(a)=(f_\chi^1,f_\chi^2,f_\chi^3,\varphi_{\chi 1},...,\varphi_{\chi 5}),\quad g_c=(g_c^1,...,g_c^8),$$
$$F=(F^1,...,F^8);\quad \mathfrak{R}=(\mathfrak{R}_1,...,\mathfrak{R}_8);$$

$\mathfrak{R}_j(j=\overline{1,3})$ и $\mathfrak{R}_k(k=\overline{4,8})$ — линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; функции $\widetilde{\rho}=(\widetilde{\rho}_1,\widetilde{\rho}_2,\widetilde{\rho}_3)$, $\widetilde{\mu}=(\widetilde{\mu}_1,...,\widetilde{\mu}_5)$ определены формулами (4.10), (4.11), а f_c^j, f_χ^j, φ_{ck}, $\varphi_{\chi k}$, g_c^n, F^n — формулами в (3.3), (3.5), (4.8).

Если выражение для вектор-функции $\mu(t)$ из (4.19) подставить в соотношения (4.5), (4.6), то для голоморфной вектор-функции $\Phi(z)=(\Phi_0,\Psi)$, $\Phi_0=(\Phi_1,\Phi_2)$, $\Psi=(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ получим представление

$$\Phi(z)=\Phi_c(a)(z)+\Phi_\chi(a)(z)+\Phi_*(z)+\Phi_F(z),\quad z\in\Omega,\tag{4.20}$$

где

$$\begin{gathered}
\Phi_c(a)(z)=\Phi(\mu_c(a))(z),\quad \Phi_\chi(a)(z)=\Phi(\mu_\chi(a))(z),\quad \Phi_F(z)=\Phi(\mu_F)(z),\\
\Phi_*(z)=\Phi(\mathfrak{R}g_c)(z)+\widetilde{\Phi}(z),\quad \widetilde{\Phi}(z)=(c_0\beta_0(z),c_0\beta_1(z),c_0\gamma_0(z)+c_1+ic_2,0,0),\\
\beta_j(z)=2i\Theta(t'D_j^{1212})(z),\quad j=0,1,\quad \gamma_0(z)=\Theta(t'\overline{t})(z);
\end{gathered}$$

функция $\Theta(f)(z)$ определена в (4.5), c_j — произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения $\rho(z)$ из (4.19) и голоморфных функций из (4.20) подставим в (3.10), (3.12). Тогда задача (1), (2) сведется к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$, которую представим в виде

$$\begin{aligned} \upsilon_j^0(z) &= \upsilon_{jc}^0(a) + \upsilon_{j\chi}^0(a) + \upsilon_{j*}^0(z) + \upsilon_{jF}^0(z), \quad j = 1,2, \\ w_3(z) &= w_{3c}(a) + w_{3\chi}(a) + w_{3*}(z) + w_{3F}(z), \quad z \in \Omega, \end{aligned} \tag{4.21}$$

где $\upsilon_{jc}^0(a) = \upsilon_j^0(\Psi_{jc}(a); \upsilon_{jc}(a))$, $\upsilon_c(a) = (\upsilon_{1c}, \upsilon_{2c})$, $\upsilon_{jc}(a) = \upsilon_j(\Phi_{jc}(a); \rho_c^j(a))$, $j = 1,2$, $w_{3c}(a) = w_3(\Psi_{3c}(a); \rho_c^3(a))$; остальные слагаемые в (4.21) определяются аналогично; операторы $\upsilon_j(\Phi_j; \rho^j)$, $\upsilon_j^0(\Psi_j; \upsilon_j)$ и $w_3(\Psi_3; \rho^3)$ определены в (3.7), (3.10), (3.12) соответственно.

Отметим, что функции $\upsilon_{j*}^0(z)$, $w_{3*}(z)$ и $\upsilon_{jF}^0(z)$, $w_{3F}(z)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций $\upsilon_{1*}^0(z) = w_{2*} + iw_{1*}$, $\upsilon_{2*}^0(z) = \psi_{2*} + i\psi_{1*}$, $w_{3*}(z)$ имеют место представления (4.9).

Исследуем разрешимость системы (4.21) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда*

1) $\upsilon_{jc}^0(a)$ $(j = 1,2)$, $w_{3c}(a)$ *— линейные вполне непрерывные операторы в* $W_p^{(2)}(\Omega)$*;*

2) $\upsilon_{j\chi}^0(a)$ $(j = 1,2)$, $w_{3\chi}(a)$ *— нелинейные ограниченные операторы в* $W_p^{(2)}(\Omega)$*, причем для любых* $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j = 1,2)$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|\upsilon_{j\chi}^0(a^1) - \upsilon_{j\chi}^0(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \ \|w_{3\chi}(a^1) - w_{3\chi}(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant c \Big(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \\ + \|w^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} \Big) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

где $\|w^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} = \|w_1^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_2^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}$, $j = 1,2$, c *— известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;*

3) $\upsilon_{j*}^0(z), \upsilon_{jF}^0(z) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1,2$.

Доказательство. Из представлений для $f_c^j(a)$, $f_\chi^j(a)$ в (3.3), $\varphi_{cj}(a)$, $\varphi_{\chi j}(a)$ в (3.5) следует, что $f_c^j(a)$ и $\varphi_{cj}(a)$ — линейные вполне непрерывные, а $f_\chi^j(a)$ и $\varphi_{\chi j}(a)$ — нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; для $f_\chi^3(a)$, $\varphi_{\chi 3}(a)$ справедливы оценки вида (4.22), а для $f_\chi^j(a)$, $\varphi_{\chi j}(a)$ $(j = 1,2)$ — оценки вида

$$\begin{aligned} \|f_\chi^j(a^1) - f_\chi^j(a^2)\|_{L_p(\Omega)}, \quad \|\varphi_{\chi j}(a^1) - \varphi_{\chi j}(a^2)\|_{C_\alpha(\Gamma)} \leqslant c \Big(\|w^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \\ + \|w^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \Big) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad j = 1,2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Тогда из (4.19) с учетом ограниченности операторов $\mathfrak{R}_j$ получим, что $\rho_c^j(a)$ и $\mu_{kc}(a)$ — линейные вполне непрерывные, а $\rho_\chi^j(a)$ и $\mu_{k\chi}(a)$ — нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно и для $\rho_\chi^j(a)$, $\mu_{k\chi}(a)$ справедливы оценки (4.22). Следовательно, с учетом свойств интеграла типа Коши из (4.20) будем иметь,что: $\Phi_{kc}(a)$, $\Psi'_{jc}(a)$ — линейные вполне непрерывные, $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ — нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, причем для нелинейных операторов $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ справедливы оценки (4.22).

Исследуем свойства операторов

$$\Phi'_{kc}(a) = \Theta'(\mu_{2kc}(a)), \quad k = 1,2, \quad \Psi''_{jc}(a) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta'(\mu_{2j-1c}(a)), \quad j = \overline{1,3}, \tag{4.24}$$

где оператор $\Theta'(f)$ определен в (4.13).

Заметим, что функции $\rho_c^j(a)(z)$, $\mu_{kc}(a)(t)$, определенные в (4.19), являются решениями системы (4.7) с правой частью $f_c^j(a)(z)$ $(j = \overline{1,3})$, $\varphi_{ck}(a)(t)$ $(k = \overline{1,5})$. Поэтому вектор

$\mu_c = (\mu_{1c}, ..., \mu_{5c})$ можно представить в виде

$$\mu_c(a)(t) = A^{-1}(t)\left[\varphi_c(a)(t) - B(t)\int\limits_\Gamma \frac{\mu_c(a)(\tau)}{\tau - t}d\tau - K\mu_c(a)(t) - H\rho_c(a)(t)\right], \qquad (4.25)$$

где $A^{-1}(t) \in C_\beta(\Gamma)$ — матрица, обратная матрице $A(t)$, $\varphi_c = (\varphi_{c1}, ..., \varphi_{c5})$, $K = (K_1, ..., K_5)$, $H = (H_1, ..., H_5)$, $\rho_c = (\rho_c^1, \rho_c^2, \rho_c^3)$.

Если выражение (4.25) для $\mu_c(a)(t)$ подставить в (4.24), после этого переставить порядок интегрирования в повторных интегралах и использовать указанные выше свойства интеграла типа Коши, операторов T, S, соотношения (4.7), (4.9) из [14, с. 28–29] и лемму 4.1, после несложных, но достаточно громоздких преобразований получим, что операторы $\Phi'_{kc}(a)$ $(k = 1, 2)$, $\Psi''_{jc}(a)$ $(j = \overline{1, 3})$ суть линейные вполне непрерывные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. При помощи аналогичных рассуждений также будем иметь, что $\Phi'_{k\chi}(a)$ $(k = 1, 2)$, $\Psi''_{j\chi}(a)$ $(j = \overline{1, 3})$ — нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и для них справедливы оценки (4.22). Теперь, если использовать соотношения (3.9), (3.10), (3.13) и оценки (4.23), то утверждение леммы становится очевидным. Лемма доказана. □

Систему (4.21) запишем в виде

$$a - L(a) - G(a) = a_* + \widetilde{a}_F, \qquad (4.26)$$

где

$$\begin{aligned}
&L = (L_1, ..., L_5), \quad G = (G_1, ..., G_5), \quad a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*}),\\
&\widetilde{a}_F = (\widetilde{w}_{1F}, \widetilde{w}_{2F}, \widetilde{w}_{3F}, \widetilde{\psi}_{1F}, \widetilde{\psi}_{2F}), \quad v_{1*}^0 = w_{2*} + iw_{1*}, \quad v_{2*}^0 = \psi_{2*} + i\psi_{1*},\\
&L_{3(n-1)+j}(a) = -Re[i^j v_{nc}^0(a)], \quad G_{3(n-1)+j}(a) = -Re[i^j v_{n\chi}^0(a))], \quad n, j = 1, 2;\\
&L_3(a) = w_{3c}(a), \quad G_3(a) = w_{3\chi}(a), \quad \widetilde{w}_{jF} = -Re[i^j v_{1F}^0],\\
&\widetilde{\psi}_{jF} = -Re[i^j v_{2F}^0], \quad j = 1, 2, \quad \widetilde{w}_{3F} = w_{3F}.
\end{aligned}$$

Отметим, что $L(a)$ — линейный вполне непрерывный, $G(a)$ — нелинейный ограниченный операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причем для $G(a)$ имеет место оценка (4.22); $\widetilde{a}_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$ — известная функция, зависящая от внешних сил; компоненты вектора a_* даются формулами (4.9).

Уравнение $a - L(a) = 0$ имеет лишь нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Действительно, если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$ — ненулевое его решение, то, как нетрудно заметить, a является решением системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Тогда, рассуждая как и в случае системы (4.7), приходим к тому, что вектор a удовлетворяет системе

$$\begin{aligned}
&w_{j\alpha^j} - B_{jj}w_3 = 0, \quad j = 1, 2, \quad w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2B_{12}w_3 = 0,\\
&\psi_{j\alpha^j} = 0, \quad j = 1, 2, \quad \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} = 0,\\
&w_{3\alpha^j} + B_{j\lambda}w_\lambda + \psi_j = 0, \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \qquad (4.27)$$

Решаем систему (4.27). При помощи четвертого, пятого и шестого равенств для ψ_1, ψ_2 получаем представления

$$\psi_1 = c_0\alpha^2 + c_1, \quad \psi_2 = -c_0\alpha^1 + c_2, \qquad (4.28)$$

где c_0, c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные.

В (4.27) первое равенство умножим на B_{22}, второе — на B_{11}, третье — на B_{12}. После этого первые два равенства сложим и из него вычтем третье равенство. В результате с учетом условия (b) и соотношений

$$B_{11\alpha^2} = B_{12\alpha^1}, \quad B_{12\alpha^2} = B_{22\alpha^1}, \tag{4.29}$$

вытекающих из формул Петерсона-Кодацци [1, с. 19], получим равенство

$$(B_{22}w_1 - B_{12}w_2)_{\alpha^1} + (B_{11}w_2 - B_{12}w_1)_{\alpha^2} = 0.$$

Тогда, как нетрудно видеть, существует функция $u(\alpha^1, \alpha^2) \in C^2(\overline{\Omega})$ такая, что справедливы соотношения

$$B_{12}w_1 - B_{11}w_2 = u_{\alpha^1}, \quad B_{22}w_1 - B_{12}w_2 = u_{\alpha^2}. \tag{4.30}$$

В (4.30) первое равенство умножим на B_{12}, второе — на B_{11} и вычтем их друг из друга. Тогда относительно функции $u(\alpha^1, \alpha^2)$ получим уравнение $B_{12}u_{\alpha^1} - B_{11}u_{\alpha^2} = 0$, общее решение которого дается формулой [18, с. 15–16]

$$u(\alpha^1, \alpha^2) = \Lambda_1(x), \quad x = x(\alpha^1, \alpha^2) = \int\limits_{(\alpha_0^1, \alpha_0^2)}^{(\alpha^1, \alpha^2)} B_{11}(\beta^1, \beta^2)d\beta^1 + B_{12}(\beta^1, \beta^2)d\beta^2, \tag{4.31}$$

где $\Lambda_1(x)$ — произвольная действительная функция, принадлежащая пространству C^2, (α_0^1, α_0^2) — произвольно фиксированная точка $\overline{\Omega}$.

Теперь седьмое равенство в (4.27) умножим на B_{22}, восьмое — на B_{12} и вычтем их друг из друга. Тогда получим

$$B_{22}w_{3\alpha^1} - B_{12}w_{3\alpha^2} = B_{12}\psi_2 - B_{22}\psi_1,$$

откуда для функции w_3 с учетом соотношений (4.28), (4.29) будем иметь представление [18, с. 65–66]:

$$\begin{gathered}
w_3(\alpha^1, \alpha^2) = \Lambda_2(y) + w_3^*(\alpha^1, \alpha^2), \\
y = y(\alpha^1, \alpha^2) = \int\limits_{(\alpha_0^1, \alpha_0^2)}^{(\alpha^1, \alpha^2)} B_{12}(\beta^1, \beta^2)d\beta^1 + B_{22}(\beta^1, \beta^2)d\beta^2, \\
w_3^*(\alpha^1, \alpha^2) = c_0 a_1(\alpha^1, \alpha^2) + c_1 a_2(\alpha^1, \alpha^2) + c_2 a_3(\alpha^1, \alpha^2), \\
\widetilde{a}_1(\alpha^1, y) = -\int\limits_{\alpha_0^1}^{\alpha^1} [\beta^1 \widetilde{B}_{12}(\beta^1, y) + \alpha^2(\beta^1, y)\widetilde{B}_{22}(\beta^1, y)]/\widetilde{B}_{22}(\beta^1, y)d\beta^1, \\
a_2(\alpha^1, \alpha^2) = \alpha_0^1 - \alpha^1, \quad \widetilde{a}_3(\alpha^1, y) = \int\limits_{\alpha_0^1}^{\alpha^1} \widetilde{B}_{12}(\beta^1, y)/\widetilde{B}_{22}(\beta^1, y)d\beta^1, \\
\widetilde{B}_{\lambda\mu}(\beta^1, y) \equiv B_{\lambda\mu}(\beta^1, \alpha^2), \quad \lambda, \mu = 1, 2, \quad \widetilde{a}_j(\alpha^1, y) \equiv a_j(\alpha^1, \alpha^2), \quad j = 1, 3,
\end{gathered} \tag{4.32}$$

где $\alpha^2 = \alpha^2(\alpha^1, y)$ — решение уравнения $y(\alpha^1, \alpha^2) = y$ относительно α^2, которое существует в силу условия $y_{\alpha^2} = B_{22} \neq 0$ в $\overline{\Omega}$; c_j $(j = 0, 1, 2)$ — произвольные действительные постоянные.

С целью вывода представлений для w_1, w_2 из седьмого равенства в (4.27) и первого равенства в (4.30) составим систему

$$B_{11}w_1 + B_{12}w_2 = -w_{3\alpha^1} - \psi_1, \quad B_{12}w_1 - B_{11}w_2 = u_{\alpha^1}.$$

Решая эту систему относительно w_1, w_2, получаем

$$\begin{gathered} w_1 = b_1[\Lambda_1'(x) - \Lambda_2'(y)] + w_1^*(\alpha^1, \alpha^2), \quad w_2 = b_2[\Lambda_1'(x) - \Lambda_2'(y)] - \Lambda_1'(x) + w_2^*(\alpha^1, \alpha^2), \\ w_j^* = -B_{1j}(w_{3\alpha^1}^* + \psi_1)/(B_{11}^2 + B_{12}^2), \quad j = 1, 2, \\ b_1 = B/(1 + B^2), \quad b_2 = 1/(1 + B^2), \quad B = B_{11}/B_{12} = B_{12}/B_{22}, \end{gathered} \tag{4.33}$$

где ψ_1, w_3^* определены в (4.28), (4.32). Отметим, что в силу условия (b) справедливы включения w_j^*, $b_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $j = 1, 2$.

Далее, исключая из первых двух равенств в (4.27) функцию w_3 , получаем

$$B_{22}w_{1\alpha^1} - B_{11}w_{2\alpha^2} = 0. \tag{4.34}$$

Седьмое равенство в (4.27) дифференцируем по переменной α^2, а восьмое — по переменной α^1 и вычтем их друг из друга. С учетом соотношений (4.28), (4.29) будем иметь:

$$B_{12}(w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2}) + B_{22}w_{2\alpha^1} - B_{11}w_{1\alpha^2} = 2c_0. \tag{4.35}$$

Теперь выражения для w_1, w_2, w_3 из (4.32), (4.33) подставим в (4.34), (4.35) и в последнее равенство системы (4.27). В результате с учетом соотношений $x_{\alpha^1} = B_{11}$, $x_{\alpha^2} = y_{\alpha^1} = B_{12}$, $y_{\alpha^2} = B_{22}$, вытекающих из представлений функций $x(\alpha^1, \alpha^2)$, $y(\alpha^1, \alpha^2)$ в (4.31), (4.32), получим систему вида

$$\begin{gathered} B_{11}B_{12}\Lambda_1''(x) + b_3[\Lambda_1'(x) - \Lambda_2'(y)] = d_1, \quad b_4[\Lambda_1'(x) - \Lambda_2'(y)] = d_2, \\ w_{3\alpha^2}^* - (w_{3\alpha^1}^* + \psi_1)/B + \psi_2 = 0, \end{gathered} \tag{4.36}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{gathered} b_3 = B_{22}b_{1\alpha^1} - B_{11}b_{2\alpha^2}, \quad b_4 = B_{22}b_{2\alpha^1} - B_{11}b_{1\alpha^2} + B_{12}(b_{1\alpha^1} - b_{2\alpha^2}), \\ d_1 = B_{11}w_{2\alpha^2}^* - B_{22}w_{1\alpha^1}^*, \quad d_2 = 2c_0 + B_{11}w_{1\alpha^2}^* - B_{22}w_{2\alpha^1}^* - B_{12}(w_{1\alpha^1}^* - w_{2\alpha^2}^*), \end{gathered} \tag{4.37}$$

функции $w_j^*(\alpha^1, \alpha^2)$ $(j = \overline{1,3})$ определены в (4.32), (4.33); $d_j, b_{2+j} \in C(\overline{\Omega})$, $j = 1, 2$.

Предположим, что составляющие тензора кривизны срединной поверхности оболочки удовлетворяют условиям

$$BB_{\alpha^2} - B_{\alpha^1} \neq 0, \quad B_{\alpha^2} \neq 0, \quad 1 + \alpha^1 B_{\alpha^2} \neq 0, \quad (\alpha^1, \alpha^2) \in \Omega, \tag{4.38}$$

где B определена в (4.33).

С учетом выражений функций w_3^*, ψ_1, ψ_2 из (4.28), (4.32) третье равенство в (4.36) запишется в виде $c_2B_{\alpha^2} - c_0(1 + \alpha^1 B_{\alpha^2}) = 0$, откуда в силу условий в (4.38) следует $c_0 = c_2 = 0$. Тогда $w_1^* = w_2^* \equiv 0$, $\psi_2 \equiv 0$, $w_3^* = -c_1\alpha^1$, $\psi_1 = c_1$, следовательно, из (4.37) будем иметь: $d_1 = d_2 \equiv 0$. Заметим, что в силу первого условия в (4.38) выполняется $b_4 \neq 0$ в Ω. Поэтому из второго уравнения в (4.36) получим $\Lambda_1'(x) - \Lambda_2'(y) = 0$, тогда из первого уравнения в (4.36) имеем $\Lambda_1''(x) = 0$, откуда $\Lambda_1'(x) = c_3 = \Lambda_2'(y)$, где c_3 — произвольная действительная постоянная. Тогда из формул (4.28), (4.33) будем иметь $w_1 \equiv 0$, $w_2 = -c_3$, а из первого равенства в (4.27) следует $w_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Следовательно, принимая во внимание представление (4.32) для w_3 получаем $\Lambda_2(y) - c_1\alpha^1 = 0$, дифференцируя которое по переменной α^1 и используя формулу $y_{\alpha^1} = B_{12}$, приходим к равенству $c_3B_{12}(\alpha^1, \alpha^2) - c_1 = 0$, откуда в силу условия (b) будем иметь $c_1 = c_3 = 0$, т.е. $w_j = 0$, $j = \overline{1,3}$, $\psi_k = 0$, $k = 1, 2$ в $\overline{\Omega}$. Таким образом, уравнение $a - L(a) = 0$ имеет только нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Следовательно, существует обратный оператор $(I - L)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (4.26) сведется к эквивалентному уравнению

$$a - G_*(a) = a_F, \tag{4.39}$$

где $G_*(a) = (I - L)^{-1}G(a)$, $a_F = (I - L)^{-1}\widetilde{a}_F$.

Отметим, что вектор $a_c = (I - L)^{-1}a_*$ является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям.

Поэтому в силу доказанного выше $a_c \equiv 0$, что и учтено нами при переходе к уравнению (4.39).

Также отметим, что вектор a_F в (4.39) зависит только от внешних сил и $a_F = 0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:*

1) $G_*(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причем для любых $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$ $(j = 1, 2)$ справедлива оценка

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant c_*(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},$$

$$\|w^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} = \|w_1^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_2^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad j = 1, 2,$$

где c_* — известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2) $a_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость леммы вытекает из леммы 4.2 с учетом указанных выше свойств операторов $(I - L)^{-1}$, G.

Исследуем разрешимость уравнения (4.39) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Используя лемму 4.3, для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j = 1, 2)$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant q_*\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1 + r).$$

Предположим, что радиус r шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \quad \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1 - q_*)r. \tag{4.40}$$

Тогда к уравнению (4.39) можно применить принцип сжатых отображений [19, с. 146], согласно которому уравнение (4.39) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a = \mathbb{R}(a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, где $\mathbb{R}$ — резольвента оператора G_*.

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, то задача (1), (2) имеет только нулевое решение.

Вернемся к условиям разрешимости (4.18), в которых под $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем подразумевать решение задачи (1), (2), а $\omega_\mu (\mu = 1, 2)$ определены в (4.3). Используя равенства (2.1) и (2.2), убеждаемся в том, что условия разрешимости (4.18) выполняются.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d),* (4.17), (4.38) *и неравенства* (4.40). *Тогда задача (1), (2) имеет единственное обобщённое решение $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 4/(2 - \beta)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.И. Ворович. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.* М.: Наука. 1989.
2. Н.Ф. Морозов. *Избранные двумерные задачи теории упругости.* Л.: Изд-во ЛГУ. 1978.
3. М.М. Карчевский. *Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакрепленной оболочки* // Уч. зап. Казан. ун-та. Серия Физико-матем. науки. **155**:3 (2013), 105–110.

4. R.A. Kayumov. *Postbuckling behavior of compressed bars with nonlinearly elastic supports* // PNRPU Mechanics Bulletin. **3** (2022), 23–31.
5. С.Н. Тимергалиев. *Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек.* Казань: Изд-во КГУ. 2011.
6. С.Н. Тимергалиев. *К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями* // Дифференц. уравнения. **51**:3 (2015), 373–386.
7. С.Н. Тимергалиев, Л.С. Харасова. *Исследование разрешимости одной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко* // Дифференц. уравнения. **52**:5 (2016), 651–664.
8. С.Н. Тимергалиев. *Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями* // Изв. вузов. Математика. **4**:5 (2017), 59–7.
9. С.Н. Тимергалиев. *К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко* // ПММ. **82**:1 (2018), 98–113.
10. S.N. Timergaliev. *Method of Integral Equations for Studying the Solvability of Boundary Value Problems for the System of Nonlinear Differential Equations of the Theory of Timoshenko Type Shallow Inhomogeneous Shells* // Diff. Eq. **55**:2 (2019), 243–259.
11. С.Н. Тимергалиев. *К проблеме разрешимости нелинейных краевых задач для произвольных изотропных пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями* // Изв. вузов. Математика. **4** (2021), 90–107.
12. С.Н. Тимергалиев. *О разрешимости нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакрепленными краями* // Дифференц. уравнения. **57**:4 (2021), 507–525.
13. К.З. Галимов. *Основы нелинейной теории тонких оболочек.* Казань: Изд-во КГУ. 1975.
14. И.Н. Векуа. *Обобщенные аналитические функции.* М.: Наука. 1988.
15. Н.И. Мусхелишвили. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука. 1962.
16. З. Пресдорф. *Некоторые классы сингулярных уравнений.* М.: Мир.1979.
17. Ф.Д. Гахов. *Краевые задачи, 2-е изд.* М.: Физматгиз. 1963.
18. В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка.* М.: Физматлит. 2003.
19. М.А. Красносельский. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* М.: Гостехиздат. 1956.

Самат Низаметдинович Тимергалиев,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д.1,
420043, г. Казань, Россия
E-mail: Samat_tim@mail.ru