ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 1 (2024). С. 24-34.

УДК 519.837

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА ПРЯМОЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

С.В. ГРИШИН

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию на тему производящей функции времени первого достижения положительной полуоси при однородном дискретном целочисленном случайном блуждании на прямой. В первой части работы приращения предполагаются независимыми. Рекуррентные соотношения на вероятности позволяют написать систему уравнений, которой удовлетворяет искомая производящая функция. Применяя технику результантов, удается свести эту систему к одному уравнению. Далее его можно исследовать, вычисляя род соответствующей плоской алгебраической кривой путем анализа ее особенностей. В работе выписаны искомые уравнения для некоторых случайных блужданий и показано, что если приращения принимают с одинаковой вероятностью все целые значения от -2 до 2, или от -1 до 3, или два равновероятных значения -1 и 4, то кривая рациональна, а при общих вероятностях в первом случае это не так.

Во второй части работы процесс рассматривается симметричный, приращения принимают значения -1, 0, 1, но зато предполагается ненулевая корреляция каждого следующего приращения с предыдущим. Для такого процесса уравнение на искомую производящую функцию задает эллиптическую кривую, зависящую от квадрата коэффициента корреляции соседних приращений, если все приращения ненулевые, и гиперэллиптическую кривую рода 2, критерием вырождения которой служит наличие кратных корней у полинома 6 степени, при общих симметрично распределенных условных вероятностях.

Ключевые слова: Случайные блуждания, алгебраические кривые.

Mathematics Subject Classification: 60J10

1. Введение

В данной работе изучается однородное дискретное случайное блуждание. Напомним определение:

Определение 1.1. *Однородное дискретное случайное блуждание — это дискретный случайный процесс с фиксированным набором приращений $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых происходит с определенной вероятностью, которая может зависеть от предыдущих приращений, но инвариантно относительно дискретного времени.*

Случайные блуждания используются в биологии, экономике и других областях знания, поэтому они изучаются достаточно активно. Мы продолжаем исследования, начатые нами в работе [1].

Метод, используемый нами, состоит в получении и исследовании уравнения на производящую функцию времени первого достижения положительной полуоси. Впервые данный метод применил В.А. Малышев (1970-е годы) для случайных блужданий в четверти плоскости с приращениями не более 1 по каждой координате (см. [2]). Идеи Вадима

S.V. Grishin, Random walks on a line and algebraic curves.

Поступила 17 июля 2023 г.

Александровича впоследствии были развиты несколькими учеными, которые получили следующий результат:

Предложение 1.1 ([3]). *Производящая функция $G(t,a,b) = \sum P(k,m,n)t^k a^m b^n$, где $P(k,m,n)$ — вероятность возвращения в начало координат за k шагов с m пересечениями горизонтальной границы и n пересечениями вертикальной границы для вышеуказанного случайного блуждания в четверти плоскости обладает следующими свойствами:*

1) Если набор шагов обладает горизонтальной (вертикальной) осью симметрии, то $G(t,a,1)$ D-финитна, то есть удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами, как функция аргумента t при любом a (соответственно $G(t,1,b)$ обладает этим свойством при любом b).

2) Если набор шагов обладает и вертикальной, и горизонтальной осью симметрии, то $G(t,a,b)$ равно отношению двух D-финитных функций от t при любых a и b, а если набор шагов состоит из 4 элементов $(\pm1,\pm1)$ (знаки не согласованы), то D-финитна при любых a и b.

3) Если набор шагов симметричен относительно прямой $x=-y$, то $G(t,a,a)$ равно отношению двух D-финитных функций от t при любых a, а при $a=1$ — D-финитной функции. Исключение составляет центрально-симметричный случай 6 шагов $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,\pm1)$ (знаки согласованы), для которого известно только, что $G(t,1,1)$ удовлетворяет, как и исследуемая нами производящая функция, некоторому алгебраическому соотношению. В случае трех шагов $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,-1)$ известно также, что $G(t,a,b)$ равно отношению двух D-финитных функций от t при любых, необязательно равных a и b.

4) Если набор из трех шагов симметричен относительно прямой $x=y$, то для любого a $G(t,a,a)$ удовлетворяет некоторому алгебраическому соотношению.

5) В случае 4 шагов $(\pm1,0)$, $(\pm1,\mp1)$ (знаки согласованы) выполнено то же, что в пункте 1 данного утверждения, а в случае 4 шагов $(\pm1,0)$, $(\pm1,\pm1)$(знаки согласованы) известно только, что $G(t,1,1)$ удовлетворяет некоторому алгебраическому соотношению.

Уже в нашем веке были получены некоторые частные результаты касательно случайных блужданий на прямой с независимыми приращениями. В [4] рассмотрены блуждания с приращениями -1, 0, 1; оказалось, что вероятность первого достижения точки $x>0$ за n шагов равна

$$P(x,n) = p_1^x p_0^{n-x}\frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!}F\left(\frac{x-n}{2},\frac{x-n+1}{2};x+1;\frac{4p_{-1}p_1}{p_0^2}\right), \tag{1.1}$$

где $F(a,b;c,d)$ — гауссова гипергеометрическая функция, а соответствующая производящая функция выражается формулой

$$\left(\frac{z^{-1}-p_0}{2p_1} - \sqrt{\left(\frac{z^{-1}-p_0}{2p_1})^2 - \frac{p_{-1}}{p_1}\right)}\right)^x. \tag{1.2}$$

Работа [5] посвящена в том числе блужданиям с приращениями -2, -1, 1. В ней рассмотрен двумерный процесс Гальтона-Ватсона (это один из видов ветвящегося случайного блуждания), определенным образом связанный с искомым блужданием, из такого рассмотрения выведено уравнение $w = z(p_1 + p_{-1}w^2 + p_{-2}w^3)$, где $w = f(z)$ — значение производящей функции времени первого достижения положительной полуоси в точке z, и доказано, что это значение равно наименьшему действительному корню данного уравнения. Таким образом, алгебраические свойства производящих функций случайных блужданий весьма примечательны и широко изучаются.

Во время выступления автора на Второй конференции математических центров России А.В. Шкляев предложил следующее тонкое рассуждение для случайных блужданий $\xi_0 = 0$, $\xi_n = \xi_{n-1} + \delta\xi$ с приращениями $\delta\xi$ равными $1 = a_1 > \ldots > a_k$ и их вероятностями $p_1, \ldots, p_k$. Пусть $g(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i t^{a_i}$ — производящая функция приращения. Тогда отношение $\frac{t^{\xi_n}}{g^n(t)}$ является мартингалом. Выберем в качестве момента остановки η время первого достижения 1. Так как $\xi_\eta = 1$, то по фундаментальному тождеству Вальда из [6] имеем $E(\frac{t}{g^\eta(t)}) = 1$ при достаточно малых t. А поскольку искомая производящая функция равна по определению $w(z) = E(z^\eta)$, то при $z = \frac{1}{g(t)}$ получаем

$$w(\frac{1}{g(t)}) = \frac{1}{t} \quad \text{или} \quad w(z) = \frac{1}{g^{-1}(\frac{1}{z})}.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{1}{z} = \sum_{i=1}^{k} p_i w^{-a_i}, \tag{1.3}$$

выведенное в [1] другим способом — с помощью рекуррентных соотношений на вероятности. Последним способом мы будем пользоваться и здесь.

Отметим, что точка $w = z = 1$ лежит на изучаемой кривой для любого случайного блуждания. Это связано с тем, что значение производящей функции в точке 1 равно сумме вероятностей всех конечных значений η, которая равна 1 в случае неотрицательного математического ожидания приращения, а это условие задает полупространство в пространстве параметров блуждания, от которых производящая функция зависит алгебраически. Не только сама эта точка, но и касательная (или одна из касательных) к кривой при неотрицательном математическом ожидании приращения имеет определенный вероятностный смысл: ее угловой коэффициент равен математическому ожиданию η, которое конечно при положительном математическом ожидании приращения и бесконечно при нулевом (в последнем случае касательная вертикальна). Данная точка не является особой только в случае максимального приращения 1. Можно ли объяснить этот факт с точки зрения теории вероятностей, автор не знает.

Данная работа построена следующим образом: в разделе 2 описывается специальный математический аппарат, который используется в разделе 3 для доказательства теорем о производящей функции времени первого достижения положительной полуоси.

2. Исследование систем алгебраических уравнений

2.1. Сведение системы к одному уравнению. Пусть имеется система алгебраических уравнений $f_i(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) = 0$, $1 \le i \le m$. Если $m > k$, мы можем получить систему $m - k$ уравнений на y-и без x-ов следующим образом: рассмотрим первые два уравнения как уравнения на x_1, остальные переменные играют роль параметров. Далее применяем следующее

Предложение 2.1 ([7]). *Чтобы два уравнения переменной x_1 с параметрами x_2, …, x_n имели общий корень x_1, необходимо и достаточно обнуления их результанта как многочлена от параметров.*

Аналогично «спарим» второе уравнение с третьим и так далее, до «спаривания» двух последних. В итоге получим систему уже не содержащую x_1 и состоящую из $m - 1$ уравнений. Далее повторим процедуру с x_2, x_3 и так далее до x_k. В итоге получим то, что требуется. В нашем случае нужно исключить все переменные, кроме w и z, причем уравнений в системе как раз столько, что в итоге остается ровно одно уравнение.

2.2. Исследование кривой методом анализа особенностей. Нас интересует вопрос, является ли кривая в каждом конкретном случае рациональной. Задающий ее многочлен имеет большую степень даже при небольших по модулю a_i. Для исследования таких кривых нужно применять технику рода. Алгебраическая кривая в $\mathbb{CP}^2$ как вещественное многообразие представляет собой компактную ориентируемую поверхность. Топологически любая такая поверхность эквивалентна сфере с g ручками. Теперь можно дать определение рода:

Определение 2.1 ([8]). *Количество ручек называется родом кривой.*

Род кривой равен размерности пространства голоморфных дифференциальных 1-форм на ней и является бирациональным инвариантом.

Предложение 2.2 ([8]). *Плоская алгебраическая кривая рациональна тогда и только тогда, когда ее род равен нулю.*

Исследование алгебраической кривой включает в себя анализ ее особенностей. Так, дельта-инвариант особенности δ_s — это число бесконечно близких точек самопересечения кривой, «содержащихся» в данной особенности. Он является важнейшей топологической характеристикой особенности и вычисляется по главной части кривой в окрестности особенности (в особую точку помещается начало координат). Для вычисления рода применяется следующее

Предложение 2.3 ([8]). *Если плоская кривая имеет степень d, то род кривой равен $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_s \delta_s$, где суммирование производится по всем особым точкам кривой на $\mathbb{CP}^2$.*

Рассмотрим часто встречающиеся особенности. Например, если слагаемые минимальной степени k образуют однородный многочлен без кратных корней, что проверяется с помощью дискриминанта — результанта многочлена и его производной, то он и является главной частью кривой, соответствующая точка называется обыкновенной k-кратной точкой и ее дельта-инвариант равен $\frac{k(k-1)}{2}$. В частности, бесконечно удаленная точка (0:1:0) графика рациональной функции $y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q не имеют кратных корней, обыкновенная кратная точка кратности на 1 меньше степени кривой, других особенностей нет, поэтому род кривой, вычисленный по формуле рода, оказывается равен нулю, как и должно быть.

Если же однородный многочлен минимальной степени k имеет кратные корни, то в главной части присутствуют некоторые слагаемые большей степени, при этом для вычисления дельта-инварианта применяется так называемая процедура разрешения особенности с помощью раздутия — преобразования $(x, y) \mapsto (xy, y)$, где система координат выбирается так, что $x = 0$ — кратный корень однородного многочлена степени k, $y = 0$ — не корень. Раздутие как бы «отщепляет» от особенности обыкновенную k-кратную точку (алгебраически это выглядит как вынесение общего множителя y^k преобразованной главной части за скобки), поэтому верно

Предложение 2.4 ([7]). *Дельта-инвариант особенности равен $\frac{k(k-1)}{2}$ (k — кратность точки) плюс дельта-инвариант преобразованной особенности (если она осталась).*

В качестве примера рассмотрим касп (a, b) — особенность с главной частью вида $x^a + y^b$, где $a < b$. Последовательность раздутий, преобразующих касп (a, b) в касп $(a, b-a)$ (из алгоритма Евклида следует конечность процесса), позволяет вычислить его дельта-инвариант, и в случае $gcd(a, b) \leqslant 2$ можно выписать результат:

Предложение 2.5. *Дельта-инвариант каспа (a, b) равен $\left[\frac{(a-1)(b-1)+1}{2}\right]$.*

Доказательство. Проведем индукцию по параметрам каспа. База: $a = 1$ (если a и b взаимно просты) — дельта-инвариант 0 (неособая точка) и $a = b = 2$ (если $gcd(a, b) = 2$) — дельта-инвариант 1 (обыкновенная двойная точка). Если верно для всех $a' < b' < b$, докажем для a, b. Каждое раздутие отщепляет от каспа (a, b) обыкновенную a-кратную точку и превращает его в касп $(a, b - a)$. Для него применим предположение индукции: дельта-инвариант равен $\left[\frac{(a-1)(b-a-1)+1}{2}\right]$. Применяя предыдущее предложение и прибавляя дельта-инвариант кратной точки $\frac{a(a-1)}{2}$, получим требуемый результат. □

Примеры: кривая $x^a = y^b$ при $2 \leqslant a \leqslant b - 2$ и $gcd(a, b) = 1$ имеет два каспа — в нуле (a, b) и на бесконечности $(b - a, b)$ и не имеет других особенностей. Вычисление ее рода дает ожидаемое (кривая, очевидно, рациональна) значение 0. Единственная особенность невырожденной гиперэллиптической кривой $y^2 = P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n без кратных корней, находится на бесконечности и является каспом $(n - 2, n)$ с дельта-инвариантом $[\frac{(n-1)(n-3)+1}{2}]$, поэтому род равен $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, что совпадает с известным результатом, полученным топологическим методом.

3. Полученные результаты

3.1. Случайные блуждания с независимыми приращениями. Напишем уравнения кривых и исследуем их на рациональность для нескольких случаев нашей задачи.

Теорема 3.1. *1) Алгебраическая кривая, задаваемая уравнением, которому удовлетворяет производящая функция времени первого достижения положительной полуоси при однородном дискретном случайном блуждании без памяти, рациональна в следующих случаях:*

а) Приращение принимает одно из значений от -1 до 3, каждое с вероятностью 0.2;

б) Приращение принимает одно из значений от -2 до 2, каждое с вероятностью 0.2;

в) Приращение принимает значения -1 и 4, каждое с вероятностью 0.5.

2) Если приращения от -2 до 2 происходят с произвольными вероятностями, то соответствующая алгебраическая кривая, вообще говоря, не рациональна.

Замечание 3.1. *Пункты 1 и 2 Теоремы 3.1 в совокупности с результатом из* [1], *касающимся случайных блужданий с приращениями от -1 до 2, позволяют выдвинуть гипотезу о том, что при минимальном приращении -1 кривая всегда рациональна. Автор предполагает также, что в случае приращений от -2 до 2 кривая всегда рациональна при симметричном относительно 0 распределении приращений, поскольку вырождение особенности $w = z = 1$ в пункте 1б связано с появлением двойной вертикальной касательной в этой точке, но это тоже только гипотеза. Нахождение рода в общем случае требует отдельного исследования, возможно, с применением продвинутой алгебраической геометрии.*

Для доказательства Теоремы 3.1 нам потребуется следующее вспомогательное

Предложение 3.1. *Для случайного блуждания с приращениями от m до M и соответствующими вероятностями $p_m, \ldots, p_M$ искомая производящая функция удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{cases} w = w_1 + \ldots + w_M, \\ w_i = z(p_i + \sum\limits_{m \leqslant j \leqslant 0} (p_j \sum\limits_{1 \leqslant s_1, \ldots, s_n \leqslant M, s_n \geq i, s_1 + \ldots + s_n = i - j} w_{s_1} \ldots w_{s_n})) \end{cases},$$

где i пробегает значения от 1 до M.

Замечание 3.2. *Если в общем случае провести рассуждение, аналогичное рассуждению использующего результаты из* [6] *Александра Викторовича, то получим, что* $E(\frac{t^{\xi_\eta}}{g^\eta(t)}) = 1$. *Но единственным, что можно получить из этого соотношения, является система уравнений на* $w_1, \ldots, w_M$, *каждое из которых содержит неизвестную функцию от* z, *причем эти неизвестные функции связаны лишь тем, что их линейная комбинация с неизвестными же коэффициентами равна 1: неизвестные функции суть условные математические ожидания вышеуказанной величины при фиксированном конечном значении* ξ_η, *а коэффициенты задают распределение этого значения, которое изначально неизвестно. Поэтому необходим другой метод — метод рекуррентных соотношений.*

Доказательство. Доказательство почти дословно повторяет рассуждения [1], применяемые для вывода подобных систем при $M = 1$ и при $m = -1$, $M = 2$. Поскольку самый большой прыжок вперед имеет длину M, то первое положительное значение может оказаться равным от 1 до M, поэтому производящая функция разбивается на сумму из M слагаемых, каждое из которых соответствует определенному значению i в момент остановки. Она может произойти после первого шага с вероятностью p_i, либо позднее, если первый шаг оказался $j \leqslant 0$. В последнем случае будем отмечать все промежуточные рекорды нашего блуждания, то есть те моменты времени k, когда значение величины ξ_k, описывающей исследуемое блуждание, превысило предшествующий максимум (считаем нулевым рекордом j, а последним — i).

Расстояние между соседними рекордами может быть от $1 \leqslant s_k \leqslant M$, а вероятность времени достижения рекорда в силу однородности процесса имеет такое же распределение, как вероятность времени первого достижения положительного значения s_k. Сумма всех расстояний по смыслу равна длине отрезка от j до i, причем предпоследний рекорд обязательно не превосходит 0, иначе остановка произошла бы уже на нем. Осталось выписать рекуррентные соотношения на вероятности остановки в заданной точке за заданное число шагов, используя независимость не пересекающихся кусков рассматриваемого блуждания, и убедиться в том, что вышеуказанная система уравнений задает такие же рекуррентные соотношения на коэффициенты рядов Тейлора соответствующих функций. □

Прежде чем доказывать Теорему 3.1, обратим внимание на следующий факт: первое уравнение системы задает гиперплоскость, и более того, оно единственное содержит w, поэтому при исследовании кривой его можно было бы не учитывать. Кроме этого, в рассматриваемых случаях (при минимальном приращении -1 или -2) можно из второго уравнения выразить w_2 через w_1, из третьего — w_3 через w_2 и w_1, а значит, с учетом второго — через w_1, и так далее, после чего непосредственной подстановкой в последнее уравнение получить соотношение на w_1 и z. Однако степень полученного соотношения (как общая, так и по каждой переменной в отдельности) будет точно такой же, как и при нашем рассмотрении — в терминах w и z, так что сложность расчета рода обоими способами одинаковая.

Доказательство Теоремы 3.1.

1a) Исходная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} w = w_1 + w_2 + w_3, \\ 5w_1 = z(1 + w_1 + w_1^2 + w_2), \\ 5w_2 = z(1 + w_2 + w_1 w_2 + w_3), \\ 5w_3 = z(1 + w_3 + w_1 w_3). \end{cases}$$

Выпишем получающееся уравнение:

$$w^4z^3+w^3z^2(-15+6z)+w^2z(75-80z+26z^2)$$
$$+w(-125+225z-170z^2+51z^3)=z(-75+110z-41z^2),$$

или в координатах $u=w-1$, $x=z-1$

$$P(u,x):=125ux^3+u^2x(-25+25x+50x^2)$$
$$+u^4(1+3x+3x^2+x^3)+u^3(-5+15x^2+10x^3)+125x^3=0,$$

то есть $w=z=1$ — обыкновенная тройная точка (дискриминант кубической части не равен нулю), дельта-инвариант $\frac{3(3-1)}{2}=3$. Решение системы $P=\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{\partial P}{\partial x}=0$ показывает, что других особых точек на $\mathbb{C}^2$ у кривой нет.

Исследуем бесконечно удаленные особые точки. На данной кривой имеется две бесконечно удаленных точки: $(x:u:t)=(1:0:0)$ и $(0:1:0)$ и они обе особые: в окрестности первой имеем главную часть $125ut^3+50u^2t^2+u^4+10u^3t+125t^4$, дискриминант опять-таки ненулевой, значит, это обыкновенная четверная точка, δ-инвариант $\frac{4(4-1)}{2}=6$; в окрестности второй кривая имеет вид

$$(t+x)^3+5t(t+x)^2(2x-t)+25xt^2(t+x)(2x-t)+125x^3t^3+125x^3t^4$$

или

$$y^3+5ty^2(2y-3t)+25t^2y(y-t)(2y-3t)+125t^3(y-t)^3+125t^4(y-t)^3,$$

в системе координат $(y=x+t,t)$. Главная часть здесь имеет вид

$$y^3-15y^2t^2+75yt^4-125t^6-125t^7 \quad \text{или} \quad (y-5t^2)^3-125t^7.$$

Раздутие $(y,t)\mapsto(yt,t)$ переводит главную часть особенности в $(y-5t)^3-125t^4$, что соответствует каспу (3, 4), значит, дельта-инвариант равен $3+\frac{(3-1)(4-1)}{2}=6$. Итого, род кривой степени 7 равен $\frac{(7-1)(7-2)}{2}-3-6-6=0$, значит, кривая рациональна.

1б) Выпишем систему:

$$\begin{cases} w=w_1+w_2,\\ 5w_1=z(1+w_1+w_1^2+w_2+w_1^3+2w_1w_2),\\ 5w_2=z(1+w_2+w_1w_2+w_1^2w_2+w_2^2). \end{cases}$$

Выведенное из нее уравнение выглядит следующим образом:

$$w^6z^3+w^5z^2(-5+4z)+w^4z^2(-20+10z)+w^3z(50-45z+25z^2)$$
$$+w^2z(75-145z+35z^2)+w(-125+200z-95z^2+39z^3)=z(-50+65z-11z^2),$$

или в координатах $u=w-1$, $x=z-1$

$$P(u,x)=u^2x^2(225+225x)+ux^2(125+250x)+u^4x(45+90x+45x^2)$$
$$+u^3x(75+200x+125x^2)+u^6(1+3x+3x^2+x^3)+u^5(5+20x+25x^2+10x^3)+125x^3=0.$$

В точке $w=z=1$, таким образом, главная часть имеет вид $125x^2v+75xv^3+5v^5-100x^4$, где $v=x+u$, после раздутия $(x,v)\mapsto(xv,v)$ главная часть особенности имеет вид $125x^2+75xv+5v^2$, что соответствует обыкновенной двойной точке, поэтому дельта-инвариант особенности равен $\frac{3(3-1)}{2}+1=4$.

Исследуем другие особые точки. Решение системы

$$P=\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial U}=0$$

дает еще одну особенность в $\mathbb{C}^2$ - $x=-5, u=-\frac{5}{2}$. В ней главная часть

$$-6250y^2+8000v^2y-38400v^4,$$

где $v = u + \frac{5}{2}, y = x + 5$, то есть после раздутия $(y, v) \mapsto (yv, v)$ она оказывается равной

$$-6250y^2 + 8000vy - 38400v^2,$$

что соответствует обыкновенной двойной точке, в итоге δ-инвариант равен $1 + 1 = 2$.

Обратимся теперь к поведению на бесконечности. Точка (1:0:0) — главная часть

$$225u^2t^4 + 250ut^5 + 45u^4t^2 + 125u^3t^3 + u^6 + 10u^5t + 125t^6,$$

дискриминант ненулевой, это обыкновенная шестерная точка, дельта-инвариант $\frac{6(6-1)}{2} = 15$. Точка (0:1:0) — главная часть

$$(t + x)^3 + t(t + x)^2(10x + 5t) + t^3x(x + t)(125x + 75t) + x^2t^5(125t + 250x),$$

или

$$y^3 + y^2t(10y - 5t) + yt^3(y - t)(125y - 50t) + t^5(y - t)^2(250y - 125t)$$

в координатах $y = x + t, t$, в новых координатах можно отбросить лишние слагаемые и получить $y^3 - 5y^2t^2 + 50yt^5 - 125t^8$, или $y^3 - 5t^2(y - 5t^3)^2$, после двух раздутий $(y, t) \mapsto (yt, t)$ получим главную часть в виде $y^3 - 5(y - 5t)^2$, что соответствует каспу $(2, 3)$, итого дельта-инвариант $1 + 3(3 - 1) = 7$. Род кривой степени 9 равен $\frac{(9-1)(9-2)}{2} - 4 - 2 - 15 - 7 = 0$, и эта кривая оказалась рациональной.

1в) Имеем систему:

$$\begin{cases} w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4, \\ 2w_1 = z(w_1^2 + w_2), \\ 2w_2 = z(w_1w_2 + w_3), \\ 2w_3 = z(w_1w_3 + w_4), \\ 2w_4 = z(1 + w_1w_4). \end{cases}$$

Уравнение кривой в данном случае:

$$w^5z^4 - 8w^4z^3 + w^2z(-32 + 32z - 28z^2) + w^3z^2(24 - 12z + 10z^2) \\ + w(16 - 24z + 32z^2 - 12z^3 + 5z^4) = z(8 - 8z + 4z^2),$$

в координатах $w = 1 + u$, $z = 1 + x$

$$ux^3(24 + 40x) + u^2x^2(8 + 48x + 40x^2) + u^3x(-4 + 12x + 36x^2 + 20x^3) \\ + u^5(1 + x)^4 + u^4(-3 - 4x + 6x^2 + 12x^3 + 5x^4) + 16x^4 = 0.$$

В точке $u = x = 0$ главная часть $24ux^3 + 8u^2x^2 - 4u^3x - 3u^4 + 16x^4$, дискриминант не равен нулю, это обыкновенная четверная точка и дельта-инвариант равен 6. Других конечных особых точек у кривой нет.

Исследуем бесконечные особые точки. В точке (1:0:0) главная часть

$$u^5 + 5u^4t + 20u^3t^2 + 40u^2t^3 + 40ut^4 + 16t^5,$$

дискриминант ненулевой, это обыкновенная пятикратная точка, дельта-инвариант 10. В точке (0:1:0) имеем

$$(t + x)^4 + (5x - 3t)(t + x)^3t + (20x - 4t)x(1 + x)^2t^2 \\ + (40x + 8t)x^2(1 + x)t^3 + x^3(24t + 40x)t^4 + 16x^4t^5 = 0,$$

главная часть в координатах $(y = x+t, t)$ имеет вид $y^4 - 8t^2y^3 + 24t^4y^2 - 32t^6y + 16t^8 + 16t^9$, или $(y - 2t^2)^4 + 16t^9$, после раздутия $(y, t) \mapsto (yt, t)$ главная часть принимает вид $(y - 2t)^4 + 16t^5$, что соответствует каспу $(4, 5)$, поэтому дельта-инвариант равен $6 + 6 = 12$. По формуле рода получим, что, так как кривая имеет степень 9, он равен $28 - 6 - 10 - 12 = 0$, опять-таки кривая рациональна.

2) При значениях вероятностей $p_{-2} = p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$, когда система имеет вид

$$\begin{cases} w = w_1 + w_2, \\ 3w_1 = z(1 + w_1^3 + 2w_1w_2), \\ 3w_2 = z(1 + w_1^2w_2 + w_2^2), \end{cases}$$

а уравнение —

$$w^6z^3 - 3w^5z^2 + w^4z^2(2z-6) + w^2z(9 - 48z - 3z^2) \\ + w^3z(18 + 9z^2) + w(19z^3 + 36z - 27) + z(18 - 24z - z^2) = 0,$$

точка $w = z = 1$ является обыкновенной тройной точкой. Две особенности, на которые «расщепилась» еще одна конечная особая точка, имеют иррациональные координаты, сопряженные в $Q[\sqrt{6}]$, что затрудняет их прямое исследование, но поскольку от точки $w = z = 1$ ничего не «отщепилось», то при общих значениях вероятностей дельта-инвариант этой особенности равен 3. Что касается остальных особенностей, сумма их дельта-инвариантов в общем случае не больше, чем в вышеописанном примере, а значит, род кривой не меньше $28-3-(2+15+7) = 1$, и она уже не рациональна. В вышеописанном симметричном случае особенность $w = z = 1$, как видно из вычислений, вырождается.

□

3.2. Симметричные случайные блуждания с памятью. Напомним, что дискретным случайным процессом называется последовательность ξ_n случайных величин таких, что для любого конечного множества целых неотрицательных чисел $i_1, \dots, i_n$ для величин $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}$ определено совместное распределение. До этого момента мы рассматривали случайные процессы с независимыми приращениями, то есть величины $\xi_n - \xi_{n-1}$, называемые n-ми приращениями, для разных натуральных n были независимы в совокупности, в частности, они попарно не коррелировали. Такие процессы являются марковскими: условное распределение ξ_{n+1} при фиксированном значении ξ_n не изменится при добавлении дополнительных условий на ξ_k при $k < n$. В данном разделе будут рассматриваться случайные блуждания, в которых каждое приращение, начиная со второго шага, коррелирует с приращением на предыдущем шаге. При этом добавление условия на ξ_{n-1} влияет на вышеуказанное условное распределение, так что процесс перестает быть марковским. Подобные процессы называются процессами с памятью. Впрочем, данный процесс можно рассматривать и как марковский, если в содержание понятия «состояние» включить информацию о приращении на предыдущем шаге.

Для простоты будем считать блуждания симметричными с шагами ± 1. Тогда первое приращение принимает оба допустимых значения с вероятностью $\frac{1}{2}$, а каждое следующее совпадает с предыдущим с вероятностью p и противоположно ему с вероятностью $q = 1-p$. В таком блуждании коэффициент корреляции между соседними приращениями равен $k = p - q$.

Предложение 3.2. *Производящая функция времени первого достижения положительной полуоси для вышеописанного случайного блуждания при $0 < k < 1$ удовлетворяет уравнению*

$$2w = z[1 + w^2 - k^2(w-z)^2)], \tag{3.1}$$

которое задает неособую эллиптическую кривую, не являющейся рациональной.

Доказательство. Обозначим за w_- и w_+ производящие функции времени первого достижения $x+1$ из x при условии, что на предыдущем шаге было отрицательное и положительное приращение соответственно. Если на первом шаге приращение сразу положительно (вероятность данного события $\frac{1}{2}$), то время первого достижения положительной полуоси равно 1, если же на первом шаге приращение отрицательно, то после этого необходимо сначала вернуться в 0, что соответствует определению w_-, а потом, наконец, дойти до 1, что уже соответствует w_+, поскольку перед этим 0 было положительное приращение. Поэтому искомая функция вычисляется по формуле $w = \frac{z}{2}(1 + w_-w_+)$.

Проведя аналогичные рассуждения для самих w_- и w_+, получаем уравнения

$$\begin{cases} w_- = z(q + pw_-w_+), \\ w_+ = z(p + qw_-w_+). \end{cases}$$

Перемножая уравнения и обозначив $u = w_-w_+$, получим

$$u = z^2(p + qu)(q + pu), \tag{3.2}$$

а так как $w = \frac{z}{2}(1+u)$, то выразим $u = 2\frac{w}{z} - 1$, и после подстановки в (3.2), учитывая, что $p = \frac{1+k}{2}$ и $q = \frac{1-k}{2}$, получим соотношение (3.1).

Перепишем теперь полученное уравнение в виде

$$w^2z(1-k^2) + 2w(k^2z^2 - 1) + z(1 - k^2z^2) = 0. \tag{3.3}$$

Вычислим дискриминант данного квадратного относительно w уравнения: он равен $(1 - k^2z^2)(1 - z^2)$ и при $0 < k < 1$ имеет четыре различных корня, поэтому оно задает неособую эллиптическую кривую, которая, как известно, имеет род 1 и, следовательно, не является рациональной. □

В случае $k = 0$ уравнение (3.1), как и следовало ожидать, переходит в обычное уравнение на производящую функцию времени первого достижения положительной полуоси при простом симметричном случайном блуждании. Интересен другой предельный случай: $k = \pm 1$. В этом случае уравнение принимает вид $(2w - z)(1 - z^2) = 0$, откуда следует $w = \frac{z}{2}$. Данный результат объясняется тем, что в случае линейной зависимости последующего приращения от предыдущего процесс завершится либо на первом шаге, либо никогда. Любопытно отметить, что если k сколько-нибудь отличается от ± 1, то кривая пересекает прямую $z = 1$ в единственной точке $w = z = 1$, что означает, что процесс с вероятностью 1 завершится за конечное время, что неверно в предельном случае.

В более сложных случаях нужно применять методы, описанные в предыдущем разделе. Рассмотрим, например, следующее видоизменение предыдущего блуждания: кроме приращений ± 1 возможно также нулевое приращение. Иными словами, на первом шаге вероятности равны по $\frac{1}{3}$, а на последующих равны этому только при предыдущем приращении 0, а при приращении ± 1 вероятности равны $p_{\pm 1} = p$, $p_{\mp 1} = q$, $p_0 = 1 - p - q$, коэффициент автокорреляции при этом равен $k = \frac{(5-3p-3q)(p-q)}{2}$.

Выпишем уравнение на производящую функцию для такого блуждания:

Предложение 3.3. *Производящая функция времени первого достижения 1 для вышеописанного блуждания удовлетворяет уравнению*

$$\begin{aligned} (1 - 3p - 3q + 2p^2 + 5pq + 2q^2)w^2z^3 + (3p + 3q - 3p^2 - 12pq - 3q^2)w^2z^2 + 9pqw^2z \\ + (p-q)^2wz^3 + 3(p-q)^2wz^2 + wz - 3w - (p-q)^2z^3 + z = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

которое при общих p, q задает гиперэллиптическую кривую рода 2 (при $p = q$ получается процесс без памяти — кривая рациональна, а при $p + q = 1$ получается процесс из предыдущего предложения — род 1). Возможно, имеются и другие параметры, при которых кривая вырождается, но дискриминант многочлена шестой степени с параметрами не поддается вычислению за приемлемое время.

Замечание 3.3. *Как и в случае блужданий без памяти, проективизация кривой имеет особенности, при этом если для блужданий без памяти компактификация* $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$

не избавляла от особенностей (а для симметричных блужданий с памятью без возможности нулевого приращения даже добавляла их), то в последнем случае кривая в указанной компактификации особенностей не имеет.

Доказательство. Повторяя рассуждения для предыдущего процесса с незначительными изменениями, получим, что производящая функция времени первого достижения положительной полуоси удовлетворяет системе

$$\begin{cases} w = \dfrac{z}{3}(1 + w + w_- w_+), \\ w_+ = z(p + p_0 w + q w_- w_+), \\ w_- = z(q + p_0 w + p w_- w_+). \end{cases}$$

Исключая из этой системы w_+ и w_- методом результантов и учитывая, что $p_0 = 1 - p - q$, получаем уравнение (3.4). Данная квинтика послойным преобразованием переводится в гиперэллиптическую кривую вида $w^2 = P_6(z)$ с некоторым многочленом шестой степени в правой части. Подсчет дискриминанта многочлена, например, при $p + q = \frac{2}{3}$ и $|p - q| = \frac{1}{2}$ показывает, что кратных корней в общем случае у него нет. Род такой кривой равен 2. □

4. Благодарности

Автор благодарит профессора Григория Геннадьевича Амосова за всестороннюю помощь и поддержку при написании данной работы, а также выражает благодарность Александру Викторовичу Шкляеву за предоставленное изящное рассуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.В. Гришин. *Применение производящих функций к задачам случайного блуждания* // УМЖ, **14**:3 (2022), 35–42.
2. В.А. Малышев. *Аналитический метод в теории двумерных случайных блужданий* // Сиб. матем. журн., **13**:6 (1972), 1314–1329.
3. N.R. Beaton, A.L. Owczarek, A. Rechnitzer. *Exact Solution of some Quarter Plane Walks with Interacting Boundaries* // E-JC. **26**:3 (2019), 1–38.
4. K. Yamamoto. *Hypergeometric Solution to a Gambler's Ruin Problem with a Nonzero Halting Probability* // International Journal of Statistical Mechanics. **2013**:831390 (2013), 1–9.
5. H. Wang. *On Total Progeny of Multitype Galton-Watson Process and the First Passage Time of Random Walk with Bounded Jumps* // Acta Mathematica Sinica. English Series. **30**:12 (2014), 2161–2172.
6. А.Н. Ширяев. *Вероятность.* М.: МЦНМО. 2007.
7. В.В. Прасолов. *Многочлены.* М.: МЦНМО. 1999.
8. E. Brieskorn, H. Knorrer. *Plane Algebraic Curves.* B.: Springer. 2012.

Станислав Владимирович Гришин,
Математический институт им. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, г. Москва, Россия

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский пер., 9,
141701, г. Долгопрудный, Россия
E-mail: st.grishin98@yandex.ru