ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 1 (2024). С. 3-10.

УДК 517.957

К СИММЕТРИЙНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ 3-ГО ПОРЯДКА.

М.Ю. БАЛАХНЁВ

Аннотация. Представлены новые результаты в рамках симметрийной классификации интегрируемых эволюционных векторных уравнений 3-го порядка. Предложенная А.Г. Мешковым и В.В. Соколовым техника позволила найти 12 уравнений, удовлетворяющих необходимым условиям интегрируемости. Сделан краткий обзор, всех имеющихся на сегодняшний день уравнений рассматриваемого типа, а также даны пояснения вычислительных трудностей, не позволяющих завершить задачу классификации в общем виде.

Наложение разумных дополнительных ограничений на вид уравнений при проведении классификации дало возможность довести расчеты до конца. Найденные уравнения имеют несколько нетривиальных сохраняющихся плотностей, и поэтому, скорее всего, являются точно интегрируемыми. Доказательством интегрируемости могло бы служить представление Лакса или авто-преобразование Беклунда, однако их поиск – довольно трудоемкая задача, требующая убедительного мотива, например, прикладное значение какого-либо из уравнений.

Ключевые слова: интегрируемые векторные уравнения, канонические плотности, законы сохранения.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 35Q53

1. Введение

Классическими примерами нелинейных эволюционных векторных уравнений 3-го порядка можно считать представленные в [6] обобщения мКдФ:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_t &= \boldsymbol{U}_{xxx} - 6(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}_x,\\
\boldsymbol{U}_t &= \boldsymbol{U}_{xxx} - 3(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}_x - 3(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}_x)\boldsymbol{U}.
\end{aligned}$$

Интерес к поиску интегрируемых векторных случаев возрос после публикаций [12] и [11], в которых авторы предложили эффективный метод классификации уравнений вида:

$$\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{U}_3 + \boldsymbol{U}_2 f_2 + \boldsymbol{U}_1 f_1 + \boldsymbol{U} f_0, \quad \boldsymbol{U}_t = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{U}_n = \frac{\partial_n \boldsymbol{U}}{\partial x^n}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t,x)$ — вектор в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а неизвестные функции f_i зависят от скалярных произведений $(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{U}_j) = u_{[i,j]}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2$. Переменные $u_{[i,j]}$ считают независимыми в силу произвольности размерности пространства $\mathbb{R}^n$ и, по сложившейся практике, порядком $(\operatorname{ord} f)$ функции $f = f(u_{[0,0]}, \ldots, u_{[i,j]})$ называют порядок старшей производной у переменных $u_{[i,j]}$, входящих в аргументы этой функции.

M.Ju. Balakhnev, On the symmetry classification of integrable evolution equations of the 3rd order.

Поступила 10 января 2023 г.

На сегодняшний день в [1], [4], [5] и [7] получены списки интегрируемых уравнений (1.1) следующих типов:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_t &= (\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{U}_1 f_1 + \boldsymbol{U}_0 f_0)_x, \quad \operatorname{ord} f_i \leqslant 1;\\
\boldsymbol{U}_t &= \boldsymbol{U}_3 + \boldsymbol{U}_1 f_1 + \boldsymbol{U}_0 f_0, \quad \operatorname{ord} f_i \leqslant 2;\\
\boldsymbol{U}_t &= \boldsymbol{U}_3 + \boldsymbol{U}_2 f_2 + \boldsymbol{U}_1 f_1 + \boldsymbol{U} f_0, \quad \operatorname{ord} f_i \leqslant 2, \quad \operatorname{ord} f_0 \leqslant 1;\\
\boldsymbol{U}_t &= \boldsymbol{U}_3 - 3\boldsymbol{U}_2 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} + \boldsymbol{U}_1 f_1 + \boldsymbol{U} f_0, \quad \operatorname{ord} f_i \leqslant 2.
\end{aligned}
$$

Кроме того, ещё три классификационные задачи решены в [2], [3] и [10], где априорные ограничения относились не столько к неизвестным функциям f_i, сколько к наличию у (1.1) определенных свойств.

Цель данной работы — продвинуться в задаче классификации уравнений (1.1) и найти новые интегрируемые случаи.

Как и в процитированных выше работах, мы применяем симметрийный подход, основанный на построении **канонических плотностей** — специфических локальных плотностей законов сохранения, полученных при помощи формальных операторных рядов. Указанный метод предложен в [8], обобщен в [9], а его векторный вариант представлен в [11]. Суть техники состоит в том, что в качестве временного уравнения Лакса для (1.1) принимают $(-D_t + D_x^3 + f_2 D_x^2 + f_1 D_x + f_0)\psi = 0$ и выполняют в нем стандартную подстановку

$$\psi = \exp\left(\int R\, dx\right).$$

В результате получается уравнение типа Риккати:

$$(D_x + R)^2 R + f_2 (D_x + R) R + f_1 R + f_0 = F, \quad D_x F = D_t R, \tag{1.2}$$

которое имеет формальные решения в виде

$$R = \lambda^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \lambda^n, \quad F = \lambda^{-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \lambda^n. \tag{1.3}$$

Подставив (1.3) в первое уравнение (1.2) приходим к рекуррентной формуле:

$$
\begin{aligned}
\rho_{n+2} =& \frac{1}{3}\Big[\theta_n - f_0\,\delta_{n,0} - 2\,f_2\,\rho_{n+1} - f_2\,D_x \rho_n - f_1\,\rho_n\Big]\\
&- \frac{1}{3}\Big[f_2 \sum_{s=0}^{n} \rho_s\,\rho_{n-s} + \sum_{0 \leqslant s+k \leqslant n} \rho_s\,\rho_k\,\rho_{n-s-k} + 3\sum_{s=0}^{n+1} \rho_s\,\rho_{n-s+1}\Big]\\
&- D_x\Big[\rho_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} \rho_s\,\rho_{n-s} + \frac{1}{3} D_x \rho_n\Big], \quad n \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Здесь $\delta_{i,j}$ символ Кронекера и

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}\,f_2, \quad \rho_1 = \frac{1}{9}\,f_2^2 - \frac{1}{3}\,f_1 + \frac{1}{3}\,D_x\,f_2. \tag{1.4}$$

Теперь из второго уравнения (1.2), используя (1.3), мы получаем бесконечную серию законов сохранения

$$D_t \rho_n = D_x \theta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.5}$$

где ρ_n и θ_n функции переменных $u_{[i,j]}$. При этом операторы дифференцирования определяются следующим образом

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{U}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{U}_i}, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^{\infty} D_x^i (\boldsymbol{U}_3 + f_2 \boldsymbol{U}_2 + f_1 \boldsymbol{U}_1 + f_0 \boldsymbol{U}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{U}_i}.$$

Правила дифференцирования скалярных произведений $u_{[i,j]}$ вытекают из равенства $D_x\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{U}_{i+1}$ и билинейности скалярного произведения, эволюционная производная D_t вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции.

Рекурсионная формула позволяет находить функции θ_n непосредственно из (1.5), так как выражения для ρ_n содержат θ_k, $k \leqslant n-2$. Например,

$$\rho_2 = -\frac{1}{3}\,f_0 + \frac{1}{3}\,\theta_0 - \frac{2}{81}\,f_2^3 + \frac{1}{9}\,f_1\,f_2 - D_x\left(\frac{1}{9}\,f_2^2 + \frac{2}{9}\,D_x\,f_2 - \frac{1}{3}\,f_1\right).$$

Функции ρ_n называются каноническими плотностями уравнения (1.1) и выражаются через его коэффициенты. Таким образом, (1.5) являются по сути условиями для определения f_i, именно поэтому (1.5) называют **ρ_n-условиями интегрируемости**.

Удобным инструментом, позволяющим упрощать вид исследуемого уравнения при проведении классификации, являются точечные преобразования $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{U} = \left(\frac{f(v_{[0,0]})}{v_{[0,0]}}\right)^{1/2}\boldsymbol{V}, \tag{1.6}$$

где f — произвольная функция, так что $f' \neq 0$. Вторая степень (1.6) выглядит достаточно просто: $u_{[0,0]} = f(v_{[0,0]})$, что говорит о невырожденности данного преобразования. Приведем другие допускаемые (1.1) преобразования.

Масштабные преобразования:

$$x \to \varepsilon x, \quad t \to \varepsilon^3 t. \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{U} \to \lambda \boldsymbol{U}, \quad u_{[i,k]} \to \lambda^2 u_{[i,k]}. \tag{1.8}$$

Преобразование Галилея:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + c\,t. \tag{1.9}$$

Экспоненциальное преобразование:

$$\boldsymbol{U} = e^{pt+kx}\boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{U}_1 = e^{pt+kx}(\boldsymbol{V}_1 + k\boldsymbol{V}), \quad \boldsymbol{U}_t = e^{pt+kx}(\boldsymbol{V}_t + p\boldsymbol{V}), \quad \ldots, \tag{1.10}$$

где p и k — параметры. Очевидно, что это преобразование возможно только для однородных в смысле преобразования (1.8) уравнений.

Наряду с рассмотренными преобразованиями, уравнение (1.1) инвариантно относительно вращений в $\mathbb{R}^n : \boldsymbol{U}' = O\boldsymbol{U}$, $OO^T = E$, поэтому при выполнении классификации иногда полезно перейти к сферической системе координат. Переход от декартовых координат к сферическим выполняется по следующим формулам:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{U} = R\boldsymbol{V}, \quad v_{[0,0]} = 1; \quad \boldsymbol{U}_x = R_x\boldsymbol{V} + R\boldsymbol{V}_x, \quad \ldots, \\ u_{[0,0]} = R^2, \quad u_{[0,1]} = R\,R_x, \quad u_{[1,1]} = R^2 v_{[1,1]} + R_x^2, \quad \ldots, \end{gathered} \tag{1.11}$$

где R — сферический радиус, а компоненты вектора $\boldsymbol{V}$ имеют смысл угловых переменных. Отметим, что дифференцирование равенства $v_{[0,0]} = 1$ дает $v_{[0,1]} = 0$, $v_{[0,2]} = -v_{[1,1]}$ и т.д. В результате, все переменные $v_{[0,k]}$, $k > 1$ выражаются через $v_{[i,j]}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$. Формулы обратного преобразования нетрудно получить непосредственно из (1.11).

Определение 1.1. *Если уравнение (1.1) приводится в переменных (1.11) к системе вида*

$$\boldsymbol{V}_t = \boldsymbol{V}_3 + f_2\boldsymbol{V}_2 + f_1\boldsymbol{V}_1 + f_0\boldsymbol{V}, \quad f_i = f_i(v_{[1,1]}, v_{[1,2]}, v_{[2,2]}),$$
$$R_t = R_3 + \Phi(R_2, R_1, R, v_{[1,1]}, v_{[1,2]}, v_{[2,2]}),$$

то такая система называется треугольной.

В настоящей статье мы не рассматриваем уравнения, которые переходят в треугольные системы, так как полный перечень интегрируемых на сфере $\mathbb{S}^n$ векторных уравнений (1.1) получен в [11] (см. также [10]).

2. Результаты анализа условий интегрируемости

В работе [11] установлено, что четные плотности ρ_n тривиальны, то есть $\rho_{2n} = D_x\chi_n$. Учитывая (1.4), без потери общности можно положить, что $f_2 = \frac{3}{2}D_x(\ln f)$, $\operatorname{ord} f = 1$. Анализ первого из условий (1.5) позволил определить зависимость f_1 от переменных второго порядка, так что (1.1) приняло вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_t =& \boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}D_x(\ln f)\,\boldsymbol{U}_2 + \\ &+ \left(cfu_{[2,2]} + a_1u_{[1,2]}^2 + a_2u_{[1,2]}u_{[0,2]} + a_3u_{[0,2]}^2 + a_4u_{[1,2]} + a_5u_{[0,2]} + a_6\right)\boldsymbol{U}_1 + f_0\boldsymbol{U}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\operatorname{ord} a_i \leqslant 1$, $c = \mathrm{const}$.

Функция ρ_2 имеет четвертый порядок (благодаря слагаемому θ_0), но после выделения и отбрасывания тривиальных слагаемых, имеющих вид полной производной по x, получаем функцию второго порядка, то есть $\rho_2 \sim F(u_{[2,2]}, u_{[1,2]}, u_{[0,2]}, \dots)$. Поскольку $u_{[2,2]} \notin \operatorname{Im} D$, то условие $\rho_2 \in \operatorname{Im} D$ влечет ограничение $\partial F/\partial u_{[2,2]} = 0$, простейшие следствия которого записываются так

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_{[2,2]}^2}\frac{\partial}{\partial u_{[1,1]}}\frac{1}{f}\left(2u_{[0,1]}\frac{\partial f}{\partial u_{[1,1]}} + u_{[0,0]}\frac{\partial f}{\partial u_{[0,1]}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_{[2,2]}^2}\frac{\partial}{\partial u_{[0,1]}}\frac{1}{f}\left(2u_{[0,1]}\frac{\partial f}{\partial u_{[1,1]}} + u_{[0,0]}\frac{\partial f}{\partial u_{[0,1]}}\right) = 0.$$

Таким образом, приходим к первой развилке.

Вариант $\partial^2 f_0/\partial u_{[2,2]}^2 \neq 0$ просчитан нами полностью. Все полученные в этом случае уравнения в координатах (1.11) переходят в известные интегрируемые уравнения, при этом функция f_0 не определяется из условий интегрируемости и остается произвольной.

При условии $\partial^2 f_0/\partial u_{[2,2]}^2 = 0$ получаем, что $f_0 = g_1\,u_{[2,2]} + g_2$, где функции g_1 и g_2 не зависят от $u_{[2,2]}$ и их порядок не выше 2. Случай $\operatorname{ord} f_0 = 1$ исследован полностью в [7], поэтому далее мы полагаем $\operatorname{ord} f_0 = 2$.

Компактные уравнения можно получить из первого и четвертого условий интегрируемости:

$$\left(2\,u_{[0,1]}\,\frac{\partial f}{\partial u_{[1,1]}} + u_{[0,0]}\,\frac{\partial f}{\partial u_{[0,1]}}\right)\left\{\frac{\partial g_1}{\partial u_{[i,2]}},\ \frac{\partial^3 g_2}{\partial u_{[i,2]}\partial u_{[j,2]}\partial u_{[k,2]}}\right\} = 0, \tag{2.2}$$

$$\left\{a_2\,u_{[0,0]} + 2\,a_1\,u_{[0,1]},\ a_2\,u_{[0,1]} + 2\,a_3\,u_{[0,0]} + 2\,c\,f\right\}\frac{\partial g_1}{\partial u_{[i,2]}} = 0,\ i,j,k = 0,1. \tag{2.3}$$

Возникающие в (2.2) и (2.3) развилки мы исследовали в следующем порядке:

$$(\mathbf{a})\quad 2\,u_{[0,1]}\,\frac{\partial f}{\partial u_{[1,1]}} + u_{[0,0]}\,\frac{\partial f}{\partial u_{[0,1]}} \equiv \psi \neq 0; \qquad (\mathbf{b})\quad \psi = 0.$$

Вариант (a). Из (2.2) следует, что $\operatorname{ord} g_1 < 2$, а функция g_2 квадратичная по переменным $u_{[0,2]}$, $u_{[1,2]}$, то есть $f_0 = g_1\,u_{[2,2]} + b_1\,u_{[1,2]}^2 + b_2\,u_{[0,2]}^2 + b_3\,u_{[1,2]}\,u_{[0,2]} + b_4\,u_{[1,2]} + b_5\,u_{[0,2]} + b_6$ и порядок функций b_i не превосходит единицы.

Анализ первых шести условий интегрируемости заключался, в основном, в рассмотрении множества различных условий на неизвестные функции. Так, например, предположив, что $g_1 \neq 0$ мы всегда получали такие уравнения, в которых точечные преобразования позволяли устранить слагаемое с $u_{[2,2]}$. В результате в данном варианте семи ρ_n-условиям интегрируемости ($n = 0, \dots, 6$) удовлетворяют только пять уравнений. Мы установили также, что каждое из них имеет высшую симметрию пятого порядка и, с точностью до точечных преобразований, приводится к одному из следующего списка:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =&\boldsymbol{U}_3 + f_x\boldsymbol{U}_2 + \frac{3}{2}\left(\frac{u_{[0,0]}u_{[2,2]}}{\eta} + \frac{m(g^2 - k^2u_{[0,1]}^4)}{\eta u_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{U}_1\\ &- m\left(\frac{u_{[0,1]}^2 f_x}{u_{[0,0]}^2} + \frac{3u_{[0,1]}g - u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3}\right)\boldsymbol{U},\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =&\boldsymbol{U}_3 + f_x\boldsymbol{U}_2\\ &+ \frac{3}{2}\left(\frac{u_{[0,0]}u_{[2,2]}}{\eta} - \frac{(u_{[0,0]}f_x + 3u_{[0,1]})^2}{9(\eta - u_{[0,0]}^2)} + \frac{m(g^2 - k^2u_{[0,1]}^4) + k^2u_{[0,0]}^2u_{[0,1]}^2}{\eta u_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{U}_1\\ &- m\left(\frac{u_{[0,1]}^2 f_x}{u_{[0,0]}^2} + \frac{3u_{[0,1]}g - u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3}\right)\boldsymbol{U},\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =&\boldsymbol{U}_3 + f_x\boldsymbol{U}_2\\ &+ \frac{3}{2}\left(\frac{u_{[0,0]}u_{[2,2]}}{\eta} + \frac{(u_{[0,0]}f_x + 3(k+1)u_{[0,1]})^2}{9u_{[0,0]}^2} + \frac{m(g^2 - k^2u_{[0,1]}^4)}{\eta u_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{U}_1\\ &- m\left(\frac{u_{[0,1]}^2 f_x}{u_{[0,0]}^2} + \frac{3u_{[0,1]}g - u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3}\right)\boldsymbol{U},\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =&\boldsymbol{U}_3 + f_x\boldsymbol{U}_2 + 3\left(\frac{u_{[0,0]}u_{[2,2]}}{\eta} + \frac{(k+1)(2u_{[0,1]}u_{[0,0]}f_x + 3g + 3k^2u_{[0,1]}^2)}{3u_{[0,0]}^2}\right.\\ &\left.+\frac{mg^2}{\eta u_{[0,0]}^2} - \frac{mku_{[0,1]}^2(\eta + ku_{[0,1]}^2)}{\eta u_{[0,0]}}\right)\boldsymbol{U}_1 - m\left(\frac{u_{[0,1]}^2 f_x}{u_{[0,0]}^2} + \frac{3u_{[0,1]}g - u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3}\right)\boldsymbol{U},\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$f = \frac{3}{2}\ln\frac{u_{[0,0]}}{\eta},\ \ g = u_{[0,0]}(u_{[0,2]} + u_{[1,1]}) - u_{[0,1]}^2,\ \ \eta = u_{[0,0]}u_{[1,1]} + mu_{[0,1]}^2,\ \ k^2 = m+1,\ \ m\,k \neq 0;$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =&\boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}(\ln f)_x\boldsymbol{U}_2 + 3\left(\frac{b\,u_{[0,1]}\,f_x^2}{f\,g^2} - \frac{(a + fu_{[0,2]})\,f_x}{f\,g} + \frac{4u_{[0,1]}^3(h^2 - (b^2+1)g^2u_{[0,0]}^2)}{3g^4u_{[0,0]}^3}\right.\\ &\left.- \frac{u_{[0,1]}\,h}{u_{[0,0]}^2\,f\,g^2}\left(a + fu_{[0,2]} - \frac{u_{[0,1]}(3\,g - 4\,b)\,f_x}{2g} - \frac{(g^2+1)\,f\,u_{[0,1]}^2}{3\,g^2\,u_{[0,0]}}\right)\right)\boldsymbol{U}\\ &+ \frac{3}{2a}\left(u_{[2,2]}f - \frac{(a + fu_{[0,2]})^2}{u_{[0,0]}f} - \frac{(u_{[0,0]}g(ff_xu_{[0,0]}u_{[0,1]} - (a + fu_{[0,2]})g) + u_{[0,1]}^2fh)^2}{u_{[0,0]}^3fg^6}\right)\boldsymbol{U}_1,\end{aligned} \tag{2.8}$$

здесь a, b — константы, $g = b + fu_{[0,0]}$, $h = g^2 + 2\,b\,g - 1$, а f удовлетворяет уравнению

$$u_{[0,0]}u_{[1,1]} - u_{[0,1]}^2 = \frac{a\,u_{[0,0]}}{f} + \frac{u_{[0,1]}^2}{(b + fu_{[0,0]})^2}.$$

Вариант (b). Данный вариант не удалось просчитать полностью в общем виде. Сложность вычислений обусловлена тем, что в нем, кроме результатов [1], [3] и [4], содержатся многочисленные разновидности уравнений случая $\partial^2 f_0/\partial u_{[2,2]}^2 \neq 0$. Вместе с тем, в [2] и [7] присутствуют примеры интегрируемых уравнений, в которых выполнено условие $\psi = 0$ и при этом в (2.1)

$$f = \frac{u_{[0,0]}}{u_{[0,0]}u_{[1,1]} - u_{[0,1]}^2}. \tag{2.9}$$

Указанная функция f инвариантна относительно преобразования (1.6), поэтому, с целью получения новых интегрируемых уравнений, мы выбрали именно (2.9) в качестве дополнительного ограничения. Анализ условий интегрируемости позволил установить, что при условии (2.9) в данном варианте, с точностью до точечных преобразований, имеются только следующие семь уравнений, удовлетворяющие семи ρ_n-условиям интегрируемости:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =& \boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}(\ln f)_x \boldsymbol{U}_2 \\ &+ \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \frac{g^2}{u_{[0,0]}^2} - \frac{(1+f u_{[0,2]})^2}{f u_{[0,0]}} - \frac{(u_{[0,1]} - 2k_1 u_{[0,0]})u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{U}_1 \\ &- \frac{3}{2}\left(k_1 f u_{[2,2]} - \frac{(k_1 u_{[0,0]} - 2u_{[0,1]})g^2}{u_{[0,0]}^3} - \frac{2(u_{[0,0]}u_{[0,2]} + 2(k_1 u_{[0,0]} - u_{[0,1]})u_{[0,1]})g}{u_{[0,0]}^3}\right. \\ &\left. - \frac{2u_{[1,2]}}{u_{[0,0]}} - \frac{k_1 f u_{[0,2]}^2}{u_{[0,0]}} - \frac{u_{[0,1]}^2(3k_1 u_{[0,0]} - 2u_{[0,1]})}{u_{[0,0]}^3} + \frac{k_1 u_{[0,0]} + 2u_{[0,1]}}{f u_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{U},\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =& \boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}(\ln f)_x \boldsymbol{U}_2 + \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \frac{g^2}{u_{[0,0]}^2} - \frac{(1+f u_{[0,2]})^2}{f u_{[0,0]}} + \frac{2u_{[0,1]}^2 f}{3(a\xi+1)^2}\right)\boldsymbol{U}_1 \\ &- 3\left(\frac{2a u_{[0,1]}^3 f^2}{9\xi(a\xi+1)^3} - \frac{u_{[0,1]}g^2}{u_{[0,0]}^3(a\xi+1)^2} + \frac{(1+f u_{[0,2]})g}{f u_{[0,0]}^2(a\xi+1)}\right. \\ &\left. - \frac{(g+2u_{[0,1]})(u_{[0,0]}(1+f u_{[0,2]}) - 2u_{[0,1]}f) + 2f u_{[0,1]}^3}{f u_{[0,0]}^3} + \frac{u_{[0,1]}g^2}{u_{[0,0]}^3}\right)\boldsymbol{U},\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =& \boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}(\ln f)_x \boldsymbol{U}_2 \\ &+ \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \frac{g^2}{u_{[0,0]}^2} - \frac{(1+f u_{[0,2]})^2}{f u_{[0,0]}} + \frac{k_1(2u_{[0,0]} + 3u_{[0,1]})^2 f}{u_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{U}_1 \\ &+ \left(f u_{[2,2]} + \frac{3(1+f u_{[0,2]})g}{f u_{[0,0]}^2} - \frac{(1+f u_{[0,2]})^2}{f u_{[0,0]}} - \frac{(9k_1+4)(u_{[0,0]} + u_{[0,1]})u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^3}\right. \\ &\left. - \frac{(2u_{[0,0]} + 3u_{[0,1]})(2u_{[0,1]}fg - (1+f u_{[0,2]})u_{[0,0]})}{f u_{[0,0]}^3} - \frac{(u_{[0,0]} + 3u_{[0,1]})g^2}{u_{[0,0]}^3}\right)\boldsymbol{U},\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t =& \boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}(\ln f)_x \boldsymbol{U}_2 \\ &+ \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \frac{g^2}{u_{[0,0]}^2} - \frac{(1+f u_{[0,2]})^2}{f u_{[0,0]}} - \frac{3(2k_1 u_{[0,0]} + u_{[0,1]})^2 f}{4u_{[0,0]}(a\xi+1)^2}\right)\boldsymbol{U}_1 \\ &+ 3\left(k_1 f u_{[2,2]} + \frac{(2k_1 u_{[0,0]} + u_{[0,1]})g^2}{u_{[0,0]}^3(a\xi+1)^2} - \frac{(k_1 u_{[0,0]} + u_{[0,1]})(g+2u_{[0,1]})^2}{u_{[0,0]}^3} + \frac{k_1(1 - f^2 u_{[0,2]}^2)}{f u_{[0,0]}}\right. \\ &+ \frac{(u_{[0,1]} + g)(1+f u_{[0,2]})}{f u_{[0,0]}^2} + \frac{2u_{[0,1]}^2(4u_{[0,1]} + 3g)}{3u_{[0,0]}^3} + \frac{(f u_{[0,1]}^2 - (1+f u_{[0,2]})u_{[0,0]})g}{f u_{[0,0]}^3(a\xi+1)} \\ &\left. + \frac{af(3cu_{[0,0]} + u_{[0,1]})\xi u_{[0,1]}^2}{4u_{[0,0]}^2(a\xi+1)^3} - \frac{3k_1 f(4k_1 u_{[0,0]} + u_{[0,1]})u_{[0,1]}}{4u_{[0,0]}(a\xi+1)^3} + \frac{c^3(3a\xi+1)}{a^2(a\xi+1)^3}\right)\boldsymbol{U},\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_t =&\boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}(\ln f)_x \boldsymbol{U}_2 \\
&+ \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \frac{(g+u_{[0,1]})^2}{(1-f^{-1})u_{[0,0]}^2} - \frac{(1+fu_{[0,2]})^2}{fu_{[0,0]}} + \frac{u_{[0,1]}^2 f}{u_{[0,0]}(u_{[0,0]}+a)} \right)\boldsymbol{U}_1 \\
&+ 3\left(\frac{u_{[0,1]}^2 fg - (1+fu_{[0,2]})u_{[0,0]}u_{[0,1]}}{fu_{[0,0]}^2(u_{[0,0]}+a)} - \frac{(a-2)u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^2(u_{[0,0]}+a)^2} \right. \\
&\left. + b\sqrt{(u_{[0,0]}+a)(1-f^{-1})} \right)\boldsymbol{U},
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_t =&\boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}(\ln f)_x \boldsymbol{U}_2 + \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \left(\frac{g}{u_{0,0]}} - \frac{k_1\varphi}{u_{[0,0]}\xi} \right)^2 - \frac{(1+fu_{[0,2]})^2}{fu_{[0,0]}} \right. \\
&\left. - \frac{k_2(u_{[0,1]}-2u_{[0,0]})u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}^2} \right)\boldsymbol{U}_1 - \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \left(\frac{g}{u_{0,0]}} - \frac{k_1\varphi}{6u_{[0,0]}\xi} \right)^2 \right. \\
&+ \frac{2(1-fu_{[1,2]})(1+fu_{[0,2]})}{fu_{[0,0]}} - \frac{2\varphi(g+u_{[0,1]})^2}{u_{[0,0]}^3} - \frac{(u_{[0,0]}-2u_{[0,1]})(1+fu_{[0,2]})^2}{fu_{[0,0]}^2} \\
&+ \frac{k_2 u_{[0,1]}^2(3u_{[0,0]}-2u_{[0,1]})}{3u_{[0,0]}^3} + \frac{2k_1\varphi^2 g}{u_{[0,0]}^3\xi} + \frac{6k_1\varphi u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^3\xi} \\
&\left. - \frac{6k_1\varphi(1+fu_{[0,2]})}{fu_{[0,0]}^2\xi} - \frac{2(3u_{[0,0]}-u_{[0,1]})u_{[0,1]}^2}{3u_{[0,0]}^3} \right)\boldsymbol{U},
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_t =&\boldsymbol{U}_3 + \frac{3}{2}(\ln f)_x \boldsymbol{U}_2 + \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \left(\frac{g}{u_{[0,0]}} + \frac{2k_1\varphi}{u_{[0,0]}(a\xi+1)} \right)^2 - \frac{(1+fu_{[0,2]})^2}{fu_{[0,0]}} \right. \\
&\left. - \frac{k_2(a\xi u_{[0,1]}+u_{[0,0]})(a\xi(2u_{[0,0]}-u_{[0,1]})+u_{[0,0]})}{u_{[0,0]}^2(a\xi+1)^2} \right)\boldsymbol{U}_1 - \frac{3}{2}\left(f u_{[2,2]} + \frac{2a\xi u_{[0,1]}g^2}{u_{[0,0]}^3(a\xi+1)} \right. \\
&+ \frac{2(a\xi u_{[0,1]}+u_{[0,0]})g^2}{u_{[0,0]}^3(a\xi+1)^2} - \frac{g^2}{u_{[0,0]}^2} - \frac{2a\xi(1+fu_{[0,2]})g}{fu_{[0,0]}^2(a\xi+1)} - \frac{4u_{[0,1]}\varphi g}{u_{[0,0]}^3} \\
&- \frac{2u_{[0,1]}^2 g}{u_{[0,0]}^3(a\xi+1)} + \frac{4k_1\varphi^2(2g+k_1u_{[0,0]})}{u_{[0,0]}^3(a\xi+1)^2} + \frac{1-f^2u_{[0,2]}^2}{fu_{[0,0]}} - \frac{2u_{[0,1]}(1+fu_{[0,2]})}{fu_{[0,0]}^2} \\
&+ \frac{8k_1^2\varphi^3}{3u_{[0,0]}^3(a\xi+1)^3} - \frac{2a\xi k_2(afu_{[0,1]}+\xi)^2\varphi}{3fu_{[0,0]}^2(a\xi+1)^3} - \frac{k_2(afu_{[0,1]}+\xi)^2}{3fu_{[0,0]}(a\xi+1)^2} \\
&\left. + \frac{4k_1\varphi(fu_{[0,1]}(g-u_{[0,1]})+(1+fu_{[0,2]})u_{[0,0]})}{fu_{[0,0]}^3(a\xi+1)} - \frac{4(3u_{[0,0]}-2u_{[0,1]})u_{[0,1]}^2}{3u_{[0,0]}^3} \right)\boldsymbol{U},
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

где a, b, k_1, k_2 — константы и

$$
g = f(u_{[0,0]}u_{[1,2]} - u_{[0,1]}u_{[0,2]}) - 2u_{[0,1]}, \quad \varphi = u_{[0,0]} - u_{[0,1]}, \quad \xi^2 = fu_{[0,0]}, \quad f = \frac{u_{[0,0]}}{u_{[0,0]}u_{[1,1]} - u_{[0,1]}^2}.
$$

3. Заключительные замечания

Доказательством точной интегрируемости (2.4)–(2.8) и (2.10)–(2.16) могли бы служить авто-преобразования Беклунда или дифференциальные подстановки, связывающие их решения либо между собой, либо с решениями уже известных интегрируемых случаев (см. [2]

и [11]). Уравнение (2.10) впервые получено в [2] с помощью дифференциальной подстановки первого порядка в точно интегрируемое. Других дифференциальных подстановок мы не нашли, а построение авто-преобразований Беклунда для столь громоздких уравнений довольно трудоемкая задача, требующая убедительных мотивов. Вместе с тем, все найденные в данной работе уравнения имеют несколько нетривиальных законов сохранения и удовлетворяют семи ρ_n-условиям интегрируемости (1.5), поэтому скорее всего являются интегрируемыми.

Благодарности

Автор благодарит профессора А.Г. Мешкова за полезные обсуждения хода вычислений и полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.Ю. Балахнёв. *Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений* // ТМФ. **142**:1 (2005), 13–20.
2. М.Ю. Балахнёв. *Интегрируемые векторные изотропные уравнения, допускающие дифференциальные подстановки первого порядка* // Матем. заметки. **94**:2 (2013), 323–330.
3. М.Ю. Балахнёв, А.Г. Мешков. *Интегрируемые векторные эволюционные уравнения, имеющие сохраняющиеся плотности нулевого порядка* // ТМФ. 164:2 (2010), 207–213.
4. А.Г. Мешков, М.Ю. Балахнёв. *Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений 3-го порядка* // Матем. заметки, **112**:1 (2022), 88–94.
5. А.Г. Мешков, В.В. Соколов. *Классификация интегрируемых дивергентных N-компонентных эволюционных систем* // ТМФ. **139**:2 (2004), 192–208.
6. С.И. Свинолупов, В.В. Соколов. *Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений* // ТМФ. **100**:2 (1994), 214–218.
7. M.Ju. Balakhnev, A.G. Meshkov. *On a classification of integrable vectorial evolutionary equations* // J. Nonlinear Math. Phys. **15**:2 (2008), 212–226.
8. H.H. Chen, Y.C. Lee, C.S. Liu. *Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method* // Phys. Scr. **20**:3-4 (1979), 490–492.
9. A.G. Meshkov. *Necessary conditions of the integrability* // Inverse Problems. **10**:3 (1994), 635–653.
10. A.G. Meshkov and M.Ju. Balakhnev. *Integrable anisotropic evolution equations on a Sphere* // SIGMA. **1** (2005), 27–37.
11. A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. *Integrable evolution euations on the N-dimensional sphere* // Commun. Math. Phys. **232**:1 (2002), 1–18.
12. V.V. Sokolov, T. Wolf. *Classification of integrable polynomial vector evolution equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), 11139–11148.

Максим Юрьевич Балахнёв,
Среднерусский институт управления – филиал РАНХиГС,
ул. Октябрьская, 12,
302028, г. Орел, Россия
E-mail: balakhnev@yandex.ru