ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 4 (2023). С. 42-60.

УДК 517.5

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ВЕСАМИ МАКЕНХАУПТА

О.Л. ВИНОГРАДОВ

Аннотация. В работе устанавливаются прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах Лебега $L_{p,w}$ с весами Макенхаупта w на оси и на периоде. Классическое определение модуля непрерывности может не иметь смысла в весовых пространствах. Поэтому в качестве модулей непрерывности, в том числе нецелого порядка, используются нормы степеней отклонений средних Стеклова. Выводятся свойства этих величин, часть которых аналогична свойствам обычных модулей непрерывности. В добавление к прямым и обратным теоремам получены соотношения эквивалентности между модулями непрерывности и K и R-функционалами.

Доказательства основаны на оценках норм сверточных операторов и не используют максимальную функцию. Это позволяет установить результаты при всех $p \in [1, +\infty)$, не исключая случай $p = 1$. Применявшиеся ранее методы, использовавшие в том или ином виде максимальную функцию, непригодны при $p \to 1$. Кроме того, подход на основе сверток позволяет получить результаты одновременно в периодическом и непериодическом случае. Константы за редким исключением не указываются явно, но всегда контролируется их зависимость от параметров. Все константы в оценках зависят от $[w]_p$ (характеристики Макенхаупта веса w), а иная зависимость от w и p отсутствует. Нормы сверточных операторов оценены в терминах $[w]_p$ явно. Методы данной работы могут быть применены к доказательству прямых и обратных теорем в более общих функциональных пространствах.

Ключевые слова: наилучшие приближения, модули непрерывности, веса Макенхаупта, свертка.

Mathematics Subject Classification: 41A17, 42A10

1. Введение

1.1. Обзор результатов. Распространению классических теорем теории приближения (см., например, [1]) с пространств L_p на более общие пространства функций посвящено немало работ. Назовем лишь некоторые [2]– [7], непосредственно относящиеся к теме данной статьи, т.е. пространствам Лебега $L_{p,w}$ с весами Макенхаупта w. В ряде работ эти вопросы изучались в более общих весовых пространствах, включающих $L_{p,w}$ как частный случай (пространствах Орлича и Лоренца, пространствах Лебега с переменным показателем); см., например, [8], [9] и библиографию в [7], [9].

В перечисленных источниках рассматриваются пространства периодических функций (за исключением [3]) и случай $p > 1$. Константы в оценках зависят от $[w]_p$ (характеристики Макенхаупта веса $w \in A_p$) и от p. Из-за зависимости констант от p результаты в

O.L. Vinogradov, Direct and inverse theorems of approximation theory in the Lebesgue spaces with Muckenhoupt weights.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00178, https://rscf.ru/project/23-11-00178/.

Поступила 6 июня 2023 г.

такой форме не переносятся на случай $p = 1$, даже если $w \in A_1$. Тем самым теоремы в классическом, т.е. безвесовом случае не являются следствиями этих оценок.

Такое положение вызвано не сутью дела, а методами доказательств, как то использование максимальной функции, ограниченности преобразования Гильберта, приближений с помощью сумм Фурье и других методов, непригодных при $p \to 1$. Вместо этого мы показываем, что прямые и обратные теоремы получаются как следствие оценок норм операторов свертки с симметрично убывающими ядрами.

Подход к оценкам сверток, не использующий максимальную функцию, применялся еще в оригинальных работах Розенблюма [10] и Макенхаупта [11]. Затем он был развит в серии работ Нахмана и Осиленкера [12]– [15] в связи с линейными методами суммирования рядов Фурье периодических функций. Результаты в [12]– [15] верны при всех $p \in [1, +\infty)$, но константы в оценках (по крайней мере в формулировках) тоже зависят от p. Случаи различных показателей, двухвесовые, многомерные и векторнозначные обобщения, изучавшиеся в указанных источниках, в настоящей работе не рассматриваются.

Мы за редким исключением не указываем константы явно, но всегда контролируем их зависимость от параметров. Все константы в оценках зависят от $[w]_p$, а иная зависимость от w и p отсутствует. Кроме того, мы используем единый подход и получаем результаты одновременно в периодическом и непериодическом случае.

1.2. Обозначения. В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ — множества комплексных, вещественных, неотрицательных вещественных, целых, натуральных чисел соответственно; $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности, в остальных случаях полагаем $\frac{0}{0} = 0$. Эквивалентные функции отождествляются. Через $C(\alpha, \beta, \ldots)$ обозначаются величины, зависящие только от указанных параметров, не обязанные совпадать даже в пределах одной формулы.

Неотрицательная, измеримая, почти везде конечная и почти везде положительная функция называется весом. Если $p \in [1, +\infty)$, w — вес, то $L_{p,w}(\mathbb{R})$ есть пространство суммируемых на $\mathbb{R}$ с p-й степенью и весом w функций, с нормой

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p w \right)^{1/p}.$$

Аналогично определяется пространство 2π-периодических функций $L_{p,w}(\mathbb{T})$. Норма в нем обозначается так же, а вес w тоже считается 2π-периодическим. Символ $L_{p,w}$ означает $L_{p,w}(\mathbb{R})$ или $L_{p,w}(\mathbb{T})$. Аналогичный смысл имеет обозначение $L_{p,d\mu}$. Единичный вес в обозначении опускаем и пишем просто L_p, $\|f\|_p$ и т.п.

Далее, $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ — множества целых функций экспоненциального типа не больше σ и меньше σ соответственно,

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} = \inf_{g \in \mathbf{E}_\sigma} \|f - g\|_{p,w}$$

есть наилучшее приближение функции $f \in L_{p,w}$ функциями из $\mathbf{E}_\sigma$ в пространстве $L_{p,w}$; аналогично определяется величина $\mathcal{A}_{\sigma-0}(f)_{p,w}$. В периодическом случае $\mathcal{A}_\sigma(f)$ совпадает с $E_{\lfloor\sigma\rfloor}(f)$ ($\lfloor\sigma\rfloor$ — целая часть числа σ) — наилучшим приближением f тригонометрическими многочленами степени не выше σ.

Говорят, что функция $F\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ симметрично убывает, если она четна и убывает на $\mathbb{R}_+$. Если $K\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, то через K^* обозначается горбатая мажоранта функции K, т.е. такая симметрично убывающая функция, что $|K| \leqslant K^*$. Через $\mathcal{R}$ обозначается множество суммируемых на $\mathbb{R}$ симметрично убывающих функций, а через $\mathcal{R}^*$ — множество функций, имеющих суммируемую горбатую мажоранту.

Далее, χ_E — характеристическая функция множества E,

$$S_h f(x) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(x-t)\,dt, \qquad S_{h,\tau} f(x) = S_h f(x+\tau)$$

двусторонняя и сдвинутая функции Стеклова первого порядка функции f с шагом $h > 0$, $S_{h,\frac{h}{2}} f$ — односторонняя функция Стеклова. Как обычно, если U — оператор, то U^m означает его m-ю степень, $U^0 = I$ есть тождественный оператор.

Свертка и преобразование Фурье нормируются равенствами

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt, \qquad \mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-iyt}\,dt.$$

При такой нормировке $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$.

2. Свертки в весовых пространствах

2.1. Оценки сверток через характеристики Макенхаупта. Для заданного на $\mathbb{R}$ веса w положим

$$[w]_p = \begin{cases} \sup\limits_Q \left\{ \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \right\}, & p \in (1,+\infty), \\ \sup\limits_Q \left\{ \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\operatorname*{ess\,inf}_{t\in Q} w(t)\right)^{-1} \right\}, & p = 1, \end{cases}$$

где верхние грани берутся по всевозможным отрезкам в $\mathbb{R}$, а $|Q|$ — длина отрезка Q. Если $[w]_p < +\infty$, то говорят, что вес w удовлетворяет условию Макенхаупта A_p или принадлежит классу Макенхаупта A_p. Со свойствами весов Макенхаупта можно познакомиться в [16], [17]. По неравенству Гёльдера функция $p \mapsto [w]_p$ убывает, откуда классы A_p расширяются с ростом p.

Бо́льшая часть применений весов Макенхаупта связана с максимальными функциями и сингулярными интегральными операторами, однако эти вопросы не играют роли в настоящей работе. Единственным важным для нас свойством весов Макенхаупта будет оценка

$$\|f*K\|_{p,w} \leqslant B\|K\|_1\|f\|_{p,w}, \quad K \in \mathcal{R},\ f \in L_{p,w}, \tag{2.1}$$

где константа B зависит только от $[w]_p$.

Хорошо известно следующее характеристическое свойство весов Макенхаупта [17, § 5.2.1]. Пусть μ — борелевская мера на $\mathbb{R}$, $p \in [1,+\infty)$, $K \in \mathcal{R}$, $K_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}K(\frac{t}{\varepsilon})$. Если для всех $f \in L_{p,d\mu}$ неравенство

$$\|f*K_\varepsilon\|_{p,d\mu} \leqslant B\|K\|_1\|f\|_{p,d\mu} \tag{2.2}$$

выполняется с константой B, не зависящей от ε, то $d\mu(x) = w(x)\,dx$, где $w \in A_p$. Обратно, если $w \in A_p$ и $d\mu(x) = w(x)\,dx$, то неравенство (2.2) выполняется с константой B, не зависящей от K и ε.

Обозначим

$$B_p[w] = \sup_{f\in L_{p,w}, K\in\mathcal{R}} \frac{\|f*K\|_{p,w}}{\|K\|_1\|f\|_{p,w}}.$$

Тем самым $B_p[w]$ есть наименьшая не зависящая от K константа B в неравенстве (2.1). Из этого определения сразу следует неравенство

$$\|f*K\|_{p,w} \leqslant B_p[w]\|K^*\|_1\|f\|_{p,w}, \quad K \in \mathcal{R}^*,\ f \in L_{p,w}. \tag{2.3}$$

Многие классические ядра: Стеклова, Фейера, Рогозинского, Валле Пуссена, Пуассона и другие принадлежат $\mathcal{R}^*$.

В безвесовом случае $w \equiv 1$ общеизвестна оценка

$$\|f * K\|_p \leqslant \|K\|_1 \|f\|_p, \quad K \in L_1(\mathbb{R}),\ f \in L_p,$$

совпадающая с (2.3) для $K \in \mathcal{R}$. Однако если $K \in \mathcal{R}^* \setminus \mathcal{R}$, то $\|K^*\|_1$ может быть существенно больше, чем $\|K\|_1$. Приведем пример. Пусть $\tau \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $K = \frac{1}{h}\chi_{(-\tau-h/2,-\tau+h/2)}$ — сдвинутое ядро Стеклова первого порядка. Тогда $K^* = \frac{1}{h}\chi_{(-|\tau|-h/2,|\tau|+h/2)}$. Отсюда

$$\|K^*\|_1 = 1 + \frac{2|\tau|}{h},$$

что велико, если величина сдвига $|\tau|$ велика по сравнению с шагом h. В частности, для одностороннего ядра Стеклова ($\tau = h/2$) переход к горбатой мажоранте увеличивает L_1-норму вдвое.

Отметим, что при фиксированном $\tau \neq 0$ семейство операторов $\{S_{h,\tau}\}_{h>0}$ не ограничено в пространствах $L_{p,w}$, не замкнутых относительно сдвига. В самом деле, возьмем функцию $f \in L_{p,w}$, такую что $f \geqslant 0$ и $f(\cdot + \tau) \notin L_{p,w}$. Тогда $S_{h,\tau} f \to f(\cdot + \tau)$ при $h \to 0+$ почти везде, откуда по теореме Фату

$$\varliminf_{h\to 0+} \int_{\mathbb{R}} \big(S_{h,\tau} f(x)\big)^p w(x)\, dx \geqslant \int_{\mathbb{R}} f^p(\tau + x) w(x)\, dx = +\infty.$$

Тем более не ограничено всё семейство операторов $\{S_{h,\tau}\}_{\tau\in\mathbb{R},h>0}$.

В следующей лемме константы $B_p[w]$ оцениваются через характеристики Макенхаупта.

Лемма 2.1. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $w \in A_p$. Тогда*

$$B_p[w] \leqslant 2^{\min\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\}} [w]_p^{1/p}. \tag{2.4}$$

Если, кроме того, $w \in A_1$, то $B_p[w] \leqslant B_1^{1/p}[w]$ и

$$B_1[w] = \sup_{h>0} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{S_h w(t)}{w(t)} \leqslant [w]_1. \tag{2.5}$$

Доказательство. 1. Сначала докажем лемму для пространств $L_{p,w}(\mathbb{R})$. Обозначим

$$Q_x = [x - 1/2, x + 1/2], \qquad Q = Q_0.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $f \geqslant 0$. Достаточно доказать оценку (2.1) для ядра $K = \chi_Q$. Действительно, поскольку величина $[w]_p$ не меняется при масштабировании, доказанное будет верно для ядер Стеклова $K = \frac{1}{h}\chi_{[-h/2,h/2]}$, а тогда и для линейных комбинаций ядер Стеклова с положительными коэффициентами. В общем случае приблизим ядро $K \in \mathcal{R}$ возрастающей последовательностью таких линейных комбинаций и перейдем к пределу по теореме Леви.

1.1. Для любого веса λ по неравенству Гёльдера

$$(f * \chi_Q)^p(x) = \left(\int_{Q_x} f\right)^p \leqslant \left(\int_{Q_x} f^p w\lambda\right) \left(\int_{Q_x} w^{-q/p}\lambda^{-q/p}\right)^{p/q}.$$

Интегрируя по x и меняя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (f * \chi_Q)^p(x) w(x)\, dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{Q_x} f^p(t) w(t)\lambda(t)\, dt\right) \left(\int_{Q_x} w^{-q/p}\lambda^{-q/p}\right)^{p/q} w(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^p(t) w(t)\lambda(t) I(t)\, dt,\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$I(t) = \int_{Q_t} \left(\int_{Q_x} w^{-q/p}\lambda^{-q/p}\right)^{p/q} w(x)\, dx.$$

1.2. Пусть $p \in [2, +\infty)$. Положим $\lambda = 1$. По определению величины $[w]_p$ имеем

$$I(t) = \int_{Q_t} \left(\int_{Q_x} w^{-q/p} \right)^{p/q} w(x)\, dx \leqslant [w]_p \int_{Q_t} \left(\int_{Q_x} w \right)^{-1} w(x)\, dx.$$

Обозначим через Q_t^- левую, а через Q_t^+ правую половину отрезка Q_t. Если $x \in Q_t^{\pm}$, то $Q_x \supset Q_t^{\pm}$. Поэтому

$$\int_{Q_t} \left(\int_{Q_x} w \right)^{-1} w(x)\, dx \leqslant \int_{Q_t^-} \left(\int_{Q_t^-} w \right)^{-1} w(x)\, dx + \int_{Q_t^+} \left(\int_{Q_t^+} w \right)^{-1} w(x)\, dx = 2,$$

откуда $I(t) \leqslant 2[w]_p$. Подставляя эту оценку в (2.6), получаем требуемое.

1.3. Пусть $p \in (1, 2]$. Положим $\lambda(t) = \left(\int_{Q_t} w^{-q/p} \right)^{p/q}$. Аналогично, разбивая отрезок Q_x пополам, находим

$$\int_{Q_x} w^{-q/p} \lambda^{-q/p} = \int_{Q_x} w^{-q/p}(u) \left(\int_{Q_u} w^{-q/p} \right)^{-1} du \leqslant 2.$$

Следовательно,

$$\lambda(t) I(t) \leqslant 2^{p/q} \lambda(t) \int_{Q_t} w(x)\, dx \leqslant 2^{p/q} [w]_p.$$

Остается подставить эту оценку в (2.6).

1.4. Пусть $w \in A_1$. Докажем неравенство (2.5). Обозначим его среднюю часть через $C[w]$. При всех $h > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|S_h f\|_{1,w} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(t)\, dt\, w(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} w(x)\, dx \right) dt \leqslant C[w] \int_{\mathbb{R}} f(t) w(t)\, dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство $B_1[w] \leqslant C[w]$ и его точность. Оценка $C[w] \leqslant [w]_1$ очевидна.

Оценка $B_p[w] \leqslant B_1^{1/p}[w]$ вытекает из неравенства Гёльдера

$$(f * K)^p \leqslant \|K\|_1^{p/q} (f^p * K)$$

или из интерполяционной теоремы Рисса–Торина.

2. Для доказательства леммы в периодическом случае нужны лишь небольшие изменения. Пусть функция f и вес w имеют период 2ℓ. Напомним, что по-прежнему $K \in L_1(\mathbb{R})$, а свертка определяется как интеграл по всей оси. Тогда в формуле (2.6) внешние интегралы берутся по $[-\ell, \ell]$ и используется равенство

$$\int_{-\ell}^{\ell} \int_{Q_x} g(x,t)\, dt\, dx = \int_{-\ell}^{\ell} \int_{Q_t} g(x,t)\, dx\, dt,$$

верное, если функция g имеет период $2l$ по обеим переменным. Так получается оценка (2.4) для ядра $K = \chi_Q$. Масштабированием получаем, что если неравенство (2.4) верно для ядра K и функций f и w периода 2ℓ, то оно верно для ядра $K_h = \frac{1}{h} K(\frac{\cdot}{h})$ и функций $f(h\cdot)$ и $w_{1/h} = hw(h\cdot)$ периода $2\ell/h$. Поскольку $[w_{1/h}]_p = [w]_p$, а ℓ произвольно, мы получаем (2.4) для всех ядер Стеклова. Завершается доказательство аналогично. $\square$

Точные константы в весовых неравенствах (2.1) неизвестны. В [10] впервые был получен критерий ограниченности некоторых операторов свертки, в том числе с ядрами Стеклова, Пуассона и Фейера, в пространствах $L_{p,w}(\mathbb{T})$. Макенхаупт [11] показал, что этот критерий эквивалентен условию A_p. В [11] получено неравенство (2.1) для средних Стеклова в $L_{p,w}(\mathbb{R})$ с константой $\frac{3}{2} \cdot 3^{1/p} [w]_p^{1/p}$, а в $L_{p,w}(\mathbb{T})$ — с константой $3 \cdot 6^{1/p} [w]_p^{1/p}$. Затем из него выведено неравенство (2.1) для интегралов Пуассона без указания константы. Неравенство (2.1) в $L_{p,w}(\mathbb{T})$ для ядер класса $\mathcal{R}^*$ получено в [14] и [15] с двусторонней оценкой $B_p[w] \asymp C(p)[w]_p^{1/p}$. То наблюдение, что неравенство (2.1) для средних Стеклова влечет неравенство с той же константой для всех ядер $K \in \mathcal{R}$, в неявном виде имеется в [17]. Анализ рассуждения Стейна приводит к оценке сверху $B_p[w] \leqslant 2^{1+\frac{1}{p}}[w]_p^{1/p}$. Там же имеется оценка снизу $B_p[w] \geqslant \frac{1}{2}[w]_p^{1/p}$. Из доказательства в [15, теорема 1] следует та же оценка снизу. В [18, лемма 2.18] доказано неравенство (2.1) для средних Стеклова в $L_{p,w}(\mathbb{R})$ с константой вида $C(p)[w]_p^{1/p}$ и отмечено, что показатель $1/p$, вообще говоря, уменьшить нельзя. Укажем еще очевидную оценку снизу $B_p[w] \geqslant 1$. В [14], [15], [17], [18] имеются также многомерные и двухвесовые обобщения, которых мы не касаемся.

Следствие 2.1. *Пусть $p \in [1,+\infty)$, $w \in A_p$, $K \in \mathcal{R}^*$, $f \in L_{p,w}$, $\sigma > 0$. Тогда*

$$\mathcal{A}_\sigma(f*K)_{p,w} \leqslant B_p[w] \inf_{K_\sigma \in \mathbf{E}_\sigma} \|(K-K_\sigma)^*\|_1 \mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} \leqslant B_p[w]\|K^*\|_1 \mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w}.$$

В этом неравенстве $\mathcal{A}_\sigma$ и $\mathbf{E}_\sigma$ можно заменить на $\mathcal{A}_{\sigma-0}$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$.

Доказательство. Докажем левое неравенство, правое тривиально. Для любых функций $f_\sigma \in \mathbf{E}_\sigma \cap L_{p,w}$ и $K_\sigma \in \mathbf{E}_\sigma \cap \mathcal{R}^*$ будет

$$\mathcal{A}_\sigma(f*K)_{p,w} = \mathcal{A}_\sigma\big((f-f_\sigma)*(K-K_\sigma)\big)_{p,w}.$$

Остается воспользоваться оценкой (2.3) и перейти в правой части к инфимуму по f_σ и K_σ. Неравенство для $\mathcal{A}_{\sigma-0}$ доказывается аналогично. □

2.2. Оценки горбатой мажоранты. В приложениях ядро K обычно задается в терминах преобразования Фурье и может зависеть от параметров. Для применения леммы 2.1 требуется знать, имеет ли ядро K суммируемую горбатую мажоранту, и уметь оценивать ее L_1-норму. Некоторые элементарные оценки собраны в следующей лемме.

Лемма 2.2. *Пусть*

$$K(t) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{ity}\,dy.$$

1. Если $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, то $|K(t)| \leqslant \|\varphi\|_1$.

2. Пусть $s-1 \in \mathbb{N}$, существует абсолютно непрерывная $\varphi^{(s-2)}$ и функции $\varphi, \dots, \varphi^{(s-1)}$ стремятся к нулю на бесконечности. Если вариация $\varphi^{(s-1)}$ (обозначим ее $\|d\varphi^{(s-1)}\|_1$) конечна, то $|K(t)| \leqslant |t|^{-s}\|d\varphi^{(s-1)}\|_1$. В частности, если $\varphi^{(s-1)}$ абсолютно непрерывна, а $\varphi^{(s)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $|K(t)| \leqslant |t|^{-s}\|\varphi^{(s)}\|_1$.

3. Пусть

$$\varphi(y) = c(iy)^{-\alpha} + \varphi_1(y) \tag{2.7}$$

или

$$\varphi(y) = c|y|^{-\alpha} + \varphi_1(y), \tag{2.8}$$

где $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in (0,1)$, $\varphi_1 \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда соответственно

$$|K(t)| \leqslant \frac{\pi|c|}{\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}|t|^{\alpha-1} + \|\varphi_1\|_1$$

или

$$|K(t)| \leqslant \frac{2\pi|c|}{\Gamma(\alpha)}|t|^{\alpha-1} + \|\varphi_1\|_1.$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, второе получается интегрированием по частям. Третье вытекает из равенств

$$\int_{\mathbb{R}} |y|^{-\alpha} e^{ity}\, dy = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} |t|^{\alpha-1},$$

$$\int_{\mathbb{R}} (iy)^{-\alpha} e^{ity}\, dy = \begin{cases} \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

□

Из леммы 2.1 следует, что функции f из классов $L_{p,w}$ локально суммируемы и

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)}\, dt < +\infty.$$

Поэтому можно говорить об их преобразовании Фурье в пространстве умеренных распределений $\mathcal{S}'$.

Пусть $\alpha > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Производная Вейля–Надя порядка (α, θ) функции $f \in L_{p,w}$ определяется в Фурье-образах равенством

$$\mathcal{F} f^{(\alpha,\theta)}(y) = e^{i\frac{\theta\pi}{2}\operatorname{sign} y} |y|^{\alpha} \mathcal{F} f(y). \tag{2.9}$$

Легко проверить, что при $\alpha \in \mathbb{N}$ будет $f^{(\alpha,\alpha)} = f^{(\alpha)}$, $f^{(\alpha,\alpha-1)} = \widetilde{f}^{(\alpha)}$, где $\widetilde{f}$ — тригонометрически сопряженная с f функция (см. §4). При нецелом $\alpha > 0$ первое равенство принимается за определение производной порядка α.

Покажем, что равенство (2.9) имеет смысл в пространстве $\mathcal{S}'$. В безвесовом случае это сделано в [19]. Запишем

$$e^{i\frac{\theta\pi}{2}\operatorname{sign} y} |y|^{\alpha} = (1+y^2)^{\beta} \cdot \frac{e^{i\frac{\theta\pi}{2}\operatorname{sign} y} |y|^{\alpha}}{(1+y^2)^{\beta}}.$$

При достаточно больших β множитель $\frac{e^{i\frac{\theta\pi}{2}\operatorname{sign} y} |y|^{\alpha}}{(1+y^2)^{\beta}}$ есть преобразование Фурье функции из $\mathcal{R}^*$. В этом легко убедиться с помощью интегрирования по частям и леммы 2.2. Поэтому он определяет оператор свертки из $L_{p,w}$ в $L_{p,w}$. Умножение на бесконечно гладкую функцию медленного роста $(1+y^2)^{\beta}$ — непрерывная операция в $\mathcal{S}'$. Поэтому равенство (2.9) определяет линейный непрерывный оператор из $L_{p,w}$ в $\mathcal{S}'$.

Символами $W_{p,w}^{(\alpha,\theta)}$ обозначаются классы Вейля–Надя, то есть множества функций f из $L_{p,w}$, таких что $f^{(\alpha,\theta)} \in L_{p,w}$. В периодическом случае при их определении нет нужды прибегать к распределениям, поскольку равенство (2.9) можно понимать как равенство коэффициентов Фурье. При $\theta = \alpha$ получаются соболевские классы $W_{p,w}^{(\alpha)} = W_{p,w}^{(\alpha,\alpha)}$.

Множество $W_{p,w}^{(\alpha,\theta)}$ с нормой

$$\|f\|_{p,w} + \|f^{(\alpha,\theta)}\|_{p,w}$$

— банахово пространство. Это доказывается стандартно, как и для соболевских пространств.

2.3. Неравенства между сверточными операторами. Опишем схему применения лемм 2.1 и 2.2. Пусть операторы U и V со значениями в пространстве $L_{p,w}$ задаются в терминах преобразований Фурье как мультипликаторы:

$$\mathcal{F} Uf(y) = u(y)\mathcal{F} f(y), \quad \mathcal{F} Vf(y) = v(y)\mathcal{F} f(y). \tag{2.10}$$

Требуется оценить $\|Uf\|_{p,w}$ через $\|Vf\|_{p,w}$. Если функция

$$\varphi = \frac{u}{v} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{u}{v} - 1 \tag{2.11}$$

есть преобразование Фурье функции $K \in \mathcal{R}^*$, то

$$Uf = Vf * K \qquad \text{или} \qquad Uf = Vf + Vf * K$$

и верна оценка

$$\|Uf\|_{p,w} \leqslant B_p[w]\|K^*\|_1\|Vf\|_{p,w} \tag{2.12}$$

или

$$\|Uf\|_{p,w} \leqslant \bigl(1 + B_p[w]\|K^*\|_1\bigr)\|Vf\|_{p,w} \leqslant B_p[w]\bigl(1 + \|K^*\|_1\bigr)\|Vf\|_{p,w} \tag{2.13}$$

соответственно. Во втором случае мы для краткости и единообразия увеличиваем слагаемое 1 до $B_p[w]$. Убедиться, что $K^* \in L_1(\mathbb{R})$, и проследить, как норма $\|K^*\|_1$ зависит от параметров, можно с помощью леммы 2.2 (нормировка в лемме 2.2 отличается множителем 2π). Утверждения 1 и 3 леммы 2.2 имеет смысл применять при малых t, а утверждение 2 — при больших t.

Поясним подробно, как комбинируются неравенства для сверток. Пусть

$$Uf = Vf + Vf * K_1, \qquad Vf = Wf + Wf * K_2. \tag{2.14}$$

Тогда

$$\|Uf\|_{p,w} \leqslant \bigl(1 + B_p[w]\|K_1^*\|_1\bigr)\|Vf\|_{p,w}, \tag{2.15}$$

$$\|Vf\|_{p,w} \leqslant \bigl(1 + B_p[w]\|K_2^*\|_1\bigr)\|Wf\|_{p,w}. \tag{2.16}$$

Буквальная подстановка (2.16) в (2.15) дает

$$\|Uf\|_{p,w} \leqslant \bigl(1 + B_p[w]\|K_1^*\|_1\bigr)\bigl(1 + B_p[w]\|K_2^*\|_1\bigr)\|Wf\|_{p,w}. \tag{2.17}$$

Однако если вместо этого скомбинировать сверточные представления (2.14), получим

$$\begin{aligned} Uf &= Wf + Wf * (K_1 + K_2 + K_1 * K_2), \\ \|Uf\|_{p,w} &\leqslant \bigl(1 + B_p[w]\|(K_1 + K_2 + K_2 * K_1)^*\|_1\bigr)\|Wf\|_{p,w} \\ &\leqslant \bigl(1 + B_p[w](\|K_1^*\|_1 + \|K_2^*\|_1 + \|(K_2 * K_1)^*\|_1)\bigr)\|Wf\|_{p,w}. \end{aligned}$$

Поскольку свертка симметрично убывающих функций симметрично убывает, функция $K_2^* * K_1^*$ будет горбатой мажорантой для $K_2 * K_1$. Отсюда

$$\|Uf\|_{p,w} \leqslant \bigl(1 + B_p[w](\|K_1^*\|_1 + \|K_2^*\|_1 + \|K_1^*\|_1\|K_2^*\|_1)\bigr)\|Wf\|_{p,w}. \tag{2.18}$$

Константа в неравенстве (2.18), вообще говоря, меньше чем в (2.17) за счет того, что $B_p[w]$ не возводится в квадрат. В безвесовом случае, когда $B_p[w] = 1$, это различие исчезает.

Аналогично, неравенства (2.12) комбинируются друг с другом и с (2.13) без возведения $B_p[w]$ в квадрат.

3. Отклонения средних Стеклова как модули непрерывности

3.1. Модификации модулей непрерывности. Пространства $L_{p,w}$, вообще говоря, не замкнуты относительно сдвига: из включения $f \in L_{p,w}$ не следует, что $f(\cdot + t) \in L_{p,w}$. Поэтому классическое определение модуля непрерывности может не иметь смысла в весовых пространствах. Вместо модулей непрерывности в литературе использовались величины, построенные с помощью усреднений:

$$\Omega_{2\alpha}^{(1)}(f,h)_{p,w} = \sup_{0\leqslant u_j,t\leqslant h}\left\|\left(\prod_{j=1}^{\lfloor\alpha\rfloor}(I-S_{u_j})\right)(I-S_t)^{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor}f\right\|_{p,w},$$

$$\Omega_{2\alpha}^{(2)}(f,h)_{p,w} = \sup_{0\leqslant u\leqslant h}\left\|(I-S_u)^{\alpha}f\right\|_{p,w},$$

$$\Omega_{\alpha}^{(3)}(f,h)_{p,w} = \sup_{0\leqslant u\leqslant h}\left\|\frac{1}{u}\int_0^u |\Delta_t^{\alpha}f(\cdot)|\,dt\right\|_{p,w},$$

где $\Delta_t^{\alpha}f$ есть обычная разность вперед. Модуль $\Omega^{(1)}$ использовался, например, в [2], [4]– [7], модуль $\Omega^{(2)}$ — в [2], [7], [9], модуль $\Omega^{(3)}$ — в [3], [8]. В этих формулах $\alpha>0$ не обязательно целое.

Пусть $p\in(1,+\infty)$, $L_{p,w}=L_{p,w}(\mathbb{T})$, $\alpha\in\mathbb{N}$. В [2] доказана эквивалентность соответствующему K-функционалу (см. далее теорему 4.6) модуля $\Omega_{2\alpha}^{(1)}$, в [3] — модуля $\Omega_{\alpha}^{(3)}$ (а также в пространствах $L_{p,w}$ на произвольном промежутке), в [7] — модуля $\Omega_{2\alpha}^{(2)}$ и тем самым эквивалентность $\Omega_{2\alpha}^{(1)}$, $\Omega_{2\alpha}^{(2)}$ и $\Omega_{2\alpha}^{(3)}$ друг другу. На нецелые α этот результат распространен для $\Omega_{2\alpha}^{(1)}$ в [6] и сформулирован для $\Omega_{2\alpha}^{(2)}$ в [7] (см. комментарии в §5 настоящей работы). Константы в оценках зависят от α, p и $[w]_p$.

Как известно [20, глава 8], в безвесовом случае при всех $r\in\mathbb{N}$, $p\in[1,+\infty)$ и $f\in L_p$ верны соотношения

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant h}\left\|(I-S_u^r)f\right\|_p \asymp \left\|(I-S_h^r)f\right\|_p \asymp \omega_2(f,h)_p,$$

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant h}\left\|\left(I-S_{u,\frac{u}{2}}^r\right)f\right\|_p \asymp \left\|\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)f\right\|_p \asymp \omega_1(f,h)_p,$$

где ω_j — классические модули непрерывности, а константы зависят только от r. Подчеркнем, что для эквивалентности модулю непрерывности первого порядка нужна односторонняя функция Стеклова.

Далее мы определим семейство величин типа $\Omega_{\alpha}^{(1)}$ и $\Omega_{\alpha}^{(2)}$ на основе отклонений средних Стеклова любого, а не только первого порядка и установим их свойства. Мы покажем, что если опустить переход к верхней грани, получится эквивалентная величина. Оценки верны при всех $p\in[1,+\infty)$, а константы зависят от $[w]_p$ и других параметров, но не от p. Модуль $\Omega_{\alpha}^{(3)}$ в настоящей работе обсуждаться не будет.

При всех $k\in\mathbb{N}$ и $h>0$ в силу симметричного убывания ядер Стеклова

$$\|S_h^k f\|_{p,w} \leqslant B_p[w]\|f\|_{p,w}. \tag{3.1}$$

В безвесовых пространствах L_p нормы операторов Стеклова равны 1, что позволяет определить α-ю степень отклонений $I-S_h^r$ и $I-S_{h,\frac{h}{2}}^r$ $(r\in\mathbb{N})$ при любом $\alpha>0$, не обязательно целом, равенствами

$$(I-S_h^r)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{\alpha}^k S_h^{rk}, \tag{3.2}$$

$$\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{\alpha}^k S_{h,\frac{h}{2}}^{rk}. \tag{3.3}$$

Оценка (3.1) позволяет принять равенство (3.2) за определение и в весовых пространствах $L_{p,w}$. Действительно, ряд в правой части абсолютно сходится по операторной норме, откуда следует корректность определения и оценка

$$\left\|(I-S_h^r)^\alpha\right\| \leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}|C_\alpha^k| B_p[w] \leqslant 1+\left(2^{\lceil\alpha\rceil}-1\right) B_p[w].$$

Здесь $\lceil\alpha\rceil=\min\{n\in\mathbb{Z}: n\geqslant\alpha\}$. Сходимость ряда операторов в (3.3) неочевидна. Поэтому мы воспользуемся другим способом и определим операторы $(I-S_h^r)^\alpha$ и $(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r)^\alpha$ в терминах преобразований Фурье.

Запишем преобразования Фурье ядер Стеклова:

$$\mathcal{F}S_h f(y)=\frac{2}{hy}\sin\frac{hy}{2}\mathcal{F}f(y), \quad \mathcal{F}S_{h,\frac{h}{2}}f(y)=\frac{e^{ihy}-1}{ihy}\mathcal{F}f(y).$$

Отсюда для функций $f\in L_p$ имеем

$$(I-S_h^r)^\alpha f=f+f*K, \quad \mathcal{F}K(y)=\left(1-\left(\frac{2}{hy}\sin\frac{hy}{2}\right)^r\right)^\alpha-1, \tag{3.4}$$

$$\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)^\alpha f=f+f*K, \quad \mathcal{F}K(y)=\left(1-\left(\frac{e^{ihy}-1}{ihy}\right)^r\right)^\alpha-1. \tag{3.5}$$

По лемме 2.2 будет $K\in\mathcal{R}^*$. Поэтому равенства (3.4) и (3.5) определяют линейные непрерывные операторы в пространствах $L_{p,w}$, т.е.

$$\left\|(I-S_h^r)^\alpha f\right\|_{p,w},\ \left\|\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\alpha)B_p[w]\|f\|_{p,w}. \tag{3.6}$$

При этом определения (3.2) и (3.4) равносильны.

3.2. Свойства модифицированных модулей непрерывности. В следующей теореме собраны свойства степеней отклонений средних Стеклова, часть которых аналогична свойствам обычных модулей непрерывности. В безвесовом случае эти свойства следуют из принципа сравнения линейных операторов [20, глава 8].

Теорема 3.1. *Пусть $p\in[1,+\infty)$, $w\in A_p$, $f\in L_{p,w}$, $r,m\in\mathbb{N}$, $h>0$, $0<\beta\leqslant\alpha$. Тогда*

$$\left\|(I-S_h^r)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,m,\alpha)B_p[w]\left\|(I-S_h^m)^\alpha f\right\|_{p,w}, \tag{3.7}$$

$$\left\|\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,m,\alpha)B_p[w]\left\|\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^m\right)^\alpha f\right\|_{p,w}, \tag{3.8}$$

$$\left\|(I-S_{\lambda h}^r)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\alpha,\lambda)B_p[w]\left\|(I-S_h^r)^\alpha f\right\|_{p,w}, \tag{3.9}$$

$$\left\|\left(I-S_{\lambda h,\frac{\lambda h}{2}}^r\right)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\alpha,\lambda)B_p[w]\left\|\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)^\alpha f\right\|_{p,w} \tag{3.10}$$

(в (3.9) и (3.10) константы ограничены по λ на любом отрезке);

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(r,k)B_p[w]}\left\|(I-S_h^r)^k f\right\|_{p,w} &\leqslant \left\|\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)^{2k} f\right\|_{p,w}\\ &\leqslant C(r,k)B_p[w]\left\|(I-S_h^r)^k f\right\|_{p,w}, \quad k\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Кроме того, если $f\in W_{p,w}^{(2\beta,0)}$, то

$$\left\|(I-S_h^r)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\beta)B_p[w]h^{2\beta}\left\|(I-S_h^r)^{\alpha-\beta}f^{(2\beta,0)}\right\|_{p,w} \tag{3.12}$$

и, в частности, при $\beta=\alpha$

$$\left\|(I-S_h^r)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\alpha)B_p[w]h^{2\alpha}\left\|f^{(2\alpha,0)}\right\|_{p,w}, \tag{3.13}$$

а если $f\in W_{p,w}^{(\beta)}$, то

$$\left\|\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\beta)B_p[w]h^{\beta}\left\|\left(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\right)^{\alpha-\beta}f^{(\beta)}\right\|_{p,w} \tag{3.14}$$

и, в частности, при $\beta = \alpha$

$$\left\|\left(I - S^r_{h,\frac{h}{2}}\right)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\alpha)B_p[w]h^\alpha\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{p,w}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Все соотношения теоремы доказываются одним и тем же способом, описанным в п. 2.3. Мы в каждом случае запишем функции u, v и φ из представлений (2.10) и (2.11) и поясним, как применяется лемма 2.2. Напомним, что $K = \mathcal{F}^{-1}\varphi$.

Сразу заметим, что константы не зависят от h, поскольку при различных h неравенства получаются друг из друга масштабированием. Поэтому можно считать, что $h = 1$.

1. Неравенство (3.7). Имеем

$$u(y) = \left(1 - \left(\frac{2}{y}\sin\frac{y}{2}\right)^r\right)^\alpha, \quad v(y) = \left(1 - \left(\frac{2}{y}\sin\frac{y}{2}\right)^m\right)^\alpha,$$

$\varphi = \frac{u}{v} - 1$. Если $r > 1$ и $m > 1$, то функция φ суммируема вместе со всеми производными. Если $m > r = 1$ или $r > m = 1$, то

$$\varphi(y) = \pm\alpha\frac{2}{y}\sin\frac{y}{2} + \varphi_1(y),$$

где функция φ_1 суммируема вместе со всеми производными.

2. Неравенство (3.8). Имеем

$$u(y) = \left(1 - \left(\frac{e^{iy}-1}{iy}\right)^r\right)^\alpha, \quad v(y) = \left(1 - \left(\frac{e^{iy}-1}{iy}\right)^m\right)^\alpha,$$

$\varphi = \frac{u}{v} - 1$. Если $r > 1$ и $m > 1$, то функция φ суммируема вместе со всеми производными. Если $m > r = 1$ или $r > m = 1$, то

$$\varphi(y) = \pm\alpha\frac{e^{iy}-1}{iy} + \varphi_1(y),$$

где функция φ_1 суммируема вместе со всеми производными.

3. Неравенство (3.9). Имеем

$$u(y) = \left(1 - \left(\frac{2}{\lambda y}\sin\frac{\lambda y}{2}\right)^r\right)^\alpha, \quad v(y) = \left(1 - \left(\frac{2}{y}\sin\frac{y}{2}\right)^r\right)^\alpha,$$

$\varphi = \frac{u}{v} - 1$. Ввиду неравенства (3.7) достаточно доказать (3.9) при каком-нибудь одном значении r, например, при $r = 2$. Тогда функция φ суммируема вместе со всеми производными, причем L_1-нормы производных непрерывно зависят от λ.

4. Неравенство (3.10). Имеем

$$u(y) = \left(1 - \left(\frac{e^{i\lambda y}-1}{i\lambda y}\right)^r\right)^\alpha, \quad v(y) = \left(1 - \left(\frac{e^{iy}-1}{iy}\right)^r\right)^\alpha,$$

$\varphi = \frac{u}{v} - 1$. Ввиду неравенства (3.8) достаточно доказать (3.10) при каком-нибудь одном значении r, например, при $r = 2$. Тогда функция φ суммируема вместе со всеми производными, причем L_1-нормы производных непрерывно зависят от λ.

5. Неравенство (3.11). Ввиду неравенств (3.7) и (3.8) достаточно доказать (3.11) при $r = 2$. Имеем

$$u(y) = \left(1 - \left(\frac{e^{iy}-1}{iy}\right)^r\right)^{2k}, \quad v(y) = \left(1 - \left(\frac{2}{y}\sin\frac{y}{2}\right)^r\right)^k.$$

Функции $\frac{u}{v} - 1$ и $\frac{v}{u} - 1$, взятые в качестве φ, суммируемы вместе со всеми производными.

6. Неравенство (3.12). Имеем

$$u(y) = \left(1 - \left(\frac{2}{y}\sin\frac{y}{2}\right)^r\right)^\beta, \quad v(y) = |y|^{2\beta}, \quad \varphi = \frac{u}{v}.$$

Ясно, что достаточно рассмотреть $\beta \in (0, 1/2)$. Функция φ представляется в виде (2.8) и имеет суммируемые производные. По утверждениям 2 и 3 леммы 2.2 будет $K^* \in L_1(\mathbb{R})$.

7. Неравенство (3.14). Имеем

$$u(y) = \left(1 - \left(\frac{e^{iy} - 1}{iy}\right)^r\right)^\beta, \quad v(y) = (iy)^\beta, \quad \varphi = \frac{u}{v}.$$

Ясно, что достаточно рассмотреть $\beta \in (0, 1)$. Функция φ представляется в виде (2.7) и имеет суммируемые производные. По утверждениям 2 и 3 леммы 2.2 будет $K^* \in L_1(\mathbb{R})$. $\square$

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3.1*

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant h} \big\|(I - S_u^r)^\alpha f\big\|_{p,w} \leqslant C(r, \alpha) B_p[w] \big\|(I - S_h^r)^\alpha f\big\|_{p,w},$$

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant h} \big\|\big(I - S^r_{u, \frac{u}{2}}\big)^\alpha f\big\|_{p,w} \leqslant C(r, \alpha) B_p[w] \big\|\big(I - S^r_{h, \frac{h}{2}}\big)^\alpha f\big\|_{p,w}.$$

Сделаем несколько замечаний к теореме 3.1.

1. Из разложения

$$I - S_h^m = (I + \ldots + S_h^{m-1})(I - S_h)$$

и симметричного убывания ядер Стеклова следует оценка

$$\|(I - S_h^m) f\|_{p,w} \leqslant \big(1 + (m-1) B_p[w]\big) \|(I - S_h) f\|_{p,w}.$$

2. Подчеркнем, что не только оценка (3.11), но и оценки (3.7)–(3.10) двусторонние, поскольку противоположные неравенства получаются переменой ролей параметров.

3. Рассмотренные модули непрерывности эквивалентны:

$$\big\|(I - S_h)^\alpha f\big\|_{p,w} \leqslant \Omega_{2\alpha}^{(2)}(f, h)_{p,w} \leqslant \Omega_{2\alpha}^{(1)}(f, h)_{p,w} \leqslant C(\alpha) B_p[w] \big\|(I - S_h)^\alpha f\big\|_{p,w}.$$

Здесь первые два неравенства очевидны, а третье верно по следствию 3.1 и теореме 3.1.

4. Прямые и обратные теоремы

4.1. Прямые теоремы. Для доказательства прямых теорем в качестве приближающего оператора можно использовать средние типа Валле Пуссена, которые определяются следующим образом.

Возьмем функцию $\eta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со свойствами: η бесконечно дифференцируема, четна, $\eta(y) = 1$ при $|y| \leqslant \frac{1}{2}$, $\eta(y) = 0$ при $|y| \geqslant 1$. Для $f \in L_{p,w}$ положим $V_\sigma f = f * \big(\mathcal{F}^{-1}(\eta(\frac{\cdot}{\sigma}))\big)$. Ясно, что $V_\sigma f \in \mathbf{E}_\sigma$ и потому

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} = \mathcal{A}_\sigma(f - V_\sigma f)_{p,w}.$$

Теорема 4.1. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $f \in L_{p,w}$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \gamma, \sigma > 0$. Тогда*

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} \leqslant C(r, \alpha, \gamma) B_p[w] \mathcal{A}_\sigma\left(\left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}}\right)^\alpha f\right)_{p,w}, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} \leqslant C(r, \alpha, \gamma) B_p[w] \mathcal{A}_\sigma\left(\left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}, \frac{\gamma\pi}{2\sigma}}\right)^\alpha f\right)_{p,w}. \tag{4.2}$$

В неравенствах (4.1) *и* (4.2) *$\mathcal{A}_\sigma$ можно заменить на $\mathcal{A}_{\sigma-0}$.*

Доказательство. Положим $u(y) = 1 - \eta\left(\frac{y}{\sigma}\right)$,

$$v_1(y) = \left(1 - \left(\frac{2\sigma}{\gamma\pi y} \sin\frac{\gamma\pi y}{2\sigma}\right)^r\right)^\alpha, \quad v_2(y) = \left(1 - \left(\frac{e^{\frac{i\gamma\pi y}{\sigma}} - 1}{\frac{i\gamma\pi y}{\sigma}}\right)^r\right)^\alpha.$$

Ввиду неравенств (3.7) и (3.8) достаточно доказать теорему при каком-нибудь одном значении r, например, при $r = 2$. Тогда функции $\varphi_j = \frac{u}{v_j} - 1$ суммируемы вместе со всеми производными. По лемме 2.2 будет $K_j = \mathcal{F}^{-1}\varphi_j \in \mathcal{R}^*$, причем нормы $\|K_j^*\|_1$ не зависят от σ. Применяя следствие 2.1, получаем неравенства для $\mathcal{A}_\sigma$. Неравенства для $\mathcal{A}_{\sigma-0}$ получаются предельным переходом. $\square$

Следствие 4.1. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $\gamma, \sigma > 0$, $0 < \beta \leqslant \alpha$. Если $f \in W_{p,w}^{(2\beta,0)}$, то*

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} \leqslant C(r, \alpha, \beta, \gamma) B_p[w] \frac{1}{\sigma^{2\beta}} \mathcal{A}_\sigma \left(\left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}} \right)^{\alpha-\beta} f^{(2\beta,0)} \right)_{p,w}, \tag{4.3}$$

и, в частности, при $\beta = \alpha$

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} \leqslant C(\alpha) B_p[w] \frac{1}{\sigma^{2\alpha}} \mathcal{A}_\sigma \big(f^{(2\alpha,0)} \big)_{p,w}, \tag{4.4}$$

а если $f \in W_{p,w}^{(\beta)}$, то

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} \leqslant C(r, \alpha, \beta, \gamma) B_p[w] \frac{1}{\sigma^{\beta}} \mathcal{A}_\sigma \left(\left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}, \frac{\gamma\pi}{2\sigma}} \right)^{\alpha-\beta} f^{(\beta)} \right)_{p,w} \tag{4.5}$$

и, в частности, при $\beta = \alpha$

$$\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} \leqslant C(\alpha) B_p[w] \frac{1}{\sigma^{\alpha}} \mathcal{A}_\sigma \big(f^{(\alpha)} \big)_{p,w}. \tag{4.6}$$

В неравенствах (4.3)–(4.6) *$\mathcal{A}_\sigma$ можно заменить на $\mathcal{A}_{\sigma-0}$.*

Для *доказательства* надо сопоставить теорему 4.1 с неравенствами (3.12)–(3.15).

Следующая лемма говорит, что если не обращать внимания на константы, то неравенства типа Бернштейна и Рисса — простые следствия оценки сверток. Отметим, что неравенство Бернштейна верно для более широкого класса весов (см. [21]).

Лемма 4.1. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $\alpha, \gamma, \sigma > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbf{E}_\sigma \cap L_{p,w}$. Тогда*

$$\big\| T^{(\alpha,\theta)} \big\|_{p,w} \leqslant C(\alpha, \theta) B_p[w] \sigma^\alpha \|T\|_{p,w}, \tag{4.7}$$

$$\big\| T^{(2\alpha,0)} \big\|_{p,w} \leqslant C(r, \alpha, \gamma) B_p[w] \sigma^{2\alpha} \left\| \left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}} \right)^\alpha T \right\|_{p,w}, \tag{4.8}$$

$$\big\| T^{(\alpha)} \big\|_{p,w} \leqslant C(r, \alpha, \gamma) B_p[w] \sigma^{\alpha} \left\| \left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}, \frac{\gamma\pi}{2\sigma}} \right)^\alpha T \right\|_{p,w}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Докажем неравенство (4.7). Положим $g_1(y) = e^{i\frac{\theta\pi}{2} \operatorname{sign} y} |y|^\alpha$ при $y \in [-1, 1]$. Продолжим функцию g_1 на $\mathbb{R}$ до преобразования Фурье функции K_1 из $\mathcal{R}^*$. По лемме 2.2 такое продолжение существует. Тогда

$$T^{(\alpha,\theta)}(x) = \sigma^\alpha \int_{\mathbb{R}} T(x-t) \sigma K_1(\sigma t)\, dt,$$

откуда по лемме 2.1 следует (4.7) с константой $\|K_1^*\|_1$.

Неравенства (4.8) и (4.9) доказываются аналогично, с помощью функций

$$g_2(y) = |y|^{2\alpha} \left(1 - \frac{2\sigma}{\gamma\pi y} \sin \frac{\gamma\pi y}{2\sigma} \right)^{-\alpha}, \quad g_3(y) = (iy)^\alpha \left(1 - \frac{e^{i\frac{\gamma\pi y}{2\sigma}} - 1}{i\frac{\gamma\pi y}{2\sigma}} \right)^{-\alpha}.$$

$\square$

Следствие 4.2. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $\alpha, \gamma, \sigma > 0$, $T \in \mathbf{E}_\sigma \cap L_{p,w}$. Тогда*

$$\left\| \left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}} \right)^\alpha T \right\|_{p,w} \leqslant C(r, \alpha) B_p[w] (\gamma\pi)^{2\alpha} \|T\|_{p,w}, \tag{4.10}$$

$$\left\| \left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}, \frac{\gamma\pi}{2\sigma}} \right)^\alpha T \right\|_{p,w} \leqslant C(r, \alpha) B_p[w] (\gamma\pi)^{\alpha} \|T\|_{p,w}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Неравенство (4.10) следует из (3.13) и (4.7) при $\theta = 0$, а неравенство (4.11) — из (3.15) и (4.7) при $\theta = \alpha$. $\square$

Прямая теорема 4.1 вместе с леммой 4.1 позволяет уточнить поведение констант в оценках (3.9) и (3.10): порядок роста констант по λ такой же, как и в классическом случае.

Теорема 4.2. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $f \in L_{p,w}$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda, h > 0$. Тогда*

$$\left\|(I - S^r_{\lambda h})^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\alpha) B_p[w](1 + \lambda^{2\alpha}) \left\|(I - S^r_h)^\alpha f\right\|_{p,w}, \tag{4.12}$$

$$\left\|\left(I - S^r_{\lambda h, \frac{\lambda h}{2}}\right)^\alpha f\right\|_{p,w} \leqslant C(r,\alpha) B_p[w](1 + \lambda^{\alpha}) \left\|\left(I - S^r_{h, \frac{h}{2}}\right)^\alpha f\right\|_{p,w}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Докажем (4.12). Положим $\sigma = \frac{\pi}{h}$. В силу (4.1), (3.13) и (4.8) (при $\gamma = 1$) имеем

$$\begin{aligned}\left\|(I - S^r_{\lambda h})^\alpha f\right\|_{p,w} &\leqslant \left\|(I - S^r_{\lambda h})^\alpha (I - V_\sigma) f\right\|_{p,w} + \left\|(I - S^r_{\lambda h})^\alpha V_\sigma f\right\|_{p,w} \\ &\leqslant C(r,\alpha) B_p[w] \left\|(I - S^r_h)^\alpha f\right\|_{p,w} + C(r,\alpha) B_p[w] \lambda^{2\alpha} \left\|(I - S^r_h)^\alpha f\right\|_{p,w}.\end{aligned}$$

Неравенство (4.13) доказывается аналогично, с помощью (4.2), (3.15) и (4.9). □

Отсюда мы можем уточнить информацию о константах в теореме 4.1.

Следствие 4.3. *Константы в неравенствах* (4.1) *и* (4.2) *удовлетворяют, соответственно, оценкам*

$$C(r,\alpha,\gamma) \leqslant C_1(r,\alpha)(1 + \gamma^{-2\alpha}), \quad C(r,\alpha,\gamma) \leqslant C_1(r,\alpha)(1 + \gamma^{-\alpha}).$$

Г.И. Натансон и М.Ф. Тиман [22] уточнили неравенство Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{T})$:

$$\sqrt[n]{\prod_{j=0}^{n-1} E_j(f)_p} \leqslant C(\alpha)\, \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n}\right)_p, \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Мы запишем аналогичное уточнение в интегральном виде.

Следствие 4.4. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $f \in L_{p,w}$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, h > 0$. Тогда*

$$\exp\left(\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \ln \mathcal{A}_u(f)_{p,w}\, du\right) \leqslant C(r,\alpha)(1 + \gamma^{-2\alpha}) B_p[w] \left\|\left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}}\right)^\alpha f\right\|_{p,w}, \tag{4.14}$$

$$\exp\left(\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \ln \mathcal{A}_u(f)_{p,w}\, du\right) \leqslant C(r,\alpha)(1 + \gamma^{-\alpha}) B_p[w] \left\|\left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}, \frac{\gamma\pi}{2\sigma}}\right)^\alpha f\right\|_{p,w}. \tag{4.15}$$

Доказательство. Докажем (4.14). Заменяя в (4.1) σ на u, а γ на $\frac{\gamma u}{\sigma}$, находим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \ln \mathcal{A}_u(f)_{p,w}\, du \\ &\qquad\leqslant \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \ln\left\{C(r,\alpha)\left(1 + \left(\frac{\gamma u}{\sigma}\right)^{-2\alpha}\right) B_p[w] \mathcal{A}_u\left(\left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}}\right)^\alpha f\right)_{p,w}\right\} du \\ &\qquad\leqslant \int_0^1 \ln\left(1 + (\gamma t)^{-2\alpha}\right) dt + \ln\left\{C(r,\alpha) B_p[w] \left\|\left(I - S^r_{\frac{\gamma\pi}{\sigma}}\right)^\alpha f\right\|_{p,w}\right\}.\end{aligned}$$

Имеем

$$\int_0^1 \ln\left(1 + (\gamma t)^{-2\alpha}\right) dt \leqslant \int_0^1 \ln\left((1 + \gamma^{-2\alpha}) t^{-2\alpha}\right) dt = 2\alpha + \ln\left(1 + \gamma^{-2\alpha}\right).$$

Потенцируя, получаем требуемое. Неравенство (4.15) доказывается аналогично. □

4.2. Обратные теоремы. Как обычно, из неравенств типа Бернштейна и Рисса выводятся обратные теоремы.

Теорема 4.3. *Пусть* $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $f \in L_{p,w}$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \sigma > 0$. *Тогда*

$$\left\| \left(I - S^r_{\frac{\pi}{\sigma}} \right)^\alpha f \right\|_{p,w} \leqslant C(r, \alpha) B_p[w] \frac{1}{\sigma^{2\alpha}} \int_0^\sigma \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^{2\alpha},$$

$$\left\| \left(I - S^r_{\frac{\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{2\sigma}} \right)^\alpha f \right\|_{p,w} \leqslant C(r, \alpha) B_p[w] \frac{1}{\sigma^{\alpha}} \int_0^\sigma \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^{\alpha}.$$

Теорема 4.4. *Пусть* $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $f \in L_{p,w}$, $\alpha, \sigma > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ *и*

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^\alpha < +\infty.$$

Тогда $f \in W^{(\alpha,\theta)}_{p,w}$ *и*

$$\left\| f^{(\alpha,\theta)} \right\|_{p,w} \leqslant C(\alpha, \theta) B_p[w] \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^\alpha \right),$$

$$\mathcal{A}_\sigma\big(f^{(\alpha,\theta)}\big)_{p,w} \leqslant C(\alpha, \theta) B_p[w] \left(\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} + \int_\sigma^{+\infty} \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^\alpha \right).$$

Следствие 4.5. *В условиях теоремы 4.4 при* $r \in \mathbb{N}$ *и* $\beta > 0$ *будет*

$$\begin{aligned} \left\| \left(I - S^r_{\frac{\pi}{\sigma}} \right)^\beta f^{(\alpha,\theta)} \right\|_{p,w} &\leqslant C(r, \alpha, \beta, \theta) B_p[w] \\ &\times \left(\frac{1}{\sigma^{2\beta}} \int_0^\sigma \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^{\alpha+2\beta} + \int_\sigma^{+\infty} \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^\alpha \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \left(I - S^r_{\frac{\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{2\sigma}} \right)^\beta f^{(\alpha,\theta)} \right\|_{p,w} &\leqslant C(r, \alpha, \beta, \theta) B_p[w] \\ &\times \left(\frac{1}{\sigma^{\beta}} \int_0^\sigma \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^{\alpha+\beta} + \int_\sigma^{+\infty} \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^\alpha \right). \end{aligned}$$

Доказательства теорем 4.3 и 4.4 стандартны (см., например, [1]) и потому опускаются. При этом используются неравенства (3.6) и (4.7)–(4.11). Абстрактная схема доказательства обратных теорем имеется в [23].

В периодическом случае интегралы в правых частях неравенств превращаются в суммы. Например, при $\sigma \in \mathbb{N}$ будет

$$\frac{1}{\sigma^{2\alpha}} \int_0^\sigma \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \, du^{2\alpha} = \frac{1}{\sigma^{2\alpha}} \sum_{k=0}^{\sigma-1} ((k+1)^{2\alpha} - k^{2\alpha}) \mathcal{A}_k(f)_{p,w}.$$

Использование интегралов удобно для единообразной формулировки обратных теорем в периодическом и непериодическом случае (см. [23]).

Как известно, при $p \in (1, +\infty)$ прямые и обратные теоремы допускают уточнение [4]. Однако к этим уточнениям мы не добавим ничего нового, поскольку в них зависимость констант от p вызвана уже не методом доказательства, а самим видом неравенства.

Обозначим через $\widetilde{f}$ функцию, тригонометрически сопряженную с f (преобразование Гильберта f). Если $p \in [1, +\infty)$, $f \in L_{p,w}$, то $\widetilde{f}$ можно определить как главное значение интеграла

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x - t} \, dt.$$

Тогда $\widetilde{f}(x)$ существует и конечно при почти всех x. При $p \in (1, +\infty)$ будет $\widetilde{f} \in L_{p,w}$ и, более того, оператор тригонометрического сопряжения непрерывен в $L_{p,w}$ [24] (см. также [17, § 5.4]). Для достаточно хороших функций f (например, из класса Шварца) имеем $\mathcal{F}\widetilde{f}(y) = (-i \operatorname{sign} y)\mathcal{F}f(y)$.

Доказательство следующей теоремы 4.5 основано на известной идее перехода к первообразной (см. [1, п. 5.9]).

Теорема 4.5. *Пусть* $p \in [1, +\infty)$, $w \in A_p$, $f \in L_{p,w}$ *и*

$$\int_1^{+\infty} \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \frac{du}{u} < +\infty. \tag{4.16}$$

Тогда при любом $\sigma > 0$ *будет* $(I - V_\sigma)\widetilde{f} \in L_{p,w}$ *и*

$$\mathcal{A}_\sigma\big((I - V_\sigma)\widetilde{f}\big)_{p,w} \leqslant CB_p[w] \left(\mathcal{A}_\sigma(f)_{p,w} + \int_\sigma^{+\infty} \mathcal{A}_u(f)_{p,w} \frac{du}{u}\right).$$

Доказательство. Функция $y \mapsto \frac{1}{|y|}\left(1 - \eta\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right)$ есть преобразование Фурье некоторой функции $K \in \mathcal{R}^*$. Положим $F = f * K$. Тогда $F \in L_{p,w}$ и $F^{(1,0)} = (I - V_\sigma)f \in L_{p,w}$, откуда $F \in W_{p,w}^{(1,0)}$. По неравенству (4.4)

$$A_u(F)_{p,w} \leqslant \frac{CB_p[w]}{u} A_u(f - V_\sigma f)_{p,w}. \tag{4.17}$$

Отметим, что $A_u(f - V_\sigma f)_{p,w} = A_u(f)_{p,w}$ при $u \geqslant \sigma$. По условию (4.16) будет

$$\int_0^\infty A_u(F)_{p,w}\, du < +\infty.$$

По теореме 4.4 (при $\alpha = \theta = 1$) имеем $F \in W_{p,w}^{(1)}$, откуда $-F' = (I - V_\sigma)\widetilde{f} \in L_{p,w}$. По той же теореме

$$\mathcal{A}_\sigma\big((I - V_\sigma)\widetilde{f}\big)_{p,w} = A_\sigma(F')_{p,w} \leqslant CB_p[w] \left(\sigma\mathcal{A}_\sigma(F)_{p,w} + \int_\sigma^{+\infty} \mathcal{A}_u(F)_{p,w}\, du\right).$$

Остается применить неравенство (4.17) (как объяснялось в п. 2.3, при комбинировании неравенств $B_p[w]$ не возводится в квадрат). $\square$

Включение $(I - V_\sigma)\widetilde{f} \in L_{p,w}$ содержательно лишь при $p = 1$. Однако в формулировке и доказательстве теоремы 4.5 не использовалось существование $\widetilde{f}$ в том или ином смысле. Оператор $f \mapsto (I - V_\sigma)\widetilde{f}$, понимаемый как единый оператор, корректно определен и непрерывен из $L_{p,w}$ в $\mathcal{S}'$. В Фурье-образах это умножение на $(-i \operatorname{sign} y)\left(1 - \eta\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right)$.

В периодическом случае, если $f \in L_{p,w}(\mathbb{T})$, то ряд Фурье функции $(I - V_\sigma)\widetilde{f}$ и тригонометрический ряд, сопряженный к ряду Фурье f, совпадают при $\sigma < 1$. Поэтому утверждение упрощается: $\widetilde{f} \in L_{p,w}(\mathbb{T})$. В непериодическом случае при $p = 1$ этого заключить нельзя. Пример

$$f(x) = \int_0^1 (1 - t)\cos xt\, dt = \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^1 (1 - t)\sin xt\, dt = \frac{x - \sin x}{x^2}$$

показывает, что условие (4.16) не обеспечивает включения $\widetilde{f} \in L_{1,w}(\mathbb{R})$ даже в безвесовом случае и что вычесть из $\widetilde{f}$ целую функцию нулевого типа (в частности, постоянную) недостаточно для включения.

4.3. K и R-функционалы и модули непрерывности. Установим эквивалентность K и R-функционалов модифицированным модулям непрерывности. Результаты такого типа в безвесовом случае можно найти, например, в [25], а для весовых пространств — в [6]. Определим семейство K и R-функционалов равенствами

$$K_{\alpha,\theta}(f,h)_{p,w} = \inf_{g\in W_{p,w}^{(\alpha,\theta)}} \left\{ \|f-g\|_{p,w} + h^\alpha \big\|g^{(\alpha,\theta)}\big\|_{p,w} \right\},$$

$$R_{\alpha,\theta}(f,h)_{p,w} = \inf_{g\in \mathbf{E}_{1/h}\cap L_{p,w}} \left\{ \|f-g\|_{p,w} + h^\alpha \big\|g^{(\alpha,\theta)}\big\|_{p,w} \right\}.$$

Теорема 4.6. *Пусть $p\in[1,+\infty)$, $w\in A_p$, $f\in L_{p,w}$, $r\in\mathbb{N}$, $\alpha,h>0$. Тогда*

$$\big\|(I-S_h^r)^\alpha f\big\|_{p,w} \asymp K_{2\alpha,0}(f,h)_{p,w} \asymp R_{2\alpha,0}(f,h)_{p,w}, \tag{4.18}$$

$$\big\|\big(I-S_{h,\frac{h}{2}}^r\big)^\alpha f\big\|_{p,w} \asymp K_{\alpha,\alpha}(f,h)_{p,w} \asymp R_{\alpha,\alpha}(f,h)_{p,w}. \tag{4.19}$$

Константы в оценках имеют вид $C(r,\alpha)B_p[w]$.

Доказательство. Докажем (4.18). Неравенство $K\leqslant R$ тривиально. Докажем, что

$$R_{2\alpha,0}(f,h)_{p,w} \leqslant C(r,\alpha)B_p[w]\big\|(I-S_h^r)^\alpha f\big\|_{p,w}.$$

Возьмем $\sigma=\frac{1}{h}$ и запишем

$$\begin{aligned} R_{2\alpha,0}(f,h)_{p,w} &\leqslant \|f-V_\sigma f\|_{p,w} + h^{2\alpha}\big\|(V_\sigma f)^{(2\alpha,0)}\big\|_{p,w} \\ &\leqslant C(r,\alpha)B_p[w]\big\|(I-S_h^r)^\alpha f\big\|_{p,w} + C(r,\alpha)B_p[w]\big\|(I-S_h^r)^\alpha V_\sigma f\big\|_{p,w}. \end{aligned}$$

Мы оценили первое слагаемое по неравенству (4.1), а второе — по неравенству (4.8). Остается воспользоваться ограниченностью семейства $\{V_\sigma\}$:

$$\big\|(I-S_h^r)^\alpha V_\sigma f\big\|_{p,w} = \big\|V_\sigma(I-S_h^r)^\alpha f\big\|_{p,w} \leqslant CB_p[w]\big\|(I-S_h^r)^\alpha f\big\|_{p,w}.$$

Докажем, что

$$\big\|(I-S_h^r)^\alpha f\big\|_{p,w} \leqslant C(r,\alpha)B_p[w]K_{2\alpha,0}(f,h)_{p,w}.$$

Для любой функции $g\in W_{p,w}^{(2\alpha,0)}$ по неравенствам (3.6) и (3.13) имеем

$$\begin{aligned} \big\|(I-S_h^r)^\alpha f\big\|_{p,w} &\leqslant \big\|(I-S_h^r)^\alpha (f-g)\big\|_{p,w} + \big\|(I-S_h^r)^\alpha g\big\|_{p,w} \\ &\leqslant C(r,\alpha)B_p[w]\|f-g\|_{p,w} + C(r,\alpha)B_p[w]h^{2\alpha}\big\|g^{(2\alpha,0)}\big\|_{p,w}. \end{aligned}$$

Остается перейти к инфимуму по g.

Соотношение (4.19) доказывается аналогично. □

5. Заключительные замечания

В [7], [9], [26], [27] использовалась серия близких утверждений, названных результатами о переносе (transference results). Отметим, что статья [27] посвящена приближению в пространствах $L_{p,w}(\mathbb{R})$ и затрагивает случай $p=1$. Сформулируем одно из таких утверждений [9, теорема 3.6] применительно к пространству $L_{p,w}(\mathbb{T})$. Пусть $p\in[1,+\infty)$, $w\in A_p$. Для $f\in L_{p,w}(\mathbb{T})$ и простой функции G положим

$$F_{f,G}(u) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)|G(x)|\,dx.$$

Если $f,g\in L_{p,w}(\mathbb{T})$ и неравенство

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} |F_{f,G}(u)| \leqslant C_1 \sup_{u\in\mathbb{R}} |F_{g,G}(u)| \tag{5.1}$$

выполняется с некоторой абсолютной константой C_1 для всех простых функций G, то неравенство

$$\|f\|_{p,w} \leqslant C_2 \|g\|_{p,w}$$

тоже выполняется с некоторой константой C_2, зависящей от p и w.

Это утверждение неверно. Действительно, зафиксируем $\tau \in \mathbb{R}$ и положим $g(t) = f(t+\tau)$. Тогда, очевидно, неравенство (5.1) обращается в равенство при $C_1 = 1$, а отношение $\|f\|_{p,w}$ к $\|g\|_{p,w}$ может быть сколь угодно большим, если пространство $L_{p,w}$ не замкнуто относительно сдвига. Поэтому утверждения, доказывавшиеся с помощью этого приема, требуют иного доказательства. Те из них, которые касаются пространств Лебега с весами Макенхаупта, доказаны в настоящей работе.

В заключение отметим, что методы данной работы могут быть применены к доказательству прямых и обратных теорем в более общих функциональных пространствах. Если удается установить оценки сверток типа (2.1), результаты §3 и §4 получаются автоматически. Для наглядности мы ограничились пространствами Лебега с весами Макенхаупта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Тиман. *Теория приближения функций действительного переменного.* М.: ГИФМЛ. 1960.
2. Э.А. Гаджиева. *Исследование свойств функций с квазимонотонными коэффициентами Фурье в обобщенных весовых пространствах Никольского–Бесова.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1986.
3. N.X. Ky. *Moduli of mean smoothness and approximation with A_p-weights* // Annales Univ. Sci. Budapest. **40**, 7–48 (1997).
4. R. Akgün. *Sharp Jackson and converse theorems of trigonometric approximation in weighted Lebesgue spaces* // Proc. A. Razmadze Math. Inst. **152**, 1–18 (2010).
5. R. Akgün. *Polynomial approximation in weighted Lebesgue spaces* // East J. on Appr. **17**:3, 253–266 (2011).
6. R. Akgün. *Realization and characterization of modulus of smoothness in weighted Lebesgue spaces* // Алгебра и анализ. **26**:5, 64–87 (2014).
7. R. Akgün. *Gadjieva's conjecture, K-functionals, and some applications in weighted Lebesgue spaces* // Turk. J. Math. **42**:3, 1484–1503 (2018).
8. Y.E. Yildirir, D.M. Israfilov. *Approximation theorems in weighted Lorentz spaces* // Carpat. J. Math. **26**:1, 108–119 (2010).
9. R. Akgün. *Jackson type inequalities for differentiable functions in weighted Orlicz spaces* // Алгебра и анализ. **34**:1, 1–34 (2022).
10. M. Rosenblum. *Summability of Fourier series in $L^p(d\mu)$* // Trans. Amer. Math. Soc. **105**:1, 32–42 (1962).
11. B. Muckenhoupt. *Two weight function norm inequalities for the Poisson integral* // Trans. Amer. Math. Soc. **210**, 225–231 (1975).
12. А.Д. Нахман, Б.П. Осиленкер. *Оценки весовых норм некоторых операторов, порожденных кратными тригонометрическими рядами Фурье* // Изв. вузов. Матем. 4, 39–50 (1982).
13. А.Д. Нахман. *Теоремы типа Розенблюма – Макенхоупта для кратных рядов Фурье векторнозначных функций* // Изв. вузов. Матем. 4, 25–31 (1984).
14. А.Д. Нахман. *Элементарные оценки весовых норм операторов свертки* // Изв. вузов. Матем. 10, 76–79 (1989).
15. A.D. Nakhman. *Weighted norm inequalities for the convolution operators* // Вестник Тамбовского гос. тех. ун-та. **15**:3, 653–660 (2009).
16. Е.М. Дынькин, Б.П. Осиленкер. *Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения* // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. **21**. М.: ВИНИТИ, 42–129 (1983).
17. E.M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals.* Princeton: Princeton Univ. Press. 1993.

18. S.M. Buckley. *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities* // Trans. Amer. Math. Soc. **340**:1, 253–272 (1993).
19. G. Wilmes. *On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbb{R}^N$* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **1**:1, 57–77 (1979).
20. R.M. Trigub, E.S. Belinsky. *Fourier analysis and approximation of functions.* Boston – Dordrecht – London: Kluwer Academic Publishers. 2004.
21. D.S. Lubinsky. *Weighted Markov – Bernstein inequalities for entire functions of exponential type* // Publ. de l'institut Mathématique. Nouvelle série. **96 (110)**, 181–192 (2014).
22. Г.И. Натансон, М.Ф. Тиман. *Средние геометрические последовательности наилучших приближений* // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр. 19, 50–52 (1979).
23. О.Л. Виноградов. *О константах в абстрактных обратных теоремах теории приближений* // Алгебра и анализ. **34**:4, 22–46 (2022).
24. R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden. *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform* // Trans. Amer. Math. Soc. **176**, 227–251 (1973).
25. Z. Ditzian, V.H. Hristov, K.G. Ivanov. *Moduli of smoothness and K-functionals in L_p, $0 < p < 1$* // Constr. Approx. **11**:1, 67–83 (1995).
26. R. Akgün. *Direct theorems of trigonometric approximation for variable exponent Lebesgue spaces* // Rev. de la Union Mat. Arg. **60**:1, 121–135 (2019).
27. R. Akgün. *Exponential approximation of functions in Lebesgue spaces with Muckenhoupt weight* // Пробл. анал. — Issues Anal. **12(30)**:1, 3–24 (2023).

Олег Леонидович Виноградов,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `olvin@math.spbu.ru`