ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 4 (2023). С. 99-109.

УДК 517.968; 519.64

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

Э.Г. ХАЛИЛОВ

Аннотация. Разыскивая решение краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоев, рассматриваемые краевые задачи приводятся к криволинейному интегральному уравнению, зависящему от операторов, порожденных потенциалами простого и двойного слоев и их нормальной производной. Известно, что операторы, порожденные потенциалами простого и двойного слоев и нормальной производной потенциала простого слоя, являются слабо-сингулярными интегральными операторами. Однако построенный Ляпуновым контрпример показывает, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует, т.е. оператор, порожденный нормальной производной потенциала двойного слоя, является сингулярным интегральным оператором.

Так как во многих случаях невозможно найти точные решения интегральных уравнений, то представляет интерес исследование приближенного решения полученных интегральных уравнений, в которых для нахождения приближенного решения требуется, в первую очередь, построение квадратурных формул для потенциалов простого и двойного слоев и их нормальных производных. В работе доказана теорема существования нормальной производной потенциала двойного слоя, дана формула для его вычисления. Кроме того, разработан новый метод построения квадратурной формулы для сингулярного криволинейного интеграла, на основании которого построена квадратурная формула для нормальной производной потенциала двойного слоя и дана ее оценка погрешности.

Ключевые слова: квадратурные формулы, сингулярный интеграл, потенциал двойного слоя, функция Ханкеля, кривая Ляпунова.

Mathematics Subject Classification: 45E05, 31B10

1. Введение и постановки задачи

Известно, что в двумерном пространстве разыскивая решение краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоев, рассматриваемые краевые задачи приводятся к интегральному уравнению (см. [1, Гл. III]), зависящему от оператора, порожденного нормальной производной потенциала двойного слоя:

$$(T\rho)(x) = 2\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_L \frac{\partial \Phi(x,\, y)}{\partial \nu(y)} \rho(y)\, dL_y, \quad x = (x_1, x_2) \in L, \tag{1.1}$$

здесь Δ — оператор Лапласа, k — волновое число, причем $Imk \geq 0$, $L \subset R^2$ — простая замкнутая кривая Ляпунова, $\rho(y)$ — непрерывная функция на кривой L, $\nu(y)$ — внешняя единичная нормаль в точке $y \in L$, а $\Phi(x,y)$ — фундаментальное решение уравнения

E.H. Khalilov, Quadrature formula for normal derivative of double layer potential.

Поступила 23 марта 2023 г.

Гельмгольца, т.е.

$$\Phi(x,\, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} & \text{при} \quad k = 0, \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(k\,|x-y|\right) & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases}$$

где через $|x-y|$ обозначено евклидово расстояние между точками x и y, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z)$,

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

— функция Бесселя нулевого порядка,

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

— функция Неймана нулевого порядка (см. [2, Гл. XIII]), а $C = 0.57721...$ — постоянная Эйлера. Следует указать, что построенный Ляпуновым контрпример показывает (см. [3, Гл. II]), что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует.

Так как во многих случаях невозможно найти точные решения интегральных уравнений, то представляет интерес исследование приближенного решения полученных интегральных уравнений, в которых для нахождения приближенного решения требуется, в первую очередь, построение квадратурных формул для потенциалов простого и двойного слоев и их нормальных производных. Отметим, что в работе [4], пользуясь асимптотической формулой для функций Ханкеля первого рода нулевого порядка, построена квадратурная формула для потенциалов простого и двойного слоев, которая не дает возможность определить скорость сходимости этих квадратурных формул. Однако, в работе [5] более практичным способом построены квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоев, а в работе [6] построена квадратурная формула для нормальной производной потенциала простого слоя, даны оценки погрешностей построенных квадратурных формул. Кроме того, в работах [7], [8] построены квадратурные формулы для нормальной производной логарифмических потенциалов простого и двойного слоев, исследованы приближенные решения интегральных уравнений внешней краевой задачи Дирихле и смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в двумерном пространстве. В работах же [9], [10] предложен новый метод для построения кубатурной формулы для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, дано обоснование метода коллокации для интегральных уравнений внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Однако, известно, что в трехмерном пространстве фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\Phi_k(x,\, y) = \frac{\exp\left(ik\,|x-y|\right)}{4\pi\,|x-y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y,$$

который строго отличается от фундаментального решения уравнения Гельмгольца в двухмерном пространстве. Также следует отметить, что в работе [11], рассматривая нормальную производную потенциала двойного слоя как гиперсингулярный интеграл, т.е. понимая интеграл в смысле конечного значения по Адамару, методом «подобластей» построена квадратурная формула для нормальной производной потенциала двойного слоя при дополнительно налагаемом условии на плотность ρ (см. [11, Гл. XIII]). Известно, что при этом условии выражение для нормальной производной потенциала двойного слоя может быть представлено в виде сингулярного интеграла (см. [1, Гл. II], [11, Гл. IV]), т.е. интеграл (1.1) существует в смысле главного значения Коши. Кроме того, следует указать, что построенная в работе [11] квадратурная формула не является практичной в том смысле, что ее коэффициентами являются сингулярные интегралы. Поэтому, рассматривая нормальную производную потенциала двойного слоя как интеграл в смысле главного значения Коши, более практичный способ построения квадратурной формулы для интеграла (1.1) имеет важное значение, чему и посвящена настоящая заметка.

2. Существование и формула вычисления нормальной производной потенциала двойного слоя

Через $C(L)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\rho\|_\infty = \max\limits_{x\in L} |\rho(x)|$, и для функции $\varphi(x) \in C(L)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi,\delta) = \delta \sup_{\tau\geqslant\delta} \frac{\bar{\omega}(\varphi,\tau)}{\tau}, \quad \delta>0,$$

где $\bar{\omega}(\varphi,\tau) = \max\limits_{\substack{|x-y|\leqslant\tau\\ x,y\in L}} |\varphi(x)-\varphi(y)|$. Отметим, что аналогичном образом вводится модуль непрерывности для непрерывной вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, при этом

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = \sqrt{(\varphi_1(x)-\varphi_1(y))^2 + (\varphi_2(x)-\varphi_2(y))^2}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $L \subset R^2$ — простая замкнутая кривая Ляпунова, $\rho(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на L и*

$$\int_0^{diam\,L} \frac{\omega(\mathrm{grad}\rho,\, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда потенциал двойного слоя

$$W(x) = \int_L \frac{\partial\Phi(x,\,y)}{\partial\nu(y)}\rho(y)\,dL_y, \quad x\in L,$$

имеет на L нормальную производную, причем

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(x)}{\partial\nu(x)} = &\int_L \frac{\partial V(x,y)}{\partial\nu(x)}\rho(y)\,dL_y \\ &- \frac{1}{\pi}\int_L \frac{(x-y,\nu(y))\,(x-y,\nu(x))}{|x-y|^4}(\rho(y)-\rho(x))\,dL_y \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{(\nu(y),\,\nu(x))}{|x-y|^2}(\rho(y)-\rho(x))\,dL_y, \quad x\in L\end{aligned} \tag{2.1}$$

и

$$\left|\frac{\partial W(x)}{\partial\nu(x)}\right| \leq M^1\left(\|\rho\|_\infty + \|\mathrm{grad}\rho\|_\infty + \int_0^{diamL}\frac{\omega(\mathrm{grad}\rho,t)}{t}dt\right), \quad \forall x\in L,$$

здесь через (a,b) обозначено скалярное произведение векторов a и b, $diamL = \sup\limits_{x,y\in L}|x-y|$ и

$$\begin{aligned}V(x,y) = &\left(\frac{i}{4} - \frac{C}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{k\,|x-y|}{2}\right)(y-x,\nu(y))\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!} \\ &- (y-x,\,\nu(y))\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m+1}(m-1)!\,m!} \\ &- \frac{1}{2\pi}(y-x,\,\nu(y))\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m}(m!)^2}.\end{aligned}$$

---

[1]Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Кроме того, первое и второе слагаемые, интегралы в равенстве (2.1) *являются слабо-сингулярными, а последний интеграл существует в смысле главного значения Коши, т.е.*

$$\int\limits_{L} \frac{(\nu(y), \nu(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x))\, dL_y = \lim_{\epsilon \to +0} \int\limits_{L \backslash L_\epsilon(x)} \frac{(\nu(y), \nu(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x))\, dL_y,$$

где $L_\epsilon(x)$ *— часть кривой* L*, заключенной внутри круга радиуса* ϵ *с центром в точке* $x \in L$*.*

Доказательство. Непосредственным вычислением получим, что

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} = \frac{i}{4} \left(\frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} + i \frac{\partial N_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} \right),$$

здесь

$$\frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} = (y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)!\, m!}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} =& \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k\,|x-y|}{2} + C \right) \frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} + \frac{2\,(y-x, \nu(y))}{\pi\,|x-y|^2} J_0(k|x-y|) \\ &+ (y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1} k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)!\, m!}. \end{aligned}$$

Тогда выражение $W(x)$ можно представить в виде

$$W(x) = \int_L \left(\frac{(x-y, \nu(y))}{2\pi\,|x-y|^2} + V(x,y) \right) \rho(y)\, dL_y, \quad x \in L.$$

В работе [12] показано, что если функция $\rho(x)$ непрерывно дифференцируема на L и

$$\int_0^{diam\,L} \frac{\omega(\mathrm{grad}\rho,\, t)}{t} dt < +\infty,$$

то функция

$$W_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(x-y, \nu(y))}{|x-y|^2} \rho(y)\, dL_y, \quad x \in L,$$

имеет на L нормальную производную, причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_0(x)}{\partial \nu(x)} =& -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(x-y, \nu(y))\,(x-y, \nu(x))}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x))\, dL_y \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\nu(y),\, \nu(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x))\, dL_y, \quad x \in L \end{aligned} \tag{2.2}$$

и

$$\left| \frac{\partial W_0(x)}{\partial \nu(x)} \right| \le M \left(\|\rho\|_\infty + \|\mathrm{grad}\rho\|_\infty + \int_0^{diamL} \frac{\omega(\mathrm{grad}\rho, t)}{t} dt \right), \quad \forall x \in L,$$

где последний интеграл в равенстве (2.2) существует в смысле главного значения Коши.

Так как (см.[13, Гл. V])

$$|(x-y, \nu(x))| \le M\,|x-y|^{1+\alpha}, \quad \forall x, y \in L, \tag{2.3}$$

тогда принимая во внимание неравенства

$$|J_0(k|x-y|)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{k\,|x-y|}{2} \right)^{2m} \right| \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|k|\ diamL)^{2m}}{4^m (m!)^2}, \quad \forall x, y \in L, \tag{2.4}$$

и

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1} k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)!\, m!} \right| \\ &\le \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} \right) \frac{|k|^{2m} (diamL)^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)!\, m!}, \qquad \forall x, y \in L, \end{aligned} \tag{2.5}$$

получаем, что

$$|V(x,y)| \le M\ |x-y|, \quad \forall x, y \in L.$$

Следовательно, функция

$$W_1(x) = \int_L V(x,y)\ \rho(y)\, dL_y, \quad x \in L,$$

имеет на L нормальную производную, причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(x)}{\partial \nu(x)} =& \int_L \frac{\partial V(x,y)}{\partial \nu(x)} \rho(y)\, dL_y \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(y-x, \nu(x))\,(y-x, \nu(y))}{|x-y|^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)\,!\, m\,!} \rho(y)\, dL_y \\ & - \int_L \left(\frac{i}{4} - \frac{C}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k\ |x-y|}{2} \right) (\nu(y), \nu(x)) \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)\,!\, m\,!} \rho(y)\, dL_y \\ & + \int_L \left(\frac{i}{4} - \frac{C}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k\ |x-y|}{2} \right) (y-x, \nu(y)) \\ & \times (x-y, \nu(x)) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-4}}{2^{2m-2} (m-2)\,!\, m\,!} \rho(y)\, dL_y \\ & + \int_L (\nu(y), \nu(x)) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1} k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m+1} (m-1)\,!\, m\,!} \rho(y)\, dL_y \\ & - \int_L (x-y, \nu(x))\ (y-x, \nu(y)) \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1} k^{2m} |x-y|^{2m-4}}{2^{2m} (m-2)\,!\, m\,!} \rho(y)\, dL_y \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_L (\nu(y), \nu(x))\ (y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m} (m!)^2} \rho(y)\, dL_y \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_L (x-y, \nu(x))\ (y-x, \nu(y)) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m (m-1)\, k^{2m} |x-y|^{2m-4}}{2^{2m-1} (m!)^2} \rho(y)\, dL_y \end{aligned}$$

и

$$\left| \frac{\partial V(x,y)}{\partial \nu(x)} \right| \le M\ |\ln|x-y||, \quad \forall x, y \in L. \tag{2.6}$$

Отсюда имеем:

$$\left| \frac{\partial W_1(x)}{\partial \nu(x)} \right| \le M\ \|\rho\|_\infty, \quad \forall x \in L.$$

Этим и завершается доказательство теоремы. □

3. Квадратурная формула для нормальной производной потенциала двойного слоя

Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей:

$$t_p = a + \frac{(b-a)\,p}{n}, \quad p = \overline{0,n},$$

где $M_0 = \max\limits_{t\in[a,b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} < +\infty$ (см. [14, Гл. VI]) и d — стандартный радиус (см. [13, Гл. V]). В качестве опорных точек возьмем $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, где $\tau_p = a + \frac{(b-a)(2p-1)}{2n}$. Тогда кривая L разбивается на элементарные части:

$$L = \bigcup_{p=1}^{n} L_p, \quad \text{где} \quad L_p = \{\, x(t): \;\; t_{p-1} \le t \le t_p \}.$$

Известно, что (см. [15])

(1) $\forall p \in \{1,2,...,n\}$: $r_p(n) \sim R_p(n)$, где

$$r_p(n) = \min\{\, |x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)| \,\},$$

$$R_p(n) = \max\{\, |x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, \, |x(t_p) - x(\tau_p)| \,\},$$

а запись $a(n) \sim b(n)$ означает, что $C_1 \le \frac{a(n)}{b(n)} \le C_2$, где C_1 и C_2 положительные постоянные, не зависящие от n.

(2) $\forall p \in \{1,2,...,n\} : R_p(n) \le d/2$;

(3) $\forall p, j \in \{1,2,...,n\} : r_j(n) \sim r_p(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim \frac{1}{n}$, где $R(n) = \max\limits_{p=\overline{1,n}} R_p(n)$, $r(n) = \min\limits_{p=\overline{1,n}} r_p(n)$.

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой L на «регулярные» элементарные части.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1 ([15])**.** *Существуют такие постоянные $C_0' > 0$ и $C_1' > 0$, не зависящие от n, для которых при $\forall p, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $j \ne p$, и $\forall y \in L_j$ справедливы следующие неравенства:*

$$C_0'\,|y - x(\tau_p)| \le |x(\tau_j) - x(\tau_p)| \le C_1'\,|y - x(\tau_p)|.$$

Очевидно, что существует натуральное число n_0 такое, что

$$(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} \le \min\{1, d/2\}, \qquad \forall n > n_0.$$

Пусть

$$Q_l = \left\{ j \mid 1 \le j \le n, \; |x(\tau_l) - x(\tau_j)| > (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\}$$

и

$$V_n(x,y) = \left(\frac{i}{4} - \frac{C}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{k\,|x-y|}{2}\right)(y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}$$
$$- (y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\right) \frac{(-1)^{m+1} k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m+1}(m-1)!\,m!}$$
$$- \frac{1}{2\pi}(y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Непосредственным вычислением получим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_n(x,y)}{\partial\nu(x)} =&\frac{1}{2\pi}\frac{(y-x,\nu(x))(y-x,\nu(y))}{|x-y|^2}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}\\ &-\left(\frac{i}{4}-\frac{C}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{k\,|x-y|}{2}\right)(\nu(y),\nu(x))\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}\\ &+\left(\frac{i}{4}-\frac{C}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{k\,|x-y|}{2}\right)(y-x,\nu(y))\\ &\times(x-y,\nu(x))\sum_{m=2}^{n}\frac{(-1)^m k^{2m}|x-y|^{2m-4}}{2^{2m-2}(m-2)!\,m!}\\ &+(\nu(y),\nu(x))\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m+1}(m-1)!\,m!}\\ &-(x-y,\nu(x))\,(y-x,\nu(y))\sum_{m=2}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}k^{2m}|x-y|^{2m-4}}{2^{2m}(m-2)!\,m!}\\ &+\frac{1}{2\pi}(\nu(y),\nu(x))\,(y-x,\nu(y))\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m}(m!)^2}\\ &-\frac{1}{2\pi}(x-y,\nu(x))\,(y-x,\nu(y))\sum_{m=2}^{n}\frac{(-1)^m(m-1)\,k^{2m}|x-y|^{2m-4}}{2^{2m-1}(m!)^2}.\end{aligned}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть $L\subset R^2$ — простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0<\alpha\le 1$, $\rho(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на L и*

$$\int_0^{diam\,L}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,\,t)}{t}dt<+\infty.$$

Тогда выражение

$$\begin{aligned}(T_n\rho)(x(\tau_l)) =&\frac{2\,(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{\partial V_n(x(\tau_l),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_l))}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,\rho(x(\tau_j))\\ &-\frac{2\,(b-a)}{\pi\,n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\,\nu(x(\tau_j)))\,(x(\tau_l)-x(\tau_j),\nu(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\\ &\times\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l)))\\ &+\frac{b-a}{\pi\,n}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\nu(x(\tau_j)),\nu(x(\tau_l)))}{|x(\tau_j)-x(\tau_l)|^2}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l)))\end{aligned}$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для $(T\rho)(x)$, причем справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}&\max_{l=\overline{1,n}}|(T\rho)(x(\tau_l))-(T_n\rho)(x(\tau_l))|\\ &\le M\left[\|\rho\|_\infty n^{-\alpha}+\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}+\int_0^{n^{-\frac{1}{1+\alpha}}}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,\,t)}{t}\,dt\right],\end{aligned}$$

если $0<\alpha<1$,

$$\max_{l=\overline{1,\,n}}\left|(T\rho)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-\left(T_n\rho\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|$$
$$\leq M\left[\frac{\|\rho\|_\infty\ln n}{n}+\frac{\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty}{\sqrt{n}}+\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,\,t)}{t}\,dt\right],$$

если $\alpha=1$.

Доказательство. В работе [16] доказано, что если функция $\rho(x)$ непрерывно дифференцируема на L и

$$\int_0^{diam\,L}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,\,t)}{t}dt<+\infty,$$

то выражение

$$\left(\frac{\partial W_0}{\partial\nu}\right)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)=-\frac{b-a}{\pi\,n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\,\nu\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\,\nu\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right)\right|^4}$$
$$\times\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}\,\left(\rho\left(x\left(\tau_j\right)\right)-\rho\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)$$
$$+\frac{b-a}{2\pi\,n}\sum_{j\in Q_l}\frac{\left(\nu\left(x\left(\tau_j\right)\right),\,\nu\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_j\right)-x\left(\tau_l\right)\right|^2}$$
$$\times\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}\,\left(\rho\left(x\left(\tau_j\right)\right)-\rho\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)$$

в опорных точках $x\left(\tau_l\right),\ l=\overline{1,\,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $\frac{\partial W_0(x)}{\partial\nu(x)}$, причем справедливы следующие оценки:

$$\max_{p=\overline{1,\,n}}\left|\frac{\partial W_0\left(x\left(\tau_l\right)\right)}{\partial\nu\left(x\left(\tau_l\right)\right)}-\left(\frac{\partial W_0}{\partial\nu}\right)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|$$
$$\leq M\left[\|\rho\|_\infty n^{-\alpha}+\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}+\int_0^{n^{-\frac{1}{1+\alpha}}}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,\,t)}{t}\,dt\right],$$

если $0<\alpha<1$,

$$\max_{p=\overline{1,\,n}}\left|\frac{\partial W_0\left(x\left(\tau_l\right)\right)}{\partial\nu\left(x\left(\tau_l\right)\right)}-\left(\frac{\partial W_0}{\partial\nu}\right)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|$$
$$\leq M\left[\frac{\|\rho\|_\infty\ln n}{n}+\frac{\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty}{\sqrt{n}}+\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,\,t)}{t}\,dt\right],$$

если $\alpha=1$.

Теперь покажем, что выражение

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial\nu}\right)^n\left(x\left(\tau_p\right)\right)=\frac{b-a}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}\,\rho\left(x\left(\tau_j\right)\right)$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,\,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $\frac{\partial W_1(x)}{\partial\nu(x)}$. Нетрудно увидеть, что

$$\frac{\partial W_1(x(\tau_p))}{\partial\nu(x(\tau_p))}-\left(\frac{\partial W_1}{\partial\nu}\right)^n(x(\tau_p))=\int_{L_p}\frac{\partial V(x(\tau_p),\,y)}{\partial\nu(x)}\,\rho(y)\,dL_y$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int_{L_j}\left(\frac{\partial V(x(\tau_p),\,y)}{\partial\nu(x(\tau_p))}-\frac{\partial V_n(x(\tau_p),\,x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_p))}\right)\rho(y)\,dL_y$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int_{L_j}\frac{\partial V_n(x(\tau_p),\,x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_p))}\,(\rho(y)-\rho(x(\tau_j)))\,dL_y$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\partial V_n(x(\tau_p),\,x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_p))}$$
$$\times\left(\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right)\rho(x(\tau_j))\,dt.$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$, соответственно.

Учитывая (2.6) и формулу вычисления криволинейного интеграла, получим:

$$|\delta_1^n(x(\tau_p))|\le M\ \|\rho\|_\infty\int_0^{R(n)}|\ln\tau|\,d\tau\le M\ \|\rho\|_\infty\,R(n)\ |\ln R(n)|\,.$$

Пусть $y\in L_j$ и $j\neq p$. Из леммы 3.1 и неравенства (2.3), очевидно, что

$$||x(\tau_p)-y|^q-|x(\tau_p)-x(\tau_j)|^q|\le M\,q\,R(n)\ (diamL)^{q-1}\,,$$

$$|(\nu(y)\,,\nu(x(\tau_p)))-(\nu(x(\tau_j))\,,\nu(x(\tau_p)))|\le M\ (R(n))^{\alpha}\,,$$

$$|(x(\tau_p)-y,\nu(y))-(x(\tau_p)-x(\tau_j)\,,\nu(y))|=|(x(\tau_j)-y,\nu(y))|\le M\ (R(n))^{1+\alpha}\,,$$

$$|(x(\tau_p)-y,\nu(x(\tau_p)))-(x(\tau_p)-x(\tau_j)\,,\nu(x(\tau_p)))|=|(x(\tau_j)-y,\nu(x(\tau_p)))|$$
$$\le|(x(\tau_j)-y,\nu(x(\tau_j)))|+|(x(\tau_j)-y,\nu(x(\tau_p))-\nu(x(\tau_j)))|\le M\ |y-x(\tau_p)|^{\alpha}\,R(n)$$

и

$$|\ln(k\,|x(\tau_p)-y|)-\ln(k\,|x(\tau_p)-x(\tau_j)|)|=\left|\ln\frac{|x(\tau_p)-x(\tau_j)|}{|x(\tau_p)-y|}\right|$$
$$=\left|\ln\left(1+\frac{|x(\tau_p)-x(\tau_j)|-|x(\tau_p)-y|}{|x(\tau_p)-y|}\right)\right|$$
$$\le\left|\ln\left(1+\frac{|x(\tau_j)-y|}{|x(\tau_p)-y|}\right)\right|\le M\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|},$$

где $q\in\mathrm{N}$. Тогда из неравенства (2.4) и (2.5) следует, что

$$\left|\frac{\partial V(x(\tau_p)\,,\,y)}{\partial\nu(x(\tau_p))}-\frac{\partial V(x(\tau_p)\,,\,x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_p))}\right|\le M\ \left((R(n))^{\alpha}\,|\ln|x(\tau_p)-y||+\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|}\right).$$

Также, учитывая неравенство

$$\left|\frac{\partial V(x(\tau_p)\,,\,x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_p))}-\frac{\partial V_n(x(\tau_p)\,,\,x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_p))}\right|\le M\frac{|\ln|x(\tau_p)-y||}{n\,!},\tag{3.1}$$

получим:

$$\left|\frac{\partial V\left(x\left(\tau_p\right),\, y\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}-\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right|$$
$$\leq M\,\left(\left(R\left(n\right)\right)^{\alpha}\left|\ln\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|\right|+\frac{R\left(n\right)}{\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}+\frac{\left|\ln\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|\right|}{n\,!}\right).$$

В итоге получаем, что если $0<\alpha<1$, то

$$\left|\delta_2^n\left(x\left(\tau_p\right)\right)\right| \leq M\,\left\|\rho\right\|_{\infty}\left(\left(R\left(n\right)\right)^{\alpha}\int_{r(n)}^{diam\,L}\left|\ln\tau\right|d\tau\right.$$
$$\left.+R\left(n\right)\int_{r(n)}^{diam\,L}\frac{d\tau}{\tau}+\frac{1}{n\,!}\int_{r(n)}^{diam\,L}\left|\ln\tau\right|d\tau\right)\leq M\,\left\|\rho\right\|_{\infty}\left(\left(R\left(n\right)\right)^{\alpha}+\frac{1}{n\,!}\right),$$

а если $\alpha=1$, то

$$\left|\delta_2^n\left(x\left(\tau_p\right)\right)\right|\leq M\,\left\|\rho\right\|_{\infty}\left(R\left(n\right)\,\left|\ln R\left(n\right)\right|+\frac{1}{n\,!}\right).$$

Пусть $y\in L_j$ и $j\neq p$. Так как из леммы 3.1 и неравенств (2.6) и (3.1) очевидно, что

$$\left|\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right|\leq\left|\frac{\partial V\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right|$$
$$+\left|\frac{\partial V\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}-\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right| \tag{3.2}$$
$$\leq M\,\left(\left|\ln\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|\right|+\frac{1}{\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|^{1-\alpha}\,n\,!}\right),\quad \forall n\in\mathrm{N},$$

тогда

$$\left|\delta_3^n\left(x\left(\tau_p\right)\right)\right|\leq 2\,\omega\left(\rho,R\left(n\right)\right)\,\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int_{L_j}\left|\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right|dL_y$$
$$\leq 2\,\omega\left(\rho,R\left(n\right)\right)\,\int_{L}\left|\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right|dL_y\leq M\omega\,\left(\rho,R\left(n\right)\right).$$

Кроме того, учитывая лемму 3.1 и неравенство (3.2) и

$$\left|\sqrt{\left(x_1'\left(t\right)\right)^2+\left(x_2'\left(t\right)\right)^2}-\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}\right|\leq M\left(R\left(n\right)\right)^{\alpha},\quad \forall t\in\left[t_{j-1},t_j\right],$$

получим:

$$\left|\delta_4^n\left(x\left(\tau_p\right)\right)\right|\leq M\left\|\rho\right\|_{\infty}\left(R\left(n\right)\right)^{\alpha}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right|dt$$
$$\leq M\left\|\rho\right\|_{\infty}\left(R\left(n\right)\right)^{\alpha}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int_{L_j}\left|\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right|dL_y$$
$$\leq M\left\|\rho\right\|_{\infty}\left(R\left(n\right)\right)^{\alpha}\int_{L}\left|\frac{\partial V_n\left(x\left(\tau_p\right),\, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial \nu\left(x\left(\tau_p\right)\right)}\right|dL_y\leq M\left\|\rho\right\|_{\infty}\left(R\left(n\right)\right)^{\alpha}.$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$, и учитывая соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, получаем, что если $0 < \alpha < 1$, то

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left| \frac{\partial W_1(x(\tau_p))}{\partial \nu(x(\tau_p))} - \left(\frac{\partial W_1}{\partial \nu}\right)^n (x(\tau_p)) \right| \leq M \left(\omega(\rho, 1/n) + \|\rho\|_\infty \frac{1}{n^\alpha} \right),$$

а если $\alpha = 1$, то

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left| \frac{\partial W_1(x(\tau_p))}{\partial \nu(x(\tau_p))} - \left(\frac{\partial W_1}{\partial \nu}\right)^n (x(\tau_p)) \right| \leq M \left(\omega(\rho, 1/n) + \|\rho\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

В итоге, суммируя построенные квадратурные формулы для интегралов $\frac{\partial W_0(x)}{\partial \nu(x)}$ и $\frac{\partial W_1(x)}{\partial \nu(x)}$ в опорных точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, получаем доказательство теоремы 3.1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Колтон, Р. Кресс. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* М.: Мир. 1987.
2. Е. Янке, Ф. Емде, Ф. Леш. *Специальные функции.* М.: Наука. 1964.
3. Н.М. Гюнтер. *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.* М.: Гостехиздат. 1953.
4. R. Kress. *Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering* // Math. Comp. Model. **15**:3–5, 229–243 (1991).
5. E.H. Khalilov. *Quadrature formulas for some classes of curvilinear integrals* //Baku Math. Journ. **1**:1, 15–27 (2022).
6. Э.Г. Халилов. *Исследование приближенного решения одного класса систем интегральных уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **62**:5, 838–853 (2022).
7. М.Н. Бахшалыева, Э.Г. Халилов. *Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **61**:6, 936–950 (2021).
8. Э.Г. Халилов, М.Н. Бахшалыева. *Исследование приближенного решения интегрального уравнения, соответствующего смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа* // Уфимск. матем. журнал. **13**:1, 86–98 (2021).
9. Э.Г. Халилов. *Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений* // Матем. заметки. **107**:4, 604-622 (2020).
10. E.H. Khalilov, A.R. Aliev. *Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation* // Math. Meth. Appl. Sci. **41**:16, 6921–6933 (2018).
11. И.К. Лифанов. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* М.: ТОО «Янус». 1995.
12. Э.Г. Халилов, М.Н. Бахшалыева. *О производной логарифмического потенциала двойного слоя* // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. **62**, 38–54 (2019).
13. В.С. Владимиров. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1981.
14. Н.И. Мусхелешвили. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Физматлит. 1962.
15. E.H. Khalilov, M.N. Bakhshaliyeva. *Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials* // Proc. Inst. Math. Mech. Imm. Az. **45**:1, 155–162 (2019).
16. М.Н. Бахшалыева. *Квадратурная формула для производной логарифмических потенциалов* // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. **68**, 5–22 (2020).

Эльнур Гасан оглы Халилов,
Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности,
пр. Азадлыг 20,
AZ 1010, г. Баку, Азербайджан
E-mail: elnurkhalil@mail.ru