

УДК 517.95

## О ЛИНЕЙНО-АВТОНОМНЫХ СИММЕТРИЯХ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ГЕАНА–ПУ

Х.В. ЯДРИХИНСКИЙ, В.Е. ФЕДОРОВ

**Аннотация.** Исследуются групповые свойства модели Геана–Пу дробного порядка по времени, описывающей динамику ценообразования опционов. Найдены группы линейно-автономных преобразований эквивалентности соответствующего уравнения. С их помощью получена групповая классификация дробной модели Геана–Пу с нелинейным свободным элементом. В случае ненулевой безрисковой процентной ставки  $r$  основная алгебра Ли такой модели одномерна. Для нулевой  $r$  основная алгебра Ли трехмерна в случае правой части специального вида и двумерна в противном случае.

**Ключевые слова:** дробная производная Римана–Лиувилля, дробная модель Геана–Пу, симметричный анализ, линейно-автономное преобразование, группа преобразований эквивалентности, групповая классификация.

**Mathematics Subject Classification:** 35R11, 26A33, 58J70

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Все новые нелинейные модификации описывающего динамику ценообразования опционов уравнения Блэка–Шоулза [1], [2], учитывающие различные свойства реального рынка, которые были идеализированы при выводе линейного уравнения, такие как неликвидность рынка, расходы на хеджирование, влияние транзакций на формирование цен и др., предлагаются исследователями в последние полвека [1]–[10]. Одной из нелинейных моделей Блэка–Шоулза является уравнение Геана–Пу

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q), \quad (1.1)$$

моделирующее ценообразование опционов с учетом транзакционных издержек и влияния операций на рынок при ряде допущений [11], [12]. Здесь  $r$  — постоянная безрисковая ставка;  $\gamma$  — параметр абсолютного неприятия риска;  $\sigma$  — волатильность;  $q$  — количество акций в хеджируемом портфеле;  $S$  — цена акции;  $\mu$  — прогноз тренда, ожидаемая доходность базового актива; функция  $\theta(t, S, q)$  моделирует цену безразличия колл-опциона.

В [13]–[16] уравнение (1.1) исследовано методами группового анализа [17], [18] при различных условиях на функцию  $F$  двух переменных. Настоящая работа посвящена исследованию симметрий дробного варианта модели (1.1)

$$D_t^\alpha \theta = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q), \quad (1.2)$$

где  $D_t^\alpha$  — оператор дробной производной Римана–Лиувилля порядка  $\alpha \in (0, 1]$ . Как известно, дробные производные моделируют процессы с памятью [19], [20]. Дробные производные, как их часто называют, были введены в теорию ценообразования опционов для того, чтобы

---

Kh.V. YADRIKHINSKIY, V.E. FEDOROV, ON LINEAR-AUTONOMOUS SYMMETRIES OF THE FRACTIONAL MODEL OF GUEANT–PU.

© Ядрихинский Х.В., Федоров В.Е. 2023.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 16.02.2023 № 075-02-2023-947.

Поступила 2 апреля 2023 г.

воспользоваться их свойствами памяти, позволяющими фиксировать как крупные скачки за небольшие промежутки времени, так и долгосрочные зависимости на рынках [21]–[24].

В данной работе методами, предложенными в работах Р.К. Газизова, А.А. Касаткина и С.Ю. Лукашука [25]–[28], получены генераторы групп линейно-автономных преобразований, допускаемых уравнением (1.2). При этом в силу теоремы 2.7 из работы [29] уравнения, разрешенные относительно дробной производной Римана–Лиувилля по выделенной переменной и содержащие только производные целого порядка по другим переменным, другими допускаемыми группами не обладают. Получена групповая классификация с точностью до линейно-автономных преобразований эквивалентности для уравнения (1.2) с нелинейным по  $\theta_q$  свободным элементом  $F$ .

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Дробные интеграл Римана–Лиувилля порядка  $\beta > 0$  и производная Римана–Лиувилля порядка  $\alpha \in (n - 1, n]$  имеют вид [20]

$$J_t^\beta \theta(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta-1} \theta(s) ds, \quad D_t^\alpha \theta := D_t^n J_t^{n-\alpha} \theta(t),$$

при этом также предполагается, что  $J_t^0 \theta(t) := \theta(t)$ . Здесь  $D_t^n$  — оператор дифференцирования целого порядка  $n \in \mathbb{N}$ . Напомним также определение функции Миттаг–Леффлера [20]:

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Известны [20] соотношения

$$\begin{aligned} D_t^\alpha 1 &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \quad D_t^\alpha t^\nu = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1 - \alpha)} t^{\nu - \alpha}, \\ D_t^\alpha t^{\alpha - k} &= 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k < \alpha + 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

и формула общего решения

$$y = \sum_{j=1}^n b_j t^{\alpha - j} E_{\alpha, \alpha - j + 1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t - s)^\alpha) f(s) ds, \quad (2.2)$$

дробного дифференциального уравнения  $D_t^\alpha y(t) - \lambda y(t) = f(t)$ .

## 3. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ГЕАНА-ПУ

Рассматриваем уравнение (1.2), где  $0 < \alpha < 1$ ,  $\theta = \theta(t, S, q)$ ,  $\gamma \sigma \neq 0$ . Для нахождения групп преобразований эквивалентности рассматриваем функцию  $F$  и все ее производные как переменные. Генераторы групп преобразований эквивалентности будем искать в виде  $Y = \tau \partial_t + \xi \partial_S + \beta \partial_q + \eta \partial_\theta + \zeta \partial_F$ , где  $\tau, \xi, \beta, \eta$  зависят от  $t, S, q, \theta$ , а  $\zeta$  от  $t, S, q, \theta, F, \theta_t, \theta_S, \theta_q, D_t^\alpha \theta$ . Здесь  $\partial_u := \frac{\partial}{\partial u}$  — оператор частной производной по переменной  $u$ .

Следуя [27], [28], ищем оператор  $Y$  в линейно-автономном виде:

$$\xi_\theta = 0, \quad \tau_\theta = 0, \quad \beta_\theta = 0, \quad \eta = p(t, S, q)\theta + g(t, S, q)$$

с условием  $\tau(0) = 0$ . Для учета зависимости  $F$  только от  $t$  и  $\theta_q$  добавляем уравнения

$$F_S = 0, \quad F_q = 0, \quad F_\theta = 0, \quad F_{D_t^\alpha \theta} = 0, \quad F_{\theta_t} = 0, \quad F_{\theta_S} = 0. \quad (3.1)$$

Будем рассматривать систему (1.2), (3.1) как многообразие  $\mathfrak{M}$  в расширенном пространстве соответствующих переменных. Продолженный оператор  $\tilde{Y}$  имеет вид

$$\tilde{Y} = Y + \eta^\alpha \partial_{D_t^\alpha \theta} + \eta^t \partial_{\theta_t} + \eta^S \partial_{\theta_S} + \eta^q \partial_{\theta_q} + \eta^{SS} \partial_{\theta_{SS}} + \zeta^t \partial_{F_t} + \zeta^S \partial_{F_S}$$

$$+ \zeta^q \partial_{F_q} + \zeta^\theta \partial_{F_\theta} + \zeta^{D_t^\alpha \theta} \partial_{F_{D_t^\alpha \theta}} + \zeta^{\theta_S} \partial_{F_{\theta_S}} + \zeta^{\theta_q} \partial_{F_{\theta_q}}.$$

Действием оператора  $\tilde{Y}$  на обе части равенства (1.2) получаем

$$\begin{aligned} \eta^\alpha - r\eta - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\eta^S + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{SS} - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\eta^S - \beta) - \zeta|_{\mathfrak{M}} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для вычисления коэффициентов продолженного оператора  $\tilde{Y}$  используются операторы полного дифференцирования

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + \theta_t \frac{\partial}{\partial \theta} + \dots, & D_S &= \frac{\partial}{\partial S} + \theta_S \frac{\partial}{\partial \theta} + \dots, & D_q &= \frac{\partial}{\partial q} + \theta_q \frac{\partial}{\partial \theta} + \dots, \\ \tilde{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + F_t \frac{\partial}{\partial F} + \dots, & \tilde{D}_S &= \frac{\partial}{\partial S} + F_S \frac{\partial}{\partial F} + \dots, & \tilde{D}_q &= \frac{\partial}{\partial q} + F_q \frac{\partial}{\partial F} + \dots, \\ \tilde{D}_\theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} + F_\theta \frac{\partial}{\partial F} + \dots, & \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} &= \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha \theta} + F_{D_t^\alpha \theta} \frac{\partial}{\partial F} + \dots, \\ \tilde{D}_{\theta_S} &= \frac{\partial}{\partial \theta_S} + F_{\theta_S} \frac{\partial}{\partial F} + \dots, & \tilde{D}_{\theta_q} &= \frac{\partial}{\partial \theta_q} + F_{\theta_q} \frac{\partial}{\partial F} + \dots \end{aligned}$$

С их помощью задаются продолжения по переменным  $S$  и  $q$

$$\begin{aligned} \eta^S &= D_S \eta - \theta_t D_S \tau - \theta_S D_S \xi - \theta_q D_S \beta, & \eta^q &= D_q \eta - \theta_t D_q \tau - \theta_S D_q \xi - \theta_q D_q \beta, \\ \eta^{SS} &= D_S \eta^S - \theta_{St} D_S \tau - \theta_{SS} D_S \xi - \theta_{Sq} D_S \beta. \end{aligned}$$

По теореме 2.8 из [27] и согласно ее обобщению на случай многих переменных, теореме 3 из [28], получаем продолжение по дробной производной

$$\eta^\alpha = D_t^\alpha (\eta - \tau\theta_t - \xi\theta_S - \beta\theta_q) + \tau D_t^{\alpha+1} \theta + \xi D_t^\alpha \theta_S + \beta D_t^\alpha \theta_q.$$

Для исключения производных вида  $\theta_t$  под знаком дробного дифференцирования воспользуемся равенством  $D_t^\alpha (\tau\theta_t) = D_t^\alpha ((\tau\theta)_t - \tau_t\theta)$ . Используя (1.8) из [27] или дифференцируя (2.43) из теоремы 2.2 в [20], получаем равенство

$$D_t^\alpha (\tau\theta)_t = D_t^{\alpha+1} (\tau\theta) - (\tau\theta)(0) \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Отсюда с учетом условия  $\tau(0) = 0$  следует равенство

$$D_t^\alpha (\tau\theta_t) = D_t^{\alpha+1} (\tau\theta) - D_t^\alpha (\tau_t\theta).$$

Тогда продолжение по дробной производной примет вид

$$\eta^\alpha = D_t^\alpha (\eta - \xi\theta_S - \beta\theta_q) + \xi D_t^\alpha \theta_S + \beta D_t^\alpha \theta_q + D_t^\alpha (\tau_t\theta) - D_t^{\alpha+1} (\tau\theta) + \tau D_t^{\alpha+1} \theta.$$

С помощью обобщенного правила Лейбница для дробных производных получаем

$$\begin{aligned} \eta^\alpha &= D_t^\alpha \eta - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_S D_t^n \xi - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_q D_t^n \beta + \xi D_t^\alpha \theta_S \\ &\quad + \beta D_t^\alpha \theta_q + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta D_t^{n+1} \tau - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_t^{\alpha+1-n} \theta D_t^n \tau + \tau D_t^{\alpha+1} \theta \\ &= D_t^\alpha \eta - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_S D_t^n \xi - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_q D_t^n \beta + \xi D_t^\alpha \theta_S \\ &\quad + \beta D_t^\alpha \theta_q + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta D_t^{n+1} \tau - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n+1} D_t^{\alpha-n} \theta D_t^{n+1} \tau, \end{aligned}$$

где  $\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)}$ . Так как  $\binom{\alpha+1}{n+1} = \frac{\alpha+1}{n+1} \binom{\alpha}{n}$ , то

$$\begin{aligned} \eta^\alpha &= D_t^\alpha \eta - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_S D_t^n \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_q D_t^n \beta \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{\alpha-n} \theta D_t^{n+1} \tau. \end{aligned}$$

Дальнейшее вычисление для линейно-автономных преобразований дает

$$\begin{aligned} \eta^\alpha &= D_t^\alpha g + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta \left( D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1} \tau \right) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_S D_t^n \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_q D_t^n \beta. \end{aligned}$$

Коэффициенты при производных  $F$  продолженного оператора  $\tilde{Y}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta^S &= \tilde{D}_S \zeta - F_t \tilde{D}_S \tau - F_S \tilde{D}_S \xi - F_q \tilde{D}_S \beta - F_\theta \tilde{D}_S \eta \\ &- F_{D_t^\alpha \theta} \tilde{D}_S \eta^\alpha - F_{\theta_t} \tilde{D}_S \eta^t - F_{\theta_S} \tilde{D}_S \eta^S - F_{\theta_q} \tilde{D}_S \eta^q, \\ \zeta^q &= \tilde{D}_q \zeta - F_t \tilde{D}_q \tau - F_S \tilde{D}_q \xi - F_q \tilde{D}_q \beta - F_\theta \tilde{D}_q \eta \\ &- F_{D_t^\alpha \theta} \tilde{D}_q \eta^\alpha - F_{\theta_t} \tilde{D}_q \eta^t - F_{\theta_S} \tilde{D}_q \eta^S - F_{\theta_q} \tilde{D}_q \eta^q, \\ \zeta^\theta &= \tilde{D}_\theta \zeta - F_t \tilde{D}_\theta \tau - F_S \tilde{D}_\theta \xi - F_q \tilde{D}_\theta \beta - F_\theta \tilde{D}_\theta \eta \\ &- F_{D_t^\alpha \theta} \tilde{D}_\theta \eta^\alpha - F_{\theta_t} \tilde{D}_\theta \eta^t - F_{\theta_S} \tilde{D}_\theta \eta^S - F_{\theta_q} \tilde{D}_\theta \eta^q, \\ \zeta^{D_t^\alpha \theta} &= \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \zeta - F_t \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \tau - F_S \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \xi - F_q \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \beta - F_\theta \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \eta \\ &- F_{D_t^\alpha \theta} \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \eta^\alpha - F_{\theta_t} \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \eta^t - F_{\theta_S} \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \eta^S - F_{\theta_q} \tilde{D}_{D_t^\alpha \theta} \eta^q, \\ \zeta^{\theta_t} &= \tilde{D}_{\theta_t} \zeta - F_t \tilde{D}_{\theta_t} \tau - F_S \tilde{D}_{\theta_t} \xi - F_q \tilde{D}_{\theta_t} \beta - F_\theta \tilde{D}_{\theta_t} \eta \\ &- F_{D_t^\alpha \theta} \tilde{D}_{\theta_t} \eta^\alpha - F_{\theta_t} \tilde{D}_{\theta_t} \eta^t - F_{\theta_S} \tilde{D}_{\theta_t} \eta^S - F_{\theta_q} \tilde{D}_{\theta_t} \eta^q, \\ \zeta^{\theta_S} &= \tilde{D}_{\theta_S} \zeta - F_t \tilde{D}_{\theta_S} \tau - F_S \tilde{D}_{\theta_S} \xi - F_q \tilde{D}_{\theta_S} \beta - F_\theta \tilde{D}_{\theta_S} \eta \\ &- F_{D_t^\alpha \theta} \tilde{D}_{\theta_S} \eta^\alpha - F_{\theta_t} \tilde{D}_{\theta_S} \eta^t - F_{\theta_S} \tilde{D}_{\theta_S} \eta^S - F_{\theta_q} \tilde{D}_{\theta_S} \eta^q. \end{aligned}$$

Действуем оператором  $\tilde{Y}$  на уравнения (3.1) и получаем

$$\zeta^S|_{\mathfrak{M}} = 0, \quad \zeta^q|_{\mathfrak{M}} = 0, \quad \zeta^\theta|_{\mathfrak{M}} = 0, \quad \zeta^{D_t^\alpha \theta}|_{\mathfrak{M}} = 0, \quad \zeta^{\theta_t}|_{\mathfrak{M}} = 0, \quad \zeta^{\theta_S}|_{\mathfrak{M}} = 0.$$

Расписывая их и подставляя (3.1), имеем

$$\begin{aligned} \zeta^S|_{\mathfrak{M}} &= \zeta_S - F_t \tau_S - F_{\theta_q} \eta_S^q|_{\mathfrak{M}} = 0, & \zeta^q|_{\mathfrak{M}} &= \zeta_q - F_t \tau_q - F_{\theta_q} \eta_q^q|_{\mathfrak{M}} = 0, \\ \zeta^\theta|_{\mathfrak{M}} &= \zeta_\theta - F_t \tau_\theta - F_{\theta_q} \eta_\theta^q|_{\mathfrak{M}} = 0, & \zeta^{D_t^\alpha \theta}|_{\mathfrak{M}} &= \zeta_{D_t^\alpha \theta}|_{\mathfrak{M}} = 0, \\ \zeta^{\theta_t}|_{\mathfrak{M}} &= \zeta_{\theta_t} - F_{\theta_q} \eta_{\theta_t}^q|_{\mathfrak{M}} = 0, & \zeta^{\theta_S}|_{\mathfrak{M}} &= \zeta_{\theta_S} - F_{\theta_q} \eta_{\theta_S}^q|_{\mathfrak{M}} = 0. \end{aligned}$$

Распишем  $\eta^q$  и, переходя на многообразии  $\mathfrak{M}$ , получим

$$\begin{aligned} \zeta_S - F_t \tau_S - F_{\theta_q} (p_{Sq} \theta + p_S \theta_q + g_{Sq} - \theta_t \tau_{Sq} - \theta_S \xi_{Sq} - \theta_q \beta_{Sq}) &= 0, \\ \zeta_q - F_t \tau_q - F_{\theta_q} (p_{qq} \theta + p_q \theta_q + g_{qq} - \theta_t \tau_{qq} - \theta_S \xi_{qq} - \theta_q \beta_{qq}) &= 0, \\ \zeta_\theta - F_{\theta_q} p_q = 0, \quad \zeta_{D_t^\alpha \theta} = 0, \quad \zeta_{\theta_t} + F_{\theta_q} \tau_q = 0, \quad \zeta_{\theta_S} + F_{\theta_q} \xi_q &= 0. \end{aligned}$$

Разделение переменных дает

$$\begin{aligned} \tau_S = 0, \quad \tau_q = 0, \quad \xi_q = 0, \quad p_q = 0, \quad \zeta_S = 0, \quad \zeta_q = 0, \quad \zeta_\theta = 0, \quad \zeta_{D_t^\alpha \theta} = 0, \\ \zeta_{\theta_t} = 0, \quad \zeta_{\theta_S} = 0, \quad p_S - \beta_{Sq} = 0, \quad \beta_{qq} = 0, \quad g_{Sq} = 0, \quad g_{qq} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь подставляем в (3.2) формулы коэффициентов продолженного оператора  $\tilde{Y}$  и уравнение  $\tau_S = 0$  из (3.3) и получаем

$$\begin{aligned} D_t^\alpha g + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta \left( D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1} \tau \right) \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_S D_t^n \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_q D_t^n \beta - rp\theta - rg - (\mu - rS)\beta \\ + rq\xi + \mu(p_S\theta + p\theta_S + g_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ + \frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) \\ + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + p\theta_S + g_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) - \zeta|_{\mathfrak{M}} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Переходя на многообразии  $\mathfrak{M}$  в уравнении (3.4) при помощи выражения для  $D_t^\alpha \theta$  из (1.2), получаем

$$\begin{aligned} (p - \alpha\tau_t) \left( r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F \right) \\ + D_t^\alpha g + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta \left( D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1} \tau \right) \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_S D_t^n \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} \theta_q D_t^n \beta \\ - rp\theta - rg - (\mu - rS)\beta + rq\xi \\ + \mu(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 \\ + \frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) \\ + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) - \zeta = 0. \end{aligned}$$

Разделение переменных дает

$$D_t^{\alpha-n} \theta : \quad D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1} \tau = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

$$D_t^{\alpha-n} \theta_S : \quad D_t^n \xi = 0, \quad D_t^{\alpha-n} \theta_q : \quad D_t^n \beta = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

$$\theta_{SS} : \quad \frac{\sigma^2}{2}(- (p - \alpha\tau_t) + p - 2\xi_S) = 0, \quad (3.7)$$

$$\theta_{Sq} : \quad \beta_S = 0, \quad p_S = 0, \quad (3.8)$$

$$\theta_S^2 : \quad -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \alpha\tau_t) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \xi_S) = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \theta_S : \quad (p - \alpha\tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu(p - \xi_S) - \frac{\sigma^2}{2}\xi_{SS} \\ + r\tau q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta - q(p - \xi_S)) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$1 : \quad (p - \alpha\tau_t) \left( r\theta + (\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + D_t^\alpha g - rp\theta - rg - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2} g_{SS} \\
 & - \frac{rq^2}{2} \gamma \sigma^2 e^{r(T-t)} \tau - q\gamma \sigma^2 e^{r(T-t)} (g_S - \beta) - \zeta = 0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из (3.6) получаем, что  $\xi_t = 0$ ,  $\beta_t = 0$ . Из (3.7) получаем равенство  $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$ , поэтому  $\tau_{tt} = 0$ ,  $\xi_{SS} = 0$ . Тогда из (3.5) при  $n = 1$  получаем  $p_t = 0$ . Учитывая, что  $p_q = 0$  в силу (3.3) и  $p_S = 0$  в силу (3.8), имеем постоянное  $p = p_0$ .

Для функций  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\beta$  имеем  $\tau_{tt} = 0$ ,  $\tau_q = 0$  и  $\tau_S = 0$  из (3.3),  $\xi_t = 0$  и  $\xi_{SS} = 0$ ,  $\xi_q = 0$  из (3.3),  $\beta_t = 0$ ,  $\beta_S = 0$  из (3.8) и  $\beta_{qq} = 0$  из (3.3). С учетом равенства  $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$  из (3.7) и условия  $\tau(0) = 0$  интегрирование дает

$$p = p_0, \quad \tau = Mt, \quad \xi = \frac{\alpha M}{2} S + A, \quad \beta = Bq + K, \tag{3.12}$$

где  $M, A, B, K$  — различные произвольные константы. Подстановка (3.12) в (3.9), (3.10) с сокращением дает равенства

$$\theta_S^2: \quad -rMt + p_0 = 0, \tag{3.13}$$

$$\theta_S: \quad \mu \frac{\alpha M}{2} + r\gamma \sigma^2 e^{r(T-t)} Mtq + \gamma \sigma^2 e^{r(T-t)} \left( g_S - Bq - K - q \frac{\alpha M}{2} \right) = 0. \tag{3.14}$$

Из (3.13) получаем, что  $rM = 0$ ,  $p_0 = 0$ . Так как  $g_{Sq} = 0$  в (3.3), то дифференцированием (3.14) по  $q$  получаем  $B = rMt - \alpha M/2 = -\alpha M/2$ . Следовательно, из (3.13), (3.14) получается

$$rM = 0, \quad p_0 = 0, \quad B = -\frac{\alpha M}{2}, \quad g_S = K - \mu \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma \sigma^2}. \tag{3.15}$$

Так как в силу (3.3)  $g_{qq} = 0$ , то интегрирование  $g_S$  дает

$$g = S \left( K - \mu \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma \sigma^2} \right) + N(t)q + V(t), \tag{3.16}$$

где  $N(t), V(t)$  — произвольные функции. Подставим равенства (3.12), (3.15), (3.16) в (3.11), тогда

$$\begin{aligned}
 & -\alpha M \left( (\mu - rS)q - \frac{q^2}{2} \gamma \sigma^2 e^{r(T-t)} + F \right) + S D_t^\alpha \left( K - \mu \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma \sigma^2} \right) \\
 & + q D_t^\alpha N(t) + D_t^\alpha V(t) - rS \left( K - \mu \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma \sigma^2} \right) \\
 & - rN(t)q - rV(t) - (\mu - rS) \left( -\frac{\alpha M}{2} q + K \right) + rqA \\
 & + \mu K - \mu^2 \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma \sigma^2} + q\mu \frac{\alpha M}{2} - \gamma \sigma^2 e^{r(T-t)} \frac{\alpha M}{2} q^2 - \zeta = 0.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Рассматриваем (3.17) с учетом равенств  $\zeta_S = 0$ ,  $\zeta_q = 0$ ,  $\zeta_\theta = 0$  из (3.3) как многочлен от  $S$ ,  $q$ ,  $\theta$  и получаем с помощью равенства  $rM = 0$  следующие уравнения:

$$D_t^\alpha N(t) - rN(t) + rA = 0, \quad D_t^\alpha \left( K - \mu \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma \sigma^2} \right) = 0, \tag{3.18}$$

$$-\alpha M F + D_t^\alpha V(t) - rV(t) - \mu^2 \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma \sigma^2} - \zeta = 0.$$

В предположении, что  $r \neq 0$ , из равенства  $rM = 0$  получаем, что  $M = 0$ . Тогда второе уравнение в (3.18) дает в силу (2.1)

$$D_t^\alpha K = \frac{Kt^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = 0.$$

Следовательно,  $K = 0$ . Первое уравнение в (3.18) согласно (2.2) при  $0 < \alpha < 1$  имеет решение в виде

$$N(t) = Ht^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha) - rA \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(r(t-s)^\alpha)ds,$$

где  $H$  — произвольная константа. Тогда операторы принимают вид

$$\begin{aligned} \tau &= 0, & \xi &= A, & \beta &= 0, & \zeta &= D_t^\alpha V(t) - rV(t), \\ \eta &= (Ht^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha) - rA(t-s)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(rt^\alpha))q + V(t). \end{aligned}$$

Если  $r = 0$ , то решением (3.18) в силу (2.1) является

$$N(t) = Ht^{\alpha-1}, \quad K = \mu \frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2}.$$

Учитывая также результаты (3.12), (3.15), (3.16), получаем утверждение.

**Теорема 3.1.** 1. Базис алгебры Ли генераторов групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения (1.2) при  $r \neq 0$  образуют операторы

$$\begin{aligned} Y_1 &= t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha)q\partial_\theta, \\ Y_2 &= \partial_S - rt^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(rt^\alpha)q\partial_\theta, \\ Y_V &= V(t)\partial_\theta + (D_t^\alpha V(t) - rV(t))\partial_F, \end{aligned}$$

где  $V(t)$  — произвольная функция.

2. Базис алгебры Ли генераторов групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения (1.2) при  $r = 0$  образуют операторы

$$\begin{aligned} Y_1 &= t^{\alpha-1}q\partial_\theta, & Y_2 &= \partial_S, & Y_V &= V(t)\partial_\theta + D_t^\alpha V(t)\partial_F, \\ Y_3 &= 2\gamma\sigma^2 t\partial_t + \alpha\gamma\sigma^2 S\partial_S + \alpha(\mu - \gamma\sigma^2 q)\partial_q - \alpha(2\gamma\sigma^2 F + \mu^2)\partial_F, \end{aligned}$$

где  $V(t)$  — произвольная функция.

При  $\alpha = 1$  уравнение (1.1) при  $r \neq 0$  обладает, среди прочих, группами преобразований эквивалентности, порождаемыми операторами

$$Y_1|_{\alpha=1} = e^{rt}q\partial_\theta \quad \text{и} \quad Y_V|_{\alpha=1} = V(t)\partial_\theta + (D_t^1 V(t) - rV(t))\partial_F$$

(см. [14, Теорема 1]).

Из первой части теоремы 3.1 следует, что группы линейно-автономных преобразований, допускаемых уравнением (1.2) при  $r \neq 0$  и при всех  $F$ , порождаются только операторами  $Y_V$  при таких  $V$ , что  $D_t^\alpha V(t) - rV(t) \equiv 0$ , т.е. функция  $V$  имеет вид

$$V(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha), \quad Y_{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha)} = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha)\partial_\theta.$$

В силу второй части теоремы 3.1 группа линейно-автономных преобразований, допускаемых уравнением (1.2) при  $r = 0$  и при всех  $F$ , порождается операторами  $Y_2$  и  $Y_V$  при  $V(t) = t^{\alpha-1}$ .

Некоторые из полученных в теореме 3.1 групп преобразований эквивалентности будут использованы при получении групповой классификации уравнения (1.2), остальные формально могут быть использованы для упрощения вида уравнения.

4. ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИ  $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ 

Теперь осуществим поиск допускаемых групп линейно-автономных преобразований уравнения (1.2) при  $0 < \alpha < 1$ , поскольку в силу теоремы 2.7 [29] системы уравнений, разрешенные относительно дробной производной Римана–Лиувилля по времени и содержащие только производные целого порядка по остальным переменным, другими симметриями, кроме линейно-автономных, не обладают. Будем рассматривать свободный элемент  $F = F(t, \theta_q)$  нелинейным по  $\theta_q$ , т.е. при условии  $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ . Линейный случай имеет свою специфику (см., например, [15]), его изучение планируется провести в дальнейшем.

Оператор симметрии ищется в виде  $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta$ . Действие продолженного оператора

$$\tilde{X} = X + \eta^\alpha \partial_{D_t^\alpha \theta} + \eta^S \partial_{\theta_S} + \eta^q \partial_{\theta_q} + \eta^{SS} \partial_{\theta_{SS}}$$

на (1.2) после сужения на многообразии  $\mathfrak{N}$ , задаваемое в расширенном пространстве переменных уравнением (1.2), дает

$$\begin{aligned} \eta^\alpha - r\eta - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\eta^S + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{SS} - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\eta_S - \beta) - F_t\tau - F_{\theta_q}\eta^q|_{\mathfrak{N}} = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставляем формулы продолжения, которые были получены выше при вычислении преобразований эквивалентности в предположении  $\eta(t, S, q, \theta) = p(t, S, q)\theta + g(t, S, q)$ , в (4.1) и получаем

$$\begin{aligned} D_t^\alpha g + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta \left( D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1}\tau \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n \xi \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n \beta - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi \\ + \mu(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ + \frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_t\tau_{SS} - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{St}\tau_S - 2\theta_{Sq}\beta_S \\ + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) \\ - F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q)|_{\mathfrak{N}} = 0. \end{aligned}$$

Переход на многообразии  $\mathfrak{N}$  дает уравнение

$$\begin{aligned} (p - \alpha\tau_t) \left( r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F \right) \\ + D_t^\alpha g + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta \left( D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1}\tau \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n \xi \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n \beta - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi \\ + \mu(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ + \frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_t\tau_{SS} - \theta_S\xi_{SS} \\ - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{St}\tau_S - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) \\ + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) \end{aligned} \quad (4.2)$$



$$-F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0.$$

В силу теоремы 2.7 [29]

$$\tau(t, S, q) = At + Bt^2, \quad \xi_t = \xi_\theta = \beta_t = \beta_\theta = 0, \quad p(t, S, q) = h(S, q) + \kappa(A + 2Bt),$$

где  $A, B$  — некоторые константы,  $\kappa = 0$  при  $B = 0$  и  $\kappa = (\alpha - 1)/2$  при  $B \neq 0$ . Поэтому уравнение (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} (p - \alpha\tau_t) & \left( r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F \right) \\ & + D_t^\alpha g - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi \\ & + \mu(h_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ & + \frac{\sigma^2}{2}(h_{SS}\theta + g_{SS} + 2h_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) \\ & + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(h_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) \\ & - F_t\tau - F_{\theta_q}(h_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Осуществляем разделение переменных в (4.3) относительно  $\theta_S, \theta_{SS}, \theta_{Sq}$  и получаем

$$\theta_{Sq} : \quad \beta_S = 0, \quad (4.4)$$

$$\theta_{SS} : \quad \alpha\tau_t - 2\xi_S = 0, \quad (4.5)$$

$$\theta_S^2 : \quad p - r\tau = 0, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \theta_S : \quad & (p - \alpha\tau_t)(-\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q) + \mu(p - \xi_S) + \frac{\sigma^2}{2}(2h_S - \xi_{SS}) \\ & + r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q\tau + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(h_S\theta + g_S - \beta - q(p - \xi_S)) + F_{\theta_q}\xi_q = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} 1 : \quad & (p - \alpha\tau_t) \left( r\theta + (\mu - rS)q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2 + F \right) \\ & + D_t^\alpha g - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu(h_S\theta + g_S) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2\tau \\ & + \frac{\sigma^2}{2}(h_{SS}\theta + g_{SS}) - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q(h_S\theta + g_S - \beta) \\ & - F_t\tau - F_{\theta_q}(h_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_q\beta_q) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.5) следует, что  $\tau_{tt} = 0, \xi_{SS} = 0$ , поэтому  $B = \kappa = 0, \tau = At, p = h(S, q)$ . Ввиду предположения  $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$  дифференцирование (4.7) по  $\theta_q$  дает  $\xi_q = 0$ . Итак, с учетом (4.4), (4.6)

$$\alpha A - 2\xi_S = 0, \quad r\tau_t = p_t = 0, \quad h_S = h_q = 0, \quad \xi_{SS} = 0, \quad \xi = \xi(S), \quad \beta = \beta(q).$$

Интегрирование дает равенства

$$\tau = At, \quad rA = 0, \quad \xi = \frac{\alpha A}{2}S + E, \quad \beta = \beta(q), \quad p = 0, \quad \eta = g = g(t, S, q), \quad (4.9)$$

где  $A, E$  — константы. Уравнения (4.7), (4.8) теперь принимают вид

$$\mu \frac{\alpha A}{2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} \left( g_S - \beta - q \frac{\alpha A}{2} \right) = 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} -\alpha A \left( \mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2 + F \right) + D_t^\alpha g - rg - (\mu - rS)\beta + rqE + \mu g_S \\ + \frac{\sigma^2}{2}g_{SS} - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) - F_t A t - F_{\theta_q}(g_q - \theta_q\beta_q) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Выразим  $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta)$  из уравнения (4.10) и подставим в (4.11), получим

$$\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) = \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} \frac{\alpha A}{2} q - \mu \frac{\alpha A}{2}, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} -\alpha A \left( \frac{\mu q}{2} + F \right) + D_t^\alpha g - r g - (\mu - r S) \beta + r q E + \mu g_S \\ + \frac{\sigma^2}{2} g_{SS} - F_t A t - F_{\theta_q} (g_q - \theta_q \beta_q) = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из уравнения (4.12) получаем

$$g = \beta(q) S + \frac{\alpha A}{2} S q - \mu \frac{\alpha A}{2 \gamma \sigma^2} e^{r(t-T)} S + G(t, q), \quad (4.14)$$

$G(t, q)$  — некоторая функция

Дифференцированием (4.13) по  $\theta_q$  получаем

$$(\beta_q - \alpha A) F_{\theta_q} - F_{t\theta_q} A t - F_{\theta_q \theta_q} (g_q - \theta_q \beta_q) = 0. \quad (4.15)$$

Дифференцируем уравнение (4.15) по  $S$  и получаем  $g_{Sq} = 0$ . В силу (4.14) это влечет равенство  $\beta_q = -\alpha A/2$ ,  $\beta = -\alpha A q/2 + L$ , где  $L$  — константа. Следовательно,  $\beta_{qq} = 0$  и дифференцирование (4.15) по  $q$  дает  $g_{qq} = G_{qq} = 0$ . Таким образом,

$$\beta = -\frac{\alpha A}{2} q + L, \quad g = L S - \mu \frac{\alpha A}{2 \gamma \sigma^2} e^{r(t-T)} S + N(t) q + M(t), \quad (4.16)$$

где  $N(t), M(t)$  — некоторые функции.

Подстановка (4.16) в (4.13) дает

$$\begin{aligned} -\alpha A \left( \frac{\mu q}{2} + F \right) + D_t^\alpha \left( L - \mu \frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2 \gamma \sigma^2} \right) S \\ + D_t^\alpha N(t) q + D_t^\alpha M(t) - r \left( L - \mu \frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2 \gamma \sigma^2} \right) S - r N(t) q - r M(t) \\ - (\mu - r S) \left( -\frac{\alpha A}{2} q + L \right) + r q E + \mu \left( L - \mu \frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2 \gamma \sigma^2} \right) \\ - F_t A t - F_{\theta_q} \left( N(t) + \theta_q \frac{\alpha A}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Приравняем коэффициенты многочлена (4.17) от  $S$  и  $q$  к нулю:

$$S : \quad D_t^\alpha \left( L - \mu \frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2 \gamma \sigma^2} \right) = 0, \quad q : \quad D_t^\alpha N(t) - r N(t) + r E = 0, \quad (4.18)$$

$$1 : \quad D_t^\alpha M(t) - r M(t) - \mu^2 \frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2 \gamma \sigma^2} - \alpha A F - F_t A t - F_{\theta_q} \left( N(t) + \theta_q \frac{\alpha A}{2} \right) = 0. \quad (4.19)$$

Так как от  $r$  зависит решение уравнений (4.18), (4.19), то необходимо рассмотреть случаи  $r = 0$  и  $r \neq 0$ .

**4.1. Случай  $r \neq 0$ .** В этом случае  $A = 0$ , поэтому равенства (4.9), (4.16), (4.18), (4.19) принимают вид

$$\tau = 0, \quad \xi = E, \quad \beta = L, \quad \eta = g = L S + N(t) q + M(t),$$

$$D_t^\alpha L = 0, \quad D_t^\alpha N(t) - r N(t) + r E = 0, \quad D_t^\alpha M(t) - r M(t) - F_{\theta_q} N(t) = 0. \quad (4.20)$$

Дифференцируем третье уравнение в (4.20) по  $\theta_q$  и получаем  $N = 0$ . Подставляем полученное  $N = 0$  во второе уравнение в (4.20) и получаем  $E = 0$ . Первое уравнение в (4.20)

дает ввиду (2.1) выражение  $Lt^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$  и, следовательно,  $L = 0$ . Таким образом, функция  $F$  в данном случае произвольна, если не считать условие нелинейности  $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ . Решая уравнение  $D_t^\alpha M - rM = 0$  с помощью (2.2), получаем следующую теорему.

**Теорема 4.1.** *Основная алгебра Ли уравнения (1.2), где  $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$  и  $r \neq 0$ , порождается оператором  $X_1 = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha)\partial_\theta$ .*

Здесь и далее термин «основная алгебра Ли» используется в смысле монографии Л.В. Овсянникова (см. [17, с.98]).

Сравнивая с симметриями уравнения (1.1) [14], можно заметить, что условие  $\tau(0) = 0$  приводит к потере симметрии со сдвигом по времени, а несколько симметрий уравнения первого порядка по времени отсутствуют в случае производной дробного порядка по времени из-за имеющихся в определяющей системе уравнений  $\xi_t = 0$ ,  $\beta_t = 0$ . Симметрия  $\partial_q + S\partial_\theta$  уравнения (1.1) в данном случае отсутствует из-за того, что дробная производная Римана–Лиувилля от константы — не ноль. Оператор  $X_1$  в случае уравнения (1.1) принимает вид  $X_1|_{\alpha=1} = e^{rt}\partial_\theta$ .

**4.2. Случай  $r = 0$ .** Подставляем  $r = 0$  в (4.18), (4.19) и получаем

$$D_t^\alpha \left( L - \mu \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} \right) = \left( L - \mu \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} \right) D_t^\alpha 1 = 0, \quad D_t^\alpha N(t) = 0, \quad (4.21)$$

$$D_t^\alpha M(t) - \mu^2 \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} - \alpha AF - F_t At - F_{\theta_q} \left( N(t) + \theta_q \frac{\alpha A}{2} \right) = 0. \quad (4.22)$$

Решение (4.21) с помощью (2.1) дает

$$N(t) = Pt^{\alpha-1}, \quad L = \mu \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}.$$

Подстановкой полученного в (4.9), (4.16) получим

$$\tau = At, \quad \xi = \frac{\alpha A}{2}S + E, \quad \beta = -\frac{\alpha A}{2}q + \mu \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}, \quad \eta = Pt^{\alpha-1}q + M(t),$$

где  $A, E, P$  — некоторые константы. Представим (4.22) в виде

$$\alpha AF + F_t At + F_{\theta_q} \left( Pt^{\alpha-1} + \theta_q \frac{\alpha A}{2} \right) - R(t) = 0, \quad (4.23)$$

где  $R(t) = D_t^\alpha M(t) - \mu^2 \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}$ .

**4.2.1. Случай  $A \neq 0$ .** Интегрируя уравнение (4.23), получим

$$F = t^{-\alpha}\Phi \left( t^{-\alpha/2}\theta_q - \frac{Pt^{\alpha/2-1}}{A(\frac{\alpha}{2}-1)} \right) + \frac{t^{-\alpha}}{A} \int_0^t R(t)t^{\alpha-1}dt,$$

где  $\Phi$  — произвольная функция. Подействуем на полученное выражение преобразованием эквивалентности  $\bar{\theta} = \theta + a_1 t^{\alpha-1}q$  из группы, порожденной оператором  $Y_1$  из второй части теоремы 3.1, при групповом параметре  $a_1 = \frac{P}{A(\frac{\alpha}{2}-1)}$ , а затем преобразованием эквивалентности

$$\bar{\theta} = \theta + a_V V(t), \quad \bar{F} = F + a_V D_t^\alpha V(t)$$

порожденной оператором  $Y_V$  группы (см. теорему 2) при  $a_V = 1$  и функции  $V(t)$ , такой, что

$$D_t^\alpha V(t) = -\frac{t^{-\alpha}}{A} \int_0^t R(t)t^{\alpha-1}dt.$$

Функция  $V(t)$  определяется с помощью формулы (2.2) при  $\lambda = 0$ . В итоге получаем функцию  $F = t^{-\alpha}\Phi(t^{-\alpha/2}\theta_q)$ . Ее подстановка в определяющее уравнение (4.22) дает

$$D_t^\alpha M(t) - \mu^2 \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} - N(t)t^{-3\alpha/2}\Phi' = 0.$$

Ввиду того, что  $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$  по предположению, получаем  $\Phi'' \neq 0$ , поэтому

$$N(t) = 0, \quad D_t^\alpha M(t) - \mu^2 \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} = 0.$$

Следовательно, интегрирование  $M(t)$  с помощью (2.1) дает

$$M(t) = M_0 t^{\alpha-1} + \mu^2 \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

В итоге

$$\begin{aligned} \tau &= At, & \xi &= \frac{\alpha A}{2}S + E, & \beta &= -\frac{\alpha A}{2}q + \mu \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}, \\ \eta &= \frac{M_0 t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \mu^2 \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

4.2.2. Случай  $A = 0$ . Получаем равенства (4.20) при  $r = 0$ , т.е.

$$\begin{aligned} \tau &= 0, & \xi &= E, & \beta &= L, & \eta &= g = LS + N(t)q + M(t), \\ D_t^\alpha L &= 0, & D_t^\alpha N(t) &= 0, & D_t^\alpha M(t) - F_{\theta_q}N(t) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда  $L = 0$ , дифференцированием третьего уравнения по  $\theta_q$  получаем  $N(t) \equiv 0$ ,  $M(t) = M_0 t^{\alpha-1}$ ,  $F$  — произвольная функция. Доказано следующее утверждение для уравнения (1.2) при  $r = 0$ .

**Теорема 4.2.** *Основная алгебра Ли уравнения*

$$D_t^\alpha \theta = \mu q - \mu \theta_S - \frac{\sigma^2}{2} \theta_{SS} - \frac{1}{2} \gamma \sigma^2 (\theta_S - q)^2 + t^{-\alpha} \Phi(t^{-\alpha/2} \theta_q),$$

где  $\Phi'' \neq 0$ , порождается операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_S, & X_2 &= t^{\alpha-1} \partial_\theta, \\ X_3 &= 2t \partial_t + \alpha S \partial_S + \left( -\alpha q + \frac{\mu \alpha}{\gamma \sigma^2} \right) \partial_q + \frac{\mu^2 \alpha t^\alpha}{\gamma \sigma^2 \Gamma(\alpha+1)} \partial_\theta. \end{aligned}$$

Для уравнения

$$D_t^\alpha \theta = \mu q - \mu \theta_S - \frac{\sigma^2}{2} \theta_{SS} - \frac{1}{2} \gamma \sigma^2 (\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q),$$

где  $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$  и  $F(t, \theta_q)$  не эквивалентна функции  $t^{-\alpha}\Phi(t^{-\alpha/2}\theta_q)$  в смысле преобразований эквивалентности, порождаемых операторами  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_V$  из второй части теоремы 3.1, основная алгебра Ли порождается операторами  $X_1 = \partial_S, X_2 = t^{\alpha-1}\partial_\theta$ .

Заметим, что вид полученных симметрий согласуется с результатами теоремы 2.7 [29], в которой найден общий вид симметрий систем уравнений подобного вида.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Black. *The pricing of Commodity Contracts* // J. Financ. Econ. **3**, 167–179 (1976).
2. F. Black, M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities* // J. Political Econ. **81**, 637–659 (1973).
3. P. Bank, D. Baum. *Hedging and portfolio optimization in financial markets with a large trader* // Math. Finance. **14**, 1–18 (2004).
4. G. Barles, H.M. Soner. *Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black–Scholes equation* // Financ. Stochastics. **2**, 369–397 (1998).
5. J. Cvitanic, I. Karatzas. *Hedging and portfolio optimization under transaction costs: A martingale approach* // Math. Finance. **6**, 133–165 (1996).
6. A.S. Kyle. *Continuous auctions and insider trading* // Econometrica. **53**, 1315–1335 (1985).
7. H.E. Leland. *Option pricing and replication with transactions costs* // J. Finance. **40**, 1283–1301 (1985).
8. M.J.P. Magill, G.M. Constantinides. *Portfolio selection with transactions costs* // J. Econ. Theory. **13**, 245–263 (1976).
9. E. Platen, M. Schweizer. *On feedback effects from hedging derivatives* // Math. Finance. **8**, 67–84 (1998).
10. L.C. Rogers, L.S. Singh. *The cost of illiquidity and its effects on hedging* // Math. Finance. **20**, 597–615 (2010).
11. O. Guéant. *The Financial Mathematics of Market Liquidity: From Optimal Execution to Market Making*. Boca Raton-London-New York: CRC Press. 2016.
12. O. Guéant, J. Pu. *Option pricing and hedging with execution costs and market impact* // Preprint: arXiv:1311.4342 (2015).
13. Х.В. Ядрихинский, В.Е. Федоров. *Инвариантные решения модели Геана–Пу ценообразования опционов и хеджирования* // Челяб. физ.-матем. журн. **6:1**, 42–51 (2021).
14. S.M. Sitnik, K.V. Yadrikhinskiy, V.E. Fedorov. *Symmetry analysis of a model of option pricing and hedging* // Symmetry. **14**, 1841 (2022).
15. K.V. Yadrikhinskiy, V.E. Fedorov. *Symmetry analysis of the Guéant–Pu model* // AIP Conf. Proc. **2528**, 020035 (2022).
16. Kh.V. Yadrikhinskiy, V.E. Fedorov, M.M. Dyshaev. *Group analysis of the Guéant and Pu Model of Option Pricing and Hedging*. In book: Symmetries and Applications of Differential Equations. Eds. A.C.J. Luo, R.K. Gazizov. Singapore: Springer. 173–203 (2021).
17. Л.В. Овсянников. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука. 1978.
18. П. Олвер. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*. М.: Мир. 1989.
19. А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его приложения*. М.: Физматлит. 2003.
20. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника. 1987.
21. A.N. Fall, S.N. Ndiaye, N. Sene. *Black–Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative* // Chaos, Solitons & Fractals. **125**, 108–118 (2019).
22. S. Kumar, A. Yildirin, Y. Khan, H. Jafari, K. Sayevand, L. Wei. *Analytical solution of fractional Black–Scholes European option pricing equations using Laplace transform* // J. Frac. Cal. Appl. **2**, 1–9 (2012).
23. P. Sawangtong, K. Trachoo, W. Sawangtong, B. Wiwattanapattaphee. *The analytical solution for the Black–Scholes equation with two assets in the Liouville–Caputo fractional derivative sense* // Mathematics. **8**, 129 (2018).
24. M. Yavuz, N. Özdemir. *European vanilla option pricing model of fractional order without singular kernel* // Fractal Fract. **2**, 3 (2018).
25. Р.К. Газизов, А.А. Касаткин, С.Ю. Лукашук. *Групповая классификация и симметричные редукции нелинейного трехмерного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии* // Уфимск. матем. журн. **11:4**, 14–28 (2019).
26. Р.К. Газизов, А.А. Касаткин, С.Ю. Лукашук. *Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии* // Уфимск. матем. журн. **4:4**, 54–68 (2012).

27. А.А. Касаткин. *Симметрии и точные решения с производными дробного порядка типа Римана–Лиувилля*: дис. . . . канд. физ.-матем. наук. Уфа: УГАТУ. 2013.
28. R. Gazizov, A. Kasatkin, S. Lukashchuk. *Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs*. Vol. 2. *Fractional Differential Equations*, ed. by A. Kochubei and Y. Luchko. Berlin-Boston: De Gruyter, pp. 353-382. 2019.
29. Zhi-Yong Zhang, Jia Zheng. *Symmetry structure of multi-dimensional time-fractional partial differential equations* // Preprint: arXiv:1912.08602 (2021).
30. P. Schönbucher, P. Wilmott. *The feedback-effect of hedging in illiquid markets* // SIAM J. Appl. Math. **61**, 232–272 (2000).
31. R. Sircar, G. Papanicolaou. *Generalized Black–Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies* // Appl. Math. Financ. **5**, 45–82 (1998).

Христофор Васильевич Ядрихинский,  
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,  
Якутское отделение Дальневосточного центра математических исследований,  
ул. Белинского, 58,  
677000, г. Якутск, Россия  
E-mail: ghdsfdf@yandex.ru

Владимир Евгеньевич Федоров,  
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,  
Якутское отделение Дальневосточного центра математических исследований,  
ул. Белинского, 58,  
677000, г. Якутск, Россия,  
Челябинский государственный университет,  
ул. Братьев Кашириных, 129,  
450001, г. Челябинск, Россия  
E-mail: kar@csu.ru