

УДК 517.958

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.О. БАГАПШ

Аннотация. Рассмотрена классическая постановка задачи Дирихле для сильно эллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в жордановых областях на плоскости. Показано, что решение задачи представляется в виде функционального ряда по степеням параметра, определяющего отклонение оператора системы от лапласиана. Этот ряд сходится равномерно в замыкании области в предположении, что граница области и заданная на ней граничная функция удовлетворяют достаточным условиям регулярности: композиция следа конформного отображения области на круг и граничной функции принадлежит классу Гельдера с показателем больше, чем $1/2$.

Ключевые слова: сильно эллиптическая система, задача Дирихле, метод возмущений.

Mathematics Subject Classification: 30E25, 35J25

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\left(A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

относительно вещественнозначных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вещественных переменных x и y с постоянными вещественными матрицами коэффициентов A, B, C размера 2×2 . Изучаются системы такого вида, относящиеся к эллиптическому типу. Согласно определению Петровского [1], это означает, что

$$\det(A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2) \neq 0 \quad \text{при} \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0).$$

Введем комплекснозначную функцию $f = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ и оператор системы (1.1)

$$Lf = \left(A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Классическая постановка задачи Дирихле для такого оператора в жордановой области формулируется следующим образом.

Задача 1.1. Пусть Ω — жорданова область с границей Γ . Для заданной граничной функции $h \in C(\Gamma)$ найти такую функцию $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, что $Lf = 0$ в Ω и $f|_{\Gamma} = h$.

A.O. BAGAPSH, PERTURBATION METHOD FOR STRONGLY ELLIPTIC SECOND ORDER SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS.

© БАГАПШ А.О. 2023.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 22-11-00071.

Поступила 22 мая 2023 г.

Изучение вопроса о разрешимости задачи Дирихле привело к выделению подкласса сильно эллиптических систем, которые были определены несколькими способами; мы будем пользоваться определением из [2], согласно которому требуется

$$\det(A\alpha + 2\beta B + \gamma C) \neq 0 \quad \text{при} \quad \beta^2 - \alpha\gamma < 0.$$

Оно эквивалентно хорошо известному определению Вишика [3].

Вид системы (1.1), ее принадлежность к классу эллиптических или сильно эллиптических систем сохраняются при трех классах невырожденных преобразований: 1) линейной замены переменных (x, y) ; 2) линейной замены искомым функций (u, v) ; 3) линейной комбинации уравнений системы. При этом специально подобранная серия таких преобразований с последующим сложением первого из полученных уравнений со вторым, умноженным на мнимую единицу i , позволяет привести любую эллиптическую систему (1.1) к комплексному уравнению

$$(\partial\bar{\partial} + \tau\partial^2)g(z) + \sigma(\tau\partial\bar{\partial} + \partial^2)\overline{g(z)} = 0 \quad (1.2)$$

относительно комплекснозначной функции g комплексного переменного $z = x + iy$ со всего двумя параметрами $\tau \in [0, 1)$ и $\sigma \in [0, 1) \cup (1, \infty]$ (см. [4], [5]). Здесь

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

— операторы Коши–Римана в новой системе координат. При $\sigma = \infty$ считаем, что уравнение (1.2) приобретает вид

$$(\tau\partial\bar{\partial} + \partial^2)\overline{g(z)} = 0.$$

В случае сильной эллиптичности будет $\sigma \in [0, 1)$.

Перечислим несколько хорошо известных частных случаев уравнения (1.2). При $\tau = \sigma = 0$ имеем комплексное уравнение Лапласа $\Delta g(z) = 4\partial\bar{\partial}g(z) = 0$, а при $\tau = 0$, $\sigma = \infty$ — уравнение Бицадзе [6] $\bar{\partial}^2 g(z) = 0$. Если $\tau = 0$, то возникает плоское изотропное уравнение Ламе теории упругости, записанное в комплексном виде $\partial\bar{\partial}g(z) + \sigma\partial^2\overline{f(z)} = 0$, причем параметр σ связан с коэффициентом Пуассона p соотношением $\sigma = 1/(3 - 4p)$ (см. [7], [8]). Поскольку, как известно [7], $p \in (0, 1/2)$, а значит, $\sigma \in (1/3, 1)$, то соответствующая система (1.2) сильно эллиптическая. Если же $\sigma = 0$, то получаем систему, называемую косимметрической, которая может быть записана в виде уравнения $ag_{xx} + 2bg_{xy} + cg_{yy} = 0$ с комплексными коэффициентами a, b, c .

Уравнение (1.2) представляет собой возмущенное по двум параметрам τ и σ уравнение Лапласа, причем в случае сильной эллиптичности эти параметры относительно малы: $\tau, \sigma \in [0, 1)$. Чтобы подчеркнуть данное обстоятельство, сделаем еще одно, последнее преобразование над уравнением (1.2), отделив лапласиан от остальной его части:

$$\partial\bar{\partial}(\mathcal{T}_{1,\sigma\tau}g) + \partial^2(\mathcal{T}_{\tau,\sigma}g) = 0, \quad (1.3)$$

где используется оператор аффинного преобразования

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta} := \alpha\mathcal{I} + \beta\mathcal{C}, \quad (1.4)$$

с (вообще говоря) комплексными параметрами α и β , выражающийся через тождественный оператор $\mathcal{I}: w \rightarrow w$ и оператор комплексного сопряжения $\mathcal{C}: w \rightarrow \bar{w}$. Если $|\alpha| \neq |\beta|$, то существует обратный оператор

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \mathcal{T}_{\bar{\alpha}, -\beta}.$$

Норма оператора (1.4) как отображения $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ равна $\|\mathcal{T}_{\alpha,\beta}\| = |\alpha| + |\beta|$.

Считая уравнение (1.3) сильно эллиптическим, заменим в нем искомую функцию g на $f = \mathcal{T}_{1,\sigma\tau}g$ (невырожденным в этом случае преобразованием) и перепишем (1.3) в виде

$$\mathcal{L}f := \partial\bar{\partial}f + \partial^2(Tf) = 0, \quad (1.5)$$

где

$$T = \mathcal{T}_{\tau,\sigma}\mathcal{T}_{1,\sigma\tau}^{-1} = \frac{\tau(1-\sigma^2)\mathcal{I} + \sigma(1-\tau^2)\mathcal{C}}{1-\sigma^2\tau^2}.$$

Полученное уравнение (1.5) представляет собой уравнение Лапласа, возмущенное по оператору T с нормой

$$\|T\| = \frac{\tau + \sigma}{1 + \sigma\tau},$$

которая в рассматриваемом сильно эллиптическом случае, когда $\tau, \sigma \in [0, 1)$, оказывается меньше единицы. Введем нормированный на единицу оператор

$$T_0 = \|T\|^{-1}T = \mathcal{T}_{\alpha_0,\beta_0},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\tau(1-\sigma^2)}{(\tau+\sigma)(1-\sigma\tau)}, \quad \beta_0 = \frac{\sigma(1-\tau^2)}{(\tau+\sigma)(1-\sigma\tau)},$$

и перепишем с его помощью (1.5) в окончательном виде

$$\mathcal{L}f = \partial\bar{\partial}f + \|T\|\partial^2(T_0f) = 0. \quad (1.6)$$

В уравнении (1.6) малым параметром является $\|T\| < 1$.

2. МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ

Для решения задачи Дирихле применим метод возмущения по величине $\|T\|$, который состоит в поиске решения f в виде ряда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \|T\|^n, \quad (2.1)$$

в котором функции f_n находятся с помощью подстановки разложения (2.1) в уравнение $\mathcal{L}f = 0$ и приравнивания к нулю множителей при одинаковых степенях величины $\|T\|$; при этом полагаем $f_0|_{\Gamma} = h$ и $f_n|_{\Gamma} = 0$ для $n \geq 1$.

Таким образом, получаем следующие краевые задачи для последовательного отыскания функций f_n :

$$\partial\bar{\partial}f_0 = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad f_0|_{\Gamma} = h \quad (2.2)$$

и

$$\partial\bar{\partial}f_n = -\partial^2(T_0f_{n-1}) \quad \text{в } \Omega, \quad f_n|_{\Gamma} = 0 \quad (2.3)$$

для $n \geq 1$.

Пусть $\omega: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ на область Ω . В случае жордановой области Ω по теореме Каратеодори отображение ω продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей $\bar{\mathbb{D}}$ и $\bar{\Omega}$, так что $\omega \in C(\bar{\mathbb{D}})$. Для дальнейшего удобно перенести задачи (2.2) и (2.3) в круг \mathbb{D} с помощью введенного конформного отображения. Пусть

$$F = f \circ \omega, \quad H = h \circ \omega, \quad F_n = f_n \circ \omega.$$

Тогда

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{|\omega'|^2} \left[\partial\bar{\partial}F + \|T\|\partial \left(\frac{\bar{\omega}'}{\omega'} \partial(T_0F) \right) \right] =: \mathcal{M}F. \quad (2.4)$$

Из (2.1), (2.2) и (2.3) следует, что

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \|T\|^n, \quad (2.5)$$

где

$$\partial\bar{\partial}F_0 = 0 \quad \text{в } \mathbb{D}, \quad F_0|_{\mathbb{T}} = H \quad (2.6)$$

и

$$\partial\bar{\partial}F_n = -\partial \left(\frac{\bar{\omega}'}{\omega'} \partial(T_0 F_{n-1}) \right) \quad \text{в } \Omega, \quad F_n|_{\mathbb{T}} = 0 \quad (2.7)$$

для $n \geq 1$. В случае достаточной регулярности функции F_{n-1} при фиксированном номере n можно с помощью функции Грина

$$G(\zeta, z) = \frac{2}{\pi} \log \left| \frac{\zeta - z}{1 - \zeta\bar{z}} \right| \quad (2.8)$$

для оператора $\partial\bar{\partial}$ в круге \mathbb{D} записать решения задач (2.6) и (2.7):

$$F_0(z) = \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{T}} \partial_{\zeta} G(\zeta, z) h(\zeta) d\zeta, \quad F_n(z) = - \int_{\mathbb{D}} G(\zeta, z) \partial \left(\frac{\bar{\omega}'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \partial(T_0 F_{n-1}(\zeta)) \right) d\mu, \quad (2.9)$$

$n \geq 1$, где μ — мера Лебега.

Определим операторы

$$\mathcal{P}[\varphi(z)] := \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{T}} \partial_{\zeta} G(\zeta, z) \varphi(\zeta) d\zeta, \quad \mathcal{K}[\varphi(z)] := \int_{\mathbb{D}} \partial_{\zeta} G(\zeta, z) \varphi(\zeta) d\mu$$

и

$$\mathcal{K}_{\partial}[\varphi(z)] := \text{p.v.} \int_{\mathbb{D}} \partial_z \partial_{\zeta} G(\zeta, z) \varphi(\zeta) d\mu, \quad \mathcal{K}_{\bar{\partial}}[\varphi(z)] := \text{p.v.} \int_{\mathbb{D}} \partial_{\bar{z}} \partial_{\zeta} G(\zeta, z) \varphi(\zeta) d\mu,$$

из которых \mathcal{P} задается на классе функций $C(\mathbb{T})$, а остальные на $L_p(\mathbb{D})$, причем последние два интеграла понимаются в смысле главного значения. В дальнейшем обозначение п.в. будем для краткости опускать. Из формулы (2.8) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\varphi(z)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z}} \right) \varphi(\zeta) d\zeta, \\ \mathcal{K}[\varphi(z)] &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z}} \right) \varphi(\zeta) d\mu \end{aligned} \quad (2.10)$$

и

$$\mathcal{K}_{\partial}[\varphi(z)] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(\zeta) d\mu}{(\zeta - z)^2}, \quad \mathcal{K}_{\bar{\partial}}[\varphi(z)] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(\zeta) d\mu}{(1 - \zeta\bar{z})^2} - \varphi(z). \quad (2.11)$$

С помощью введенных операторов формулы (2.9) для построения функций F_n можно записать в виде

$$F_0 = \mathcal{P}[h], \quad F_n = \mathcal{K}[(\bar{\omega}'/\omega') \partial(T_0 F_{n-1})], \quad n \geq 1. \quad (2.12)$$

При этом

$$\partial F_n = \mathcal{K}_{\partial}[(\bar{\omega}'/\omega') \partial(T_0 F_{n-1})], \quad \bar{\partial} F_n = \mathcal{K}_{\bar{\partial}}[(\bar{\omega}'/\omega') \partial(T_0 F_{n-1})], \quad n \geq 1.$$

Введем также обозначения для частичных сумм рядов (2.1) и (2.5) соответственно:

$$s_m = \sum_{n=0}^m f_n \|T\|^n, \quad S_m = \sum_{n=0}^m F_n \|T\|^n. \quad (2.13)$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема сходимости.

Теорема 2.1. Пусть жорданова область Ω и заданная на ее границе Γ функция h таковы, что $h \circ \omega \in C^\alpha(\mathbb{T})$ при $1/2 < \alpha < 1$, где ω — некоторое конформное отображение единичного круга \mathbb{D} на Ω . Тогда при любом значении $\|T\| \in [0, 1)$ ряд (2.1) с функциями $f_n = F_n \circ \omega^{-1}$, где F_n заданы согласно (2.12), сходится в норме пространства $C(\overline{\Omega})$ к функции $f \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей в Ω уравнению $\mathcal{L}f = 0$ и совпадающей на Γ с h .

Условие $h \circ \omega \in C^\alpha(\mathbb{T})$, $\alpha \in (1/2, 1)$, выполняется, например, при $h \in C^\beta(\Gamma)$ и $\omega \in C^\gamma(\mathbb{T})$, где $\beta\gamma = \alpha \in (1/2, 1)$. Действительно, в этом случае

$$|h \circ \omega(z_1) - h \circ \omega(z_2)| \leq [h]_\alpha |\omega(z_1) - \omega(z_2)|^\beta \leq [h]_\beta [\omega]_\gamma^\beta |z_1 - z_2|^{\beta\gamma},$$

где $[\varphi]_\alpha := \sup_{\zeta_1 \neq \zeta_2} |\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| / |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha$.

Теорема 2.1 является распространением аналогичного результата, полученного в работе автора [9] для кососимметрической сильно эллиптической системы, являющейся частным случаем рассматриваемой здесь системы, отвечающим значению параметра $\sigma = 0$.

Отметим, что не все рассматриваемые здесь сильно эллиптические системы (1.2) обладают функционалом энергии, с помощью которого возможна вариационная переформулировка задачи Дирихле, стоящая за доказательством теоремы Лебега об общей разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа в односвязной области (см. [10]). Система канонического вида (1.2) обладает функционалом энергии в виде интеграла по области от квадратичной формы первых производных только при соотношении параметров $\sigma > \tau$; такие системы называются симметризуемыми, см. [8]. Это обстоятельство является причиной того, что вопрос о разрешимости задачи Дирихле для общих сильно эллиптических систем вида (1.1) в односвязных или хотя бы жордановых областях с произвольными непрерывными граничными данными является открытым.

В настоящее время наибольшим продвижением в вопросе о разрешимости задачи 1.1 является результат Веркоты и Фогеля [11], устанавливающий общую разрешимость задачи Дирихле в областях с кусочно гладкими липшицевыми границами при произвольных непрерывных граничных данных. В доказываемой здесь теореме 2.1 граничные функции берутся из более узкого класса Гельдера, однако область может принадлежать более широкому классу по сравнению с [11].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ

Лемма 3.1. Если $\varphi \in C^\alpha(\mathbb{T})$, где $1/2 < \alpha < 1$, то $\mathcal{P}[\varphi] \in W_p^1(\mathbb{D})$ с любым показателем $0 < p < (2(1 - \alpha))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\psi = \mathcal{P}\varphi$. Поскольку $\varphi \in C(\mathbb{T})$, то по свойству интеграла Пуассона, $\psi \in C(\overline{\mathbb{D}})$, так что заведомо $\psi \in L_p(\mathbb{D})$. Докажем L_p -интегрируемость первых производных. Представим функцию ψ в виде суммы $\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z)$ голоморфной и антиголоморфной компонент

$$\psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \psi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\zeta) d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(\zeta) |d\zeta|.$$

В силу теоремы Привалова [12] для интеграла типа Коши, из принадлежности $\varphi \in C^\alpha(\mathbb{T})$ при $1/2 < \alpha < 1$ следует, что $\psi_1 \in C^{2\alpha-1}(\overline{\mathbb{D}})$. Обозначим $T(z, r) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = r\} \subset \mathbb{D}$. Из формулы Коши

$$\psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T(z,r)} \frac{\psi_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

находим

$$\partial\psi(z) = \psi_1'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T(z,r)} \frac{\psi_1(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{T(z,r)} \frac{\psi_1(\zeta) - \psi_1(z)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

откуда выводим оценку

$$|\partial\psi(z)| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{T(z,r)} \frac{|\psi_1(\zeta) - \psi_1(z)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{T(z,r)} \frac{c_\alpha |\zeta - z|^{2\alpha-1}}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| = \frac{c_\alpha}{r^{2(1-\alpha)}},$$

где $c_\alpha = \sup_{\zeta \neq z} |\psi_1(\zeta) - \psi_1(z)|/|\zeta - z|^{2\alpha-1}$. Предельным переходом $r \rightarrow (1 - |z|)$ получаем $|\partial\psi(z)| \leq c_\alpha(1 - |z|)^{2(\alpha-1)}$, см. также [13, стр. 74] или [14, стр. 50]. Это означает, что $\partial\psi \in L_p(\mathbb{D})$, если $2(1 - \alpha)p < 1$. Аналогичным образом устанавливается L_p -интегрируемость производной $\bar{\partial}\psi = \psi'_2$ при том же условии на p . Лемма доказана. \square

Рассмотрим оператор Берлинга

$$\mathcal{B}\varphi(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)d\mu}{(\zeta - z)^2}, \quad (3.1)$$

осуществляющий, по теореме Кальдерона–Зигмунда [15], ограниченное отображение пространства $L_p(\mathbb{C})$ в себя при любом $p \in (1, \infty)$. Обозначим через $\|\mathcal{B}\|_p$ его норму как отображения $L_p(\mathbb{C}) \rightarrow L_p(\mathbb{C})$, аналогичным образом будем обозначать нормы операторов, действующих в $L_p(U)$ для произвольной области U . Для дальнейшего является существенным то обстоятельство, что $\|\mathcal{B}\|_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 2$ (см. [16, стр. 89], [17, стр. 5–6]).

Предложение 3.1. *Операторы (2.10), (2.11) обладают следующими свойствами:*

- (i) $\mathcal{K}: L_p(\mathbb{D}) \rightarrow L_p(\mathbb{D})$ ограничен при $p > 1$;
- (ii) $\mathcal{K}_\partial: L_p(\mathbb{D}) \rightarrow L_p(\mathbb{D})$ ограничен при $p > 1$, причем $\|\mathcal{K}_\partial\|_p = \|\mathcal{B}\|_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 2$;
- (iii) $\mathcal{K}_{\bar{\partial}}: L_p(\mathbb{D}) \rightarrow L_p(\mathbb{D})$ ограничен при $p > 1$, причем $\|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\|_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 2$.

Доказательство. (i) вытекает из того, что ядро интегрального оператора \mathcal{K} состоит из суммы двух ядер со слабой особенностью.

(ii) Пусть $\varphi \in L_p(\mathbb{D})$, $p > 1$. Тогда $\mathcal{K}_\partial\varphi = \mathcal{B}\varphi_1$, где функция φ_1 совпадает с φ в круге \mathbb{D} и равна нулю вне \mathbb{D} , так что $\|\varphi_1\|_{L_p(\mathbb{C})} = \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{D})}$. Следовательно, $\|\mathcal{K}_\partial\|_p = \|\mathcal{B}\|_p$.

(iii) Устроим в интеграле для $\mathcal{K}_{\bar{\partial}}$ из формулы (2.11) замену переменной ζ на $\xi = 1/\bar{\zeta}$ и получим

$$\mathcal{K}_{\bar{\partial}}[\varphi(z)] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}} \frac{\varphi(1/\bar{\xi})}{\xi^2} \cdot \frac{d\mu}{(\bar{\xi} - \bar{z})^2} - \varphi(z) = \overline{\mathcal{B}[\varphi_2(z)]} - \varphi(z), \quad (3.2)$$

где $\varphi_2(z) = \overline{\varphi(1/\bar{z})}/\bar{z}^2$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ и $\varphi_2(z) = 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Устраивая обратную замену $\zeta = 1/\bar{\xi}$, находим

$$\|\varphi_2\|_{L_p(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}} |\varphi_2(\xi)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{D}} |\xi|^{2p-4} \cdot |\varphi(\zeta)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{D})}$$

при $p \geq 2$ с равенством при $p = 2$. Тогда из (3.2) следует, что

$$\|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\varphi\|_{L_p(\mathbb{D})} \leq (\|\mathcal{B}\|_p + 1)\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{D})},$$

т.е. $\mathcal{K}_{\bar{\partial}}: L_p(\mathbb{D}) \rightarrow L_p(\mathbb{D})$ ограничен при $p > 1$.

Найдем $\|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\|_2$. Пусть сначала φ — произвольная пробная функция из класса $C_0^2(\mathbb{D})$ дважды непрерывно дифференцируемых в \mathbb{C} функций с компактным носителем $\text{supp}(\varphi) \subset D_r := \{|z| < r\}$, где $r \in (0, 1)$. Тогда $\mathcal{K}[\varphi(z)] \in C(\bar{\mathbb{D}})$ (см. [16, стр. 85]). Из (2.10) имеем

$$\mathcal{K}[\varphi(z)] = \frac{1 - |z|^2}{\pi} \int_{\text{supp}(\varphi)} \frac{\varphi(\zeta)d\mu(\zeta)}{(\zeta - z)(1 - \zeta\bar{z})},$$

откуда находим для $|z| > r$

$$|\mathcal{K}[\varphi(z)]| \leq \frac{1 - |z|^2}{\pi(|z| - r)(1 - r|z|)} \int_{D_r} |\varphi(\zeta)|d\mu(\zeta) \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

при $|z| \rightarrow 1$. Поскольку $\varphi(z) = 0$ и $\mathcal{K}[\varphi(z)] = 0$ при $z \in \mathbb{T}$, то, применяя несколько раз интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\varphi\|_{L_2(\mathbb{D})}^2 &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{K}[\varphi(z)] \cdot \frac{\partial}{\partial z} \overline{\mathcal{K}[\varphi(z)]} d\mu(z) = - \int_{\mathbb{D}} \overline{\mathcal{K}[\varphi(z)]} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \mathcal{K}[\varphi(z)] d\mu(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{\mathcal{K}[\varphi(z)]} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} d\mu(z) = - \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial z} \overline{\mathcal{K}[\varphi(z)]} d\mu(z) \\ &= - \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\varphi(\zeta)} d\mu(\zeta)}{(1 - \bar{\zeta}z)^2} - \overline{\varphi(z)} \right) d\mu(z) \\ &= \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{D})}^2 - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(z) \overline{\varphi(\zeta)}}{(1 - \bar{\zeta}z)^2} d\mu(\zeta) d\mu(z). \end{aligned}$$

Вычитаемая из $\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{D})}^2$ величина равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(z) \overline{\varphi(\zeta)}}{(1 - \bar{\zeta}z)^2} d\mu(\zeta) d\mu(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \overline{\varphi(\zeta)} z^n \bar{\zeta}^n d\mu(\zeta) d\mu(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) z^n d\mu(z) \right|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\varphi\|_{L_2(\mathbb{D})} \leq \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{D})}$$

с равенством на функциях $\varphi \in C_0^2(\mathbb{D})$, для которых $\int_{\mathbb{D}} \varphi(z) z^n d\mu(z) = 0$ при $n = 0, 1, \dots$. Приближая функции из $L_p(\mathbb{D})$ функциями класса $C_0^2(\mathbb{D})$, получим ту же самую оценку. Таким образом, $\|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\|_2 = 1$. Поскольку норма $\|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\|_p$ существует при всех $p > 1$, то из теоремы М. Рисса–Торина [16, стр. 113], согласно которой величина $\log \|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\|_p$ является выпуклой функцией переменного $1/p$, вытекает непрерывность этой величины относительно p . Следовательно, $\|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\|_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 2$. Предложение доказано. \square

Доказательство теоремы 2.1. Шаг 1. Установим сначала сходимость ряда (2.5) вместе с первыми частными производными в норме пространства $L_p(\mathbb{D})$. Из леммы 3.1 следует, что функция $F_0 = \mathcal{P}[h]$ принадлежит пространству Соболева $W_p^1(\mathbb{D})$ при $p < (2(1 - \alpha))^{-1}$. Предположим, что $F_{n-1} \in L_p(\mathbb{D})$, $p > 2$, при некотором номере n . Тогда

$$\partial F_n = \mathcal{K}_{\partial}[(\bar{\omega}'/\omega')(\alpha_0 \partial F_{n-1} + \beta_0 \overline{\partial F_{n-1}})], \quad \bar{\partial} F_n = \mathcal{K}_{\bar{\partial}}[(\bar{\omega}'/\omega')(\alpha_0 \partial F_{n-1} + \beta_0 \overline{\partial F_{n-1}})]$$

в смысле распределений (см. [16, стр. 90]). Используя эти соотношения и применяя предложение 3.1, а также тот факт, что $|\alpha_0| + |\beta_0| = 1$, выводим из формулы (2.12) оценки

$$\begin{aligned} \|\partial F_n\|_{L_p(\mathbb{D})} &\leq \|\mathcal{K}_{\partial}\|_p \max\{\|\partial F_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}, \|\bar{\partial} F_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}\}, \\ \|\bar{\partial} F_n\|_{L_p(\mathbb{D})} &\leq \|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\|_p \max\{\|\partial F_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}, \|\bar{\partial} F_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}\}, \end{aligned}$$

из которых следует

$$\|DF_n\|_{L_p(\mathbb{D})} \leq \|D\mathcal{K}\|_p \cdot \|DF_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}, \quad (3.4)$$

где

$$\|DF_n\|_{L_p(\mathbb{D})} := \max\{\|\partial F_n\|_{L_p(\mathbb{D})}, \|\bar{\partial} F_n\|_{L_p(\mathbb{D})}\}, \quad \|D\mathcal{K}\|_p := \max\{\|\mathcal{K}_{\partial}\|_p, \|\mathcal{K}_{\bar{\partial}}\|_p\}.$$

Тогда отсюда и из (2.12) получаем

$$\|F_n\|_{L_p(\mathbb{D})} \leq \|\mathcal{K}\|_p \cdot \|DF_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})} \leq \|\mathcal{K}\|_p \cdot \|D\mathcal{K}\|_p^{n-1} \cdot \|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})}. \quad (3.5)$$

Оценка (3.5) доказывает сходимость при $\|\mathcal{DK}\|_p \cdot \|T\| < 1$ ряда (2.5) в норме $L_p(\mathbb{D})$ к своей сумме $F \in L_p(\mathbb{D})$, причем

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_p(\mathbb{D})} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} F_n \|T\|^n \right\|_{L_p(\mathbb{D})} \leq \|F_0\|_{L_p(\mathbb{D})} + \sum_{n=1}^{\infty} \|F_n\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|T\|^n \\ &\leq \|F_0\|_{L_p(\mathbb{D})} + \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{K}\|_p \cdot \|\mathcal{DK}\|_p^{n-1} \cdot \|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|T\|^n \\ &= \|F_0\|_{L_p(\mathbb{D})} + \frac{\|\mathcal{K}\|_p \cdot \|T\|}{1 - \|\mathcal{DK}\|_p \cdot \|T\|} \|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оценка (3.4) доказывает, что, кроме того, и первые частные производные ряда (2.5) сходятся в той же норме к соответствующим производным функции F :

$$\|DF\|_{L_p(\mathbb{D})} \leq \frac{\|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})}}{1 - \|\mathcal{DK}\|_p \cdot \|T\|}, \quad (3.7)$$

где $\|DF\|_{L_p(\mathbb{D})} := \max\{\|\partial F\|_{L_p(\mathbb{D})}, \|\bar{\partial} F\|_{L_p(\mathbb{D})}\}$. Полученные оценки (3.6) и (3.7) означают сходимость ряда (2.5) в норме пространства Соболева $W_p^1(\mathbb{D})$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|F - S_m\|_{W_p^1(\mathbb{D})} = 0. \quad (3.8)$$

По теореме вложения Соболева [18], $W_p^1(\mathbb{D}) \subset C(\bar{\mathbb{D}})$ при $1 - 2/p > 0$, или $p > 2$, причем вложение компактно. Следовательно, поскольку $F \in W_p^1(\mathbb{D})$, то $F \in C(\bar{\mathbb{D}})$ и тогда $f = F \circ \omega^{-1} \in C(\bar{\Omega})$. В силу компактности вложения, ряд (2.5), а следовательно, и (2.1), сходятся равномерно в $\bar{\mathbb{D}}$ и $\bar{\Omega}$ соответственно.

Шаг 2. Теперь докажем, что функция $f = F \circ \omega^{-1}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f = 0$ в области Ω , установив сначала выполнение этого равенства в обобщенном смысле.

Пусть ϕ — произвольная пробная функция из класса $C_0^2(\mathbb{D})$ и

$$\langle g|\phi \rangle := \int_{\mathbb{C}} g(z)\phi(z)d\mu$$

есть действие обобщенной функции g на функцию ϕ . Имеем

$$\begin{aligned} \langle F_n|\partial\bar{\partial}\phi \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \partial\bar{\partial}\phi(z)d\mu(z) \int_{\mathbb{D}} \partial_{\zeta} G(\zeta, z) \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \partial(T_0 F_{n-1}(\zeta))d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \partial(T_0 F_{n-1}(\zeta))d\mu(\zeta) \partial_{\zeta} \int_{\mathbb{D}} G(\zeta, z) \partial\bar{\partial}\phi(z)d\mu(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \partial(T_0 F_{n-1}(\zeta)) \partial\phi(\zeta) d\mu(\zeta) = \langle (\overline{\omega'}/\omega') \partial(T_0 F_{n-1})|\partial\phi \rangle. \end{aligned}$$

Это означает равенство $\partial\bar{\partial}F_n = -\partial[(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0 F_{n-1})]$ обобщенных производных в \mathbb{D} . Из него и из (2.4), в свою очередь, вытекает следующая цепочка равенств для обобщенных функций:

$$\begin{aligned} |\omega'|^2 \mathcal{L}S_m &= \sum_{n=0}^m \left(\partial\bar{\partial}F_n + \|T\| \partial \left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'} \partial(T_0 F_n) \right) \right) \|T\|^n \\ &= \partial\bar{\partial}F_0 + \sum_{n=1}^m \left(\partial\bar{\partial}F_n + \partial \left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'} \partial(T_0 F_{n-1}) \right) \right) \|T\|^n + \partial \left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'} \partial(T_0 F_m) \right) \|T\|^{m+1} \\ &= \partial \left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'} \partial(T_0 F_m) \right) \|T\|^{m+1}, \end{aligned}$$

т.е. для любой функции $\varphi \in C_0^2(\Omega)$, используя функцию $\phi := \varphi \circ \omega \in C_0^2(\mathbb{D})$, можно записать

$$\langle \mathcal{L}s_m | \varphi \rangle = \langle \partial [(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0F_m)] | \phi \rangle \cdot \|T\|^{m+1} = -\langle \partial(T_0F_m) | (\overline{\omega'}/\omega')\partial\phi \rangle \cdot \|T\|^{m+1}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}f | \varphi \rangle &:= \langle f | \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle f - s_m | \mathcal{L}\varphi \rangle + \langle s_m | \mathcal{L}\varphi \rangle \\ &= \langle F - S_m | \mathcal{M}\phi \rangle - \langle \partial(T_0F_m) | (\overline{\omega'}/\omega')\partial\phi \rangle \cdot \|T\|^{m+1}. \end{aligned}$$

Положим $1/p + 1/q = 1$. Применяя неравенство Гельдера и принимая во внимание соотношения (3.4) и (3.8), получаем

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{L}f | \varphi \rangle| &\leq \|F - S_m\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|\mathcal{M}\phi\|_{L_q(\mathbb{D})} + \|DF_m\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|\partial\phi\|_{L_q(\mathbb{D})} \cdot \|T\|^{m+1} \\ &\leq \|F - S_m\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|\mathcal{M}\phi\|_{L_q(\mathbb{D})} + \|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|\partial\phi\|_{L_q(\mathbb{D})} \cdot \|\mathcal{DK}\|_p^m \cdot \|T\|^{m+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$ и $\|\mathcal{DK}\|_p \cdot \|T\| < 1$. Таким образом, $\langle \mathcal{L}f | \varphi \rangle = 0$, т.е. функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f = 0$ в Ω в обобщенном смысле. В силу эллиптичности этого уравнения, оно, согласно лемме Вейля, выполняется и в классическом смысле.

Шаг 3. Остается показать, что $f|_{\Gamma} = h$. Из оценок (3.4) и (3.5) следует, что $F_n \in W_p^1(\mathbb{D})$. По теореме вложения Соболева, при $p > 2$ отсюда вытекает, что $F_n \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Так как функция F_0 является гармоническим продолжением граничной функции $H \in C^\alpha(\mathbb{T})$, то $F_0|_{\mathbb{T}} = H$. Остальные функции F_n , вычисляемые по второй формуле из (2.12), обращаются в ноль на \mathbb{T} : это можно показать, приблизив функцию $(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0F_{n-1}) \in L_p(\mathbb{D})$, $p \in (1, \infty)$, при $n \geq 1$ финитными функциями из $C_0^2(\mathbb{D})$ и применив оценку (3.3).

Таким образом, $S_m|_{\mathbb{T}} = H$ при любых m . Из компактности вложения $W_p^1(\mathbb{D}) \subset C(\overline{\mathbb{D}})$ и из сходимости (3.8) вытекает равномерная сходимость $\|F - S_m\|_{C(\overline{\mathbb{D}})} \rightarrow 0$, так что $F|_{\mathbb{T}} = S_m|_{\mathbb{T}} = H$. Следовательно, $f|_{\Gamma} = h$.

Все приведенные рассуждения справедливы при выполнении неравенств $2 < p < (2(1 - \alpha))^{-1}$, которые совместимы, в виду того, что принято $\alpha \in (1/2, 1)$. Поскольку $\|\mathcal{DK}\|_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 2$, то для любого значения $\|T\| < 1$ можно подобрать такое достаточно близкое к 2 значение p , при котором $\|\mathcal{DK}\|_p \cdot \|T\| < 1$. Теорема доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.Г. Петровский. *Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными* // Матем. сб. **5**, 3–70 (1939).
2. L.K. Hua, W. Lin, C.Q. Wu. *On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem of the elliptic system of differential equations* // Acta Math. Sinica. **15**:2, (1965).
3. М.И. Вишик. *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений* // Матем. сб. **29**, 615–676 (1951).
4. L.K. Hua, W. Lin, C.Q. Wu. *Second-order systems of partial differential equations in the plane*. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1985.
5. А.О. Багапш, К.Ю. Федоровский. *C^1 -аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в \mathbb{R}^2* // Тр. МИАН. **298**, 42–57 (2017).
6. А.В. Бицадзе. *О единственности задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными* // Успехи матем. наук. **3**:6(28), 211–212 (1948).
7. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости*. М.: Наука. 1987.
8. А.О. Багапш, К.Ю. Федоровский. *О функционалах энергии для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами* // Уфимск. математ. журнал. **14**:4, 16–28 (2023).

9. A.O. Bagapsh. *The perturbation method for the skew-symmetric strongly elliptic systems of PDEs* // Complex Variables and Elliptic Equations. **68**:1, 57–66 (2023).
10. H. Lebesgue. *Sur le probleme de Dirichlet* // Rend. circ. mat. Palerm. **24**, 371–402 (1907).
11. G.C. Verchota, A.L. Vogel. *Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains* // Trans. Amer. Math. Soc. **349**:11, 4501–4535 (1997).
12. И.И. Привалов. *Об интегралах типа Коши* // Докл. Акад. наук. **23**:9, 859–862 (1939).
13. P. Duren. *Theory of H^p spaces*. New York: Academic Press. 1970.
14. Ch. Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps*. Berlin, Heidelberg:Springer–Verlag. 1992.
15. A. Calderon, A. Zigmund. *On the existence of certain singular integrals* // Acta Math. **88**, 85–139 (1952).
16. L.V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*. Princeton, New Jersey:Van Nostrand. 1966.
17. M. Christ. *Lectures on singular integral operators* // CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI. **77**, 133 pp. (1990).
18. С.Л. Соболев. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. М.: Наука. 1988.

Астамур Олегович Багапш,

ФИЦ ИУ РАН,

ул. Вавилова, д. 44, корп. 2,

11933 Москва, Россия,

Санкт-Петербургский государственный университет,

14 линия В.О., д. 29б, 199178, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: a.bagapsh@gmail.com