ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 3-19.

УДК 517.4+519.71

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Н.Ф. ВАЛЕЕВ

Аннотация. Рассматривается задача восстановления параметров линейного оператора по конечному числу собственных значений. Предлагается и обосновывается новая схема ее решения. Метод основан на сведении исходной задачи к задаче о совместном спектре семейства матричных пучков и позволяет найти все решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, динамические системы, управление собственными частотами, математические модели.

1. Введение

Данная статья является первой частью работы, посвященной специальному классу обратных спектральных задач.

Рассматривается задача определения неизвестных параметров линейного оператора по конечному набору точек спектра — многопараметрическая обратная спектральная задача (сокращенно МПОСЗ). Естественными источниками нашей постановки обратной спектральной задачи являются, с одной стороны, классические обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов, а с другой — прикладные задачи управления частотно-резонансными характеристиками различных технических устройств, описываемых линейными динамическими системами, и задачи вычислительной диагностики технических систем по частотам собственных колебаний.

Классическая теория обратных спектральных задач к настоящему времени нашла многочисленные приложения в задачах математической физики, химии и технических наук.

Исследованиями в этом направлении занимались Н. Левинсон, М.Г. Крейн, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, В.А. Садовничий, В.А. Юрко и другие (подробнее см. в [2], [8]).

Тем не менее, классическая теория обратных спектральных задач не в состоянии охватить весь спектр прикладных проблем, в которых требуется по спектру собственных колебаний восстановить свойства объекта. Речь прежде всего идет о тех случаях, когда мы располагаем не полным спектром собственных колебаний объекта, а лишь его конечной частью. К таковым можно отнести задачи, в которых требуется по конечному набору значений собственных колебаний системы найти параметры динамической системы, провести диагностику или идентификацию технической системы или же посредством доступных параметров объекта (динамической системы) придать ей те или иные частотно-резонансные характеристики (см. [3], [5], [12], [14], [21]).

N.F. Valeev, The multiparameter inverse spectral problems for finite-dimensional operators.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП (контракт 02.740.11.0612).

Поступила 5 мая 2010 г.

Все эти задачи, по существу, сводятся к обратным спектральным задачам для линейных операторов, при том необязательно дифференциальных, в которых требуется по конечному числу собственных чисел оператора найти возможные значения неизвестных параметров системы. Такие задачи уместно называть многопараметрическими обратными спектральными задачами — МПОСЗ.

Разумеется, такая формулировка задачи является весьма широкой, в частности, в ней даже не указывается вид зависимости линейного оператора от параметров, не описан класс этих операторов и т.д. Поэтому мы будем рассматривать конкретные, для выработки единых подходов исследования, и в то же время содержательные в плане приложений классы задач.

В данной работе мы рассматриваем МПОСЗ для операторов, действующих в конечномерных пространствах. Обсуждаемые методы исследований, а также результаты, полученные с помощью этих методов, в дальнейшем можно использовать для исследования более широких классов МПОСЗ. Также отметим, что основные результаты этой работы являются новыми и могут быть применены для численных расчетов конкретных задач. В следующей статье мы намерены привести некоторые литературные ссылки с комментариями.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E^n задано семейство m-параметрических операторов вида

$$B(\vec{p},\lambda) = B_0(\lambda) + p_1B_1(\lambda) + p_2B_2(\lambda) + ... + p_{m-1}B_{m-1}(\lambda) + p_mB_m(\lambda),$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m) \in \mathbf{C}^m$, линейные операторы $B_k(\lambda) : E^n \to E^n$ аналитически зависят от спектрального параметра $\lambda \in \mathbf{C}$. При этих условиях число $\lambda \in \mathbf{C}$ будем называть собственным значением оператора $B(\vec{p},\lambda)$, если оператор $[B(\vec{p},\lambda)]^{-1}$ не существует.

Постановка многопараметрической обратной спектральной задачи (МПОСЗ). *Требуется найти возможные значения вектора* $\vec{p}$ *из пространства* $\mathbf{C}^m$, *при которых наперед заданные числа* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ *являются собственными значениями оператора* $B(\vec{p},\lambda)$. *При этом набор чисел* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ *будем называть спектральными данными и обозначать* $\vec{\lambda}$.

Сформулированная постановка задачи часто возникает в математических моделях диагностики или идентификации технических систем по ее собственным колебаниям. Таким задачам посвящено большое количество работ, см., например, [21], [4] и библиографию к ним.

Прямое исследование существования решений, их количества и, тем более, построение алгоритмов, гарантирующих нахождение всех ее решений, для системы алгебраических уравнений в общем случае затруднительны. Причиной тому является довольно сложный вид системы полиномиальных уравнений от переменных p_j. В связи с этим для исследования МПОСЗ требуются специальные методы.

Метод исследования, обсуждаемый в данной работе, близок к идеям, изложенным в работах [9], [16], [17], [19], [20], [18]. В этих работах рассматривают так называемую *многоспектральную задачу*, эти задачи возникают при разделении переменных в дифференциальных операторах (см., например, [10], [19]).

Основными результатами данной части работы являются теоремы существования решений МПОСЗ, заданных в конечномерных пространствах, а также метод построения этих решений. Данная статья носит в большей степени вспомогательный характер, далее, в следующей части мы намерены рассмотреть также бесконечномерный случай МПОСЗ и приложения этой теории.

Тем не менее основные результаты, излагаемые здесь, являются новыми и в некоторой степени дополняют результаты, полученные в вышеперечисленных работах.

2. Связь между МПОСЗ и системой совместных прямых спектральных задач

2.1. Пусть в n-мерном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ задан оператор

$$B(\vec{p},\lambda)=B_0(\lambda)+p_1B_1(\lambda)+...+p_mB_m(\lambda), \tag{1}$$

где $\lambda\in C$ — спектральный параметр, $\vec{p}\in C^m$ — вектор управления.

Обозначим $\vec{\lambda}=(\lambda_1,...,\lambda_m)$ — спектральные данные МПОСЗ. Тогда если $\vec{p}=(p_1,...,p_m)$ является решением МПОСЗ, то найдутся такие нетривиальные векторы $\vec{x_k}\in\mathbb{E}^n$, что

$$B_0(\lambda_k)\vec{x}_k+p_1B_1(\lambda_k)\vec{x}_k+...+p_mB_m(\lambda_m)\vec{x}_k=0, k=1,...,m.$$

Обозначим

$$B_j(\lambda_k)=B_{j,k}, k=1,...,m, j=0,...,m,$$

теперь МПОСЗ равносильна следующей задаче.

Требуется найти такой вектор $\vec{p}\in C^m$, чтобы каждое из уравнений системы

$$B_{0,k}\vec{x}_k+p_1B_{1,k}\vec{x}_k+...+p_mB_{m,k}\vec{x}_k=0, k=1,...,m \tag{2}$$

имело хотя бы одно нетривиальное решение $\vec{x_k}\in\mathbb{E}^n$.

Очевидно, последняя задача эквивалентна системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_1,...,p_m\in C$, а именно

$$det(B_{0,k}+p_1B_{1,k}+...+p_mB_{m,k})=0, k=1,...,m. \tag{3}$$

Система уравнений (3) представляет собой систему полиномиальных относительно $p_1,...,p_m\in\mathbb{C}$ уравнений. При этом в общем случае обобщенная степень каждого полинома может принимать значения от 0 до n.

Из общей теории систем нелинейных алгебраических уравнений вытекает, что возможны следующие ситуации:

1) система уравнений (3) не имеет решения,

2) система уравнений (3) имеет

   а) только изолированные решения,

   б) изолированные и неизолированные решения,

   в) только неизолированные решения.

Известно также (см. например [22], [23]), что если система (3) содержит только изолированные решения, то их количество (с учетом алгебраической кратности) будет равно

$$N=\prod_{k=1}^{m}\alpha_k,$$

где α_k — обобщенная степень k-го полинома в (3).

2.2. Наша основная идея построения решений МПОСЗ для оператора (1) состоит в "разделении"переменных p_k, $k=1,...,m$ в системе уравнений (3).

Пусть ненулевые векторы $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^m$ и $\vec{p}=(p_1,...,p_m)\in C^m$ удовлетворяют системе уравнений (2). Каждое уравнение системы (2) скалярно умножим на произвольный вектор $\vec{y_k}\in\mathbb{E}^n$.

Тогда получим систему вида:

$$(B_{k,1}\vec{x}_k,\vec{y}_k)\,p_1+...+(B_{k,m}\vec{x}_k,\vec{y}_k)\,p_m=-(B_{0,k}\vec{x}_k,\vec{y}_k), k=1,...,m. \tag{4}$$

Обозначим

$$b_{k,j}=(B_{k,j}\vec{x}_k,\vec{y}_k)\,,b_k^0=-\left(B_{0,k}\vec{x}_k,\vec{y}_k\right) \tag{5}$$

и выпишем систему (4) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ . & . & . & . \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ . \\ b_m^0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

или сокращенно

$$B\vec{p} = \vec{b}^0.$$

Пусть c_{kj} — алгебраическое дополнение $b_{j,k}$ элемента из матрицы (5). Умножив обе части (6) на матрицу

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1m} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & . & c_{mm} \end{pmatrix},$$

получим

$$\widehat{\Delta}_k = (-1)^k p_k \widehat{\Delta}_0, k = 1, ..., m, \tag{7}$$

где $\widehat{\Delta}_0 = \det(B)$,

$$\widehat{\Delta}_k = det \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,k-1} & b_1^0 & b_{1,k+1} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,k-1} & b_2^0 & b_{2,k+1} & \dots & b_{2,m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_{m,1} & . & b_{m,k-1} & b_m^0 & b_{m,k+1} & . & b_{m,m} \end{pmatrix}.$$

Из вышесказанных рассуждений вытекает следующее простое утверждение.

Теорема 1. *Пусть векторы $\vec{x_k} \in \mathbb{E}^n, k = 1, .., m$ и вектор $\vec{p} = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{C}^m$ удовлетворяют системе уравнений (2). Тогда координаты p_k вектора $\vec{p}$ удовлетворяют системе уравнений (7) при любых $\vec{y_k} \in \mathbb{E}^n, k = 1, .., m$.*

Заметим, что система (7) справедлива при любом наборе $(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_m) \in \mathbb{E}^n$, а величины $\widehat{\Delta}_k = \widehat{\Delta}_k(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m; \vec{y}_1, ..., \vec{y}_m)$ являются при фиксированных $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m$ полилинейными функционалами над пространством

$$V = \underbrace{\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \times ... \times \mathbb{E}^n}_{m}.$$

Если же при этом фиксировать еще и все $\vec{y}_j$, кроме одного $\vec{y}_s$, то $\widehat{\Delta}_k = \widehat{\Delta}_k(\vec{y}_s)$ становится линейным функционалом над $\mathbb{E}^n$. В таких случаях известно (см., например, [24]), что можно сконструировать линейное пространство H_m, над которым $\widehat{\Delta}_k$ будет линейным функционалом.

2.3. Далее опишем структуру пространства H_m, введем необходимые понятия и обозначения. Как правило, в математической литературе обычно ограничиваются описанием тензорного произведения двух пространств, поэтому мы для удобства чтения тоже начнем со случая двух пространств.

Введем в рассмотрение тензорное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y} \in \mathbb{E}^n$.

Пусть в некотором базисе $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n \in \mathbb{E}^n$ рассматриваемые нами векторы имеют вид $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$. Тогда положим

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = (x_1y_1, x_1y_2, ..., x_1y_n, x_2y_1, x_2y_2, ..., x_2y_n, ..., x_ny_1, x_ny_2, ..., x_ny_n).$$

Таким образом, $\vec{Z} = \vec{x} \otimes \vec{y}$ можно представить в виде $\vec{Z} = \begin{pmatrix} x_1\vec{y} \\ x_2\vec{y} \\ . \\ x_m\vec{y} \end{pmatrix}$ и рассматривать как некоторую точку множества $\mathbb{R}^{n^2}$.

Теперь во множестве всех тензорных произведений вида $\vec{x} \otimes \vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}^n$ введем стандартную структуру линейного пространства над числовыми последовательностями $(z_1, z_2, ..., z_{n^2})$ и операцию скалярного произведения, полагая

$$\langle \vec{x} \otimes \vec{y}, \vec{u} \otimes \vec{v} \rangle = (\vec{x}, \vec{u})(\vec{y}, \vec{v}).$$

Построенное линейное пространство называется тензорным пространством, обозначим его $H_2 = \mathbb{E}^n \otimes \mathbb{E}^n$.

Заметим, что полученное пространство является снова линейным евклидовым пространством размерности n^2. В качестве базиса пространства $\mathbb{E}^n \otimes \mathbb{E}^n$ можно рассматривать систему векторов $\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j$.

Перейдем к определению понятия тензорного произведения линейных операторов $A : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ и $B : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, обозначаемого далее $A \otimes B$.

Для этого достаточно определить $A \otimes B$ на базисных векторах $\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j$, положив $(A \otimes B)(\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j) = A\vec{e}_k \otimes B\vec{e}_j$, и далее продолжить действие оператора на остальные элементы по линейности.

Если теперь рассматривать матричное представление в базисе $\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j$ оператора $C = A \otimes B$, то в соответствии с правилом тензорного произведения двух векторов получим блочную матрицу размера $n^2 \times n^2$ следующего вида

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & ... & a_{1,m}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & ... & a_{2,m}B \\ . & . & . & . \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & ... & a_{m,m}B \end{pmatrix}.$$

Далее всюду, когда речь будет идти о координатном или матричном представлении тензорных произведений векторов или операторов(в каком-либо фиксированном базисе) будем всегда придерживаться выше приведенных формул.

По индукции определяются тензорное произведение m экземпляров евклидовых пространств $\mathbb{E}^n$:

$$V = \underbrace{\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \times ... \times \mathbb{E}^n}_{m}.$$

Если $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m \in H_m$ и $\vec{Y} = \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m \in H_m$, то полагая

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = (\vec{x}_1, \vec{y}_1)(\vec{x}_2, \vec{y}_2)...(\vec{x}_m, \vec{y}_m), \tag{8}$$

определяем скалярное произведение в пространстве H_m.

Таким образом, далее через H_m будем обозначать тензорное произведение m экземпляров пространств $\mathbb{E}^n$ со скалярным произведением $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$, определенным формулой (8).

Матричное представление тензорного произведения операторов $A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_m$ определяется тоже по индукции.

При этом заметим, что

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_m)(\vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m) = A_1\vec{x}_1 \otimes ... \otimes A_m\vec{x}_m. \tag{9}$$

Теперь будем рассматривать функционалы $\widehat{\Delta}_k = \widehat{\Delta}_k(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m; \vec{y}_1, ..., \vec{y}_m)$ над евклидовым пространством H_m. Пусть Ω — множество всех перестановок чисел $1, 2, ..., m$. Если $\omega = i_1, i_2, ..., i_m \in \Omega$, положим $\omega(k) = i_k$, а через $I(\omega)$ обозначим количество беспорядков (инверсий) в перестановке ω.

Рассмотрим оператор $\Delta_0 : H_m \to H_m$, заданный следующим образом:

$$\Delta_0 = \sum_{\omega \in \Omega} (-1)^{I(\omega)} B_{\omega(1),1} \otimes B_{\omega(2),2} \otimes ... \otimes B_{\omega(m),m}. \tag{10}$$

Теперь заменяя $B_{k,j}$ на $B_{0,j}$ в формуле (10), определим операторы

$$\Delta_k : H_k \to H_k, k = 1, ..., m. \tag{11}$$

Для удобства иногда будем пользоваться также "развернутой" формой представления Δ_k:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & ... & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & ... & B_{2,m} \\ . & . & . & . \\ B_{m,1} & B_{m,2} & ... & B_{m,m} \end{vmatrix}_{\otimes},$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} B_{1,1} & ... & B_{k-1,1} & B_{0,1} & B_{k+1,1} & ... & B_{m,1} \\ B_{2,1} & ... & B_{k-1,2} & B_{0,2} & B_{k+1,2} & ... & B_{m,2} \\ . & ... & . & . & . & . & . \\ B_{1,m} & ... & B_{k-1,m} & B_{0,m} & B_{k+1,m} & ... & B_{m,m} \end{vmatrix}_{\otimes}.$$

Установим связь между функционалами $\hat{\Delta}_k$ и операторами Δ_k. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любых* $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m \in H_m$ *и* $\vec{Y} = \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m \in H_m$ *справедлива формула*

$$\widehat{\Delta}_k = \left\langle \Delta_k \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку все величины Δ_k устроены одинаково, покажем справедливость (12) для $k = 0$.

В формуле (10) рассмотрим какое-либо слагаемое (соответствующее фиксированному ω) $\Delta_0^\omega = B_{\omega(1),1} \otimes B_{\omega(2),2} \otimes ... \otimes B_{\omega(m),m}$.

Тогда

$$\langle \Delta_0^\omega \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \langle (B_{\omega(1),1} \otimes B_{\omega(2),2} \otimes ... \otimes B_{\omega(m),m}) \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m ; \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m \rangle.$$

Далее согласно формулам (9), (8) и (4) получим

$$\langle (B_{\omega(1),1}\vec{x}_1 \otimes B_{\omega(2),2}\vec{x}_2 \otimes ... \otimes B_{\omega(m),m})\vec{x}_m ; \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m \rangle =$$
$$= (B_{\omega(1),1}\vec{x}_1, \vec{y}_1)(B_{\omega(2),2}\vec{x}_2, \vec{y}_2)...(B_{\omega(m),m}\vec{x}_m, \vec{y}_m) = b_{\omega(1),1} b_{\omega(2),2} ... b_{\omega(m),m}.$$

Теперь очевидно, что

$$\langle \Delta_0 \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum (-1)^{I(\omega)} b_{\omega(1),1} \otimes b_{\omega(2),2} \otimes ... \otimes b_{\omega(m),m} = \widehat{\Delta}_0.$$

Для остальных $k = 1, ...m$ формулы (12) проверяются аналогично. Теорема доказана.

Сформулируем одно из основных утверждений теории МПОСЗ.

Теорема 3. *Пусть ненулевые векторы* $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m \in \mathbb{E}^n$ *и числа* $p_k \in C, k = 1, ..., m$, *удовлетворяют системе уравнений (2). Тогда векторы* $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m$ *и* $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, ..., m$ *являются решением системы совместных спектральных задач*

$$\begin{cases} (\Delta_1 - p_1\Delta_0)\vec{X} = 0, \\ (\Delta_2 + p_2\Delta_0)\vec{X} = 0, \\ . . . . \\ \left(\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0\right)\vec{X} = 0 \\ . . . . \\ (\Delta_m + (-1)^m p_m \Delta_0)\vec{X} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что если векторы $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m$ и числа $p_k \in \mathbb{C}$ являются решением системы (2), тогда для произвольного набора векторов $\vec{y}_1, ..., \vec{y}_m \in \mathbb{E}^n$ верна система уравнений

$\widehat{\Delta}_k + (-1)^k p_k \hat{\Delta}_0 = 0, k = 1, ..., m.$

Далее из теоремы 2 получаем, что для тензорного произведения, составленного из решений $\vec{x}_k$ системы (2),

$\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m,$

$$\langle (\Delta_k - (-1)^k \Delta_0 \vec{X}), \vec{Y} \rangle = 0, k = 1, ..., m, \tag{14}$$

для любых векторов $\vec{Y} \in H_m$ вида $\vec{Y} = \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m$.

Теперь заметим, что система векторов $\left\{ \vec{Y} = \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m | \vec{y}_k \in \mathbb{E}^n \right\}$ содержит также базис пространства H_m. Следовательно, соотношения (14) равносильны системе уравнений (13). Теорема 3 доказана.

Теорема 3 фактически сводит обратную спектральную задачу, записанную в виде систем уравнений (2), к системе прямых спектральных задач для операторных пучков $\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0$.

3. Определенная МПОСЗ

В предыдущем пункте мы установили, что если числа $p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*$ являются решением системы алгебраических уравнений

$$det(B_{0,k} + p_1 B_{1,k} + ... + p_m B_{m,k}) = 0, k = 1, ..., m,$$

то эти же числа являются решением системы прямых спектральных задач, то есть найдется разложимый тензор $\vec{X} \in H_m$ такой, что $(\Delta_k + (-1)^k p_k^* \Delta_0)\vec{X} = 0, k = 1, ..., m$.

При этом очевидно, что последняя система является более изученной и, в частности, удобной отправной точкой для разработки методов численного решения МПОСЗ.

Но заметим, что система совместных спектральных задач (13) содержит также неизвестный вектор $\vec{X} \in H_m$. Попытка заменить систему уравнений (13) на систему алгебраических уравнений вида

$$\det(\Delta_k + (-1)^k p_k^* \Delta_0) = 0, k = 1, ..., m$$

наталкивается на очевидные проблемы:

1) операторный пучок $\Delta_k + (-1)^k p_k^* \Delta_0$ может оказаться иррегулярным, т.е. $dim(Ker\Delta_k \cap Ker\Delta_0) > 0$,

2) даже если для всех $k = 1, ..., m, , Ker\Delta_k \cap Ker\Delta_0 = 0$, мы не можем утверждать существование разложимого тензора $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m \in H_m$, удовлетворяющего всем уравнениям

$$(\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0)\vec{X} = 0;$$

и даже если такой вектор $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m$ найдется, обратный переход от системы (13) к системе (2) не очевиден.

В связи с вышесказанным, *МПОСЗ будем называть регулярным или определенным если*

$$\det(\Delta_0) \neq 0.$$

Рассмотрим специальный класс систем уравнений(2), а именно возмущенную систему

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(B_{0,1} - \epsilon J + p_1 \left(B_{1,1} + \epsilon I\right) + p_2 B_{2,1} + ... + p_m B_{m,1}\right) x_1 = 0, \\ \left(B_{0,2} - \epsilon J + p_1 B_{1,2} + p_2 \left(B_{2,2} + \varepsilon I\right) + ... + p_m B_{m,2}\right) x_2 = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \left(B_{0,m} - \varepsilon J + p_1 B_{1,m} + p_2 B_{2,m} + ... + p_m \left(B_{m,m} + \varepsilon I\right)\right) x_m = 0, \end{array} \right. \tag{15}$$

где $\varepsilon \in C, J = diag\left\{\alpha_1, ..., \alpha_n\right\}, \alpha_k > 0, \alpha_k \neq \alpha_j, I$ — единичный оператор.

Из теоремы 3 следует, что $\vec{p} = (p_1, ..., p_m)$ и $\vec{x}_k \in \mathbb{E}^n$ являются решением (иначе говоря совместным спетром) системы совместных спектральных задач

$$(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k(\varepsilon) \Delta_0(\varepsilon))\vec{X}(\varepsilon) = 0, k = 1, ..., m,$$

где

$$\Delta_0(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_{1,1}+\varepsilon I & B_{1,2} & \dots & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2}+\varepsilon I & \dots & B_{2,m} \\ . & . & . & . \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m}+\varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes}, \tag{16}$$

$$\Delta_k(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_{1,1}+\varepsilon J & \dots & B_{k-1,1} & B_{0,1}-\varepsilon J & B_{k+1,1} & \dots & B_{m,1} \\ B_{2,1} & \dots & B_{k-1,2} & B_{0,2}-\varepsilon J & B_{k+1,2} & \dots & B_{m,2} \\ . & \dots & . & . & . & . & . \\ B_{1,m} & \dots & B_{k-1,m} & B_{0,m}-\varepsilon J & B_{k+1,m} & \dots & B_{m,m}+\varepsilon J \end{vmatrix}_{\otimes}. \tag{17}$$

При этом очевидно, что числа $p_k = p_k(\varepsilon), k = 1, ..., m$, векторы $\vec{x}_k(\varepsilon) \in \mathbb{E}^n$, соответственно, вектор $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m$ будут функциями от $\varepsilon \in \mathbb{C}$.

Установим некоторые важные для дальнейшего свойства функций $\vec{x}_k(\varepsilon)$ и $p_k(\varepsilon)$, $k = 1, ..., m$.

Теорема 4. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall \varepsilon, |\varepsilon| > \varepsilon_0, rank(\Delta_0(\varepsilon)) = n^m$, т.е. $det(\Delta_0(\varepsilon) \neq 0)$.*

Доказательство. Разложим оператор $\Delta_0(\varepsilon)$ по степеням ε. Поскольку, согласно формуле (17) Δ_0 устроен так же, как числовой определитель, то легко установить, что

$$\Delta_0(\varepsilon) = \varepsilon^m \underbrace{I \otimes I \otimes ... \otimes I}_{m} + \varepsilon^{m-1} D_1 + ... + \varepsilon D_{m-1} + D_m,$$

где $D_k : H_m \to H_m$ некоторые операторы независимые от ε.

Теперь

$$\det(\Delta_0(\varepsilon)) = det \left[\varepsilon^m \underbrace{I \otimes I \otimes ... \otimes I}_{m} + \varepsilon^{-1} O(1) \right]$$

при $\varepsilon \to \infty$.

Далее получим

$$\det(\Delta_0(\varepsilon)) = \varepsilon^{nm} \left\{ det \left[\underbrace{I \otimes I \otimes ... \otimes I}_{m} \right] + \varepsilon^{-1} O(1) \right\} \tag{18}$$

при $\varepsilon \to \infty$.

Заметим, что $\det \left[\underbrace{I \otimes I \otimes ... \otimes I}_{m} \right] = (\det I)^m = 1$. Теперь из представления (18) вытекает существование искомого ε_0.

Обозначим $\mathcal{E} = \{\varepsilon \in \mathbb{C} | \det \Delta_0(\varepsilon) = 0\}$ множество нулей полинома $det \Delta_0(\varepsilon)$. Таким образом, E состоит (с учетом порядка нулей) из nm чисел $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{nm}$.

Приведем без доказательства очевидное утверждение.

Теорема 5. *Оператор $[\Delta_0(\varepsilon)]^{-1} : H_m \to H_m$ — мероморфная операторозначная функция от ε, множество полюсов которой совпадает с $\mathcal{E}$.*

Все рассматриваемые нами операторы конечномерные и они зависят от ε полиномиально, откуда следует утверждение о характере аналитичности собственных векторов и вектора управления МПОСЗ (16).

Теорема 6. *Пусть $\vec{p} = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{C}^m$ и $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m \in \mathbb{E}^n$ решения системы (21), тогда $p_k(\varepsilon), k = \overline{1, m}$ являются алгебраическими функциями с особыми точками типа полюса (точка ветвления и полюс) из E. Векторы $\vec{x}_k(\varepsilon)$ можно подобрать так, что $\vec{x}_k(\varepsilon)$ будут алгебраическими функциями.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \notin E$. Из теоремы 3 вытекает, что если числа $p_k(\varepsilon)$ и $\vec{x}_k(\varepsilon) \in E^n, k = 1, ..., m,$ — решения системы (15), то вектор

$$\vec{X}(\varepsilon) = \vec{x}_1(\varepsilon) \otimes \vec{x}_2(\varepsilon) \otimes ... \otimes \vec{x}_m(\varepsilon)$$

является совместным собственным вектором операторных пучков

$$(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon))\vec{X}(\varepsilon) = 0, k = 1, ..., m.$$

В свою очередь, при условии $\varepsilon \notin \mathcal{E}$ $\det \Delta_0(\varepsilon) \neq 0$. Следовательно, $p_k(\varepsilon)$ является нулем многочлена $det(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k s\Delta_0(\varepsilon))$.

По определению алгебраических функций, любой нуль $s(\varepsilon)$ указанного многочлена является алгебраической функцией от ε, т.е. все $p_k(\varepsilon)$ — алгебраические функции ε.

Особые точки $p_k(\varepsilon)$ могут возникнуть вследствие наличия у оператора $\Delta_0^{-1}(\varepsilon)\Delta_k(\varepsilon)$ кратных собственных значений — точки ветвления и точек полюса. Тогда $p_k(\varepsilon)$ тоже будут иметь особую точку типа полюса. Ясно, что полюсы операторов $\Delta_0^{-1}(\varepsilon)\Delta_k(\varepsilon)$ содержатся во множестве $\mathcal{E}$.

Отсюда вытекает, что $p_k(\varepsilon)$ имеет особую точку вида $(\varepsilon - \varepsilon^*)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, если только ε^* — полюс оператора $\Delta_0^{-1}(\varepsilon)\Delta_k(\varepsilon)$.

Теперь осталось доказать часть утверждения для $\vec{x}_k(\varepsilon)$. Заметим, поскольку $p_k(\varepsilon)$ — алгебраические функции, то каждая из систем уравнений (15) может быть представлена в виде $\mathcal{B}_k(\varepsilon)\vec{x}_k(\varepsilon) = 0$, где $\mathcal{B}_k(\varepsilon)$ — матрицы с элементами $b_{ij}(\varepsilon)$ — алгебраическими функциями.

Решая эти системы методом Гаусса (а решение существует), мы получим решения $\vec{(x)}_k(\varepsilon)$ в виде алгебраических функций от ε.

Итак, если система (15) имеет решение, то $\vec{p}(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), ..., p_m(\varepsilon))$ и $\vec{x}_k(\varepsilon)$ — алгебраические функции.

Теперь сформулируем и докажем утверждения о существовании решений системы (15).

Система уравнений (15) эквивалентна следующей системе полиномиальных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(\vec{p}, \varepsilon) = \det\left(B_{0,1} - \varepsilon J + p_1\left(B_{1,1} + \varepsilon I\right) + p_2 B_{2,1} + ... + p_m B_{m,1}\right) = 0, \\ f_2(\vec{p}, \varepsilon) = \det\left(B_{0,2} - \varepsilon J + p_1 B_{1,2} + p_2\left(B_{2,2} + \varepsilon I\right) + ... + p_m B_{m,2}\right) = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_m(\vec{p}, \varepsilon) = \det\left(B_{0,m} - \varepsilon J + p_1 B_{1,m} + p_2 B_{2,m} + ... + p_m\left(B_{m,m} + \varepsilon I\right)\right) = 0. \end{cases}$$

Эту систему будем также записывать в виде

$$F(\vec{p}, \varepsilon) = 0. \tag{19}$$

Заметим, что при больших $|\varepsilon| \approx \infty$ систему (19) можно представить в виде:

$$f_k(\vec{p}, \varepsilon) = \varepsilon^n det\left[(p_k I - J + \varepsilon^{-1} D_k(\vec{p}, \varepsilon)\right], k = 1, \bar{m}. \tag{20}$$

При $|\varepsilon| \to \infty$ операторы $D_k(\vec{p}, \varepsilon)$ ограничены по норме равномерно по всем $\vec{p}$ из любого компакта $\Omega \subset \mathbb{C}^m$. Следовательно, "главной" частью системы (19) при $|\varepsilon| \to \infty$ является более простая система уравнений:

$$f_k^0(\vec{p}) = det(p_k I - J), k = 1, \bar{m}, \tag{21}$$

или в операторной форме

$$F^0(\vec{p}) = 0.$$

Система уравнений (21) в развернутой форме имеет вид:

$$f_j^0(\vec{p}) = \prod_{k=1}^{n}(p_j - \alpha_k) = 0, j = 1, \bar{m}. \tag{22}$$

Из (22) вытекает, что $F^0(\vec{p}) = 0$ имеет ровно n^m изолированных решений $p^{*j} = \left(p_1^{*j}, p_2^{*j}, ..., p_m^{*j}\right)$, где p_k^{*j} принимают произвольные значения из множества $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$.

Обозначим через Λ^0 множество всех нулей оператора $F^0(\vec{p})$, а через $\Lambda(\varepsilon)$ множество нулей $F(\vec{p},\varepsilon)$. Из (20) и (21) при $|\varepsilon| \to \infty$ следует, что

$$F(\vec{p},\varepsilon) = \varepsilon^n \left(F^0(\vec{p}) + \varepsilon^{-1} D(\vec{p},\varepsilon)\right), \tag{23}$$

где $\|D_k(\vec{p},\varepsilon)\| < C(\Omega) < \infty$ для всех $\vec{p}$ из произвольной ограниченной области $\Omega \subset C^m$. Из представления $F(\vec{p},\varepsilon)$ в виде (23) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ — произвольная ограниченная область, $\Lambda^0 \subset \Omega$. Тогда для $\forall \delta > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall |\varepsilon| > \varepsilon_0$*

$$\left\|\Lambda^0 - \Lambda(\varepsilon)\right\| < \delta.$$

Доказательство. Пусть $\vec{p}(\varepsilon)$является произвольным нулем $F(\vec{p},\varepsilon)$. Тогда из теоремы 3 следует, что $\vec{p}(\varepsilon) = (p_1^*, ..., p_m^*)$ удовлетворяет системе уравнений

$$det\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k^*(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right) = 0, k = \overline{1,m}.$$

Покажем, что $\vec{p}(\varepsilon)$ ограничена при $|\varepsilon| \to \infty$. Заметим, что при $|\varepsilon| \to \infty$

$$\Delta_0(\varepsilon) = \varepsilon^m \left(I \otimes I \otimes ... \otimes I + \varepsilon^{-1} O(1)\right)$$

и $\Delta_k(\varepsilon) = \varepsilon^m O(1)$. Поэтому существует число $R(c)$ такое, что $\left\|\Delta_k(\varepsilon)\Delta_0^{-1}(\varepsilon)\right\| < c \equiv const$ для всех $|\varepsilon| > R(c)$. Отсюда вытекает, что при $|\varepsilon| > R(\varepsilon)$ любое решение системы $F(\vec{p},\varepsilon) = 0$ ограничено, т.е. $\|\vec{p}(\varepsilon)\| < C$.

Из представления (23) вытекает непрерывность оператора $F(\vec{p},\varepsilon)$ по ε в окрестности бесконечности равномерно по $\vec{p} \in \Omega$. Следовательно, нули $\Lambda(\varepsilon)$ оператора $F(\vec{p},\varepsilon)$ при $|\varepsilon| \to \infty$ тоже являются непрерывными и соответственно стремятся к точкам множества Λ^0.

Отсюда и следует существование искомого ε_0 для каждого $\delta > 0$.

Таким образом, уравнение $F(\vec{p},\varepsilon) = 0$ при $|\varepsilon| \to \infty$ имеет ровно n^m изолированных решений.

Каждое решение $\vec{p}(\varepsilon)$ операторного уравнения $F(\vec{p},\varepsilon) = 0$ является алгебраической функцией от ε (теорема 2). Система уравнений (19) эквивалентна системе (15). Это означает, что каждому вектору

$$\vec{p^j}(\varepsilon) = \left(p_1^j(\varepsilon), ..., p_m^j(\varepsilon)\right) \in \Lambda(\varepsilon),$$

удовлетворяющему $F(\vec{p},\varepsilon) = 0$, соответствует набор ненулевых векторов $\vec{x}_1^j(\varepsilon), \vec{x}_2^j(\varepsilon), ..., \vec{x}_m^j(\varepsilon)$ такой, что

$$\begin{cases} \left(B_{0,1} - \varepsilon J + p_1^j\left(B_{1,1} + \varepsilon I\right) + p_2^j B_{2,1} + ... + p_m^j B_{m,1}\right) x_1^j = 0, \\ \left(B_{0,2} - \varepsilon J + p_1^j B_{1,2} + p_2^j\left(B_{2,2} + \varepsilon I\right) + ... + p_m^j B_{m,2}\right) x_2^j = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \left(B_{0,k} - \varepsilon J + p_1^j B_{1,k} + ... + p_k^j\left(B_{k,k} + \varepsilon I\right) + ... + p_m^j B_{m,2}\right) x_k^j = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \left(B_{0,m} - \varepsilon J + p_1^j B_{1,m} + p_2^j B_{2,m} + ... + p_m^j\left(B_{m,m} + \varepsilon I\right)\right) x_m^j = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Далее решения системы 24 будем обозначать $Z_j = \left\{\vec{p^j}; \vec{x}_1^j, ..., \vec{x}_m^j\right\}$, $\vec{X}^j = \vec{x}_1^j \otimes \vec{x}_2^j \otimes ... \otimes \vec{x}_m^j$, $\tilde{Z}_j = \left\{\vec{p^j}; \vec{X}^j\right\}, j = \overline{1,N}$.

Теорема 3 утверждает, что любое решение $\tilde{Z}_j = \left\{\vec{p^j}; \vec{X}^j\right\}$ является также решением системы

$$\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k^j(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right)\vec{X}^j = 0, k = \overline{1,m}. \tag{25}$$

Теперь сформулируем утверждение, обратное в определенном смысле теореме 3.

Теорема 7. *Пусть в системе уравнений (13)* $det\Delta_0 \neq 0$ *. Тогда решения системы (13) состоят из* $N = n^m$ *совместных собственных векторов вида* $\vec{X}^j = \vec{x}_1^j \otimes \vec{x}_2^j \otimes ... \otimes \vec{x}_m^j$ *и соответствующих собственных значений* p_k^j, $j = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, m}$*. При этом каждый вектор* $\vec{p}^j = \left(p_1^j, ..., p_m^j\right)$ *и соответствующие векторы* $\vec{x}_1^j, ..., \vec{x}_m^j$ *являются решением системы (2).*

Доказательство. Рассмотрим возмущенную систему (15). Согласно теореме 3, каждому решению $p,^j$, $\vec{x}_1^j, ..., \vec{x}_m^j$ системы (15) соответствует решение вида $\vec{X}^j = \vec{x}_1^j \otimes \vec{x}_2^j \otimes ... \otimes \vec{x}_m^j$, $\vec{p}^j = \left(p_1^j, ..., p_m^j\right)$ системы (25). Из леммы 1 следует, что при больших $|\varepsilon| \approx \infty$ система (19), а тогда соответственно и система (24) имеет ровно $N = n^m$ решений.

Поэтому система

$$\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right) \vec{X} = 0$$

согласно теореме 3 имеет не менее чем N решений. Но

$$\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon) : H_m \to H_m,$$

$dim(H_m) = N$. Следовательно, совокупность всех решений каждого уравнения $\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right) \vec{X} = 0$ состоит из N собственных значений $p_k^1, p_k^2, ..., p_k^N$ и соответствующих собственных векторов $\vec{X}^1, \vec{X}^2, ..., \vec{X}^N$. Таким образом, каждое решение системы $\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right) \vec{X} = 0$, $k = \overline{1, m}$, состоит только из набора собственных значений $\vec{p}_j = \left(p_1^j, ..., p_m^j\right)$ соответствующих собственных векторов $\vec{X}^j = \vec{x}_1^j \otimes \vec{x}_2^j \otimes ... \otimes \vec{x}_m^j$, которые получены из решений системы (24). Тогда справедливы и (25), причем согласно теореме 6 $\vec{p}^j(\varepsilon)$ и $\vec{X}^j(\varepsilon)$ — алгебраические функции. В (24) и (25) перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$. При этом поскольку $\Delta_0 = \Delta_0(0)$ — невырожденная матрица, $\vec{p}^j(\varepsilon)$ и $\vec{X}^j(\varepsilon)$ непрерывны в точке $\varepsilon = 0$ и имеют конечные однозначные пределы $\vec{p}^j(0)$ и $\vec{X}^j(0)$, эти же пределы будут являться решениями исходной МПОСЗ (2) и соответствующей системы совместных спектральных задач(13). Отсюда и вытекает доказательство теоремы.

Теоремы 3 и 7 при условии, что Δ_0 — невырожденная матрица, сводят решение МПОСЗ к решению системы прямых спектральных задач (13). Заметим, что решение системы прямых спектральных задач эквивалентно нахождению нулей полиномов вида

$$det\left(\Delta_k - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0\right) = 0, k = \overline{1, m}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $det\Delta_0 = 0$. Предварительно исследуем свойства иррегулярных пучков.

4. Неопределенная МПОСЗ

Теперь рассмотрим случай, когда $det\Delta_0 = 0$. Предварительно исследуем свойства иррегулярных пучков.

4.1. В данном разделе мы сформулируем и докажем вспомогательные утверждения, которые будут использованы в последующих разделах статьи. Обозначения данного раздела не связаны с предыдущими разделами данной работы.

В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ рассмотрим однопараметрическое (по параметру $\varepsilon \in \mathbb{C}$) семейство пучков

$$L(s, \varepsilon) = A(\varepsilon) + sB(\varepsilon) : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, \tag{26}$$

где s — спектральный параметр, и далее всюду будем предполагать, что

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m_1} \varepsilon^k A_k, B(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m_2} \varepsilon^k B_k. \tag{27}$$

Прежде чем формулировать изучаемые в данном пункте вопросы, дадим необходимые определения, обозначения, а также приведем некоторые свойства пучков вида (26) и (27). Введем в рассмотрение характеристический определитель изучаемого пучка

$$F(s,\varepsilon) = \det L(s,\varepsilon). \tag{28}$$

Непосредственно из вида пучка $L(s,\varepsilon)$ вытекает, что $F(s,\varepsilon)$ можно представить в виде следующего полинома

$$F(s,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} f_k(s)\varepsilon^k, \tag{29}$$

где N зависит от рангов матриц B_k и A_j .

Следуя [1], будем говорить, что *пучок* $A-sB$ *иррегулярный, если* $\det(A-sB) \equiv 0$, *в противном случае будем его называть регулярным.* Очевидно, что условие иррегулярности пучка вида $A - sB$ эквивалентно

$$ind(A,B) := \max_{s\in\mathbb{C}} rank(A-sB) < n.$$

Далее, *число* λ^* *будем называть собственным значением пучка* $A-\lambda B$, *если*

$$rank(A-\lambda^* B) < ind(A,B),$$

соответственно, вектор $\vec{x^*} \notin KerA \cap KerB$ *при условии, что* $(A-\lambda^* B)\vec{x^*} = 0$, *будем называть собственным вектором.*

Вектор $\vec{x} \in KerA \cap KerB$ *будем называть вырожденным собственным вектором иррегулярного пучка* $(A - \lambda B)$.

В случае когда $L(s,\varepsilon)$ регулярен в точке $\varepsilon = 0$, исследование возмущений при $\varepsilon \to 0$ собственных значений $s(\varepsilon)$ и соответствующих собственных векторов $\vec{x}(\varepsilon)$ пучка $L(s,\varepsilon)$ можно свести к хорошо развитой аналитической теории возмущений для матриц вида $D(\varepsilon) = B^{-1}(\varepsilon)A(\varepsilon)$.

Нас будет интересовать поведение при $\varepsilon \to 0$ собственных значений и собственных векторов в предположении, что пучок $L(s,\varepsilon)$ регулярен в некоторой проколотой окрестности точки $\varepsilon = 0$, а в самой точке $\varepsilon = 0$ пучок $L(s,\varepsilon)$ иррегулярен. Иррегулярность пучка $L(s,0)$ в нашем случае означает, что $V = KerA_0 \cap KerB_0 \neq \varnothing$. В связи с этим далее будем считать, что

$$ind(A_0,B_0) = m \tag{30}$$

Пусть $s_k(\varepsilon)$ и $\vec{x_k}(\varepsilon)$ — собственное значение и соответствующий собственный вектор пучка $L(s,\varepsilon)$. Согласно (28), $s_k(\varepsilon)$ является нулем полинома $F(s,\varepsilon)$, следовательно, $s_k(\varepsilon)$ является алгебраической функцией от ε. То же самое справедливо и для собственного вектора $\vec{x_k}(\varepsilon)$, т.е. координаты этого вектора всегда можно выбрать алгебраическими функциями. В силу свойств алгебраических функций существуют пределы (конечные или бесконечные s_k)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s_k(\varepsilon) = s_k, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \vec{x}_k(\varepsilon) = \vec{x}_k,$$

где $\|\vec{x}_k(\varepsilon)\| = 1$.

Введем в рассмотрение подпространства $H_0 = (Ker(A_0 \cap B_0))^\perp$ и $\hat{H}_0 = (Ker(A_0^* \cap B_0^*))^\perp$ и обозначим через P и $\hat{P}$ самосопряженные проекторы на подпространства H_0 и $\hat{H}_0$ соответственно. Далее положим

$$L_{11}(s,\varepsilon) = \hat{P}L(s,\varepsilon)P : H_0 \to \hat{H}_0, \tag{31}$$

$$L_{22}(s,\varepsilon) = (I-\hat{P})L(s,\varepsilon)(I-P) : H_0^\perp \to \hat{H}_0^\perp, \tag{32}$$

$$L_{21}(s,\varepsilon) = (I-\hat{P})L(s,\varepsilon)P : H_0 \to \hat{H}_0^\perp, \tag{33}$$

$$L_{12}(s,\varepsilon) = \hat{P}L(s,\varepsilon)(I-P) : H_0^{\perp} \to \hat{H}_0. \tag{34}$$

При этом оператор $L(s,\varepsilon)$ в подходящем базисе пространств $\mathbb{E}^n = H_0 \oplus H_0^{\perp}$ и $\mathbb{E}^n = \hat{H}_0 \oplus \hat{H}_0^{\perp}$ можно представить в виде блочной матрицы

$$L(s,\varepsilon) = \begin{pmatrix} L_{11}(s,\varepsilon) & L_{12}(s,\varepsilon) \\ L_{21}(s,\varepsilon) & L_{22}(s,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{35}$$

В силу (30), имеем $dimH_0 = dim\hat{H}_0 = m < n$. Следовательно, матрицы $L_{11}(s,\varepsilon)$ и $L_{22}(s,\varepsilon)$ в представлении (35) имеют размеры $m \times m$ и $(n-m)\times(n-m)$ соответственно.

Замечание 1. *Не ограничивая общности, будем считать, что оператор $\hat{P}B_0P : H_0 \to \hat{H}_0$ невырожден. В том случае, когда $rankB_0 < m$, но $rank(A_0 - sB_0) = m$ почти всюду, всегда существует $\mu^* \in \mathbb{C}$ такое, что $rank(B_0 + \mu^* A_0) = m$. Учитывая, что $A_0 - sB_0 = (1+\mu^* s)(A_0 - \frac{s}{1+\mu^* s}(B_0 + \mu^* A_0))$, можно рассматривать операторы вида $\hat{A}_0 + \hat{s}\hat{B}_0$, где $\hat{s} = \frac{s}{1+\mu^* s}$, $\hat{B}_0 = B_0 + \mu^* A_0$, $\hat{A}_0 = A_0$.*

Теперь опишем поведение характеристического определителя $F(s,\varepsilon)$ пучка $L(s,\varepsilon)$ при малых ε.

Теорема 8. *Для характеристического определителя пучка $L(s,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ справедливо следующее представление:*

$$F(s,\varepsilon) = \varepsilon^{\beta}[\det L_{11}(s,0) + l_1(s,\varepsilon)](\sum_{r=0}^{n-m} g_k s^k + l_2(s,\varepsilon)), \tag{36}$$

где $\sum_{k=0}^{n-m} |g_k| \neq 0$, $\beta \geq 0$ и $|l_j(s,\varepsilon)| \to 0$ равномерно по s из любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Доказательство. Будем искать $F(s,\varepsilon)$ в следующем виде

$$F(s,\varepsilon) = \lambda_1(s,\varepsilon)\lambda_2(s,\varepsilon)...\lambda_n(s,\varepsilon), \tag{37}$$

где $\lambda_k(s,\varepsilon)$ — нули многочлена $\det(L(s,\varepsilon) - \lambda I) = 0$.

Для оценки $\lambda_k(s,\varepsilon)$ воспользуемся известной теоремой Гершгорина в следующей формулировке (см. 415 с. в [1]). Каждое собственное значение λ матрицы (35) принадлежит по крайней мере одной из двух областей:

$$\left\|(L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1} \leqslant \|(L_{12}(s,\varepsilon)\|, \tag{38}$$

$$\left\|(L_{22}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1} \leqslant \|(L_{21}(s,\varepsilon)\|. \tag{39}$$

Из вида (2)–(27), пучка $L(s,\varepsilon)$ и $L_{ij}(s,\varepsilon)$, определенных в (31)–(34), вытекают следующие оценки при $k \neq j$

$$\|L_{kj}(s,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon l(s,\varepsilon),$$

где $l(s,\varepsilon)$ равномерно по $s \in \Omega$ ограниченная функция. Пусть C_1 и C_2 такие матрицы, что

$$\frac{1}{\det(L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)} C_1 = (L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}$$

и

$$\frac{1}{\det(L_{22}(s,\varepsilon) - \lambda I)} C_2 = (L_{22}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}.$$

Тогда при любых $s \in \Omega_\delta$, ограниченном $|\lambda|$, и достаточно малых ε справедливы оценки $\|C_k\| \leqslant a \equiv const$. Теперь при $\varepsilon \to 0$ согласно (38) и (39) имеем

$$\left\|(L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1} = \left(\frac{\|C_1\|}{\det(L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)}\right)^{-1} \leqslant \|(L_{12}(s,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon l(\varepsilon, s),$$

$$\left\|(L_{22}(s,\varepsilon)-\lambda I)^{-1}\right\|^{-1} = \left(\frac{\|C_2\|}{\det(L_{22}(s,\varepsilon)-\lambda I)}\right)^{-1} \leqslant \|(L_{21}(s,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon l(\varepsilon,s).$$

Откуда немедленно получаем, что

$$|\det(L_{11}(s,\varepsilon)-\lambda I)+o(1)| \leqslant |\varepsilon|\, a, \tag{40}$$

$$|\det(L_{22}(s,\varepsilon)-\lambda I)+o(1)| \leqslant |\varepsilon|\, a. \tag{41}$$

Таким образом, каждое собственное значение $\lambda_j(s,\varepsilon)$ матрицы $L(s,\varepsilon)$ согласно теореме Гершгорина содержится в одной из областей задаваемых неравенствами (40) или (41).

Пусть теперь $s\in\Omega$ такое, что $\det(L_{11}(s,0))\neq 0$. Тогда при достаточно малых ε области, задаваемые неравенствами (40) и (41), не пересекаются.

Исходя из этого, множество всех собственных значений

$\lambda_1(s,\varepsilon),\lambda_2(s,\varepsilon),...,\lambda_n(s,\varepsilon)$ матрицы $L(s,\varepsilon)$ можно разбить на две группы, а именно: пусть первые m собственных значений $\lambda_k(s,\varepsilon)$ принадлежат объединению областей, удовлетворяющих неравенству (40), а остальные $n-m$ собственных значений $\lambda_k(s,\varepsilon)$ содержатся соответственно в объединении областей (41).

Очевидно, что при $\varepsilon\to 0$

$$\lambda_1(s,\varepsilon)\lambda_2(s,\varepsilon)...\lambda_m(s,\varepsilon) = \det L_{11}(s,0)+l_1(s,\varepsilon), \tag{42}$$

где $l_1(s,\varepsilon)\rightrightarrows 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Поскольку при $\varepsilon\to 0$ $\|L_{22}\|\to 0$, то собственные значения из второй группы, являясь алгебраическими функциями, имеют асимптотику вида

$$\lambda_k(s,\varepsilon) = \varepsilon^{\beta_k}\hat{\lambda}_k(s,\varepsilon), \tag{43}$$

где $\hat{\lambda}_k(s,0)\neq 0$, $\beta_k\in Q_+$.

Обозначим $\beta=\sum_{k=m+1}^{n}\beta_k$ и введем в рассмотрение функцию $g(s,\varepsilon)$ следующим образом:

$$\varepsilon^{\beta}g(s,\varepsilon) = \prod_{k=m+1}^{n}\lambda_k(s,\varepsilon) = \varepsilon^{\beta}\prod_{k=m+1}^{n}\hat{\lambda}_k(s,\varepsilon). \tag{44}$$

Покажем, что $g(s,0)$ является многочленом. Для этого, учитывая (37), (42) и (44), выпишем $F(s,\varepsilon)=\varepsilon^{\beta}g(s,\varepsilon)[\det L_{11}(s,0)+l_1(s,\varepsilon)]$ и сравним с (29). Пусть в (29) k^* — наименьшая степень ε, при котором $f_k^*(s)$ не равна тождественно 0. Тогда легко увидеть, что $\beta=k^*$ и

$$f_k^*(s)\equiv \det L_{11}(s,0)g(s,0),$$

откуда немедленно получаем, что $g(s,0)$ — многочлен. Теперь полагая $g(s,\varepsilon)=g(s,0)+l_2(s,\varepsilon)$, где $l_2(s,\varepsilon)\rightrightarrows 0$, получим доказательство теоремы.

Обозначим

$$F_0(s,\varepsilon)=\varepsilon^{-\beta}F(s,\varepsilon), \tag{45}$$

где $F(s,\varepsilon)$ был определен ранее в (36). Из доказанной теоремы вытекает простое следствие.

Теорема 9. *Пусть $s(\varepsilon)$ конечное при $\varepsilon\to 0$ собственное значение пучка $L(s,\varepsilon)$, тогда его предел $s(\varepsilon)\overset{\varepsilon\to 0}{=}s^*$ является нулем полинома*

$$F_0(s,0)=\det(L_{11}(s,0)(\sum_{k=0}^{n-m}g_k s^k). \tag{46}$$

И обратно, каждый нуль s^* полинома $F_0(s,0)$ является пределом какого-либо собственного значения $s_k(\varepsilon)$ пучка $L(s,\varepsilon)$.

Последнее утверждение устанавливает взаимно однозначное соответствие между нулями полинома $F_0(s,0)$ и множеством собственных значений $s_k(\varepsilon)$ пучка $L(s,\varepsilon)$, имеющих при $\varepsilon \to 0$ конечные пределы.

4.2. Теперь приступим к исследованию МПОСЗ, заданной в (2).

Будем называть МПОСЗ *неопределенной*, если

$$l = \max_k ind(\Delta_k, \Delta_0) < n^m = N. \tag{47}$$

Если $l = N$, но при этом $rank\Delta_0 < N$, тогда исследование МПОСЗ можно свести к случаю $\det(\Delta_0) \neq 0$ с помощью простого преобразования.

В самом деле, для определенности предположим, что

$$l = \max_k ind(\Delta_k, \Delta_0) = ind(\Delta_k, \Delta_0).$$

Тогда существует такое число $\mu^* \in C$, что $rank(\mu^*\Delta_1 + \Delta_0) = l$. Теперь полагая

$$p_k = \frac{q_k}{1 + q_1 s^*}, \quad k = 1, ..., m, \tag{48}$$

в (2) получим новую МПОСЗ относительно вектора управления $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_m)$:

$$(B_{0,k} + q_1(B_{1,k} + s^* B_{0,k}) + q_2 B_{2,k} + ... + q_m B_{1,k})\vec{x}_k = 0. \tag{49}$$

Далее непосредственной проверкой можно убедиться в том, что МПОСЗ для построенного оператора (50) обладает свойством $\det\Delta_0 \neq 0$. Таким образом, случай, когда

$$\max_k ind(\Delta_k, \Delta_0) = n^m,$$

принципиально не отличается от рассмотренного выше случая $\det\Delta_0 \neq 0$.

Пусть теперь

$$l = \max_k ind(\Delta_k, \Delta_0) < n^m = N.$$

При этом, не ограничивая общности, будем считать, что $l = ind(\Delta_1, \Delta_0)$. Далее будем предполагать, что выполнено условие

$$rank\Delta_0 = l.$$

Добиться выполнения этого условия можно с помощью подходящей замены вида (48) исходного вектора управления $\vec{p}$ на новый вектор управления $\vec{q}$.

Теорема 10. *Пусть s^* — конечное собственное значение пучка $\Delta_1 - s^*\Delta_0$, то есть $rank(\Delta_1 - s^*\Delta_0) < ind(\Delta_1, \Delta_0)$, тогда существует такое конечное решение $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ МПОСЗ (2), что $p_1 = s^*$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение возмущенную МПОСЗ

$$\begin{cases} (B_{0,1} - \varepsilon J + p_1(B_{1,1} + \varepsilon I) + p_2 B_{2,1} + ... + p_m B_{m,1}) x_1 = 0, \\ (B_{0,2} - \varepsilon J + p_1 B_{1,2} + p_2(B_{2,2} + \varepsilon I) + ... + p_m B_{m,2}) x_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ (B_{0,m} - \varepsilon J + p_1 B_{1,m} + p_2 B_{2,m} + ... + p_m(B_{m,m} + \varepsilon I)) x_m = 0, \end{cases} \tag{50}$$

и выпишем соответствующую систему прямых спектральных задач.

$$\begin{cases} (\Delta_1(\varepsilon) - p_1(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)) \vec{X}(\varepsilon) = 0, \\ (\Delta_2(\varepsilon) - p_2(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)) \vec{X}(\varepsilon) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\Delta_m(\varepsilon) - p_m(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)) \vec{X}(\varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{51}$$

где $\vec{X}(\varepsilon) = \vec{x}_1(\varepsilon) \otimes \vec{x}_2(\varepsilon) \otimes ... \otimes \vec{x}_m(\varepsilon)$.

Согласно теоремам 4–5, $\det\Delta_0(\varepsilon) \neq 0$ за исключением конечного множества точек, поэтому из теорем 3 и 7 следует, что эти две последние системы эквивалентные.

Поскольку s^* собственное значение пучка $\Delta_1 - s^*\Delta_0$, то согласно теореме 8 среди решений системы (51) найдется такое решение $\vec{X}(\varepsilon) = \vec{x}_1(\varepsilon) \otimes \vec{x}_2(\varepsilon) \otimes ... \otimes \vec{x}_m(\varepsilon)$, $(p_1^*(\varepsilon), p_2^*(\varepsilon), ..., p_m^*(\varepsilon))$, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p_1^*(\varepsilon) = s^*.$$

Пусть при условии $\|\vec{X}(\varepsilon)\|_{H_m} = 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{X}^*(\varepsilon) = \vec{X}^*,$$

тогда очевидно, что $(\Delta_1 - s^*\Delta_0)\vec{X}^* = 0$ и при этом $\vec{X}^* = \vec{x}_1^* \otimes \vec{x}_2^* \otimes ... \otimes \vec{x}_m^*$. В силу аналитичности $\Delta_k(\varepsilon)$, $\vec{X}^*(\varepsilon)$ и $p_1^*(\varepsilon)$ имеем $\Delta_0 \vec{X}^* \neq 0$. Отсюда немедленно следует существование конечных пределов:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p_k^*(\varepsilon) = p_k^*$$

для всех k. Теперь, учитывая существование конечных пределов величин $p_k^*(\varepsilon)$ и $\vec{x}_k(\varepsilon)$, перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$ в системе(50), получим:

$$\begin{cases} (B_{0,1} + p_1^* B_{1,1} + p_2 B_{2,1} + ... + p_m^* B_{m,1})\, x_1^* = 0, \\ (B_{0,2} + p_1^* B_{1,2} + p_2^* B_{2,2} + ... + p_m^* B_{m,2})\, x_2^* = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (B_{0,m} + p_1^* B_{1,m} + p_2^* B_{2,m} + ... + p_m^* B_{m,m})\, x_m^* = 0. \end{cases}$$

Таким образом, построенный нами вектор $\vec{p} = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ является решением МПОСЗ. Теорема доказана.

5. Заключение

С помощью метода, изложенного выше, можно "конструктивно" решать многопараметрические обратные спектральные задачи. Для этого МПОСЗ необходимо привести к эквивалентной системе совместных спектральных задач, а затем уже решать прямую спектральную задачу для матричных пучков. Последняя задача является хорошо изученной и для ее решения существуют эффективные численные методы.

В следующей части работы мы введем понятие регулярных решений МПОСЗ и дадим исчерпывающие для приложений результаты теории МПОСЗ, а также рассмотрим конкретные классы МПОСЗ, возникающих в различных приложениях в технической механике и электродинамике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
2. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* М.: Наука, 1984. 240 с.
3. *Вибрации в технике: Колебания линейных систем* / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
4. Биргер И.А. *Техническая диагностика.* М.: Машиностроение, 1978.
5. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями).* М.: Наука, 1968. 503 с.
6. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. *Определение дифференциального оператора по двум спектрам.* // УМН. 1964. Т. 19. № 2(116). С. 3–63.
7. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию (Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы).* М.: Наука, 1970. 672 с.
8. Юрко В. А. *Обратные спектральные задачи и их приложения.* Саратов: Сарат. педагогич. ин-т. 2001. 499 с.
9. F.M. Atkinson *Multiparameter Eigenvalue Problems. V.1.* Matrices. New York. McGRAW-Hill Book Company inc. 1972
10. Исаев Г.А. *К многопараметрической спектральной теории* // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 229, № 2. С. 284–286.

11. *Приближенное решение операторных уравнений.* Красносельский М.А., Вайненко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. М.: Наука, 1969.
12. Валеев Н.Ф. *Об одной модели управления собственными колебаниями динамических систем* // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2008. Т. 2. С. 45.
13. Валеев Н.Ф., Рабцевич С.А., Нугуманов Э.Р.*О задаче определения параметров граничных условий оператора Штурма-Лиувилля по спектру* // Вестник Самарского государственного университета. 2009. Т. 72. С. 12–20.
14. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. *Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения* // Доклады Академии наук. 2009. Т. 426. № 4. С. 457–460.
15. Валеев Н.Ф. *Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи* // Матем. заметки. 85:6 (2009). С. 940-–943.
16. M.E. Hochstenbach, B. Plestenjak *Backward error, condition numbers, and pseudospectrum for the multiparameter eigenvalue problem* // Linear Algebra Appl. 375 (2003). P. 63-–81.
17. Patrick J. Browne, B.D. Sleeman *Inverse multiparameter eigenvalue problems for matrices* // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1988. 31. 151–155
18. Исаев Г.А. *О сингулярных многопараметрических дифференциальных операторах. Теоремы разложения.* // Математический сборник. 1986. Т. 131(173). №1(9).
19. H. Volkmer *Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorems.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. Lect. Notes Math. № 356. 1988.
20. Tomaz Kosir *Root Vector for Geometrically Simple Multiparametr Eigenvalues.* Integral EquationS and Operator Theory. 48 (2004). P. 365–396.
21. Грэхем М., Глэдвелл Л. *Обратные задачи теории колебаний.* Изд-во РХД, Москва-Ижевск, 2008. 610 с.
22. Хованский А.Г. *Малочлены.* М.: ФАЗИС, 1996. 220 с.
23. Прасолов В.В.*Многочлены.* М.: МЦМНО, 2001. 336 с.
24. Халмош П. *Конечномерные векторные пространства.* М.: Физматгиз, 1963. 263 с.

Нурмухамет Фуатович Валеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `valeevnf@mail.ru`