ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 3-19.

УДК 517.4+519.71

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Н.Ф. ВАЛЕЕВ

Аннотация. Рассматривается задача восстановления параметров линейного оператора по конечному числу собственных значений. Предлагается и обосновывается новая схема ее решения. Метод основан на сведении исходной задачи к задаче о совместном спектре семейства матричных пучков и позволяет найти все решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, динамические системы, управление собственными частотами, математические модели.

1. Введение

Данная статья является первой частью работы, посвященной специальному классу обратных спектральных задач.

Рассматривается задача определения неизвестных параметров линейного оператора по конечному набору точек спектра — многопараметрическая обратная спектральная задача (сокращенно МПОСЗ). Естественными источниками нашей постановки обратной спектральной задачи являются, с одной стороны, классические обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов, а с другой — прикладные задачи управления частотно-резонансными характеристиками различных технических устройств, описываемых линейными динамическими системами, и задачи вычислительной диагностики технических систем по частотам собственных колебаний.

Классическая теория обратных спектральных задач к настоящему времени нашла многочисленные приложения в задачах математической физики, химии и технических наук.

Исследованиями в этом направлении занимались Н. Левинсон, М.Г. Крейн, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, В.А. Садовничий, В.А. Юрко и другие (подробнее см. в [2], [8]).

Тем не менее, классическая теория обратных спектральных задач не в состоянии охватить весь спектр прикладных проблем, в которых требуется по спектру собственных колебаний восстановить свойства объекта. Речь прежде всего идет о тех случаях, когда мы располагаем не полным спектром собственных колебаний объекта, а лишь его конечной частью. К таковым можно отнести задачи, в которых требуется по конечному набору значений собственных колебаний системы найти параметры динамической системы, провести диагностику или идентификацию технической системы или же посредством доступных параметров объекта (динамической системы) придать ей те или иные частотно-резонансные характеристики (см. [3], [5], [12], [14], [21]).

N.F. Valeev, The multiparameter inverse spectral problems for finite-dimensional operators.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП (контракт 02.740.11.0612).

Поступила 5 мая 2010 г.

Все эти задачи, по существу, сводятся к обратным спектральным задачам для линейных операторов, при том необязательно дифференциальных, в которых требуется по конечному числу собственных чисел оператора найти возможные значения неизвестных параметров системы. Такие задачи уместно называть многопараметрическими обратными спектральными задачами — МПОСЗ.

Разумеется, такая формулировка задачи является весьма широкой, в частности, в ней даже не указывается вид зависимости линейного оператора от параметров, не описан класс этих операторов и т.д. Поэтому мы будем рассматривать конкретные, для выработки единых подходов исследования, и в то же время содержательные в плане приложений классы задач.

В данной работе мы рассматриваем МПОСЗ для операторов, действующих в конечномерных пространствах. Обсуждаемые методы исследований, а также результаты, полученные с помощью этих методов, в дальнейшем можно использовать для исследования более широких классов МПОСЗ. Также отметим, что основные результаты этой работы являются новыми и могут быть применены для численных расчетов конкретных задач. В следующей статье мы намерены привести некоторые литературные ссылки с комментариями.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E^n задано семейство m-параметрических операторов вида

$$B(\vec{p},\lambda) = B_0(\lambda) + p_1B_1(\lambda) + p_2B_2(\lambda) + ... + p_{m-1}B_{m-1}(\lambda) + p_mB_m(\lambda),$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m) \in \mathbf{C}^m$, линейные операторы $B_k(\lambda) : E^n \to E^n$ аналитически зависят от спектрального параметра $\lambda \in \mathbf{C}$. При этих условиях число $\lambda \in \mathbf{C}$ будем называть собственным значением оператора $B(\vec{p},\lambda)$, если оператор $[B(\vec{p},\lambda)]^{-1}$ не существует.

Постановка многопараметрической обратной спектральной задачи (МПОСЗ). *Требуется найти возможные значения вектора $\vec{p}$ из пространства $\mathbf{C}^m$, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ являются собственными значениями оператора $B(\vec{p},\lambda)$. При этом набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ будем называть спектральными данными и обозначать $\vec{\lambda}$.*

Сформулированная постановка задачи часто возникает в математических моделях диагностики или идентификации технических систем по ее собственным колебаниям. Таким задачам посвящено большое количество работ, см., например, [21], [4] и библиографию к ним.

Прямое исследование существования решений, их количества и, тем более, построение алгоритмов, гарантирующих нахождение всех ее решений, для системы алгебраических уравнений в общем случае затруднительны. Причиной тому является довольно сложный вид системы полиномиальных уравнений от переменных p_j. В связи с этим для исследования МПОСЗ требуются специальные методы.

Метод исследования, обсуждаемый в данной работе, близок к идеям, изложенным в работах [9], [16], [17], [19], [20], [18]. В этих работах рассматривают так называемую *многоспектральную задачу*, эти задачи возникают при разделении переменных в дифференциальных операторах (см., например, [10], [19]).

Основными результатами данной части работы являются теоремы существования решений МПОСЗ, заданных в конечномерных пространствах, а также метод построения этих решений. Данная статья носит в большей степени вспомогательный характер, далее, в следующей части мы намерены рассмотреть также бесконечномерный случай МПОСЗ и приложения этой теории.

Тем не менее основные результаты, излагаемые здесь, являются новыми и в некоторой степени дополняют результаты, полученные в вышеперечисленных работах.

2. Связь между МПОСЗ и системой совместных прямых спектральных задач

2.1. Пусть в n-мерном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ задан оператор

$$B(\vec{p}, \lambda) = B_0(\lambda) + p_1 B_1(\lambda) + ... + p_m B_m(\lambda), \tag{1}$$

где $\lambda \in C$ — спектральный параметр, $\vec{p} \in C^m$ — вектор управления.

Обозначим $\vec{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ — спектральные данные МПОСЗ. Тогда если $\vec{p} = (p_1, ..., p_m)$ является решением МПОСЗ, то найдутся такие нетривиальные векторы $\vec{x_k} \in \mathbb{E}^n$, что

$$B_0(\lambda_k)\vec{x}_k + p_1 B_1(\lambda_k)\vec{x}_k + ... + p_m B_m(\lambda_m)\vec{x}_k = 0, k = 1, ..., m.$$

Обозначим

$$B_j(\lambda_k) = B_{j,k}, k = 1, ..., m, j = 0, ..., m,$$

теперь МПОСЗ равносильна следующей задаче.

Требуется найти такой вектор $\vec{p} \in C^m$, чтобы каждое из уравнений системы

$$B_{0,k}\vec{x}_k + p_1 B_{1,k}\vec{x}_k + ... + p_m B_{m,k}\vec{x}_k = 0, k = 1, ..., m \tag{2}$$

имело хотя бы одно нетривиальное решение $\vec{x_k} \in \mathbb{E}^n$.

Очевидно, последняя задача эквивалентна системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_1, ..., p_m \in C$, а именно

$$det(B_{0,k} + p_1 B_{1,k} + ... + p_m B_{m,k}) = 0, k = 1, ..., m. \tag{3}$$

Система уравнений (3) представляет собой систему полиномиальных относительно $p_1, ..., p_m \in \mathbb{C}$ уравнений. При этом в общем случае обобщенная степень каждого полинома может принимать значения от 0 до n.

Из общей теории систем нелинейных алгебраических уравнений вытекает, что возможны следующие ситуации:

1) система уравнений (3) не имеет решения,

2) система уравнений (3) имеет

а) только изолированные решения,

б) изолированные и неизолированные решения,

в) только неизолированные решения.

Известно также (см. например [22], [23]), что если система (3) содержит только изолированные решения, то их количество (с учетом алгебраической кратности) будет равно

$$N = \prod_{k=1}^{m} \alpha_k,$$

где α_k — обобщенная степень k-го полинома в (3).

2.2. Наша основная идея построения решений МПОСЗ для оператора (1) состоит в "разделении"переменных p_k, $k = 1, ..., m$ в системе уравнений (3).

Пусть ненулевые векторы $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^m$ и $\vec{p} = (p_1, ..., p_m) \in C^m$ удовлетворяют системе уравнений (2). Каждое уравнение системы (2) скалярно умножим на произвольный вектор $\vec{y_k} \in \mathbb{E}^n$.

Тогда получим систему вида:

$$(B_{k,1}\vec{x}_k, \vec{y}_k)\, p_1 + ... + (B_{k,m}\vec{x}_k, \vec{y}_k)\, p_m = -(B_{0,k}\vec{x}_k, \vec{y}_k), k = 1, ..., m. \tag{4}$$

Обозначим

$$b_{k,j} = (B_{k,j}\vec{x}_k, \vec{y}_k)\,, b_k^0 = -\,(B_{0,k}\vec{x}_k, \vec{y}_k) \tag{5}$$

и выпишем систему (4) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ . & . & . & . \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ . \\ b_m^0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

или сокращенно

$$B\vec{p} = \vec{b}^0.$$

Пусть c_{kj} — алгебраическое дополнение $b_{j,k}$ элемента из матрицы (5). Умножив обе части (6) на матрицу

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1m} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & . & c_{mm} \end{pmatrix},$$

получим

$$\widehat{\Delta}_k = (-1)^k p_k \widehat{\Delta}_0, k = 1, ..., m, \tag{7}$$

где $\widehat{\Delta}_0 = \det(B)$,

$$\widehat{\Delta}_k = det \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,k-1} & b_1^0 & b_{1,k+1} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,k-1} & b_2^0 & b_{2,k+1} & \dots & b_{2,m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_{m,1} & . & b_{m,k-1} & b_m^0 & b_{m,k+1} & . & b_{m,m} \end{pmatrix}.$$

Из вышесказанных рассуждений вытекает следующее простое утверждение.

Теорема 1. *Пусть векторы $\vec{x_k} \in \mathbb{E}^n, k = 1, .., m$ и вектор $\vec{p} = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{C}^m$ удовлетворяют системе уравнений (2). Тогда координаты p_k вектора $\vec{p}$ удовлетворяют системе уравнений (7) при любых $\vec{y_k} \in \mathbb{E}^n, k = 1, .., m$.*

Заметим, что система (7) справедлива при любом наборе $(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_m) \in \mathbb{E}^n$, а величины $\widehat{\Delta}_k = \widehat{\Delta}_k(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m; \vec{y}_1, ..., \vec{y}_m)$ являются при фиксированных $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m$ полилинейными функционалами над пространством

$$V = \underbrace{\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \times ... \times \mathbb{E}^n}_{m}.$$

Если же при этом фиксировать еще и все $\vec{y}_j$, кроме одного $\vec{y}_s$, то $\widehat{\Delta}_k = \widehat{\Delta}_k(\vec{y}_s)$ становится линейным функционалом над $\mathbb{E}^n$. В таких случаях известно (см., например, [24]), что можно сконструировать линейное пространство H_m, над которым $\widehat{\Delta}_k$ будет линейным функционалом.

2.3. Далее опишем структуру пространства H_m, введем необходимые понятия и обозначения. Как правило, в математической литературе обычно ограничиваются описанием тензорного произведения двух пространств, поэтому мы для удобства чтения тоже начнем со случая двух пространств.

Введем в рассмотрение тензорное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y} \in \mathbb{E}^n$.

Пусть в некотором базисе $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n \in \mathbb{E}^n$ рассматриваемые нами векторы имеют вид $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$. Тогда положим

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = (x_1y_1, x_1y_2, ..., x_1y_n, x_2y_1, x_2y_2, ..., x_2y_n, ..., x_ny_1, x_ny_2, ..., x_ny_n).$$

Таким образом, $\vec{Z} = \vec{x} \otimes \vec{y}$ можно представить в виде $\vec{Z} = \begin{pmatrix} x_1\vec{y} \\ x_2\vec{y} \\ . \\ x_m\vec{y} \end{pmatrix}$ и рассматривать как некоторую точку множества $\mathbb{R}^{n^2}$.

Теперь во множестве всех тензорных произведений вида $\vec{x} \otimes \vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}^n$ введем стандартную структуру линейного пространства над числовыми последовательностями $(z_1, z_2, ..., z_{n^2})$ и операцию скалярного произведения, полагая

$$\langle \vec{x} \otimes \vec{y}, \vec{u} \otimes \vec{v} \rangle = (\vec{x}, \vec{u})(\vec{y}, \vec{v}).$$

Построенное линейное пространство называется тензорным пространством, обозначим его $H_2 = \mathbb{E}^n \otimes \mathbb{E}^n$.

Заметим, что полученное пространство является снова линейным евклидовым пространством размерности n^2. В качестве базиса пространства $\mathbb{E}^n \otimes \mathbb{E}^n$ можно рассматривать систему векторов $\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j$.

Перейдем к определению понятия тензорного произведения линейных операторов $A : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ и $B : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, обозначаемого далее $A \otimes B$.

Для этого достаточно определить $A \otimes B$ на базисных векторах $\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j$, положив $(A \otimes B)(\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j) = A\vec{e}_k \otimes B\vec{e}_j$, и далее продолжить действие оператора на остальные элементы по линейности.

Если теперь рассматривать матричное представление в базисе $\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j$ оператора $C = A \otimes B$, то в соответствии с правилом тензорного произведения двух векторов получим блочную матрицу размера $n^2 \times n^2$ следующего вида

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & ... & a_{1,m}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & ... & a_{2,m}B \\ . & . & . & . \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & ... & a_{m,m}B \end{pmatrix}.$$

Далее всюду, когда речь будет идти о координатном или матричном представлении тензорных произведений векторов или операторов(в каком-либо фиксированном базисе) будем всегда придерживаться выше приведенных формул.

По индукции определяются тензорное произведение m экземпляров евклидовых пространств $\mathbb{E}^n$:

$$V = \underbrace{\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \times ... \times \mathbb{E}^n}_{m}.$$

Если $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m \in H_m$ и $\vec{Y} = \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m \in H_m$, то полагая

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = (\vec{x}_1, \vec{y}_1)(\vec{x}_2, \vec{y}_2)...(\vec{x}_m, \vec{y}_m), \tag{8}$$

определяем скалярное произведение в пространстве H_m.

Таким образом, далее через H_m будем обозначать тензорное произведение m экземпляров пространств $\mathbb{E}^n$ со скалярным произведением $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$, определенным формулой (8).

Матричное представление тензорного произведения операторов $A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_m$ определяется тоже по индукции.

При этом заметим, что

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_m)(\vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m) = A_1\vec{x}_1 \otimes ... \otimes A_m\vec{x}_m. \tag{9}$$

Теперь будем рассматривать функционалы $\widehat{\Delta}_k = \widehat{\Delta}_k(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m; \vec{y}_1, ..., \vec{y}_m)$ над евклидовым пространством H_m. Пусть Ω — множество всех перестановок чисел $1, 2, ..., m$. Если $\omega = i_1, i_2, ..., i_m \in \Omega$, положим $\omega(k) = i_k$, а через $I(\omega)$ обозначим количество беспорядков (инверсий) в перестановке ω.

Рассмотрим оператор $\Delta_0 : H_m \to H_m$, заданный следующим образом:

$$\Delta_0 = \sum_{\omega \in \Omega} (-1)^{I(\omega)} B_{\omega(1),1} \otimes B_{\omega(2),2} \otimes ... \otimes B_{\omega(m),m}. \tag{10}$$

Теперь заменяя $B_{k,j}$ на $B_{0,j}$ в формуле (10), определим операторы

$$\Delta_k : H_k \to H_k, k = 1, ..., m. \tag{11}$$

Для удобства иногда будем пользоваться также "развернутой" формой представления Δ_k:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & ... & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & ... & B_{2,m} \\ . & . & . & . \\ B_{m,1} & B_{m,2} & ... & B_{m,m} \end{vmatrix}_{\otimes},$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} B_{1,1} & ... & B_{k-1,1} & B_{0,1} & B_{k+1,1} & ... & B_{m,1} \\ B_{2,1} & ... & B_{k-1,2} & B_{0,2} & B_{k+1,2} & ... & B_{m,2} \\ . & ... & . & . & . & . & . \\ B_{1,m} & ... & B_{k-1,m} & B_{0,m} & B_{k+1,m} & ... & B_{m,m} \end{vmatrix}_{\otimes}.$$

Установим связь между функционалами $\hat{\Delta}_k$ и операторами Δ_k. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любых $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m \in H_m$ и $\vec{Y} = \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m \in H_m$ справедлива формула*

$$\widehat{\Delta}_k = \left\langle \Delta_k \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку все величины Δ_k устроены одинаково, покажем справедливость (12) для $k = 0$.

В формуле (10) рассмотрим какое-либо слагаемое (соответствующее фиксированному ω) $\Delta_0^\omega = B_{\omega(1),1} \otimes B_{\omega(2),2} \otimes ... \otimes B_{\omega(m),m}$.

Тогда

$$\langle \Delta_0^\omega \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \langle (B_{\omega(1),1} \otimes B_{\omega(2),2} \otimes ... \otimes B_{\omega(m),m})\vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m; \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m \rangle.$$

Далее согласно формулам (9), (8) и (4) получим

$$\langle (B_{\omega(1),1}\vec{x}_1 \otimes B_{\omega(2),2}\vec{x}_2 \otimes ... \otimes B_{\omega(m),m})\vec{x}_m; \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m \rangle =$$
$$= (B_{\omega(1),1}\vec{x}_1, \vec{y}_1)(B_{\omega(2),2}\vec{x}_2, \vec{y}_2)...(B_{\omega(m),m}\vec{x}_m, \vec{y}_m) = b_{\omega(1),1} b_{\omega(2),2} ... b_{\omega(m),m}.$$

Теперь очевидно, что

$$\langle \Delta_0 \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum (-1)^{I(\omega)} b_{\omega(1),1} \otimes b_{\omega(2),2} \otimes ... \otimes b_{\omega(m),m} = \widehat{\Delta}_0.$$

Для остальных $k = 1, ...m$ формулы (12) проверяются аналогично. Теорема доказана.

Сформулируем одно из основных утверждений теории МПОСЗ.

Теорема 3. *Пусть ненулевые векторы $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m \in \mathbb{E}^n$ и числа $p_k \in C, k = 1, ..., m$, удовлетворяют системе уравнений (2). Тогда векторы $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m$ и $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, ..., m$ являются решением системы совместных спектральных задач*

$$\begin{cases} (\Delta_1 - p_1\Delta_0)\,\vec{X} = 0, \\ (\Delta_2 + p_2\Delta_0)\,\vec{X} = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \left(\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0\right) \vec{X} = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (\Delta_m + (-1)^m p_m \Delta_0)\,\vec{X} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что если векторы $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m$ и числа $p_k \in \mathbb{C}$ являются решением системы (2), тогда для произвольного набора векторов $\vec{y}_1, ..., \vec{y}_m \in \mathbb{E}^n$ верна система уравнений

$\widehat{\Delta}_k + (-1)^k p_k \hat{\Delta}_0 = 0, k = 1, ..., m.$

Далее из теоремы 2 получаем, что для тензорного произведения, составленного из решений $\vec{x}_k$ системы (2),

$\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m,$

$$\langle (\Delta_k - (-1)^k \Delta_0 \vec{X}), \vec{Y} \rangle = 0, k = 1, ..., m, \tag{14}$$

для любых векторов $\vec{Y} \in H_m$ вида $\vec{Y} = \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m$.

Теперь заметим, что система векторов $\left\{ \vec{Y} = \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2 \otimes ... \otimes \vec{y}_m | \vec{y}_k \in \mathbb{E}^n \right\}$ содержит также базис пространства H_m. Следовательно, соотношения (14) равносильны системе уравнений (13). Теорема 3 доказана.

Теорема 3 фактически сводит обратную спектральную задачу, записанную в виде систем уравнений (2), к системе прямых спектральных задач для операторных пучков $\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0$.

3. Определенная МПОСЗ

В предыдущем пункте мы установили, что если числа $p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*$ являются решением системы алгебраических уравнений

$$det(B_{0,k} + p_1 B_{1,k} + ... + p_m B_{m,k}) = 0, k = 1, ..., m,$$

то эти же числа являются решением системы прямых спектральных задач, то есть найдется разложимый тензор $\vec{X} \in H_m$ такой, что $(\Delta_k + (-1)^k p_k^* \Delta_0)\vec{X} = 0, k = 1, ..., m$.

При этом очевидно, что последняя система является более изученной и, в частности, удобной отправной точкой для разработки методов численного решения МПОСЗ.

Но заметим, что система совместных спектральных задач (13) содержит также неизвестный вектор $\vec{X} \in H_m$. Попытка заменить систему уравнений (13) на систему алгебраических уравнений вида

$$\det(\Delta_k + (-1)^k p_k^* \Delta_0) = 0, k = 1, ..., m$$

наталкивается на очевидные проблемы:

1) операторный пучок $\Delta_k + (-1)^k p_k^* \Delta_0$ может оказаться иррегулярным, т.е. $dim(Ker\Delta_k \cap Ker\Delta_0) > 0$,

2) даже если для всех $k = 1, ..., m, , Ker\Delta_k \cap Ker\Delta_0 = 0$, мы не можем утверждать существование разложимого тензора $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m \in H_m$, удовлетворяющего всем уравнениям

$$(\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0)\vec{X} = 0;$$

и даже если такой вектор $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m$ найдется, обратный переход от системы (13) к системе (2) не очевиден.

В связи с вышесказанным, *МПОСЗ будем называть регулярным или определенным если*

$$\det(\Delta_0) \neq 0.$$

Рассмотрим специальный класс систем уравнений(2), а именно возмущенную систему

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(B_{0,1} - \epsilon J + p_1 \left(B_{1,1} + \epsilon I\right) + p_2 B_{2,1} + ... + p_m B_{m,1}\right) x_1 = 0, \\ \left(B_{0,2} - \epsilon J + p_1 B_{1,2} + p_2 \left(B_{2,2} + \varepsilon I\right) + ... + p_m B_{m,2}\right) x_2 = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \left(B_{0,m} - \varepsilon J + p_1 B_{1,m} + p_2 B_{2,m} + ... + p_m \left(B_{m,m} + \varepsilon I\right)\right) x_m = 0, \end{array} \right. \tag{15}$$

где $\varepsilon \in C, J = diag\left\{\alpha_1, ..., \alpha_n\right\}, \alpha_k > 0, \alpha_k \neq \alpha_j, I$ — единичный оператор.

Из теоремы 3 следует, что $\vec{p} = (p_1, ..., p_m)$ и $\vec{x}_k \in \mathbb{E}^n$ являются решением (иначе говоря совместным спетром) системы совместных спектральных задач

$$(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon))\vec{X}(\varepsilon) = 0, k = 1, ..., m,$$

где

$$\Delta_0(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_{1,1}+\varepsilon I & B_{1,2} & \dots & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2}+\varepsilon I & \dots & B_{2,m} \\ . & . & . & . \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m}+\varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes}, \tag{16}$$

$$\Delta_k(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_{1,1}+\varepsilon J & \dots & B_{k-1,1} & B_{0,1}-\varepsilon J & B_{k+1,1} & \dots & B_{m,1} \\ B_{2,1} & \dots & B_{k-1,2} & B_{0,2}-\varepsilon J & B_{k+1,2} & \dots & B_{m,2} \\ . & \dots & . & . & . & . & . \\ B_{1,m} & \dots & B_{k-1,m} & B_{0,m}-\varepsilon J & B_{k+1,m} & \dots & B_{m,m}+\varepsilon J \end{vmatrix}_{\otimes}. \tag{17}$$

При этом очевидно, что числа $p_k = p_k(\varepsilon), k = 1, ..., m$, векторы $\vec{x}_k(\varepsilon) \in \mathbb{E}^n$, соответственно, вектор $\vec{X} = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes ... \otimes \vec{x}_m$ будут функциями от $\varepsilon \in \mathbb{C}$.

Установим некоторые важные для дальнейшего свойства функций $\vec{x}_k(\varepsilon)$ и $p_k(\varepsilon)$, $k = 1, ..., m$.

Теорема 4. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall \varepsilon, |\varepsilon| > \varepsilon_0, rank(\Delta_0(\varepsilon)) = n^m$, т.е. $det(\Delta_0(\varepsilon) \neq 0)$.*

Доказательство. Разложим оператор $\Delta_0(\varepsilon)$ по степеням ε. Поскольку, согласно формуле (17) Δ_0 устроен так же, как числовой определитель, то легко установить, что

$$\Delta_0(\varepsilon) = \varepsilon^m \underbrace{I \otimes I \otimes ... \otimes I}_{m} + \varepsilon^{m-1} D_1 + ... + \varepsilon D_{m-1} + D_m,$$

где $D_k : H_m \to H_m$ некоторые операторы независимые от ε.

Теперь

$$\det(\Delta_0(\varepsilon)) = det \left[\varepsilon^m \underbrace{I \otimes I \otimes ... \otimes I}_{m} + \varepsilon^{-1} O(1) \right]$$

при $\varepsilon \to \infty$.

Далее получим

$$\det(\Delta_0(\varepsilon)) = \varepsilon^{nm} \left\{ det \left[\underbrace{I \otimes I \otimes ... \otimes I}_{m} \right] + \varepsilon^{-1} O(1) \right\} \tag{18}$$

при $\varepsilon \to \infty$.

Заметим, что $\det \left[\underbrace{I \otimes I \otimes ... \otimes I}_{m} \right] = (\det I)^m = 1$. Теперь из представления (18) вытекает существование искомого ε_0.

Обозначим $\mathcal{E} = \{\varepsilon \in \mathbb{C} | \det \Delta_0(\varepsilon) = 0\}$ множество нулей полинома $det\Delta_0(\varepsilon)$. Таким образом, E состоит (с учетом порядка нулей) из nm чисел $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{nm}$.

Приведем без доказательства очевидное утверждение.

Теорема 5. *Оператор $[\Delta_0(\varepsilon)]^{-1} : H_m \to H_m$ — мероморфная операторозначная функция от ε, множество полюсов которой совпадает с $\mathcal{E}$.*

Все рассматриваемые нами операторы конечномерные и они зависят от ε полиномиально, откуда следует утверждение о характере аналитичности собственных векторов и вектора управления МПОСЗ (16).

Теорема 6. *Пусть $\vec{p} = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{C}^m$ и $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m \in \mathbb{E}^n$ решения системы (21), тогда $p_k(\varepsilon), k = \overline{1, m}$ являются алгебраическими функциями с особыми точками типа полюса (точка ветвления и полюс) из E. Векторы $\vec{x}_k(\varepsilon)$ можно подобрать так, что $\vec{x}_k(\varepsilon)$ будут алгебраическими функциями.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \notin E$. Из теоремы 3 вытекает, что если числа $p_k(\varepsilon)$ и $\vec{x}_k(\varepsilon) \in E^n, k = 1, ..., m,$ — решения системы (15), то вектор

$$\vec{X}(\varepsilon) = \vec{x}_1(\varepsilon) \otimes \vec{x}_2(\varepsilon) \otimes ... \otimes \vec{x}_m(\varepsilon)$$

является совместным собственным вектором операторных пучков

$$(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon))\vec{X}(\varepsilon) = 0, k = 1, ..., m.$$

В свою очередь, при условии $\varepsilon \notin \mathcal{E}$ $\det \Delta_0(\varepsilon) \neq 0$. Следовательно, $p_k(\varepsilon)$ является нулем многочлена $det(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k s \Delta_0(\varepsilon))$.

По определению алгебраических функций, любой нуль $s(\varepsilon)$ указанного многочлена является алгебраической функцией от ε, т.е. все $p_k(\varepsilon)$ — алгебраические функции ε.

Особые точки $p_k(\varepsilon)$ могут возникнуть вследствие наличия у оператора $\Delta_0^{-1}(\varepsilon)\Delta_k(\varepsilon)$ кратных собственных значений — точки ветвления и точек полюса. Тогда $p_k(\varepsilon)$ тоже будут иметь особую точку типа полюса. Ясно, что полюсы операторов $\Delta_0^{-1}(\varepsilon)\Delta_k(\varepsilon)$ содержатся во множестве $\mathcal{E}$.

Отсюда вытекает, что $p_k(\varepsilon)$ имеет особую точку вида $(\varepsilon - \varepsilon^*)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, если только ε^* — полюс оператора $\Delta_0^{-1}(\varepsilon)\Delta_k(\varepsilon)$.

Теперь осталось доказать часть утверждения для $\vec{x}_k(\varepsilon)$. Заметим, поскольку $p_k(\varepsilon)$ — алгебраические функции, то каждая из систем уравнений (15) может быть представлена в виде $\mathcal{B}_k(\varepsilon)\vec{x}_k(\varepsilon) = 0$, где $\mathcal{B}_k(\varepsilon)$ — матрицы с элементами $b_{ij}(\varepsilon)$ — алгебраическими функциями.

Решая эти системы методом Гаусса (а решение существует), мы получим решения $\vec{(x)}_k(\varepsilon)$ в виде алгебраических функций от ε.

Итак, если система (15) имеет решение, то $\vec{p}(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), ..., p_m(\varepsilon))$ и $\vec{x}_k(\varepsilon)$ — алгебраические функции.

Теперь сформулируем и докажем утверждения о существовании решений системы (15).

Система уравнений (15) эквивалентна следующей системе полиномиальных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c} f_1(\vec{p}, \varepsilon) = \det\left(B_{0,1} - \varepsilon J + p_1\left(B_{1,1} + \varepsilon I\right) + p_2 B_{2,1} + ... + p_m B_{m,1}\right) = 0, \\ f_2(\vec{p}, \varepsilon) = \det\left(B_{0,2} - \varepsilon J + p_1 B_{1,2} + p_2\left(B_{2,2} + \varepsilon I\right) + ... + p_m B_{m,2}\right) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_m(\vec{p}, \varepsilon) = \det\left(B_{0,m} - \varepsilon J + p_1 B_{1,m} + p_2 B_{2,m} + ... + p_m\left(B_{m,m} + \varepsilon I\right)\right) = 0. \end{array}\right.$$

Эту систему будем также записывать в виде

$$F(\vec{p}, \varepsilon) = 0. \tag{19}$$

Заметим, что при больших $|\varepsilon| \approx \infty$ систему (19) можно представить в виде:

$$f_k(\vec{p}, \varepsilon) = \varepsilon^n det\left[(p_k I - J + \varepsilon^{-1} D_k(\vec{p}, \varepsilon)\right], k = 1, \bar{m}. \tag{20}$$

При $|\varepsilon| \to \infty$ операторы $D_k(\vec{p}, \varepsilon)$ ограничены по норме равномерно по всем $\vec{p}$ из любого компакта $\Omega \subset \mathbb{C}^m$. Следовательно, "главной" частью системы (19) при $|\varepsilon| \to \infty$ является более простая система уравнений:

$$f_k^0(\vec{p}) = det(p_k I - J), k = 1, \bar{m}, \tag{21}$$

или в операторной форме

$$F^0(\vec{p}) = 0.$$

Система уравнений (21) в развернутой форме имеет вид:

$$f_j^0(\vec{p}) = \prod_{k=1}^{n}(p_j - \alpha_k) = 0, j = 1, \bar{m}. \tag{22}$$

Из (22) вытекает, что $F^0(\vec{p}) = 0$ имеет ровно n^m изолированных решений $p^{*j} = \left(p_1^{*j}, p_2^{*j}, ..., p_m^{*j}\right)$, где p_k^{*j} принимают произвольные значения из множества $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$.

Обозначим через Λ^0 множество всех нулей оператора $F^0(\vec{p})$, а через $\Lambda(\varepsilon)$ множество нулей $F(\vec{p},\varepsilon)$. Из (20) и (21) при $|\varepsilon| \to \infty$ следует, что

$$F(\vec{p},\varepsilon) = \varepsilon^n \left(F^0(\vec{p}) + \varepsilon^{-1} D(\vec{p},\varepsilon)\right), \qquad (23)$$

где $\|D_k(\vec{p},\varepsilon)\| < C(\Omega) < \infty$ для всех $\vec{p}$ из произвольной ограниченной области $\Omega \subset C^m$. Из представления $F(\vec{p},\varepsilon)$ в виде (23) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ — произвольная ограниченная область, $\Lambda^0 \subset \Omega$. Тогда для $\forall \delta > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall |\varepsilon| > \varepsilon_0$*

$$\left\|\Lambda^0 - \Lambda(\varepsilon)\right\| < \delta.$$

Доказательство. Пусть $\vec{p}(\varepsilon)$является произвольным нулем $F(\vec{p},\varepsilon)$. Тогда из теоремы 3 следует, что $\vec{p}(\varepsilon) = (p_1^*, ..., p_m^*)$ удовлетворяет системе уравнений

$$det\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k^*(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right) = 0, k = 1,\bar{}m.$$

Покажем, что $\vec{p}(\varepsilon)$ ограничена при $|\varepsilon| \to \infty$. Заметим, что при $|\varepsilon| \to \infty$

$$\Delta_0(\varepsilon) = \varepsilon^m \left(I \otimes I \otimes ... \otimes I + \varepsilon^{-1} O(1)\right)$$

и $\Delta_k(\varepsilon) = \varepsilon^m O(1)$. Поэтому существует число $R(c)$ такое, что $\left\|\Delta_k(\varepsilon)\Delta_0^{-1}(\varepsilon)\right\| < c \equiv const$ для всех $|\varepsilon| > R(c)$. Отсюда вытекает, что при $|\varepsilon| > R(\varepsilon)$ любое решение системы $F(\vec{p},\varepsilon) = 0$ ограничено, т.е. $\|\vec{p}(\varepsilon)\| < C$.

Из представления (23) вытекает непрерывность оператора $F(\vec{p},\varepsilon)$ по ε в окрестности бесконечности равномерно по $\vec{p} \in \Omega$. Следовательно, нули $\Lambda(\varepsilon)$ оператора $F(\vec{p},\varepsilon)$ при $|\varepsilon| \to \infty$ тоже являются непрерывными и соответственно стремятся к точкам множества Λ^0.

Отсюда и следует существование искомого ε_0 для каждого $\delta > 0$.

Таким образом, уравнение $F(\vec{p},\varepsilon) = 0$ при $|\varepsilon| \to \infty$ имеет ровно n^m изолированных решений.

Каждое решение $\vec{p}(\varepsilon)$ операторного уравнения $F(\vec{p},\varepsilon) = 0$ является алгебраической функцией от ε (теорема 2). Система уравнений (19) эквивалентна системе (15). Это означает, что каждому вектору

$$\vec{p^j}(\varepsilon) = \left(p_1^j(\varepsilon), ..., p_m^j(\varepsilon)\right) \in \Lambda(\varepsilon),$$

удовлетворяющему $F(\vec{p},\varepsilon) = 0$, соответствует набор ненулевых векторов $\vec{x}_1^j(\varepsilon), \vec{x}_2^j(\varepsilon), ..., \vec{x}_m^j(\varepsilon)$ такой, что

$$\left\{\begin{array}{c}
\left(B_{0,1} - \varepsilon J + p_1^j\left(B_{1,1} + \varepsilon I\right) + p_2^j B_{2,1} + ... + p_m^j B_{m,1}\right) x_1^j = 0,\\
\left(B_{0,2} - \varepsilon J + p_1^j B_{1,2} + p_2^j\left(B_{2,2} + \varepsilon I\right) + ... + p_m^j B_{m,2}\right) x_2^j = 0,\\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
\left(B_{0,k} - \varepsilon J + p_1^j B_{1,k} + ... + p_k^j\left(B_{k,k} + \varepsilon I\right) + ... + p_m^j B_{m,2}\right) x_k^j = 0,\\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
\left(B_{0,m} - \varepsilon J + p_1^j B_{1,m} + p_2^j B_{2,m} + ... + p_m^j\left(B_{m,m} + \varepsilon I\right)\right) x_m^j = 0.
\end{array}\right. \qquad (24)$$

Далее решения системы 24 будем обозначать $Z_j = \left\{\vec{p^j}; \vec{x}_1^j, ..., \vec{x}_m^j\right\}$, $\vec{X}^j = \vec{x}_1^j \otimes \vec{x}_2^j \otimes ... \otimes \vec{x}_m^j$, $\tilde{Z}_j = \left\{\vec{p^j}; \vec{X}^j\right\}, j = 1,\bar{}N$.

Теорема 3 утверждает, что любое решение $\tilde{Z}_j = \left\{\vec{p^j}; \vec{X}^j\right\}$ является также решением системы

$$\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k^j(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right)\vec{X}^j = 0, k = 1,\bar{}m. \qquad (25)$$

Теперь сформулируем утверждение, обратное в определенном смысле теореме 3.

Теорема 7. *Пусть в системе уравнений (13)* $det\Delta_0 \neq 0$ *. Тогда решения системы (13) состоят из* $N = n^m$ *совместных собственных векторов вида* $\vec{X}^j = \vec{x}_1^j \otimes \vec{x}_2^j \otimes ... \otimes \vec{x}_m^j$ *и соответствующих собственных значений* p_k^j, $j = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, m}$. *При этом каждый вектор* $\vec{p}^j = \left(p_1^j, ..., p_m^j\right)$ *и соответствующие векторы* $\vec{x}_1^j, ..., \vec{x}_m^j$ *являются решением системы (2).*

Доказательство. Рассмотрим возмущенную систему (15). Согласно теореме 3, каждому решению $p,^j$, $\vec{x}_1^j, ..., \vec{x}_m^j$ системы (15) соответствует решение вида $\vec{X}^j = \vec{x}_1^j \otimes \vec{x}_2^j \otimes ... \otimes \vec{x}_m^j$, $\vec{p}^j = \left(p_1^j, ..., p_m^j\right)$ системы (25). Из леммы 1 следует, что при больших $|\varepsilon| \approx \infty$ система (19), а тогда соответственно и система (24) имеет ровно $N = n^m$ решений.

Поэтому система

$$\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right)\vec{X} = 0$$

согласно теореме 3 имеет не менее чем N решений. Но

$$\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon) : H_m \to H_m,$$

$dim(H_m) = N$. Следовательно, совокупность всех решений каждого уравнения $\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right)\vec{X} = 0$ состоит из N собственных значений $p_k^1, p_k^2, ..., p_k^N$ и соответствующих собственных векторов $\vec{X}^1, \vec{X}^2, ..., \vec{X}^N$. Таким образом, каждое решение системы $\left(\Delta_k(\varepsilon) - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon)\right)\vec{X} = 0$, $k = \overline{1, m}$, состоит только из набора собственных значений $\vec{p}_j = \left(p_1^j, ..., p_m^j\right)$ соответствующих собственных векторов $\vec{X}^j = \vec{x}_1^j \otimes \vec{x}_2^j \otimes ... \otimes \vec{x}_m^j$, которые получены из решений системы (24). Тогда справедливы и (25), причем согласно теореме 6 $\vec{p}^j(\varepsilon)$ и $\vec{X}^j(\varepsilon)$ — алгебраические функции. В (24) и (25) перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$. При этом поскольку $\Delta_0 = \Delta_0(0)$ — невырожденная матрица, $\vec{p}^j(\varepsilon)$ и $\vec{X}^j(\varepsilon)$ непрерывны в точке $\varepsilon = 0$ и имеют конечные однозначные пределы $\vec{p}^j(0)$ и $\vec{X}^j(0)$, эти же пределы будут являться решениями исходной МПОСЗ (2) и соответствующей системы совместных спектральных задач(13). Отсюда и вытекает доказательство теоремы.

Теоремы 3 и 7 при условии, что Δ_0 — невырожденная матрица, сводят решение МПОСЗ к решению системы прямых спектральных задач (13). Заметим, что решение системы прямых спектральных задач эквивалентно нахождению нулей полиномов вида

$$det\left(\Delta_k - (-1)^k p_k(\varepsilon)\Delta_0\right) = 0, k = \overline{1, m}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $det\Delta_0 = 0$. Предварительно исследуем свойства иррегулярных пучков.

4. Неопределенная МПОСЗ

Теперь рассмотрим случай, когда $det\Delta_0 = 0$. Предварительно исследуем свойства иррегулярных пучков.

4.1. В данном разделе мы сформулируем и докажем вспомогательные утверждения, которые будут использованы в последующих разделах статьи. Обозначения данного раздела не связаны с предыдущими разделами данной работы.

В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ рассмотрим однопараметрическое (по параметру $\varepsilon \in \mathbb{C}$) семейство пучков

$$L(s, \varepsilon) = A(\varepsilon) + sB(\varepsilon) : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, \tag{26}$$

где s — спектральный параметр, и далее всюду будем предполагать, что

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m_1} \varepsilon^k A_k, B(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m_2} \varepsilon^k B_k. \tag{27}$$

Прежде чем формулировать изучаемые в данном пункте вопросы, дадим необходимые определения, обозначения, а также приведем некоторые свойства пучков вида (26) и (27). Введем в рассмотрение характеристический определитель изучаемого пучка

$$F(s,\varepsilon)=\det L(s,\varepsilon). \tag{28}$$

Непосредственно из вида пучка $L(s,\varepsilon)$ вытекает, что $F(s,\varepsilon)$ можно представить в виде следующего полинома

$$F(s,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N} f_k(s)\varepsilon^k, \tag{29}$$

где N зависит от рангов матриц B_k и A_j .

Следуя [1], будем говорить, что *пучок $A-sB$ иррегулярный, если* $\det(A-sB)\equiv 0$, *в противном случае будем его называть регулярным.* Очевидно, что условие иррегулярности пучка вида $A-sB$ эквивалентно

$$ind(A,B):=\max_{s\in\mathbb{C}} rank(A-sB)<n.$$

Далее, *число λ^* будем называть собственным значением пучка $A-\lambda B$, если*

$$rank(A-\lambda^* B)<ind(A,B),$$

соответственно, вектор $\vec{x^*}\notin KerA\cap KerB$ при условии, что $(A-\lambda^*B)\vec{x^*}=0$, будем называть собственным вектором.

Вектор $\vec{x}\in KerA\cap KerB$ будем называть вырожденным собственным вектором иррегулярного пучка $(A-\lambda B)$.

В случае когда $L(s,\varepsilon)$ регулярен в точке $\varepsilon=0$, исследование возмущений при $\varepsilon\to 0$ собственных значений $s(\varepsilon)$ и соответствующих собственных векторов $\vec{x}(\varepsilon)$ пучка $L(s,\varepsilon)$ можно свести к хорошо развитой аналитической теории возмущений для матриц вида $D(\varepsilon)=B^{-1}(\varepsilon)A(\varepsilon)$.

Нас будет интересовать поведение при $\varepsilon\to 0$ собственных значений и собственных векторов в предположении, что пучок $L(s,\varepsilon)$ регулярен в некоторой проколотой окрестности точки $\varepsilon=0$, а в самой точке $\varepsilon=0$ пучок $L(s,\varepsilon)$ иррегулярен. Иррегулярность пучка $L(s,0)$ в нашем случае означает, что $V=KerA_0\cap KerB_0\neq\varnothing$. В связи с этим далее будем считать, что

$$ind(A_0,B_0)=m \tag{30}$$

Пусть $s_k(\varepsilon)$ и $\vec{x_k}(\varepsilon)$ — собственное значение и соответствующий собственный вектор пучка $L(s,\varepsilon)$. Согласно (28), $s_k(\varepsilon)$ является нулем полинома $F(s,\varepsilon)$, следовательно, $s_k(\varepsilon)$ является алгебраической функцией от ε. То же самое справедливо и для собственного вектора $\vec{x_k}(\varepsilon)$, т.е. координаты этого вектора всегда можно выбрать алгебраическими функциями. В силу свойств алгебраических функций существуют пределы (конечные или бесконечные s_k)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s_k(\varepsilon)=s_k,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\vec{x}_k(\varepsilon)=\vec{x}_k,$$

где $\|\vec{x}_k(\varepsilon)\|=1$.

Введем в рассмотрение подпространства $H_0=(Ker(A_0\cap B_0))^{\perp}$ и $\hat{H}_0=(Ker(A_0^*\cap B_0^*))^{\perp}$ и обозначим через P и $\hat{P}$ самосопряженные проекторы на подпространства H_0 и $\hat{H}_0$ соответственно. Далее положим

$$L_{11}(s,\varepsilon)=\hat{P}L(s,\varepsilon)P:H_0\to\hat{H}_0, \tag{31}$$

$$L_{22}(s,\varepsilon)=(I-\hat{P})L(s,\varepsilon)(I-P):H_0^{\perp}\to\hat{H}_0^{\perp}, \tag{32}$$

$$L_{21}(s,\varepsilon)=(I-\hat{P})L(s,\varepsilon)P:H_0\to\hat{H}_0^{\perp}, \tag{33}$$

$$L_{12}(s,\varepsilon) = \hat{P}L(s,\varepsilon)(I-P) : H_0^{\perp} \to \hat{H}_0. \tag{34}$$

При этом оператор $L(s,\varepsilon)$ в подходящем базисе пространств $\mathbb{E}^n = H_0 \oplus H_0^{\perp}$ и $\mathbb{E}^n = \hat{H}_0 \oplus \hat{H}_0^{\perp}$ можно представить в виде блочной матрицы

$$L(s,\varepsilon) = \begin{pmatrix} L_{11}(s,\varepsilon) & L_{12}(s,\varepsilon) \\ L_{21}(s,\varepsilon) & L_{22}(s,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{35}$$

В силу (30), имеем $dimH_0 = dim\hat{H}_0 = m < n$. Следовательно, матрицы $L_{11}(s,\varepsilon)$ и $L_{22}(s,\varepsilon)$ в представлении (35) имеют размеры $m \times m$ и $(n-m)\times(n-m)$ соответственно.

Замечание 1. *Не ограничивая общности, будем считать, что оператор $\hat{P}B_0P : H_0 \to \hat{H}_0$ невырожден. В том случае, когда $rankB_0 < m$, но $rank(A_0 - sB_0) = m$ почти всюду, всегда существует $\mu^* \in \mathbb{C}$ такое, что $rank(B_0 + \mu^* A_0) = m$. Учитывая, что $A_0 - sB_0 = (1+\mu^* s)(A_0 - \frac{s}{1+\mu^* s}(B_0 + \mu^* A_0))$, можно рассматривать операторы вида $\hat{A}_0 + \hat{s}\hat{B}_0$, где $\hat{s} = \frac{s}{1+\mu^* s}$, $\hat{B}_0 = B_0 + \mu^* A_0$, $\hat{A}_0 = A_0$.*

Теперь опишем поведение характеристического определителя $F(s,\varepsilon)$ пучка $L(s,\varepsilon)$ при малых ε.

Теорема 8. *Для характеристического определителя пучка $L(s,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ справедливо следующее представление:*

$$F(s,\varepsilon) = \varepsilon^{\beta}[\det L_{11}(s,0) + l_1(s,\varepsilon)](\sum_{r=0}^{n-m} g_k s^k + l_2(s,\varepsilon)), \tag{36}$$

где $\sum_{k=0}^{n-m} |g_k| \neq 0$, $\beta \geq 0$ и $|l_j(s,\varepsilon)| \to 0$ равномерно по s из любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Доказательство. Будем искать $F(s,\varepsilon)$ в следующем виде

$$F(s,\varepsilon) = \lambda_1(s,\varepsilon)\lambda_2(s,\varepsilon)...\lambda_n(s,\varepsilon), \tag{37}$$

где $\lambda_k(s,\varepsilon)$ — нули многочлена $\det(L(s,\varepsilon) - \lambda I) = 0$.

Для оценки $\lambda_k(s,\varepsilon)$ воспользуемся известной теоремой Гершгорина в следующей формулировке (см. 415 с. в [1]). Каждое собственное значение λ матрицы (35) принадлежит по крайней мере одной из двух областей:

$$\left\|(L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1} \leqslant \|(L_{12}(s,\varepsilon)\|, \tag{38}$$

$$\left\|(L_{22}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1} \leqslant \|(L_{21}(s,\varepsilon)\|. \tag{39}$$

Из вида (2)–(27), пучка $L(s,\varepsilon)$ и $L_{ij}(s,\varepsilon)$, определенных в (31)–(34), вытекают следующие оценки при $k \neq j$

$$\|L_{kj}(s,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon l(s,\varepsilon),$$

где $l(s,\varepsilon)$ равномерно по $s \in \Omega$ ограниченная функция. Пусть C_1 и C_2 такие матрицы, что

$$\frac{1}{\det(L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)} C_1 = (L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}$$

и

$$\frac{1}{\det(L_{22}(s,\varepsilon) - \lambda I)} C_2 = (L_{22}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}.$$

Тогда при любых $s \in \Omega_\delta$, ограниченном $|\lambda|$, и достаточно малых ε справедливы оценки $\|C_k\| \leqslant a \equiv const$. Теперь при $\varepsilon \to 0$ согласно (38) и (39) имеем

$$\left\|(L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1} = \left(\frac{\|C_1\|}{\det(L_{11}(s,\varepsilon) - \lambda I)}\right)^{-1} \leqslant \|(L_{12}(s,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon l(\varepsilon, s),$$

$$\left\|(L_{22}(s,\varepsilon)-\lambda I)^{-1}\right\|^{-1}=\left(\frac{\|C_2\|}{\det(L_{22}(s,\varepsilon)-\lambda I)}\right)^{-1}\leqslant\|(L_{21}(s,\varepsilon)\|\leqslant\varepsilon l(\varepsilon,s).$$

Откуда немедленно получаем, что

$$|\det(L_{11}(s,\varepsilon)-\lambda I)+o(1)|\leqslant|\varepsilon|\,a, \tag{40}$$

$$|\det(L_{22}(s,\varepsilon)-\lambda I)+o(1)|\leqslant|\varepsilon|\,a. \tag{41}$$

Таким образом, каждое собственное значение $\lambda_j(s,\varepsilon)$ матрицы $L(s,\varepsilon)$ согласно теореме Гершгорина содержится в одной из областей задаваемых неравенствами (40) или (41).

Пусть теперь $s\in\Omega$ такое, что $\det(L_{11}(s,0))\neq 0$. Тогда при достаточно малых ε области, задаваемые неравенствами (40) и (41), не пересекаются.

Исходя из этого, множество всех собственных значений

$\lambda_1(s,\varepsilon),\lambda_2(s,\varepsilon),...,\lambda_n(s,\varepsilon)$ матрицы $L(s,\varepsilon)$ можно разбить на две группы, а именно: пусть первые m собственных значений $\lambda_k(s,\varepsilon)$ принадлежат объединению областей, удовлетворяющих неравенству (40), а остальные $n-m$ собственных значений $\lambda_k(s,\varepsilon)$ содержатся соответственно в объединении областей (41).

Очевидно, что при $\varepsilon\to 0$

$$\lambda_1(s,\varepsilon)\lambda_2(s,\varepsilon)...\lambda_m(s,\varepsilon)=\det L_{11}(s,0)+l_1(s,\varepsilon), \tag{42}$$

где $l_1(s,\varepsilon)\rightrightarrows 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Поскольку при $\varepsilon\to 0$ $\|L_{22}\|\to 0$, то собственные значения из второй группы, являясь алгебраическими функциями, имеют асимптотику вида

$$\lambda_k(s,\varepsilon)=\varepsilon^{\beta_k}\hat\lambda_k(s,\varepsilon), \tag{43}$$

где $\hat\lambda_k(s,0)\neq 0$, $\beta_k\in Q_+$.

Обозначим $\beta=\sum_{k=m+1}^n\beta_k$ и введем в рассмотрение функцию $g(s,\varepsilon)$ следующим образом:

$$\varepsilon^\beta g(s,\varepsilon)=\prod_{k=m+1}^n\lambda_k(s,\varepsilon)=\varepsilon^\beta\prod_{k=m+1}^n\hat\lambda_k(s,\varepsilon). \tag{44}$$

Покажем, что $g(s,0)$ является многочленом. Для этого, учитывая (37), (42) и (44), выпишем $F(s,\varepsilon)=\varepsilon^\beta g(s,\varepsilon)[\det L_{11}(s,0)+l_1(s,\varepsilon)]$ и сравним с (29). Пусть в (29) k^* — наименьшая степень ε, при котором $f_k^*(s)$ не равна тождественно 0. Тогда легко увидеть, что $\beta=k^*$ и

$$f_k^*(s)\equiv\det L_{11}(s,0)g(s,0),$$

откуда немедленно получаем, что $g(s,0)$ — многочлен. Теперь полагая $g(s,\varepsilon)=g(s,0)+l_2(s,\varepsilon)$, где $l_2(s,\varepsilon)\rightrightarrows 0$, получим доказательство теоремы.

Обозначим

$$F_0(s,\varepsilon)=\varepsilon^{-\beta}F(s,\varepsilon), \tag{45}$$

где $F(s,\varepsilon)$ был определен ранее в (36). Из доказанной теоремы вытекает простое следствие.

Теорема 9. *Пусть $s(\varepsilon)$ конечное при $\varepsilon\to 0$ собственное значение пучка $L(s,\varepsilon)$, тогда его предел $s(\varepsilon)\overset{\varepsilon\to 0}{=}s^*$ является нулем полинома*

$$F_0(s,0)=\det(L_{11}(s,0)(\sum_{k=0}^{n-m}g_ks^k). \tag{46}$$

И обратно, каждый нуль s^* полинома $F_0(s,0)$ является пределом какого-либо собственного значения $s_k(\varepsilon)$ пучка $L(s,\varepsilon)$.

Последнее утверждение устанавливает взаимно однозначное соответствие между нулями полинома $F_0(s,0)$ и множеством собственных значений $s_k(\varepsilon)$ пучка $L(s,\varepsilon)$, имеющих при $\varepsilon \to 0$ конечные пределы.

4.2. Теперь приступим к исследованию МПОСЗ, заданной в (2).

Будем называть МПОСЗ *неопределенной*, если

$$l = \max_k ind(\Delta_k, \Delta_0) < n^m = N. \tag{47}$$

Если $l = N$, но при этом $rank\Delta_0 < N$, тогда исследование МПОСЗ можно свести к случаю $\det(\Delta_0) \neq 0$ с помощью простого преобразования.

В самом деле, для определенности предположим, что

$$l = \max_k ind(\Delta_k, \Delta_0) = ind(\Delta_k, \Delta_0).$$

Тогда существует такое число $\mu^* \in C$, что $rank(\mu^*\Delta_1 + \Delta_0) = l$. Теперь полагая

$$p_k = \frac{q_k}{1 + q_1 s^*}, \quad k = 1, ..., m, \tag{48}$$

в (2) получим новую МПОСЗ относительно вектора управления $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_m)$:

$$(B_{0,k} + q_1(B_{1,k} + s^* B_{0,k}) + q_2 B_{2,k} + ... + q_m B_{1,k})\vec{x}_k = 0. \tag{49}$$

Далее непосредственной проверкой можно убедиться в том, что МПОСЗ для построенного оператора (50) обладает свойством $\det \Delta_0 \neq 0$. Таким образом, случай, когда

$$\max_k ind(\Delta_k, \Delta_0) = n^m,$$

принципиально не отличается от рассмотренного выше случая $\det \Delta_0 \neq 0$.

Пусть теперь

$$l = \max_k ind(\Delta_k, \Delta_0) < n^m = N.$$

При этом, не ограничивая общности, будем считать, что $l = ind(\Delta_1, \Delta_0)$. Далее будем предполагать, что выполнено условие

$$rank\Delta_0 = l.$$

Добиться выполнения этого условия можно с помощью подходящей замены вида (48) исходного вектора управления $\vec{p}$ на новый вектор управления $\vec{q}$.

Теорема 10. *Пусть s^* — конечное собственное значение пучка $\Delta_1 - s^*\Delta_0$, то есть $rank(\Delta_1 - s^*\Delta_0) < ind(\Delta_1, \Delta_0)$, тогда существует такое конечное решение $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ МПОСЗ (2), что $p_1 = s^*$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение возмущенную МПОСЗ

$$\begin{cases} (B_{0,1} - \varepsilon J + p_1 (B_{1,1} + \varepsilon I) + p_2 B_{2,1} + ... + p_m B_{m,1})\, x_1 = 0, \\ (B_{0,2} - \varepsilon J + p_1 B_{1,2} + p_2 (B_{2,2} + \varepsilon I) + ... + p_m B_{m,2})\, x_2 = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (B_{0,m} - \varepsilon J + p_1 B_{1,m} + p_2 B_{2,m} + ... + p_m (B_{m,m} + \varepsilon I))\, x_m = 0, \end{cases} \tag{50}$$

и выпишем соответствующую систему прямых спектральных задач.

$$\begin{cases} (\Delta_1(\varepsilon) - p_1(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon))\, \vec{X}(\varepsilon) = 0, \\ (\Delta_2(\varepsilon) - p_2(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon))\, \vec{X}(\varepsilon) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (\Delta_m(\varepsilon) - p_m(\varepsilon)\Delta_0(\varepsilon))\, \vec{X}(\varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{51}$$

где $\vec{X}(\varepsilon) = \vec{x}_1(\varepsilon) \otimes \vec{x}_2(\varepsilon) \otimes ... \otimes \vec{x}_m(\varepsilon)$.

Согласно теоремам 4–5, $\det \Delta_0(\varepsilon) \neq 0$ за исключением конечного множества точек, поэтому из теорем 3 и 7 следует, что эти две последние системы эквивалентные.

Поскольку s^* собственное значение пучка $\Delta_1 - s^*\Delta_0$, то согласно теореме 8 среди решений системы (51) найдется такое решение $\vec{X}(\varepsilon) = \vec{x}_1(\varepsilon) \otimes \vec{x}_2(\varepsilon) \otimes ... \otimes \vec{x}_m(\varepsilon)$, $(p_1^*(\varepsilon), p_2^*(\varepsilon), ..., p_m^*(\varepsilon))$, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p_1^*(\varepsilon) = s^*.$$

Пусть при условии $\|\vec{X}(\varepsilon)\|_{H_m} = 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{X}^*(\varepsilon) = \vec{X}^*,$$

тогда очевидно, что $(\Delta_1 - s^*\Delta_0)\vec{X}^* = 0$ и при этом $\vec{X}^* = \vec{x}_1^* \otimes \vec{x}_2^* \otimes ... \otimes \vec{x}_m^*$. В силу аналитичности $\Delta_k(\varepsilon)$, $\vec{X}^*(\varepsilon)$ и $p_1^*(\varepsilon)$ имеем $\Delta_0\vec{X}^* \neq 0$. Отсюда немедленно следует существование конечных пределов:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p_k^*(\varepsilon) = p_k^*$$

для всех k. Теперь, учитывая существование конечных пределов величин $p_k^*(\varepsilon)$ и $\vec{x}_k(\varepsilon)$, перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$ в системе(50), получим:

$$\left\{ \begin{array}{c} (B_{0,1} + p_1^* B_{1,1} + p_2 B_{2,1} + ... + p_m^* B_{m,1})\, x_1^* = 0, \\ (B_{0,2} + p_1^* B_{1,2} + p_2^* B_{2,2} + ... + p_m^* B_{m,2})\, x_2^* = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (B_{0,m} + p_1^* B_{1,m} + p_2^* B_{2,m} + ... + p_m^* B_{m,m})\, x_m^* = 0. \end{array} \right.$$

Таким образом, построенный нами вектор $\vec{p} = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ является решением МПОСЗ. Теорема доказана.

5. Заключение

С помощью метода, изложенного выше, можно "конструктивно" решать многопараметрические обратные спектральные задачи. Для этого МПОСЗ необходимо привести к эквивалентной системе совместных спектральных задач, а затем уже решать прямую спектральную задачу для матричных пучков. Последняя задача является хорошо изученной и для ее решения существуют эффективные численные методы.

В следующей части работы мы введем понятие регулярных решений МПОСЗ и дадим исчерпывающие для приложений результаты теории МПОСЗ, а также рассмотрим конкретные классы МПОСЗ, возникающих в различных приложениях в технической механике и электродинамике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
2. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* М.: Наука, 1984. 240 с.
3. *Вибрации в технике: Колебания линейных систем* / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
4. Биргер И.А. *Техническая диагностика.* М.: Машиностроение, 1978.
5. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями).* М.: Наука, 1968. 503 с.
6. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. *Определение дифференциального оператора по двум спектрам.* // УМН. 1964. Т. 19. № 2(116). С. 3–63.
7. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию (Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы).* М.: Наука, 1970. 672 с.
8. Юрко В. А. *Обратные спектральные задачи и их приложения.* Саратов: Сарат. педагогич. ин-т. 2001. 499 с.
9. F.M. Atkinson *Multiparameter Eigenvalue Problems. V.1.* Matrices. New York. McGRAW-Hill Book Company inc. 1972
10. Исаев Г.А. *К многопараметрической спектральной теории* // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 229, № 2. С. 284–286.

11. *Приближенное решение операторных уравнений.* Красносельский М.А., Вайненко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. М.: Наука, 1969.
12. Валеев Н.Ф. *Об одной модели управления собственными колебаниями динамических систем* // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2008. Т. 2. С. 45.
13. Валеев Н.Ф., Рабцевич С.А., Нугуманов Э.Р.*О задаче определения параметров граничных условий оператора Штурма-Лиувилля по спектру* // Вестник Самарского государственного университета. 2009. Т. 72. С. 12–20.
14. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. *Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения* // Доклады Академии наук. 2009. Т. 426. № 4. С. 457–460.
15. Валеев Н.Ф. *Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи* // Матем. заметки. 85:6 (2009). С. 940-–943.
16. M.E. Hochstenbach, B. Plestenjak *Backward error, condition numbers, and pseudospectrum for the multiparameter eigenvalue problem* // Linear Algebra Appl. 375 (2003). P. 63-–81.
17. Patrick J. Browne, B.D. Sleeman *Inverse multiparameter eigenvalue problems for matrices* // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1988. 31. 151–155
18. Исаев Г.А. *О сингулярных многопараметрических дифференциальных операторах. Теоремы разложения.* // Математический сборник. 1986. Т. 131(173). №1(9).
19. H. Volkmer *Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorems.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. Lect. Notes Math. № 356. 1988.
20. Tomaz Kosir *Root Vector for Geometrically Simple Multiparametr Eigenvalues.* Integral EquationS and Operator Theory. 48 (2004). P. 365–396.
21. Грэхем М., Глэдвелл Л. *Обратные задачи теории колебаний.* Изд-во РХД, Москва-Ижевск, 2008. 610 с.
22. Хованский А.Г. *Малочлены.* М.: ФАЗИС, 1996. 220 с.
23. Прасолов В.В.*Многочлены.* М.: МЦМНО, 2001. 336 с.
24. Халмош П. *Конечномерные векторные пространства.* М.: Физматгиз, 1963. 263 с.

Нурмухамет Фуатович Валеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `valeevnf@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 20-26.

УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА

Ю.Г. ВОРОНОВА

Аннотация. В работе показано, что решение обобщенной задачи Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа сводится к решению задачи Гурса для системы такого же вида. Построено точное решение задачи Коши для одной двухкомпонентной системы уравнений.

Ключевые слова: преобразования Лапласа, функция Римана, обобщенные инварианты Лапласа, задача Гурса.

1. Введение

В работах [1], [2] изучены задачи Коши и Гурса для систем уравнений вида

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)u_j(x) + A_i(x), \ \ i = 1, 2, \dots, n,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, и приведена редукция данных задач к интегральным уравнениям. В частных случаях в работе [2] функция Римана построена в явном виде.

В настоящей статье рассматривается обобщенная задача Коши для системы линейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(x,y)\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_{ij}(x,y)\frac{\partial u_j}{\partial y} + c_{ij}(x,y)u_j \right) = f_i(x,y), \tag{1.1}$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Введем понятие обобщенных инвариантов, предложенное в [3]–[8].

Определение 1. *Обобщенными x-инвариантами Лапласа системы (1.1) называются матрицы X_i, заданные рекуррентными формулами*

$$X_1 = H_1 = \frac{\partial}{\partial x}a + ba - c, \quad X_{i+1} = H_{i+1}X_i,$$

$$H_{i+1} = \frac{\partial}{\partial x}(a_i) - \frac{\partial}{\partial y}b + [b, a_i] + H_i, \ \ \frac{\partial}{\partial y}(X_i) + a_iX_i - X_ia = 0.$$

Аналогично, обобщенными y-инвариантами Лапласа системы (1.1) называются матрицы Y_i, заданные рекуррентными формулами

$$Y_1 = K_1 = \frac{\partial}{\partial y}a + ab - c, \quad Y_{i+1} = K_{i+1}Y_i,$$

Yu.G. Voronova, About problem of Koshi for linear hyperbolic system of the equations with zero generalized Laplace invariants.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00440-а).

Поступила 1 апреля 2010 г.

$$K_{i+1} = \frac{\partial}{\partial y}(b_i) - \frac{\partial}{\partial x}a + [a, b_i] + K_i, \quad \frac{\partial}{\partial x}(Y_i) + b_i Y_i - Y_i b = 0,$$

здесь $a_0 = a$, $b_0 = b$.

В статьях [9], [10] приведен алгоритм построения решения задачи Гурса для линейной гиперболической системы уравнений (1.1) с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа, который является обобщением "метода спуска", предложенного в работе [11].

В настоящей работе показано, что решение обобщенной задачи Коши для таких систем уравнений сводится к решению задачи Гурса для системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа. Построено точное решение задачи Коши для линеаризованной цепочки Тоды серии A_2.

2. Метод Римана для линейных гиперболических систем уравнений

В этом параграфе кратко опишем метод Римана для линейных гиперболических систем уравнений. Рассмотрим систему линейных гиперболических уравнений (1.1), записанную в виде

$$L(u) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y)\right] u = f(x,y), \tag{2.1}$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ — неизвестная вектор-функция, $a(x,y) = ||a_{ij}||$, $b(x,y) = ||b_{ij}||$, $c(x,y) = ||c_{ij}||$ — заданные матрицы порядка n, а $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ — вектор-функция. Пусть на плоскости задана кривая $\breve{AB}$, на которой определены функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$. Требуется найти решение системы уравнений (2.1), для которой выполнены условия:

$$u|_{\breve{AB}} = \varphi(x,y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\breve{AB}} = \psi(x,y), \tag{2.2}$$

здесь n — нормаль к кривой $\breve{AB}$.
Будем предполагать, что прямые, параллельные осям координат, пересекают кривую $\breve{AB}$ не более чем в одной точке. Если это условие нарушено, то решение может не существовать. Сопряженная система уравнений для однородной системы $L(u) = 0$ имеет вид:

$$L^*(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (va)}{\partial x} - \frac{\partial (vb)}{\partial y} + vc = 0, \tag{2.3}$$

где $v = (v_1, v_2 \dots, v_n)$ — вектор-функция.

Непосредственным дифференцированием можно проверить, что выполняется следующее тождество:

$$vL(u) - L^*(v)u = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[vu_y - v_y u + 2vau] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[vu_x - v_x u + 2vbu)]. \tag{2.4}$$

Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем через нее характеристики $x = x_0$, $y = y_0$, пересекающие кривую $\breve{AB}$ соответственно в точках P и Q. Обозначим через Ω область, ограниченную этими прямыми и дугой PQ, и через Γ границу Ω.
Интегрируя обе части тождества (2.4) по области Ω и пользуясь формулой Грина, получим

$$\iint\limits_{\Omega}[vL(u) - L^*(v)u]dxdy =$$
$$= \tfrac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma}[vu_y - v_y u + 2vau]dy - [vu_x - v_x u + 2vbu)]dx.$$

Откуда нетрудно получить следующую формулу

$$
\begin{aligned}
&(vu)_{M_0} = \tfrac{(vu)_P+(vu)_Q}{2} + \int\limits_{QM_0} (v_x - vb)udx - \int\limits_{M_0P} (v_y - va)udy + \\
&+\tfrac{1}{2} \int\limits_{\breve{PQ}} [vu_y - (v_y - 2va)u]dy - [vu_x - (v_x - 2vb)u]dx - \\
&- \iint\limits_{\Omega} [vL(u) - L^*(v)u]dxdy.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Далее возьмем $v = v^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, как решение сопряженного уравнения (2.3), для которого выполняются условия:

$$
\begin{aligned}
&1)\ v_x^{(i)} - v^{(i)}b = 0 \text{ на характеристике } QM_0,\\
&2)\ v_y^{(i)} - v^{(i)}a = 0 \text{ на характеристике } M_0P,\\
&3)\ v_j^{(i)}(x_0, y_0) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

здесь $v^{(i)} = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)})$.

Теперь равенство (2.5) с учетом (2.6) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&u_i(x_0, y_0) = \tfrac{(v^{(i)}u)_P + (v^{(i)}u)_Q}{2} + \tfrac{1}{2} \int\limits_{\breve{PQ}} [v^{(i)}u_y - (v_y^{(i)} - 2v^{(i)}a)u]dy - \\
&-[v^{(i)}u_x - (v_x^{(i)} - 2v^{(i)}b)u]dx - \iint\limits_{\Omega} v^{(i)} f dxdy,\ i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Используя условия (2.2), можно определить значение $u_x,\ u_y$ на $\breve{AB}$, а именно:

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\breve{AB}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} cos(s, x) + \psi cos(n, x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\breve{AB}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} cos(s, y) + \psi cos(n, y),
$$

где $\frac{\partial}{\partial s}$ — производная по направлению касательной к кривой $\breve{AB}$.

Решение $v^{(i)}(x, y)$ сопряженного уравнения (2.3), удовлетворяющего условиям (2.6), называется функцией Римана. Таким образом, решение задачи (2.1), (2.2) находится по формуле (2.7), где $v^{(i)}$ — решение краевых задач (2.3), (2.6), $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть теперь существуют $r, s > 0$ такие, что обобщенные инварианты Лапласа системы уравнений (2.1) $X_r = Y_s = 0$. Тогда решение задачи (2.1), (2.2) сводится к следующей задаче

$$
\frac{\partial^2 (v^{(i)T})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (v^{(i)}a)^T}{\partial x} - \frac{\partial (v^{(i)}b)^T}{\partial y} + (v^{(i)}c)^T = 0,
\tag{2.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v^{(i)T}(x, y_0)}{\partial x} = b^T(x, y_0) v^{(i)T}(x, y_0),\\
\frac{\partial v^{(i)T}(x_0, y)}{\partial y} = a^T(x_0, y) v^{(i)T}(x_0, y),\\
v_j^{(i)T}(x_0, y_0) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n,
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

здесь $v^{(i)T}(x, y)$ — столбец неизвестных функций. Система уравнений (2.8) является сопряженной к исходной системе уравнений (2.1), и из [4] следует, что обобщенные инварианты Лапласа системы (2.8)

$$
x_s = Y_s^T = 0, \quad y_r = X_r^T = 0.
$$

В работе [10] для систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа приведен алгоритм построения решения задачи Гурса. Таким образом, считая известным решение задачи (2.8), (2.9), мы получаем решение исходной задачи (2.1), (2.2).

3. Задача Коши для линеаризованной цепочки Тоды серии A_2

В этом параграфе мы приведем пример реализации алгоритма решения обобщенной задачи Коши для системы уравнений вида

$$(g_1)_{xy} + 2e^u g_1 - e^v g_2 = 0, \;\; (g_2)_{xy} - e^u g_1 + 2e^v g_2 = 0, \tag{3.1}$$

$$g|_{AB} = \varphi(x,y), \;\; \frac{\partial g}{\partial n}|_{AB} = \psi(x,y), \tag{3.2}$$

где $g = (g_1, g_2)^T$, u, v — заданные функции, удовлетворяющие системе

$$u_{xy} + 2e^u - e^v = 0, \;\; v_{xy} - e^u + 2e^v = 0.$$

Из выражения (2.7) следует, что решение задачи (3.1), (3.2) определяется по формуле

$$\begin{gathered} g_i(x_0,y_0) = \tfrac{(v^{(i)}g)_P + (v^{(i)}g)_Q}{2} + \tfrac{1}{2} \int\limits_{\breve{PQ}} [v^{(i)} g_y - (v_y^{(i)} - 2v^{(i)}a) g] dy - \\ -[v^{(i)} g_x - (v_x^{(i)} - 2v^{(i)} b) g] dx, \;\; i = 1,2, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $v^{(i)}$, $i = 1,2$ являются решениями следующих краевых задач:

$$v_{xy}^{(1)T} + \begin{pmatrix} 2e^u & -e^u \\ -e^v & 2e^v \end{pmatrix} v^{(1)T} = 0, \;\; v^{(1)T}(x,y_0) = v^{(1)T}(x_0,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$v_{xy}^{(2)T} + \begin{pmatrix} 2e^u & -e^u \\ -e^v & 2e^v \end{pmatrix} v^{(2)T} = 0, \;\; v^{(2)T}(x,y_0) = v^{(2)T}(x_0,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим более подробно задачу (3.4). Система уравнений (3.4) является сопряженной к исходной системе (3.1), и согласно [5] обобщенные инварианты

$$x_3 = Y_3^T = 0, \;\; y_3 = X_3^T = 0.$$

Тогда одно из представлений решения системы уравнений (3.4) имеет следующий вид [9]:

$$\begin{gathered} v^{(1)T}(x,y) = X_1^{-1} \frac{\partial}{\partial x} X_1 \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial x} e^{u+v} w(x) e_1 + W(x) e_2 \right] + \\ + X_1^{-1} \frac{\partial}{\partial y} X_1 \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial y} e^{u+v} \bar{w}(y) e_1 + \bar{W}(y) e_2 \right], \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $X_1 = \begin{pmatrix} -2e^u & e^u \\ e^v & -2e^v \end{pmatrix}$, векторы $e_1 = \binom{1}{-1}$, $e_2 = \binom{1}{1}$, $w(x), W(x), \bar{w}(y), \bar{W}(y)$ — произвольные функции.

Положим в решение (3.6) $y = y_0$:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1^{-1}(x,y_0) \frac{\partial}{\partial x} X_1(x,y_0) \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial x} e^{u+v} w(x) e_1 + W(x) e_2 \right] + \\ + \left(\bar{w}''(y_0) + \bar{w}'(y_0) C_1(x,y_0) + \bar{w}(y_0) C_2(x,y_0) \right) e_1 + \left(\bar{W}'(y_0) + \bar{W}(y_0) C_3(x,y_0) \right) e_2, \end{gathered}$$

здесь $C_1(x,y_0)$, $C_2(x,y_0)$, $C_3(x,y_0)$ — известные функции.

Введем обозначение $r(x,y_0)$:

$$\begin{gathered} r(x,y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\bar{w}''(y_0) + \bar{w}'(y_0) C_1(x,y_0) + \bar{w}(y_0) C_2(x,y_0) \right) e_1 - \\ - \left(\bar{W}'(y_0) + \bar{W}(y_0) C_3(x,y_0) \right) e_2, \end{gathered} \tag{3.7}$$

тогда получим следующую систему уравнений

$$X_1^{-1}(x,y_0) \frac{\partial}{\partial x} X_1(x,y_0) \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial x} e^{u+v} w(x) e_1 + W(x) e_2 \right] = r(x,y_0).$$

Умножим обе части последнего уравнения на $X_1(x,y_0)$ слева и далее проинтегрируем в пределах от x_0 до x:

$$X_1(x,y_0)\left[e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}\frac{\partial}{\partial x}e^{u(x,y_0)+v(x,y_0)}w(x)e_1+W(x)e_2\right]=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}X_1(t,y_0)r(t,y_0)dt+X_1(x_0,y_0)w'(x_0)e_1+$$

$$+X_1(x_0,y_0)(u_x(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0))w(x_0)e_1+X_1(x_0,y_0)W(x_0)e_2.$$

Положим

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=X_1^{-1}(x,y_0)\left(\int\limits_{x_0}^{x}X_1(t,y_0)r(t,y_0)dt+X_1(x_0,y_0)w'(x_0)e_1+\right.$$

$$\left.+X_1(x_0,y_0)(u_1(x_0,y_0)+v_1(x_0,y_0))w(x_0)e_1+X_1(x_0,y_0)W(x_0)e_2\right) \tag{3.8}$$

и тогда получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial x}e^{u(x,y_0)+v(x,y_0)}w(x)+W(x)=p(x,y_0),\\ -e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial x}e^{u(x,y_0)+v(x,y_0)}w(x)+W(x)=q(x,y_0).\end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнение, определим $W(x)$:

$$W(x)=\frac{1}{2}(p(x,y_0)+q(x,y_0)), \tag{3.9}$$

а вычитая из первого уравнение второе, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, из которого найдем функцию $w(x)$:

$$w(x)=\frac{1}{2}e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}\int\limits_{x_0}^{x}e^{u(t,y_0)+v(t,y_0)}(p(t,y_0)-q(t,y_0))dt+$$

$$+e^{u(x_0,y_0)+v(x_0,y_0)}w(x_0)e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}. \tag{3.10}$$

Функции $w(x)$ и $W(x)$ зависят от произвольных постоянных $\bar{w}''(y_0)$, $\bar{w}'(y_0)$, $\bar{w}(y_0)$, $\bar{W}'(y_0)$, $\bar{W}(y_0)$, $w'(x_0)$, $w(x_0)$, $W(x_0)$.

Аналогично, полагая в решение (3.6) $x=x_0$, определим функции $\bar{w}(y)$ и $\bar{W}(y)$:

$$\bar{W}(y)=\frac{1}{2}(\bar{p}(x_0,y)+\bar{q}(x_0,y)), \tag{3.11}$$

$$\bar{w}(y)=\frac{1}{2}e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}\int\limits_{y_0}^{y}e^{u(x_0,t)+v(x_0,t)}(\bar{p}(x_0,t)-\bar{q}(x_0,t))dt+$$

$$+e^{u(x_0,y_0)+v(x_0,y_0)}\bar{w}(y_0)e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}, \tag{3.12}$$

где

$$\begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{q}\end{pmatrix}=X_1^{-1}(x_0,y)\left(\int\limits_{y_0}^{y}X_1(x_0,t)\bar{r}(x_0,t)dt+X_1(x_0,y_0)\bar{w}'(y_0)e_1+\right.$$

$$\left.+X_1(x_0,y_0)(u_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0))\bar{w}(y_0)e_1+X_1(x_0,y_0)\bar{W}(y_0)e_2\right),$$

$$r(x_0,y)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\left(w''(x_0)+w'(x_0)C_4(x_0,y)+w(x_0)C_5(x_0,y)\right)e_1-$$

$$-\left(W'(x_0)+W(x_0)C_6(x_0,y)\right)e_2.$$

Далее воспользуемся условием согласования, для этого в решение (3.6) положим $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left(w''(x_0) + w'(x_0)d_1 + w(x_0)d_2 + \bar{w}''(y_0) + \bar{w}'(y_0)d_4 + \bar{w}(y_0)d_5\right) e_1 + \\ + \big(W'(x_0) + W(x_0)d_3 + \bar{W}'(y_0) + \bar{W}(y_0)d_6\big)\, e_2,$$

где d_i, $i = 1, \ldots, 6$ — известные постоянные.
Выразим отсюда

$$\bar{w}''(y_0) = \frac{1}{2} - w''(x_0) - d_1 w'(x_0) - d_2 w(x_0) - d_4 \bar{w}'(y_0) - d_5 \bar{w}'(y_0),$$

$$\bar{W}'(y_0) = \frac{1}{2} - W'(x_0) - d_3 W(x_0) - d_6 \bar{W}'(y_0).$$

С помощью данных формул выражение для $r(x, y_0)$ (3.7) перепишется в виде

$$r(x, y_0) = \left(w''(x_0) + w'(x_0)d_1 + w(x_0)d_2 + \bar{w}'(y_0)(d_4 - C_1(x, y_0)) + \bar{w}(y_0)(d_5 - \right.\\ \left. - C_2(x, y_0))\right) e_1 + \big(W'(x_0) + W(x_0)d_3 + \bar{W}(y_0)(d_6 - C_3(x, y_0))\big)\, e_2. \qquad (3.13)$$

С учетом условия согласования, искомые функции $W(x)$ и $w(x)$ определяются из формул (3.9) и (3.10), где функции $p(x, y_0)$ и $q(x, y_0)$ находятся из выражения (3.8), а функция $r(x, y_0)$ из формулы (3.13). Функции $\bar{W}(y)$ и $\bar{w}(y)$ определяются из формул (3.11) и (3.12).

В итоге решение задачи (3.4) можно представить в виде

$$v^{(1)T}(x, y) = X_1^{-1} \frac{\partial}{\partial y} X_1 \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial y} e^{u+v} \left\{ -\frac{e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}}{18} \int\limits_{y_0}^{y} \big(2e^{v(x_0,t)} \alpha(x_0, t) + \right.\right.\\ \left.\left. + e^{u(x_0,t)} \beta(x_0, t)\big)\, dt \right\} e_1 - \frac{1}{6} \big(2e^{-u(x_0,y)} \alpha(x_0, y) - e^{-v(x_0,y)} \beta(x_0, y)\big)\, e_2 \right] + \\ + \left(G_1(x, y) w''(x_0) + G_2(x, y) w'(x_0) + G_3(x, y) w(x_0) + G_4(x, y) \bar{w}'(y_0) + G_5(x, y) \times \right.\\ \left. \times \bar{w}(y_0)\right) e_1 + \big(G_6(x, y) W'(x_0) + G_7(x, y) W(x_0) + G_8(x, y) \bar{W}(y_0)\big)\, e_2,$$

здесь $G_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, 8$ — известные функции, а

$$\alpha(x_0, y) = 2u_x(x_0, y) + v_x(x_0, y) - 2u_x(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0),$$

$$\beta(x_0, y) = 2v_x(x_0, y) + u_x(x_0, y) - 2v_x(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0).$$

В силу единственности решения задачи Гурса все функции $G_i(x, y) \equiv 0$,
$i = 1, \ldots, 8$ и решение задачи (3.4) примет вид

$$v^{(1)T}(x, y) = X_1^{-1} \frac{\partial}{\partial y} X_1 \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial y} e^{u+v} \left\{ -\frac{e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}}{18} \int\limits_{y_0}^{y} \big(2e^{v(x_0,t)} \alpha(x_0, t) + \right.\right.\\ \left.\left. + e^{u(x_0,t)} \beta(x_0, t)\big)\, dt \right\} e_1 - \frac{1}{6} \big(2e^{-u(x_0,y)} \alpha(x_0, y) - e^{-v(x_0,y)} \beta(x_0, y)\big)\, e_2 \right]. \qquad (3.14)$$

Аналогично находится решение задачи (3.5):

$$v^{(2)T}(x, y) = X_1^{-1} \frac{\partial}{\partial y} X_1 \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial y} e^{u+v} \left\{ \frac{e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}}{18} \int\limits_{y_0}^{y} \big(e^{v(x_0,t)} \alpha(x_0, t) + \right.\right.\\ \left.\left. + 2e^{u(x_0,t)} \beta(x_0, t)\big)\, dt \right\} e_1 + \frac{1}{6} \big(e^{-u(x_0,y)} \alpha(x_0, y) - 2e^{-v(x_0,y)} \beta(x_0, y)\big)\, e_2 \right]. \qquad (3.15)$$

Тогда решение обобщенной задачи Коши (3.1), (3.2) находится из выражения (3.3), где $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ определяются из формул (3.14), (3.15).

Автор выражает благодарность Жиберу А.В. за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, вып 9. С. 1614–1622.
2. Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными* // Изв. вузов. Матем. 2007. Т. 3. С. 12–21.
3. Жибер А.В., Соколов В.В.*Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. 2001. Т. 56, вып 1. С. 63–106.
4. Жибер А.В., Старцев С.Я. *Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений* // Математ. заметки. 2003. Т. 74, вып 6. С. 848–857.
5. Гурьева А.М., Жибер А.В.*Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды* // ТМФ. 2004. Т. 138, вып 3. С. 401–421.
6. J.M. Anderson, N. Kamran *The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane* // Duke. Math. J. 1997. V.87, №2. P.265-319.
7. Старцев С.Я. *О построении симметрий систем уравнений лиувиллевского типа* // Труды международной конференции. Орел: ОГУ, 2006. Т. 1. С. 117–122.
8. Жибер А.В., Соколов В.В., Старцев С.Я. *Нелинейные гиперболические системы уравнений лиувиллевского типа* // Международная конференция "Тихонов и современная математика": тезисы докладов. М.: МГУ, 2006. С. 305–306.
9. Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. *О задаче Гурса для гиперболической системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, вып 3(21). С. 136–144.
10. Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. *Алгоритм построения общего решения n–компонентной гиперболической системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа и краевые задачи* // Уфимский математ. журнал. 2009. Т. 1, вып 3. С. 28–45.
11. Лезнов А.Н., Шабат А.Б. *Условия обрыва рядов теории возмущений* // Интегрируемые системы. БФАН СССР. 1982. С. 34–44.

Юлия Геннадьевна Воронова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: mihaylovaj@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 27-40.

УДК 517.5

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ЛАКУНАРНЫЕ В СМЫСЛЕ ФЕЙЕРА

А.М. ГАЙСИН, Ж.Г. РАХМАТУЛЛИНА

Аннотация. Изучаются наиболее часто используемые в теории целых функций и рядов экспонент характеристики распределения положительных неограниченно возрастающих последовательностей.
Доказаны эквивалентные утверждения, интерпретирующие заданную характеристику.

Ключевые слова: целые функции, ряды экспонент, индекс конденсации, считающая функция.

1. Введение

Пусть $\{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}<\infty\,.$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{p_n\}$ имеет лакуны Фейера. Аналогично, целая функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

имеет лакуны Фейера, если последовательность $S(f)=\{n\geqslant 1\colon c_n\neq 0\}$ имеет лакуны Фейера.

Хорошо известно, что целая функция с лакунами Фейера принимает каждое комплексное значение бесконечно много раз [1]. При некоторых дополнительных условиях на концентрацию последовательности $\{p_n\}$ у соответствующей целой функции появляется ряд других интересных свойств, например, хорошее асимптотическое поведение на вещественной оси (см., например, в [2]).

Здесь будут рассматриваться более общие последовательности $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$, удовлетворяющие условию

$$S_\Lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty\,. \tag{1}$$

В этом случае будем также говорить, что данная последовательность имеет лакуны Фейера.

Отметим ряд фактов, непосредственно связанных с условием (1).

Пусть I — любой отрезок, не параллельный мнимой оси. Для того, чтобы система экспонент $E_\Lambda=\{e^{\lambda z}\}_{\lambda\in\Lambda}$ была не полна в $C(I)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

A.M. Gaisin, Zh.G. Rakhmatullina, Real Sequences with Fejér Gaps.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00779-а), НШ-3081-2008.1.
Поступила 31 марта 2010 г.

условие (1) (если I — отрезок мнимой оси, неполнота системы E_Λ в $C(I)$ может иметь место и при $S_\Lambda = \infty$ [3]) [4].

Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it) \tag{2}$$

— ряд Дирихле, сходящийся во всей комплексной плоскости. Если $F \not\equiv 0$, то из (1) следует, что $\sup\limits_{\sigma \in \mathbb{R}_+} |F(\sigma)| = \infty$ [5].

Предположим дополнительно, что

$$\int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2}\, dt < \infty\,, \tag{3}$$

где $c(t) = \max\limits_{\lambda_n \leqslant t} q_n,\ q_n = -\ln|g'(\lambda_n)|$,

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{4}$$

Справедливы утверждения:

1. Для того, чтобы для любой функции F вида (2) при $\sigma \to \infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой плотности имело место асимптотическое равенство
$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln|F(\sigma)|\,,$$
необходимо [2] и достаточно [6], чтобы выполнялись условия (1) и (3).
2. Пусть выполняется условие (3). Если
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \ln\frac{\lambda_n}{n} < \infty\,, \tag{5}$$
то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества нулевой плотности [6]
$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \min_{|t| \leqslant h} |F(\sigma + it)|\,.$$
Здесь $M_F(\sigma) = \sup\limits_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$.

Цель статьи — в более простых терминах дать интерпретацию наиболее часто встречающимся в подобных утверждениях характеристикам распределения последовательности Λ.

2. Предварительные сведения

Приведем все основные определения и обозначения, необходимые в дальнейшем.

Пусть L — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $l = l(x)$ таких, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$ (здесь и далее символы $\uparrow$ и $\downarrow$ означают соответственно возрастание и убывание),

$$W = \left\{ w \in L\colon \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\, dx < \infty \right\}, \quad \Omega = \left\{ w \in W\colon \frac{w(x)}{x} \downarrow \text{ при } x \to \infty \right\}.$$

Введем в рассмотрение также множество

$$W_l = \left\{ w \in W\colon \int_1^{\infty} \frac{w_l(x)}{x^2}\, dx < \infty\,,\ \text{где } w_l(x) = w(x) \ln^+ \frac{x}{w(x)} \right\},\ a^+ = \max\{0, a\}.$$

В статье наряду с W и W_l будут использованы символы W_m и W_{lm} для обозначения классов неубывающих (не обязательно непрерывных) на $\mathbb{R}_+$ функций, для которых конечны соответствующие интегралы (они те же, что и для классов W и W_l).

Пусть $n(t)$ — считающая функция последовательности Λ (число точек λ_n, не превосходящих t). Так что $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Заметим, что данная функция неубывающая и непрерывна справа. Наряду с $n(t)$ обычно рассматривается и функция

$$N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}\, dx\,.$$

Через $G = \{\omega\}$ будем обозначать семейства полуинтервалов ω вида $[\,a,\, b)$. Считаем, что длина $|\omega|$ каждого полуинтервала ω из G положительна и конечна. Всякая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ порождает целочисленную считающую меру

$$\mu_\Lambda(\omega) = \sum_{\lambda_j \in \omega} 1\,, \quad \omega \in G\,.$$

Пусть μ_M — аналогичная мера, порожденная последовательностью $M = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$. Тогда включение $\Lambda \subset M$ означает, что $\mu_\Lambda(\omega) \leqslant \mu_M(\omega)$ для любого $\omega \in G$.

Пусть $J = \{\omega_j\}_{j=-1}^{\infty}$ система полуинтервалов ω_j, где $\omega_{-1} = [\,0,\, 1)$, $\omega_j = [\,2^j,\, 2^{j+1})$ $(j \geqslant 0)$, $\omega_j = \varnothing$ при $j < -1$. Через Λ' обозначим какую-нибудь подпоследовательность Λ. Для любого $\lambda \in \Lambda'$ найдется полуинтервал $\omega_k \in J$, содержащий λ. Обозначим $\omega'_k = \omega_{k-1} \cup \omega_k \cup \omega_{k+1}$ $(\lambda \in \omega_k)$. Пусть $J' = \{\omega'_k\}_{\lambda \in \Lambda'}$. Ясно, что в системе J' каждый полуинтервал ω'_k может пересекаться не более, чем с четырьмя полуинтервалами из J'.

Будем говорить, что Λ' является l-регулярной подпоследовательностью последовательности Λ, если существует функция $w \in W_l$ такая, что для любого полуинтервала $\omega \in J'$

$$\mu_\Lambda(\omega) \leqslant w\Bigl(\frac{|\omega|}{2}\Bigr)\,,$$

$|\omega|$ — длина ω, $\mu_\Lambda(\omega)$ — число точек Λ, попавших в ω.

Пусть g — целая функция экспоненциального типа, определенная формулой (4), которая, очевидно, имеет минимальный тип при порядке единица. Так как $g(0) = 1$, то согласно известной теореме Йенсена

$$N(r) \equiv \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln|g(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \ln M_g(r)\,,$$

где $M_g(r) = \max\limits_{|z|=r} |g(z)|$. Отсюда следует, что $n(r) \leqslant N(er) = \ln M_g(er)$, и (см. также в [7], гл. I, §1.10)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_g(r)}{r} = 0\,.$$

Далее, условие (1) равносильно сходимости интеграла [8] (гл. I, §1, следствие из теоремы 1.1.6)

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln M_g(r)}{r^2}\, dr\,.$$

Так как

$$\sum_{\lambda_n\leqslant R}\frac{1}{\lambda_n}=\int\limits_0^R\frac{dn(t)}{t}=\frac{n(R)}{R}+\int\limits_0^R\frac{n(t)}{t^2}\,dt=$$

$$\frac{n(R)}{R}+\int\limits_0^R\frac{dN(t)}{t}=\frac{n(R)}{R}+\frac{N(R)}{R}+\int\limits_0^R\frac{N(r)}{r^2}\,dr\,,$$

то в предположении (1)

$$\int\limits_0^\infty\frac{n(r)}{r^2}\,dr=\int\limits_0^\infty\frac{N(r)}{r^2}\,dr=S_\Lambda<\infty\,. \tag{6}$$

Таким образом, при условии (1) функции $n(r)$, $N(r)$ и $\ln M_q(r)$ принадлежат одному классу сходимости [7] (гл. I, §1.7).

В дальнейшем нам понадобится следующая элементарная

Лемма 1. *Справедливы утверждения:*

1) *если* $|a|\geqslant 1$, *то* $\ln(1+u^2)\leqslant a^2\ln\Bigl(1+\dfrac{u^2}{a^2}\Bigr)$ *для всех* $u\in\mathbb{R}$;

2) *если* $|a|\leqslant 1$, *то* $a^2\ln\Bigl(1+\dfrac{u^2}{a^2}\Bigr)\leqslant\ln(1+u^2)$ *для всех* $u\in\mathbb{R}$;

3) *функция* $\varphi(u)=u\ln\dfrac{a}{u}$ $(a>0)$ *возрастает при* $0<u<\dfrac{a}{e}$.

Утверждения 1, 2 есть простая переформулировка известного неравенства Бернулли [9]:
а) если $x\geqslant -1$ и $0<\alpha\leqslant 1$, то $(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x$;
б) если же $\alpha<0$ или $\alpha\geqslant 1$, то $(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$.

Третье утверждение проверяется непосредственно.

3. Основные свойства характеристик распределения

Пусть Λ — последовательность, удовлетворяющая условию Фейера (1). Справедлива

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

а) $S_{\Lambda,\,l}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}\ln\dfrac{\lambda_n}{n}<\infty$;

б) $I_\Lambda(n)=\int\limits_0^\infty\dfrac{n(t)}{t^2}\ln\dfrac{t}{n(t)}\,dt<\infty$;

в) $I_\Lambda(N)=\int\limits_0^\infty\dfrac{N(t)}{t^2}\ln\dfrac{t}{N(t)}\,dt<\infty$;

г) $I_\Lambda(w)=\int\limits_1^\infty\dfrac{w(t)}{t^2}\ln\dfrac{t}{w(t)}\,dt<\infty$, *где* $w(t)=\ln M_g(t)$.

Данное утверждение не новое (см., например, в [6], [10]). Здесь приведем лишь краткое обоснование импликаций с уточнением некоторых оценок.

1°. Равносильность а и б. Проверяется, что для любого $n\geqslant 1$

$$I_n=\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\frac{n(t)}{t^2}\ln\frac{t}{n(t)}\,dt=n\left(\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}-\frac{\ln\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}}\right)-(n-n\ln n)\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\,,$$

отсюда

$$I_\Lambda(n)=\sum_{n=1}^{\infty}I_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}-\frac{c_n}{\lambda_n}\right),$$

где $c_1=1$, $c_n=1-\ln\dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$. Следовательно, $I_\Lambda(n)=S_{\Lambda,l}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_n+\ln n}{\lambda_n}$. Но по формуле Стирлинга при больших значениях n

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}e^{\theta(n)}\,,\quad |\theta(n)|<\frac{1}{12n}\,.$$

Отсюда следует, что $c_n+\ln n=o(1)$ при $n\to\infty$. Значит,

$$|I_\Lambda(n)-S_{\Lambda,l}|\leqslant \operatorname{const} S_\Lambda<\infty\,,$$

что означает эквивалентность а и б.

2°. Из г следует в, из в следует б. Действительно, согласно неравенству Йенсена

$$n\Big(\frac{t}{e}\Big)\leqslant N(t)\leqslant w(t)\,,\quad w(t)=\ln M_g(t)\,. \tag{7}$$

Значит, учитывая утверждение 3 леммы 1, при $t\geqslant t_0$ получаем, что

$$n\Big(\frac{t}{e}\Big)\ln\frac{t}{n(\frac{t}{e})}\leqslant N(t)\ln\frac{t}{N(t)}\leqslant w(t)\ln\frac{t}{w(t)}\,.$$

Отсюда все и следует.

3°. Из б следует в. Так как согласно (7) $n(\frac{t}{e})\leqslant N(t)$, достаточно доказать сходимость интеграла

$$J_1=\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\frac{N(t)}{t^2}\ln\frac{t}{n(t)}\,dt=\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\frac{n(x)}{x}\Bigg(\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{t^2}\ln\frac{t}{n(t)}\,dt\Bigg)\,dx\,.$$

Пользуясь определением функции $n(t)$, в [10] показано, что

$$J_2=\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{t^2}\ln\frac{t}{n(t)}\,dt\leqslant\frac{1}{x}+\frac{\ln\frac{x}{n(x)}}{x}\quad (x\geqslant\lambda_1)\,.$$

Следовательно, учитывая (6), получаем, что

$$J_1\leqslant S_\Lambda+I_\Lambda(n)<\infty\,.$$

4°. Из в следует г. Для $t\geqslant 0$ имеем

$$w(t)=\int\limits_{0}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{t^2}{x^2}\Big)\,dn(x)\,.$$

Отсюда, интегрируя по частям и оценивая сверху интеграл, который берется по отрезку $[\,0,\,2t]$, получаем, что

$$w(t)\leqslant 2N(2t)+2\int\limits_{2t}^{\infty}K(x,\,t)\,dx=2N(2t)+2A\,,$$

где $K(x,\,t)=\dfrac{n(x)}{x}\dfrac{t^2}{x^2+t^2}$. Но

$$A=\sum_{j=2}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{2^{j-1}t}^{2^j t}K(x,\,t)\,dx\Bigg)\leqslant\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{4^{j-1}}\int\limits_{2^{j-1}}^{2^j}\frac{n(x)}{x}\,dx\,,$$

значит,

$$w(t) \leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{4^{j-1}}\int\limits_0^{2^j t}\frac{n(x)}{x}\,dx = 8\sum_{j=1}^{\infty}\frac{N(2^j t)}{4^j}\,,$$

следовательно,

$$I_\Lambda(w) \leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{4^j}\left(\int\limits_1^{\infty}\frac{N(2^j t)}{t^2}\ln\frac{t}{w(t)}\,dt\right).$$

Отсюда после замены переменной $\tau = 2^j t$ получим оценку, которую запишем в виде

$$I_\Lambda(w) \leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\int\limits_{2^j}^{\infty}\frac{N(\tau)}{\tau^2}\ln\frac{2^j\tau}{4^j w\left(\frac{\tau}{2^j}\right)}\,d\tau\right). \tag{8}$$

Воспользуемся теперь леммой 1, полагая $a = 2^j$. Тогда

$$4^j\ln\left(1+\frac{u^2}{4^j}\right) \geqslant \ln(1+u^2) \quad (u \geqslant 0)\,.$$

Следовательно,

$$4^j w\left(\frac{\tau}{2^j}\right) \geqslant w(\tau) \geqslant N(\tau)\,.$$

Учитывая (6) и последнюю оценку, из (8) имеем

$$I_\Lambda(w) \leqslant 8I_\Lambda(N) + 8\ln 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^j}S_\Lambda < \infty\,.$$

Значит, из б следует в, и все доказано.

Полезным доплнением к теореме 1 является

Теорема 2. *Верны утверждения:*

1. *Функция w принадлежит W (или W_m) тогда и только тогда, когда функция $Aw(Bt)+C$ принадлежит W (или W_m). Здесь A, B, C — положительные и конечные постоянные. Аналогичное утверждение справедливо и для класса W_l (или W_{lm});*
2. *Функция $w \in L$ принадлежит классу W (или W_m) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w(2^j)}{2^j} < \infty\,.$$

Аналогичное утверждение верно и для класса W_l (или W_{lm});

3. *Для любой функции $w \in L$ интегралы*

$$J(w) = \int\limits_1^{\infty}\frac{w(x)}{x^2}\,dx\,, \qquad J(N_w) = \int\limits_1^{\infty}\frac{N_w(x)}{x^2}\,dx\,,$$

а также интегралы $I_l(w)$ и $I_l(N_w)$ сходятся или расходятся попарно одновременно. Здесь $I_l(\psi) = J(\psi_l)$, $\psi_l(x) = \psi(x)\ln^+\dfrac{x}{\psi(x)}$ $(\psi \in L)$,

$$N_w(x) = \int\limits_{\mu_1}^{x}\frac{w(t)}{t}\,dt\,, \quad \mu_1 = \min\{t\colon w(t) \geqslant 1\}\,.$$

4. *Каждое из условий а–г теоремы 1 эквивалентно утверждению: существует функция $w \in W_l$ такая, что*

$$\mu_\Lambda(\omega_j) \leqslant w(|\omega_j|) \quad (j \geqslant -1)\,,$$

где $\mu_\Lambda(\omega_j)$ — число точек $\lambda \in \Lambda$ из полуинтервала ω_j, где $\omega_{-1} = [0,\,1)$, $\omega_j = [2^j,\,2^{j+1})$ при $j \geqslant 0$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 очевидны. В 2 следует только учесть оценки

$$\frac{w(2^j)}{2^j} = 2w(2^j)\int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{dt}{t^2} \leqslant 2\int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{w(t)}{t^2}\,dt \leqslant 2\frac{w(2^{j+1})}{2^{j+1}}\,.$$

Предложение 3 есть следствие теоремы 1. Действительно, для любой функции $w \in L$ положим $\mu(t) = [w(t)]$ ($[a]$ — целая часть числа a). Тогда $\mu(t)$ — считающая функция последовательности $\{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, где μ_n — корень уравнения $w(t) = n$. Так как $|w(t) - \mu(t)| \leqslant 1$, $|N_w(t) - N_\mu(t)| \leqslant \ln\frac{t}{\mu_1}$, то все следует из теоремы 1 и свойства 1 данной теоремы.

Наконец, докажем 4. Пусть, например, выполняется условие б теоремы 1, то есть $I_\Lambda(n) < \infty$. Тогда найдется функция $w_1 \in L$ такая, что $n(t) \leqslant w_1(t) \leqslant n(t) + 1$. Так что $I_l(w_1) < \infty$. Положим $w(t) = w_1(2t)$, тогда $I_l(w) < \infty$, и $\mu(\omega_j) \leqslant n(2^{j+1}) \leqslant w(2^j) = w(|\omega_j|)$ $(|\omega_j| = 2^j)$. Ясно, что данная оценка верна для всех $j \geqslant -1$. В силу свойства 3 леммы 1 и утверждения 1 данной теоремы заключаем, что $I_l(w) < \infty$, то есть $w \in W_l$.

Обратно, пусть $\mu_\Lambda(\omega_j) \leqslant w(|\omega_j|)$ $(j \geqslant -1)$, $w \in W_l$, тогда

$$n(2^m) = \sum_{j=1}^{m} \mu_\Lambda(\omega_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} w(2^j) \leqslant \int\limits_1^{m+1} w(2^t)\,dt = \frac{1}{\ln 2}\int\limits_2^{2^{m+1}} \frac{w(x)}{x}\,dx\,.$$

Следовательно, $n(2^m) \leqslant c\,N_w(2^{m+1})$, $c = \frac{1}{\ln 2}$. Значит (это следует из леммы 1),

$$n(2^m)\ln\frac{2^m}{n(2^m)} \leqslant c\,N_w(2^{m+1})\ln\frac{2^{m+1}}{2c\,N_w(2^{m+1})}\,.$$

Так как $I_l(w) < \infty$, то согласно предыдущему свойству $I_\Lambda(n) < \infty$.

Теорема 2 доказана полностью. □

Замечание 1. Введенное выше понятие l-регулярности подпоследовательности $\Lambda' \subset \Lambda$ в случае $\Lambda' = \Lambda$ равносильно условиям а–г теоремы 1 и условию 4 теоремы 2. В общем случае l-регулярность Λ' есть более слабое требование, чем каждое из условий а–г и 4.

Пусть $M = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$ — подпоследовательность всех точек Λ, принадлежащих множеству $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda'} \omega'_k$, где $\omega'_k = \omega_{k-1} \cup \omega_k \cup \omega_{k+1}$, а ω_k — тот полуинтервал, который содержит λ. Тогда последовательность Λ' l-регулярна тогда и только тогда, когда последовательность M удовлетворяет условиям а–г теоремы 1 (или условию 4 теоремы 2).

Замечание 2. Условие

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^+ \ln\lambda_n}{\lambda_n} < \infty$$

сильнее, чем условие а теоремы 1. Действительно, если $J < \infty$, то $S_{\Lambda,\,l} < \infty$ (условие а). Убедимся в этом.

Имеем $S_{\Lambda,\,l} = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \sum_{n\in I_1} a_n,\;\; S_2 = \sum_{n\in I_2} a_n,\;\; a_n = \lambda_n^{-1}\ln\frac{\lambda_n}{n},\;\; I_1 = \Big\{n\colon \frac{\lambda_n}{\ln^2\lambda_n} \leqslant n\Big\},\;\; I_2 = \mathbb{N}\setminus I_1.$$

Поскольку $\ln \frac{\lambda_n}{n} \leqslant 2 \ln \ln \lambda_n$ при $n \in I_1$, то $S_1 \leqslant 2J < \infty$. То, что $S_2 < \infty$, очевидно. Значит, $S_{\Lambda, l} < \infty$.

Приведем пример последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой $S_{\Lambda, l} < \infty$, но $J = \infty$. Для этого рассмотрим систему отрезков $\{\Delta_j\}$ $(j \geqslant 1)$, где

$$\Delta_j = [2^j,\, 2^j + \beta_j]\,, \quad \beta_j = \left[\frac{2^j}{\alpha_j}\right], \quad \alpha_j = \begin{cases} \ln j, & \text{если } j = 2^{n^2}\,, \\ j^2, & \text{если } j \neq 2^{n^2} \ (n \geqslant 1)\,, \end{cases}$$

$[a]$ — целая часть a. Через $\{\lambda_n\}$ обозначим последовательность всех натуральных чисел из $\bigcup\limits_j \Delta_j$, пронумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$\sum_{\lambda_k \in \Delta_j} \lambda_k^{-1} \ln \frac{\lambda_k}{k} \leqslant [1 + o(1)] \frac{\ln \alpha_j}{\alpha_j} = [1 + o(1)] \begin{cases} 2n^{-2} \ln n, & \text{если } j = 2^{n^2}\,, \\ 2j^{-2} \ln j, & \text{если } j \neq 2^{n^2} \ (n \geqslant 1)\,. \end{cases}$$

Значит, $S_{\Lambda, l} < \infty$. Но поскольку для $j = 2^{n^2}$ $(n \geqslant 1)$

$$\sum_{\lambda_k \in \Delta_j} \lambda_k^{-1} \ln \ln \lambda_k \geqslant [1 + o(1)] \frac{\ln j}{\alpha_j} = 1 + o(1)\,, \quad j \to \infty\,,$$

то $J = \infty$.

Во многих вопросах теории функций, в том числе задачах аппроксимации линейными комбинациями экспонент $e^{\lambda z}$ $(\lambda \in \Lambda)$ на различных множествах комплексной плоскости, в теории рядов Дирихле особую роль играет бесконечное произведение (произведение Вейерштрасса (4))

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

определяющее целую функцию экспоненциального типа. Поэтому изучение поведения данной функции представляет собой актуальную задачу.

Функция g может вести себя очень нерегулярно на вещественной оси, даже если выполняется условие (1) (по этому поводу см. в [11]). Поведение g зависит не только от функций $n(r)$ и $N(r)$, но и от других величин распределения Λ, учитывающих как концентрацию, так и взаимное расположение (сближаемость) точек последовательности Λ. Одной из таких величин является так называемый индекс конденсации

$$\delta = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{g'(\lambda_n)} \right|.$$

Заметим, что

$$\delta = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{c(\lambda_n)}{\lambda_n}\,,$$

где $c = c(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{q_n\}$, где $q_n = -\ln |g'(\lambda_n)|$, то есть $c(t) = \max\limits_{\lambda_n \leqslant t} q_n$. Ясно, что функция $c(t)$ непрерывна справа. В зависимости от того, к какому классу монотонных на $\mathbb{R}_+$ функций принадлежит данная функция, можно судить о степени сгущаемости, а также о скорости взаимной сближаемости точек $\lambda \in \Lambda$.

Предположим, что $c \in W_m$, то есть

$$\int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2}\, dt < \infty\,.$$

Выясним, в каких более простых терминах можно интерпретировать данное условие.

Так как $g'(\lambda_n) = -\dfrac{2}{\lambda_n}\prod\limits_{k\neq n}\Big(1-\dfrac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\Big)$, то

$$\ln|g'(\lambda_n)| = \sum_{\substack{|\lambda_n-\lambda_i|\leqslant\lambda_n\\ i\neq n}} \ln\Big|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\Big| + \sum_{\substack{|\lambda_n-\lambda_i|\leqslant\lambda_n\\ i\neq n}} \ln\Big(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\Big) + \\ + \sum_{|\lambda_n-\lambda_i|>\lambda_n} \ln\Big|1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_i^2}\Big| + \ln\frac{2}{\lambda_n} = I_1+I_2+I_3+\ln\frac{2}{\lambda_n}\,. \tag{9}$$

Имеем

$$I_2 = \int\limits_0^{2\lambda_n} \ln\Big(1+\frac{\lambda_n}{t}\Big)\,dn(t) = n(2\lambda_n)\ln\frac{3}{2} + \lambda_n\int\limits_0^{2\lambda_n}\frac{n(t)}{t(t+\lambda_n)}\,dt\,,$$

$$I_3 = \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \ln\Big(1-\frac{\lambda_n^2}{t^2}\Big)\,dn(t) = n(2\lambda_n)\ln\frac{4}{3} - 2\lambda_n^2\int\limits_{2\lambda_n}^{\infty}\frac{n(t)}{t(t^2-\lambda_n^2)}\,dt\,.$$

Далее, как показано в [12] (см. также [13]),

$$I_1 = -\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt + n(2\lambda_n)\ln\frac{1}{2} + N(2\lambda_n)\,,$$

где $\mu(\lambda_n;\,t)$ — число точек $\lambda_i\neq\lambda_n$ из отрезка $\{h\colon |h-\lambda_n|\leqslant t\}$. Следовательно,

$$-U(\lambda_n) - \int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt \leqslant I_1+I_2+I_3 \leqslant 2N(2\lambda_n) - \int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt\,, \tag{10}$$

где

$$U(x) = 2x^2\int\limits_{2x}^{\infty}\frac{m(t)}{t(t^2-x^2)}\,dt \quad (x>0)\,,$$

а $m(t)$ — непрерывная и возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, линейная на отрезках $[0,\lambda_1]$, $[\lambda_n,\lambda_{n+1}]$ $(n\geqslant 1)$, причем $m(0)=0$, $m(\lambda_n)=n$ $(n\geqslant 1)$, $|m(t)-n(t)|\leqslant 1$.

Из условия (1) следует, что (это проверяется непосредственно)

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{U(x)}{x^2}\,dx<\infty\,.$$

Таким образом, из (9), (10) получаем, что

$$\left|\ln\Big|\frac{1}{g'(\lambda_n)}\Big| - \int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt\right| \leqslant \ln 2 + \ln\lambda_n + 2N(2\lambda_n) + U(\lambda_n)\,.$$

Функция U на $\mathbb{R}_+$ возрастает. Действительно, после замены $t=\tau x$ получим

$$U(x) = 2\int\limits_2^{\infty}\frac{m(\tau x)}{\tau(\tau^2-1)}\,d\tau\,.$$

Осталось учесть возрастание функции $\varphi(x)=m(\tau x)$.

Таким образом, видим, что если выполняется условие (1), то найдется функция $w \in W$ такая, что

$$\left|\ln\left|\frac{1}{g'(\lambda_n)}\right| - \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t}\, dt\right| \leqslant w(\lambda_n) \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть последовательность* Λ *удовлетворяет условию* (1). *Для того, чтобы выполнялось условие* (3), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$I(\lambda_n) = \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t}\, dt \leqslant \psi(\lambda_n) \quad (n \geqslant 1)\,, \tag{11}$$

где ψ *— некоторая функция из* W.

Следствие 1. *Если выполняется условие* (11), *то справедливы оценки:*

1°. $h_n \geqslant \lambda_n e^{-\psi(\lambda_n)}$ *(*$n \geqslant 1$*), где* $h_n = \min\limits_{j \neq n} |\lambda_n - \lambda_j|$*;*

2°. $\mu(\lambda_n;\, \psi(\lambda_n)) \leqslant \dfrac{\psi(\lambda_n)}{\ln \frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)}} \quad$ *(*$n \geqslant 1$*).*

Для того, чтобы убедиться в справедливости оценок 1°, 2°, заметим, что

$$I(\lambda_n) = \int\limits_{h_n}^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t}\, dt\,.$$

Так как $\mu(\lambda_n;\, t) \geqslant 1$ при $t \geqslant h_n$, то отсюда имеем оценку $\ln \dfrac{\lambda_n}{h_n} \leqslant \psi(\lambda_n)$, то есть $h_n \geqslant \lambda_n e^{-\psi(\lambda_n)}$ $(n \geqslant 1)$. Далее, при $\psi(\lambda_n) \geqslant h_n$

$$I(\lambda_n) \geqslant \int\limits_{\psi(\lambda_n)}^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t}\, dt \geqslant \mu(\lambda_n;\, \psi(\lambda_n)) \ln \frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)} \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Поскольку $\mu(\lambda_n;\, \psi(\lambda_n)) = 0$ при $\psi(\lambda_n) < h_n$, то все доказано.

Приведем примеры последовательностей Λ, для которых реализуются условия (1) и (3). Предварительно введем следующее

Определение 1. *Последовательность* $\{p_n\}$ *(*$p_n \in \mathbb{N}$*) называется интерполяционной, если найдется функция* $w \in \Omega$*, зависящая только от последовательности* $\{p_n\}$*, такая, что для любой последовательности* $\{b_n\}$ *комплексных чисел,* $|b_n| \leqslant 1$*, существует целая функция экспоненциального типа* $\varphi(z)$*, обладающая свойствами* [14]*:*

$$\varphi(p_n) = b_n \ (n \geqslant 1)\,, \quad M_\varphi(r) = \max_{|z| \leqslant r} |\varphi(z)| \leqslant e^{w(r)}\,.$$

Примерами интерполяционных последовательностей являются следующие последовательности $\{p_n\}$ [14]:

1. Павлова А. И.: $\dfrac{n}{p_n} \downarrow\,, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n} < \infty\,;$
2. Ковари Т.: $p_n \geqslant c\, n \ln n\, (\ln\ln n)^{2+\eta}\,, \quad c > 0\,,\, \eta > 0\,,\, n \geqslant e^e\,.$

В статье [15] доказан следующий критерий: для того, чтобы последовательность $\{p_n\}$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in \Omega$ такая, что:

$$\text{а)}\ \ n(t) \leqslant w(t)\,; \quad \text{б)} \ \ -\ln \prod_{\substack{\frac{p_n}{2} \leqslant p_k \leqslant 2p_n \\ p_k \neq p_n}} \Bigl|1 - \frac{p_n}{p_k}\Bigr| \leqslant w(p_n) \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Здесь $n(t)$ — считающая функция последовательности $\{p_n\}$, то есть $n(t) = \sum\limits_{p_n \leqslant t} 1$.

Естественное обобщение этого понятия на произвольные последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ дано в статье [16]. Ряд эквивалентных к а условий доказан в [17].

Лемма 2. *Интерполяционные в смысле Коревара – Диксона последовательности* $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ *удовлетворяют условиям* (1), (3).

Докажем лемму 2. Так как $w \in \Omega$, то (1) следует из условия а критерия интерполяционности.

Проверим условие (3). Имеем

$$|g'(p_n)| = \frac{2}{p_n} \prod_{k \neq n} \Bigl|1 - \frac{p_n^2}{p_k^2}\Bigr| \geqslant \prod_{\substack{p_k \in \Delta_n \\ p_k \neq p_n}} \Bigl|1 - \frac{p_n}{p_k}\Bigr| \cdot \prod_{p_k \notin \Delta_n} \Bigl|1 - \frac{p_n^2}{p_k^2}\Bigr|\,,$$

где $\Delta_n = [\frac{p_n}{2},\, 2p_n]$. Учитывая условие б, получаем

$$\Bigl|\frac{1}{g'(p_n)}\Bigr| \leqslant \frac{p_n}{2} e^{w(p_n)} \prod_{p_k \notin \Delta_n} \Bigl|1 - \frac{p_n^2}{p_k^2}\Bigr|^{-1}. \tag{12}$$

Если обозначить $\Delta(r) = [\frac{r}{2},\, 2r]$, то

$$\prod_{p_k \notin \Delta(r)} \Bigl|1 - \frac{r^2}{p_k^2}\Bigr| \geqslant \prod_{p_k > 2r} \Bigl|1 - \frac{r^2}{p_k^2}\Bigr| = B\,,$$

причем

$$\ln B = \int\limits_{2r}^{\infty} \ln\Bigl|1 - \frac{r^2}{t^2}\Bigr|\, dn(t) =$$

$$= n(t) \ln\Bigl(1 - \frac{r^2}{t^2}\Bigr)\Bigr|_{2r}^{\infty} - 2r^2 \int\limits_{2r}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)}\, dt > -2r^2 \int\limits_{2r}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)}\, dt$$

(подстановка положительна). В последнем интеграле сделаем замену $t = rx$. Тогда получаем

$$\ln B > -2 \int\limits_{2}^{\infty} \frac{n(rx)\, dx}{x(x^2 - 1)} \geqslant -\frac{8}{3} \int\limits_{2}^{\infty} \frac{n(rx)}{x^3}\, dx\,.$$

Из условия а имеем: $n(rx) \leqslant w(rx)$. Значит,

$$\ln B \geqslant -\frac{8}{3} \int\limits_{2}^{\infty} \frac{w(rx)}{x^3}\, dx\,,$$

но $w \in \Omega$, следовательно, для всех $r \geqslant R > 1$

$$\frac{w(rx)}{rx} \leqslant \frac{w(r)}{r} \quad (x \geqslant 2)\,.$$

Значит, $w(rx) \leqslant xw(r)$, и для $r \geqslant R$

$$\ln B \geqslant -\frac{8}{3}w(r)\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{4}{3}w(r)\,. \tag{13}$$

Таким образом, из (12), (13) для всех $p_n \geqslant R$ получаем

$$\Bigl|\frac{1}{g'(p_n)}\Bigr| \leqslant e^{\ln\frac{p_n}{2}+w(p_n)+\frac{4}{3}w(p_n)} < e^{\ln p_n+3w(p_n)}\,.$$

Следовательно, $c(t) \leqslant \ln t + 3w(t)$, и интеграл (3) сходится.

Приведем еще два примера.

Пример 1. Пусть $\Delta_j = \Bigl[2^j - \Bigl[\dfrac{2^j}{j\ln^2 j}\Bigr],\, 2^j\Bigr]$ — отрезок ($[a]$ — целая часть a), $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность всех натуральных чисел, попавших в $\bigcup\limits_{j\geqslant 2}\Delta_j$. Так как

$$\sum_{\lambda_n\in\Delta_j}\lambda_n^{-1} = (1+o(1))\frac{1}{j\ln^2 j}\,, \quad j\to\infty\,,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1} = \sum_{j\geqslant 2}(1+o(1))\frac{1}{j\ln^2 j} < \infty\,.$$

Покажем, что условие (3) не выполняется. Действительно, полагая $m_j = \Bigl[\dfrac{2^j}{j\ln^2 j}\Bigr]$, для $\lambda_n = 2^j$ имеем

$$I(\lambda_n) = \int\limits_{0}^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt \geqslant \int\limits_{m_j}^{2^j}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt \geqslant m_j\ln\frac{2^j}{m_j}\,.$$

Следовательно, при $j \geqslant j_0$

$$I(2^j) \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{2^j}{j\ln j}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_j \frac{\alpha(2^j)}{2^j} = \infty\,,$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $I(2^j)$. Значит, из теоремы 2 получаем, что

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt = \infty\,.$$

Это означает, что условие (11) не выполнено. Тогда расходимость интеграла (3) вытекает из теоремы 3.

Пример 2. Пусть $\Delta_j = \Bigl[2^{j^2} - \Bigl[\dfrac{2^{j^2}}{j^2}\Bigr],\, 2^{j^2}\Bigr]$ — отрезок ($[a]$ — целая часть a), а $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — соответствующая последовательность натуральных чисел (см. пример 1). Поскольку для $b_j = 2^{j^2}$

$$n(b_j) \geqslant \Bigl[\frac{2^{j^2}}{j^2}\Bigr] > \frac{b_j}{\ln b_j} - 1\,, \tag{14}$$

то условие a критерия интерполяционности не выполнено. Действительно, для любой функции $w \in \Omega$

$$\frac{w(r)}{r} \ln r = 2 \frac{w(r)}{r} \int\limits_{\sqrt{r}}^{r} \frac{dt}{t} \leqslant 2 \int\limits_{\sqrt{r}}^{r} \frac{w(t)}{t^2} \, dt = o(1) \, , \quad r \to \infty \, .$$

Значит, в силу (14), оценка $n(t) \leqslant w(t)$ ни при какой функции $w \in \Omega$ невозможна.

Убедимся, что тем не менее условие (3) выполнено. Для этого сначала заметим, что ряд (1) сходится. Более того,

$$\sum_n \lambda_n^{-1} \ln \frac{\lambda_n}{n} < \infty \, .$$

Поэтому достаточно проверить условие (11) (теорема 3). Имеем

$$I(\lambda_n) = \int\limits_{1}^{n(\lambda_n)} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t} \, dt + \int\limits_{n(\lambda_n)}^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t} \, dt = A + B \, .$$

Учитывая оценки $\mu(\lambda_n;\, t) \leqslant t$ $(\lambda_n \in \mathbb{N})$, $\mu(\lambda_n;\, t) \leqslant n(2\lambda_n)$ в первом и втором интегралах соответственно, получаем, что

$$A \leqslant n(\lambda_n) \, , \quad B \leqslant n(2\lambda_n) \ln \frac{\lambda_n}{n(\lambda_n)} \, .$$

Следовательно,

$$I(\lambda_n) \leqslant 2 \, n(2\lambda_n) \ln \frac{\lambda_n}{n(\lambda_n)} \quad (n \geqslant n_0) \, .$$

Но из сходимости ряда (5) следует, что (теорема 1)

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{n(t)}{t^2} \ln \frac{t}{n(t)} \, dt < \infty \, .$$

Значит, найдется функция $w \in W$ такая, что $I(\lambda_n) \leqslant w(\lambda_n)$ $(n \geqslant 1)$.

Таким образом, приведен пример неинтерполяционной последовательности, удовлетворяющей условиям (3), (5) (тем более условию (1)).

Примеры, на наш взгляд, иллюстрируют, насколько эффективна характеристика плотности распределения точек Λ

$$I(\lambda_n) = \int\limits_{0}^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t} \, dt$$

для проверки неочевидного условия

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{c(t)}{t^2} \, dt < \infty \, .$$

Преимуществом характеристики $I(\lambda_n)$ является то, что она сформулирована в терминах считающей меры последовательности Λ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Fejér *Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Cleichung* // Math. Ann. 1924. P. 413–423.
2. Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Матем. сб. 2003. Т. 194, № 8. С. 55–82.
3. Гайсин А.М. *Оценка ряда Дирихле, показатели которого — нули целой функции с нерегулярным поведением* // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 2. С. 33–56.
4. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука, 1980. 384 с.
5. Евграфов М.А. *Об одной теореме единственности для рядов Дирихле* // УМН. 1962. Т. 17, № 3(105). С. 169–175.
6. Гайсин А.М. *Об одной теореме Хеймана* // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 501–516.
7. Хейман У.К. *Мероморфные функции.* М.: Мир, 1966. 286 с.
8. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976. 536 с.
9. Коровкин П.П. *Неравенства.* М.: Наука, 1983. 72 с.
10. I. Cioranescu, L. Zsidó *A minimum modulus theorem and applications to ultra differential operators* // Arkiv for matematik. 1979. V. 17, № 1. P. 153–166.
11. Кацнельсон В.Э. *Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением* // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 4. С. 35–44.
12. Красичков И.Ф. *Оценки снизу для целых функций конечного порядка* // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6, № 4. С. 840–861.
13. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
14. J. Korevaar, M. Dixon *Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents* // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 1978. V. 40, № 2. P. 243–258.
15. B. Berndtsson *A note on Pavlov — Korevaar — Dixon interpolation* // Nederl. Akad. Wet. Indag. Math. 1978. V. 40, № 4. P. 409–414.
16. Гайсин А.М. *Асимптотическое поведение суммы целого ряда Дирихле на кривых* // Исследования по теории приближений. Уфа, БНЦ УрО АН СССР. 1989. С. 3–15.
17. Гайсин А.М. *Условие Левинсона в теории целых функций. Эквивалентные утверждения* // Матем. заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 350–360.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru

Жанна Геннадьевна Рахматуллина,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: rakhzha@gmail.com

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 41-52.

УДК 517.95

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Б.Е. КАНГУЖИН, Б.Д. КОШАНОВ

Аннотация. Исследуются вопросы о нахождении необходимых и достаточных условий разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре.

Ключевые слова: задача Дирихле, задача Неймана, полигармоническое уравнение.

1. Полигармонические функции, фундаментальные решения полигармонического уравнения

Рассмотрим однородное полигармоническое уравнение

$$\Delta^m u(x) = 0, \quad \Delta^m = \Delta(\Delta^{m-1}) \tag{1.1}$$

в ограниченной области $\Omega \subseteq R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, представляющим собой декартовы ортогональные координаты точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$ евклидова n-мерного пространства R^n, $n \geq 1$.

Определение 1.1. *Регулярные решения $u(x)$ уравнения (1.1) называются m-гармоническими функциями, так как при $m = 1$ и $m = 2$ регулярные решения $u(x)$ уравнения (1.1) представляют собой соответственно гармонические и бигармонические функции.*

Иногда вместо m-гармонических функций будем говорить "полигармонические функции". В дальнейшем через $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ обозначим длину x в R^n. Приведем следующий известный результат E. Almansi (1899 г.).

Теорема 1.1 (1). *Пусть Ω — произвольная область, звездная относительно начала координат. Полигармоническую функцию $u(x)$ в этой области можно представить в виде*

$$u(x) = \sum_{l=0}^{m-1} |x|^{2l} u_l(x), \tag{1.2}$$

где $u_l(x)$ — некоторые гармонические функции. Представление $u(x)$ в виде (1.2) единственно.

B.E. Kanguzhin, B.D. Koshanov, Necessary and sufficient conditions of resolvability boundary problems for non-uniform polyharmonics equations in ball.

Поступила 8 февраля 2010 г.

При изучении неоднородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x) = f(x) \tag{1.3}$$

важную роль играет так называемое фундаментальное решение.

Определение 1.2. *Фундаментальным решением уравнения (1.3) называется функция $\varepsilon(x) = \varepsilon_{2m,n}(x)$, удовлетворяющая во всем R^n полигармоническому уравнению*

$$\Delta^m \varepsilon_{2m,n}(x) = \delta(x), \tag{1.4}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Известно [2, 3], что фундаментальное решение задается согласно следующей лемме.

Лемма 1.1. *Фундаментальное решение уравнения (1.3):*
а) в случае нечетных $n > 1$ и четных n, для которых $n > 2m$, задается формулой

$$\varepsilon_{2m,n}(x) = d_{2m,n}|x|^{2m-n}, \tag{1.5}$$

где

$$d_{2m,n} = \frac{1}{(2m-n)2(m-1)(2(m-1)-n)2(m-2)...(2-n)2\cdot 2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^n};$$

б) в случае четных n, $n \le 2m$ задается формулой

$$\varepsilon_{2m,n}(x) = d_{2m,n}\,|x|^{2m-n}\ln|x|, \tag{1.6}$$

где

$$d_{2m,n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} - 1}{\Gamma(m)\Gamma(m-\frac{n}{2}+1)2^{2m-1}\pi^{n/2}}.$$

2. Необходимые условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре

В данном пункте устанавливаются необходимые условия корректности различных краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре.

Пусть m — натуральное число и в n-мерном единичном шаре $\Omega = \{x : |x| < 1\}$ рассмотрим полигармоническое уравнение

$$\Delta_x^m u(x) = f(x) \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}} u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_1(x), \quad x \in S = \partial\Omega,\\
&\frac{\partial^{k_2}}{\partial n_x^{k_2}} u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_2(x), \quad x \in S,\\
&\dots\\
&\frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}} u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_m(x), \quad x \in S,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$.

Определение 2.1. *Под регулярным решением задачи (2.1)–(2.2) будем понимать функцию $u(x) \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2.1) и краевым условиям (2.2).*

Известно [1, 4, 5], что для существования регулярного решения на исходные данные $f(x),\ \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$ накладываются ограничения двух типов:
1) требуется некоторая их гладкость,
2) некоторые условия типа ортогональности к решениям соответствующего однородного союзного уравнения.

В данной работе основной акцент направлен на выяснение ограничении типа 2, т.е. выясняется каким необходимым и достаточным условиям типа 2 должны удовлетворять функции $f(x),\ \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$, если их гладкостные свойства стандартны. Итак, пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varphi_s(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S),\ \ s = \overline{1, m}$. Надо сформулировать критерий разрешимости задачи (2.1)–(2.2) в исходных терминах.

К примеру, при $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varphi(x) \in C^{1+\alpha}(S)$ известно, что для существования решения задачи Неймана $\Delta u = f,\ \ \frac{\partial}{\partial n} u \big|_{x \in S} = \varphi(x)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_S \varphi(s)ds = \int\limits_{\Omega} f(x)dx.$$

Так как задача (2.1), (2.2) в некотором смысле является обобщением задачи Неймана, то естественно возникает вопрос:

Каким условиям должен удовлетворять набор функций $f(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2m-k_1+\alpha}(S) \times C^{2m-k_2+\alpha}(S) ... \times C^{2m-k_m+\alpha}(S)$, *чтобы краевая задача (2.1)–(2.2) была разрешима?*

На данный вопрос отвечает основной результат этого пункта.

Пусть $\varepsilon_{2m,n}(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения (2.1). Тогда известно [3], что $v(x) = \varepsilon_{2m,n} * f$ является решением неоднородного полигармонического уравнения (2.1), где знак $*$ означает свертку двух функции, то есть $\varepsilon_{2m,n} * f = \int\limits_{\Omega} \varepsilon_{2m,n}(x - y)f(y)dy$. Если $u(x)$ — решение задачи (2.1), (2.2), то разность $u(x) - v(x)$ представляет m-гармоническую функцию в области Ω. Поэтому согласно теореме 1.1 искомое решение ищем в виде

$$u(x) = \varepsilon_{2m,n} * f + \sum_{j=0}^{m-1} |x|^{2j} u_j(x), \tag{2.3}$$

где $\varepsilon_{2m,n}(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения (2.1), $u_j(x),\ j = \overline{0, m-1}$, — некоторые гармонические функции в области Ω.

Подставляя правую часть (2.3) в краевые условия (2.2), имеем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k_s} u_0}{\partial n_x^{k_s}} + \ \sum_{j=1}^{m-1} \Big[2j(2j-1)...(2j-k_s+1)u_j + \begin{pmatrix} k_s \\ 1 \end{pmatrix} 2j(2j-1)...(2j-k_s+2)\frac{\partial u_j}{\partial n_x} + ... \\ + \begin{pmatrix} k_s \\ 1 \end{pmatrix} 2j \frac{\partial^{k_s-1} u_j}{\partial n_x^{k_s-1}} + \frac{\partial^{k_s} u_j}{\partial n_x^{k_s}} \Big] = \varphi_s(x) - \frac{\partial^{k_s}}{\partial n_x^{k_s}} \varepsilon_{2m,n} * f,\ \ x \in S,\ \ s = 1, 2, ..., m, \end{aligned} \tag{2.4}$$

связывающие краевые значения гармонических функций $u_j(x),\ j = \overline{0, m-1}$, правых частей $\varphi_s(x),\ s = \overline{1, m}$, $\varepsilon_{2m,n} * f$ и их нормальных производных на сфере $S = \{x : |x| = 1\}$.

Таким образом, определение решения задачи (2.1), (2.2) сводится к нахождению гармонических в шаре Ω функций $u_j(x),\ j = \overline{0, m-1}$, по краевым условиям (2.4).

Интегрируя равенства (2.4) по сфере S и учитывая следующие равенства

$$\int\limits_S \frac{\partial^{k_s} u_j}{\partial n_x^{k_s}} dS_x = \begin{cases} \omega_n\, u_j(0), & k_s = 0 \\ 0\,, & k_s > 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где ω_n — площадь сферы S, находим, что

$$\sum_{j=\left[\frac{(k_s+1)}{2}\right]}^{m-1} 2j(2j-1)..(2j-k_s+1)u_j(0) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_{k_s}(x) - \frac{\partial^{k_s}}{\partial n_x^{k_s}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x, \qquad (2.6)$$

$s = 1, 2, ..., m.$

Теперь найдем условия разрешимости системы уравнений (2.6), которая представляет собой линейную неоднородную систему m уравнений с m неизвестными $u_j(0),\ j = \overline{0, m-1}$.

Для этого составим матрицу размерности $2m \times m$ по правилу

$$A = \begin{bmatrix} 1=\frac{0!}{01} & 1=\frac{2!}{2!} & 1=\frac{4!}{4!} & 1=\frac{6!}{6!} & \cdots & (2m-4)!/(2m-4)! & (2m-2)!/(2m-2)! \\ 0 & 2!/1! & 4!/3! & 6!/5! & \cdots & (2m-4)!/(2m-5)! & (2m-2)!/(2m-3)! \\ 0 & 2!/0! & 4!/2! & 6!/4! & \cdots & (2m-4)!/(2m-6)! & (2m-2)!/(2m-4)! \\ 0 & 0 & 4!/1! & 6!/3! & \cdots & (2m-4)!/(2m-7)! & (2m-2)!/(2m-5)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2m-4)!/0! & (2m-2)!/2! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (2m-2)!/1! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (2m-2)!/0! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а также введем вектор размерности m

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_0(0) \\ u_1(0) \\ u_2(0) \\ \\ ... \\ u_{m-2}(0) \\ u_{m-1}(0) \end{pmatrix}$$

и вектор размерности m

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_1(x) - \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_2(x) - \frac{\partial^{k_2}}{\partial n_x^{k_2}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ \\ \\ ... \\ ... \\ \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_m(x) - \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \end{pmatrix}.$$

Через $A(k_1, k_2, ..., k_m)$ обозначим матрицу размерности $m \times m$, которая совпадает с матрицей A, в которой сохраняются строки с номерами, равными $k_1, k_2, ..., k_m$.

Таким образом, система (2.6) в новых обозначениях примет вид:

$$A(k_1, k_2, ..., k_m)\vec{U} = \vec{F} \qquad (2.7)$$

Отсюда в силу теоремы Кронекера–Капелли вытекает следующая

Теорема 2.1. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_{k_s}(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S)$, $s = \overline{1, m}$. Тогда необходимым условием разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.2) в классе $C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ при произвольном m и любом наборе $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$ является условие:*

$$rank\, A(k_1, k_2, ..., k_m) = rank\, \left(A(k_1, k_2, ..., k_m), \vec{F} \right), \tag{2.8}$$

то есть ранг расширенной матрицы системы (2.7) должен совпадать с рангом матрицы $A(k_1, k_2, ..., k_m)$.

3. Достаточные условия разрешимости краевых задач для бигармонического уравнения в шаре

В теореме 2.1 получены необходимые условия разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.2). Оказывается, что они являются также достаточными условиями разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.2). Для наглядности подробно рассмотрим случай $m = 2$.

Случай $m = 2$**,** $k_1 = 1,\ k_2 = 2$ (для простоты случай а: n — нечетное или n — четное, но $n > 4$).

В этом случае матрицы $A(1,2)$ и $(A(1,2), \vec{F})$ имеют вид

$$A(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad (A(1,2), \vec{F}) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & \tilde{\varphi}_1 \\ 0 & 2 & \tilde{\varphi}_2 \end{array} \right],$$

где $\tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) - \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\,|x-y|^{2-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})f(y)dy$,

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \varphi_2(x) - \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n) \left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})^2 + |x-y|^{2-n} \right] f(y)dy.$$

Из условия (2.8) получим, что $\det \begin{vmatrix} 2 & \tilde{\varphi}_1 \\ 2 & \tilde{\varphi}_2 \end{vmatrix} = 0$, то есть

$$\int\limits_{|x|=1} \{\varphi_1(x) - \varphi_2(x) +$$

$$+ \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n) \left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2 + |x-y|^{2-n}(x,y) \right] f(y)dy\} dS_x = 0, \tag{3.1}$$

где

$$d_{4,n} = \frac{(\frac{n}{2} - 2)}{(2)\,16\,\pi^{n/2}}.$$

Перепишем при $m = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2$ условия (2.4) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x} + 2u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \varphi_1(x) - \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\,|x-y|^{2-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})f(y)dy, \\ \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial n_x^2} + 2u_1(x) + 4\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial n_x^2} = \\ = \varphi_2(x) - \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n) \left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})^2 + |x-y|^{2-n} \right] f(y)dy, x \in S. \end{cases} \tag{3.2}$$

Вычитая второе равенство (3.2) из первого, получим краевое условие Неймана

$$\frac{\partial \omega(x)}{\partial n_x} = \{\varphi_1(x) - \varphi_2(x) +$$

$$+\int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2+|x-y|^{2-n}(x,y)\right]f(y)dy\}=0, x\in S, \quad (3.3)$$

где

$$\omega(x)\equiv u_0(x)-3u_1(x)-(x,grad[u_0(x)+u_1(x)])=u_0(x)-3u_1(x)-(x,\nabla)[u_0(x)+u_1(x)] \quad (3.4)$$

— гармоническая функция в шаре Ω.

Нам известно, что выполнение условия (3.1) необходимо и достаточно для разрешимости задачи (3.3), (3.4). При соблюдении условия (3.1) функция $\omega(x)$ строится в квадратурах

$$\omega(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|x|=1} N(x,y)\{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)+$$

$$+\int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2+|x-y|^{2-n}(x,y)\right]f(y)dy\}dS_x+C, \quad (3.5)$$

где C — произвольная постоянная.

В силу (3.4), (3.5) имеем

$$u_0(x)-3u_1(x)-\frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}-\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}=\omega(x), x\in S. \quad (3.6)$$

Складывая первое из равенств (3.2) и (3.6), получим краевое условие Дирихле $\omega_1(x)=\varphi_1(x)+\omega(x),\ x\in S$ для гармонической функции

$$\omega_1(x)=u_0(x)-u_1(x),\ x\in\Omega. \quad (3.7)$$

Построив функцию $\omega_1(x)$ по формуле Пуассона, из (3.5) и (3.7) находим, что гармоническая функция $u_0(x)$ должна быть решением линейной смешанной краевой задачи

$$u_0(x)-\frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}=-\frac{1}{2}\left[\omega(x)-3\omega_1(x)-\frac{\partial\omega_1(x)}{\partial n_x}\right], x\in S. \quad (3.8)$$

Решение $u_0(x)$ этой задачи очевидно существует и его можно также выписать в квадратурах. После того как функции $\omega(x),\omega_1(x),u_0(x)$ построены, из равенства (3.7) определяем функцию $u_1(x)$, и искомое решение задачи (2.1), (2.2) в рассматриваемом случае находим по формуле

$$u(x)=\int\limits_{|y|<1} d_{4,n}|x-y|^{4-n}f(y)dy+u_0(x)+|x|^2u_1(x).$$

Таким образом, доказана достаточность (необходимость уже доказана в теореме 2.1) следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть $f(x)\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_1(x)\in C^{3+\alpha}(S)$, $\varphi_2(x)\in C^{2+\alpha}(S)$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости следующей краевой задачи*

$$\Delta^2u=f(x),\ \ |x|<1,$$

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u}{\partial n_x}=\varphi_1(x), \quad |x|=1,\\ &\tfrac{\partial^2 u}{\partial n_x^2}=\varphi_2(x), \quad |x|=1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

является условие (3.1), т.е.

$$\int\limits_{|x|=1} \{\varphi_1(x) - \varphi_2(x) +$$

$$+ \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2 + |x-y|^{2-n}(x,y)\right] f(y)dy\} dS_x = 0,$$

где $d_{4,n} = \frac{(\frac{n}{2}-2)}{(2)\,16\,\pi^{n/2}}$.

Случай $m = 2$**,** $k_1 = 1,\ k_2 = 3$ (для простоты случай a: n — нечетное или n — четное, но $n > 4$).

Перепишем при $m = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3$ условия (2.4) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x} + 2u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f, \quad x \in S, \\ \frac{\partial^3 u_0(x)}{\partial n_x^3} + 3\cdot 2\,\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} + 3\cdot 2\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial n_x^2} + \frac{\partial^3 u_1(x)}{\partial n_x^3} = \\ = \varphi_3(x) - \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{4,n} * f,\ \ x \in S. \end{cases} \tag{3.10}$$

В данном случае необходимое условие разрешимости записывается в виде

$$\int\limits_{|x|=1} \{\varphi_3(x) - \int\limits_{|y|<1} \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{4,n}(x,y) f(y)dy\} dS_x = 0. \tag{3.11}$$

Введем гармоническую функцию в шаре Ω по формуле

$$\omega(x) = \frac{\partial u_0^2(x)}{\partial n_x^2} + 6\,u_1 + 6\,(x,\nabla)u_1 + 6\,(x,\nabla)^2 u_1,$$

которая на границе S удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\omega(x) = \varphi_3(x) - \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{4,n} * f.$$

Последнее соотношение вытекает из второго равенства системы (3.10). Поскольку (3.11) является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Неймана, то функция $\omega(x)$ строится как решение задачи Неймана. Таким образом, $\omega(x)$ строится с точностью до постоянного слагаемого.

Запишем новую систему краевых условий

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x} + 2u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f, \quad x \in S, \\ \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial n_x^2} + 6\,u_1(x) + 6\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial n_x^2} = \omega(x), \quad x \in S, \end{cases} \tag{3.12}$$

которая построена с помощью первого соотношения из (3.10) и только что построенного решения задачи Неймана. Исключая из (3.12) величину $u_1(x), x \in S$ и обозначая через

$$\omega_1(x) = 3u_0(x) - 3u_1(x) - (x,\nabla)\,[u_0 + u_1]\text{при} \quad x \in \Omega,$$

видим, что $\omega_1(x)$ — гармоническая в шаре Ω функция, удовлетворяющая условию Неймана

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial n_x} = 3\varphi_1(x) - 3\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f - \omega(x), x \in S. \tag{3.13}$$

Для разрешимости указанной задачи Неймана необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_{|x|=1}(3\varphi_1(x)-3\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n}*f-\omega(x))dS_x=0. \tag{3.14}$$

Предположим, соотношение (3.14) выполняется, тогда гармоническая функция $\omega_1(x)$ находится с точностью до постоянного слагаемого.
Запишем новую систему краевых условий

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}+2u_1(x)+\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}=\varphi_1(x)-\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n}*f, \quad x\in S,\\ 3u_0(x)-\frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}-3u_1(x)-\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}=\omega_1(x), \quad x\in S, \end{cases} \tag{3.15}$$

которая построена с помощью первого соотношения (3.10) и только что построенного решения задачи Неймана. Из (3.15) сразу же вытекает равенство

$$3u_0-u_1=\varphi_1(x)-\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n}*f+\omega_1(x), x\in S, \tag{3.16}$$

обозначаем через $\omega_2(x)=3u_0(x)-u_1(x)$ при $x\in\Omega$. Введенная функция $\omega_2(x)$ является гармонической и удовлетворяет данным Дирихле (3.16). Отсюда следует, что $\omega_2(x)$ однозначно находится как решение задачи Дирихле. Теперь сравним

$$\omega_2(x)=3u_0(x)-u_1(x),$$

$$(x,\nabla)\,\omega_2=3\,(x,\nabla)\,u_0-(x,\nabla)\,u_1$$

и $\omega_1(x)=3u_0(x)-3u_1(x)-(x,\nabla)\,[u_0+u_1]$ в шаре Ω. Отсюда можно исключить функцию $u_0(x)$ и ее нормальную производную. В результате имеем соотношение

$$\omega_1(x)-\omega_2(x)+\frac{1}{3}(x,\nabla)\,\omega_2=-2u_1(x)-\frac{4}{3}(x,\nabla)\,u_1 \text{при} \quad x\in\Omega.$$

Следовательно, для нахождения гармонической в шаре Ω функции $u_1(x)$ достаточно решить смешанную задачу

$$2u_1(x)+\frac{4}{3}\frac{\partial u_1}{\partial n_x}=\omega_2(x)-\omega_1(x)-\frac{1}{3}\frac{\partial\omega_2}{\partial n_x}, x\in S.$$

Известно, что указанная задача имеет единственное решение. Если $u_1(x)$ при $x\in\Omega$ известны, то по $\omega_2(x)$ можно однозначно определить $u_0(x)$ при $x\in\Omega$. Таким образом, разрешимость краевой задачи при $m=2$, $k_1=1$, $k_2=3$ доказана при выполнений условий (3.11) и (3.14). Причем решение находится неоднозначно, так как при решении двух задач Неймана возникали произвольные постоянные слагаемые.

Покажем, что на самом деле условие (3.14) всегда выполняется. Действительно, из второго соотношения (3.12) вытекает, что

$$6\int\limits_S u_1(x)dS_x=\int\limits_S\omega(x)dS_x,$$

а из первого соотношения (3.12) следует, что

$$2\int\limits_S u_1(x)dS_x=\int\limits_S(\varphi_1(x)-\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n}*f)dS_x.$$

Из этих двух равенств следует, что соотношение (3.14) всегда выполняется. Отсюда следует, что необходимое условие (3.11) является также и достаточным для решимости указанной задачи при $m = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3$.

Таким образом, полностью доказана следующая

Теорема 3.2. *Пусть* $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),\ \varphi_1(x) \in C^{3+\alpha}(S),\ \varphi_3(x) \in C^{1+\alpha}(S)$. *Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи*

$$\begin{aligned} &\Delta^2 u = f(x),\ |x| < 1, \\ &\tfrac{\partial}{\partial n_x} u = \varphi_1(x),\ |x| = 1, \\ &\tfrac{\partial^3}{\partial n_x^3} u = \varphi_3(x),\ |x| = 1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

является условие

$$\int\limits_{|x|=1} (\varphi_3(x) - \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{4,n} * f) dS_x = 0.$$

4. Достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре

Сформулируем основной результат данной статьи.

Теорема 4.1. *Пусть* $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),\ \varphi_{k_s}(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S),\ s = \overline{1,m}$. *Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.2) в классе* $C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при произвольном* m *и любом наборе* $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$ *является условие (2.8), т.е.*

$$rank\, A(k_1, k_2, ..., k_m) = rank\, \left(A(k_1, k_2, ..., k_m), \vec{F}\right).$$

Доказательство условий достаточности теоремы 4.1 приведем по следующей схеме.

Вначале запишем краевые условия (2.2) в матрично-векторной форме

$$A_0\vec{U} + A_1\frac{\partial}{\partial n_x}\vec{U} + ... + A_{k_{m-1}}\frac{\partial^{k_{m-1}}}{\partial n_x^{k_{m-1}}}\vec{U} + A_{k_m}\frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\vec{U} = \vec{F}_0, \quad x \in S, \tag{4.1}$$

где $\vec{U} = (u_0(0), u_1(0), ..., u_{m-1}(0))^T$,

$$\vec{F}_0 = (\varphi_{k_1} - \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}}\varepsilon_{2m,n} * f,\ \varphi_{k_2} - \frac{\partial^{k_2}}{\partial n_x^{k_2}}\varepsilon_{2m,n} * f, ..., \varphi_{k_m} - \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\varepsilon_{2m,n} * f)^T,$$

$A_0, A_1, ..., A_{k_m}$ — числовые матрицы размерности $m \times m$, причем $A_0 = A(k_1, k_2, ..., k_m)$. Допустим, что ранг матрицы A_0 равен t, где $t \le m$. По определению ранга матрицы это означает, что существует невырожденная матрица B такая, что последние $(m-t)$ строк матрицы BA_0 линейно независимы между собой. Умножим обе части равенства (4.1) на матрицу B, тогда имеем

$$BA_0\vec{U} + BA_1\frac{\partial}{\partial n_x}\vec{U} + ... + BA_{k_{m-1}}\frac{\partial^{k_{m-1}}}{\partial n_x^{k_{m-1}}}\vec{U} + BA_{k_m}\frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\vec{U} = B\vec{F}_0, \quad x \in S, \tag{4.2}$$

отсюда вытекает, что

$$[0, E_{m-t}]BA_0\vec{U} + ... + [0, E_{m-t}]BA_{k_m}\frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\vec{U} = [0, E_{m-t}]B\vec{F}_0, \quad x \in S, \tag{4.3}$$

где E_{m-t} — единичная матрица размерности $(m-t)$. Здесь учтено, что $[0, E_{m-t}]BA_0$ — нулевая матрица. Обозначим через

$$\omega(x) = [0, E_{m-t}]BA_1\vec{U} + [0, E_{m-t}]BA_2(x, \nabla)\,\vec{U} + ... + [0, E_{m-t}]BA_{k_m}\left((x, \nabla)\right)^{k_m-1}\vec{U},\ x \in \Omega,$$

тогда $\omega(x)$ является решением следующей задачи Неймана

$$\Delta_x \omega(x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\omega = [0, E_{m-t}]B\vec{F}_0,\ x \in S.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой задачи является условие

$$[0, E_{m-t}]B\int\limits_{\partial\Omega} \vec{F}_0\,dS_x = 0,$$

которое в точности совпадает с условием (2.8). Гармоническая функция $\omega(x)$ находится с точностью до постоянного слагаемого с помощью ядра Неймана. Считая, что функция $\omega(x)$ при $x \in \Omega$ известной и вычисляя ее значение на границе при $x \in S$, имеем

$$[0, E_{m-t}]BA_1\vec{U} + ... + [0, E_{m-t}]BA_{k_m}\frac{\partial^{k_m-1}}{\partial n_x^{k_m-1}}\vec{U} = \omega(x), \quad x \in S. \tag{4.4}$$

Добавляя полученные краевые значения (4.4) к оставшимся уравнениям системы (4.2), получим

$$\begin{cases} [E_t, 0]BA_0\vec{U} + ... + [E_t, 0]BA_{k_m-1}\frac{\partial^{k_m-1}}{\partial n_x^{k_m-1}}\vec{U} = [E_t, 0]B\vec{F}_0, \quad x \in S, \\ [0, E_{m-t}]BA_1\vec{U} + ... + [0, E_{m-t}]BA_{k_m}\frac{\partial^{k_m-1}}{\partial n_x^{k_m-1}}\vec{U} = \omega(x), \quad x \in S. \end{cases} \tag{4.5}$$

Заметим, что в системе (4.5) отсутствуют нормальные производные порядка k_m так как $[E_t, 0]BA_{k_m}$ — нулевая матрица.

Таким образом, нам удалось понизить порядок нормальной производной, входящей в краевые условия. Продолжая указанный процесс, можно исключить все нормальные производные из краевых условий. Заметим, что для всех последующих краевых задач необходимые и достаточные условия их разрешимости всегда выполняются. То есть дополнительных условий разрешимости не возникает. Теорема 4.1 полностью доказана.

В качестве примера рассмотрим задачу типа Неймана с краевыми условиями [6]:

$$\Delta^m u(x) = f(x),\ |x| < 1, \tag{4.6}$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i}u\right|_{x\in S} = \varphi_i(x), \quad x \in S, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{4.7}$$

то есть данной задаче соответствует матрица $A(1, 2, ..., m)$.

В этом случае $rank\,A(1, 2, ..., m) = m - 1$, тогда в силу условий (2.8) справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Для разрешимости задачи (4.6), (4.7) необходимо, чтобы ранг соответствующей расширенной матрицы был равен $m-1$, т.е. чтобы имело место равенство*

$$\det(A(1,2,...m),\vec{F}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \int\limits_S [\varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{2m,n} * f]\, dS_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \int\limits_S [\varphi_2(x) - \frac{\partial^2}{\partial n_x^2}\varepsilon_{2m,n} * f]\, dS_x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & \int\limits_S [\varphi_k(x) - \frac{\partial^k}{\partial n_x^k}\varepsilon_{2m,n} * f]\, dS_x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \int\limits_S [\varphi_m(x) - \frac{\partial^{m-}}{\partial n_x^m}\varepsilon_{2m,n} * f]\, dS_x \end{vmatrix} = 0, \quad (4.8)$$

где

$$a_{kj} = \begin{cases} 0, \quad j = 1, ..., \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1, \\ 2j(2j-1)..(2j-k+1)\,, \quad j = \left[\frac{k+1}{2}\right], ..., m-1. \end{cases}$$

5. Необходимые и достаточные условия разрешимости задач для неоднородного бигармонического уравнения в шаре с однородными краевыми условиями

Рассмотрим неоднородное бигармоническое уравнение

$$Lu \equiv \Delta^2 u(x) = f(x) \quad (5.1)$$

в шаре $\Omega_r = \{x : \|x\| < r\ \} \subseteq R^n$, (для простоты случая а: n — нечетное, а также при четных n, если $n > 4$).

В работах [7–9] для уравнения (5.1) было построено решение следующей краевой задачи **K-01**, т.е. задачи Дирихле

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u\right|_{x\in\partial\Omega_r} = 0, \quad i = 0, 1. \quad (5.2)$$

Единственное решение $u(x)$ имеет интегральное представление

$$u(x) = L^{-1} f\,(x) = \int\limits_{\Omega} G_{4,n}(x,y)\, f(y) dy, \quad (5.3)$$

где $G_{4,n}(x,y)$ — функция Грина задачи Дирихле (5.1)–(5.2) может быть записана в виде:

$$G_{4,n}(x,y) = \frac{1}{(4-n)4\cdot(2-n)} \cdot \frac{1}{\omega_n}\left[|x-y|^{4-n} - \left|x - \frac{y}{|y|^2}r^2\right|^{4-n} \left|\frac{y}{r}\right|^{4-n}\right] +$$
$$+ \frac{1}{2\cdot 4\cdot(2-n)} \cdot \frac{1}{\omega_n} \cdot r^2 \left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)\left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right)\left|x - \frac{y}{|y|^2}r^2\right|^{2-n}\left|\frac{y}{r}\right|^{2-n}. \quad (5.4)$$

Для бигармонического уравнения (5.1) рассмотрим следующую задачу **K-12**:

$$Lu \equiv \Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_r = \{x : \|x\| < r\ \} \subseteq R^n, \quad (5.5)$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u\right|_{x\in\partial\Omega_r} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.6)$$

Аналогично теореме 3.1 для данной задачи имеет место следующая

Теорема 5.1. *Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи K-12, т.е. задачи (5.5)–(5.6) является условие:*

$$\int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r}\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(r-\frac{(x,y)}{r})^2-2|x-y|^{2-n}(r-\frac{(x,y)}{r})\right]f(y)dydS_x=0. \tag{5.7}$$

Теперь рассмотрим для бигармонического уравнения (5.1) следующую задачу **K-13**:

$$Lu\equiv\Delta^2u(x)=f(x),\quad x\in\Omega_r=\{x:|x|<r\ \}\subseteq R^n, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial^i}{\partial n_x^i}u\Big|_{x\in\partial\Omega_r}=0,\quad i=1,3. \tag{5.9}$$

Аналогично теореме 3.2 имеет место следующая

Теорема 5.2. *Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи K-13, т.е. задачи (5.8)–(5.9) является условие*

$$\begin{cases} u_1(0)=\int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r}\frac{(4-n)d_{4,n}}{2r\omega_n}|x-y|^{2-n}(r-\frac{(x,y)}{r})f(y)dydS_x,\\ \int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r}\left\{-n|x-y|^{-n-2}(r-\frac{(x,y)}{r})^3+3|x-y|^{-n}(r-\frac{(x,y)}{r})\right\}f(y)dydS_x=0. \end{cases} \tag{5.10}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n}=0$ // Annali di Mat. 1899. V. 3, № 2. P. 1–51.
2. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974. 808 с.
3. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981. 512 с.
4. M. Nicolesco *Les fonctions polyharmoniques.* Paris: Hermann ed. 1936. 54 p.
5. Соболев С.Л. *Математический сборник* // 1937. Т. 2, № 3. С. 467–500.
6. Бицадзе А.В. *О некоторых свойствах полигармонических функций* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 825–831.
7. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А. *Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений.* Алматы: Препринт. 2005. 54 с.
8. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. *Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре* // Доклады РАН. 2008. Т. 421. № 3. С. 305–307.
9. Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. *Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений* // Математический журнал. Т. 8, № 1(27). С. 50–58.

Балтабек Есматович Кангужин,
Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
ул. Пушкина, 125,
050010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: `kanbalta@mail.ru`

Бакытбек Данебекович Кошанов,
Институт математики, информатики и механики МОН РК,
ул. Пушкина, 125,
050010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: `koshanov@list.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 53-66.

УДК 517.956.223

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Р.Х. КАРИМОВ, Л.М. КОЖЕВНИКОВА

Аннотация. Для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}_n,\ n \geq 2$, рассматривается задача Дирихле. Установлены оценки сверху, характеризующие зависимость скорости убывания решений на бесконечности от геометрии области Ω.

Ключевые слова: убывание, квазилинейное эллиптическое уравнение, задача Дирихле, неограниченная область.

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\},\ n \geq 2$. Для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} - a(\mathbf{x}, u) = \sum_{\alpha=1}^{n}(\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha} - \Phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \tag{1. 1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1. 2}$$

Предположим, что функции, входящие в уравнение (1.1), удовлетворяют следующим требованиям. Функции $a_\alpha(\mathbf{x}, \xi),\ \alpha = \overline{1, n}$, измеримы по $\mathbf{x} \in \Omega$ и для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}_n$ при п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ подчиняются условиям:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)\right)(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq \overline{a}|\xi - \eta|^{m+1}, \quad m \geq 1; \tag{1. 3}$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, \xi) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \eta)| \leqslant \widehat{a}|\xi - \eta|(|\xi| + |\eta|)^{m-1}, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n); \tag{1. 4}$$

$$a_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n}. \tag{1. 5}$$

Функция $a(\mathbf{x}, s)$ измерима по $\mathbf{x} \in \Omega$ и для всех $s, t \in \mathbb{R}$ при п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ подчиняется условиям:

$$(a(\mathbf{x}, s) - a(\mathbf{x}, t))(s - t) \geq \overline{b}|s - t|^{q+1}, \quad q \geq 1; \tag{1. 6}$$

$$|a(\mathbf{x}, s) - a(\mathbf{x}, t)| \leqslant \widehat{b}|s - t|(|s| + |t|)^{q-1}; \tag{1. 7}$$

$$a(\mathbf{x}, 0) = 0. \tag{1. 8}$$

Здесь $\overline{a},\ \widehat{a},\ \overline{b},\ \widehat{b}$ — положительные числа.

L.M. Kozhevnikova, R.Kh. Karimov, Behavior on infinity of decision quasilinear elliptical equations in unbounded domain.

Работа поддержана РФФИ (09-01-00440-а).

Поступила 31 марта 2010 г.

Очевидно, функции $a_\alpha(\xi) = |\xi|^{m-1}\xi_\alpha,\ \alpha = \overline{1,n},\ \ a(s) = |s|^{q-1}s$ удовлетворяют условиям (1.3)–(1.8) и уравнение (1.1) принимает вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(|\nabla u|^{m-1}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} - |u|^{q-1}u = \sum_{\alpha=1}^{n}(\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha} - \Phi(\mathbf{x}).$$

Работа посвящена исследованию скорости убывания на бесконечности решения задачи (1. 1), (1. 2) с финитной правой частью в зависимости от геометрии неограниченной области Ω.

Изучением поведения на бесконечности решений линейных эллиптических уравнений занимались О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [1], [3], Е.М. Ландис, Г.П. Панасенко [2], В.А. Кондратьев, И. Копачек, Д.М. Леквеишвили и другие (подробный обзор результатов приведен в [4]).

Для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях с некомпактными границами А.Е. Шишковым в работах [5], [6] установлены энергетические априорные оценки решений задачи Дирихле. На их основе доказываются альтернативные теоремы типа Фрагмена–Линделефа о поведении решений на бесконечности. В качестве геометрической характеристики неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ используется функция нелинейной частоты сечений $\gamma(r)$:

$$\nu_m(r) = \inf\left\{\int\limits_{\gamma(r)} |\nabla_\gamma g|^{m+1}ds \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \int\limits_{\gamma(r)} |g|^{m+1}ds\right\}, \quad r > 0,$$

где $\nabla_\gamma g$ — проекция ∇g на плоскость, касательную к $\gamma(r)$ (например, $\gamma(r) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| = r\}$).

Л.М. Кожевниковой [7] для областей с некомпактными границами предложено новое понятие, называемое λ-разбиением, которое позволяет получать точные оценки решений краевых задач для линейных эллиптических и параболических уравнений. Это понятие является обобщением понятия λ-последовательности, введенного ранее в работах [4], [8] для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_1 ($\Omega \subset \mathbb{R}_n^+$ и сечение γ_r не пусто при любом $r > 0$), где показано, что использование новой геометрической характеристики дает возможность в ряде случаев устанавливать более сильные результаты, чем ранее известные. Следует отметить, что в работе [9] О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяна авторы, по существу, использовали прототип такой последовательности для системы уравнений теории упругости, однако дальнейшего развития этот подход не получил.

В настоящей работе понятие λ-разбиения обобщено на некоторый класс квазилинейных уравнений второго порядка и в терминах этой геометрической характеристики установлены оценки сверху решения задачи Дирихле (1. 1), (1. 2).

Предполагается, что неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ представлена в виде объединения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ последовательности вложенных $\Omega^{(N)} \subset \Omega^{(N+1)}$ областей, удовлетворяющих следующим требованиям. Дополнения $\Omega^{(N)}_{(N-1)} = \Omega^{(N)} \setminus \overline{\Omega^{(N-1)}}$ распадаются на конечное число связных компонент $\omega_i^{(N)},\ i = \overline{1, p^{(N)}}:\ \Omega^{(N)}_{(N-1)} = \bigcup\limits_{i=1}^{p^{(N)}} \omega_i^{(N)},\ N = \overline{1,\infty}$. Пересечения $(\partial\Omega^{(N)}) \bigcap \Omega = S^{(N)},\ N = \overline{0,\infty}$, представляют собой конечное число липшицевых гиперповерхностей $S_i^{(N)} = \partial\omega_i^{(N)} \bigcap S^{(N)}$ ($S_i^{(N)}$ могут быть несвязными), $i = \overline{1, p^{(N)}},\ N = \overline{1,\infty}$.

Определим векторы $t^{(N)} = (t_1^{(N)}, ..., t_{p^{(N)}}^{(N)})$ и $\lambda^{(N)} = (\lambda_1^{(N)}, ..., \lambda_{p^{(N)}}^{(N)})$ формулами $t_i^{(N)} = \operatorname{dist}(S_i^{(N)}, \widetilde{S}_i^{(N-1)})$, где $\widetilde{S}_i^{(N-1)} = \partial\omega_i^{(N)} \cap S^{(N-1)}$ и

$$\lambda_i^{(N)} = \inf\left\{ \int\limits_{\omega_i^{(N)}} |\nabla g|^{m+1}\, d\mathbf{x} \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \int\limits_{\omega_i^{(N)}} |g|^{m+1}\, d\mathbf{x} = 1 \right\}, \tag{1. 9}$$
$$i = \overline{1, p^{(N)}}, \quad N = \overline{1, \infty}.$$

Будем предполагать, что существует число $\theta > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leqslant \theta\lambda_i^{(N)}(t_i^{(N)})^{m+1}, \quad i = \overline{1, p^{(N)}}, \quad N = \overline{1, \infty}. \tag{1. 10}$$

Описанное выше представление $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ при выполнении неравенств (1. 10) будем называть λ-разбиением области, соответствующим задаче (1. 1), (1. 2) (в дальнейшем просто λ-разбиением).

Для неограниченных областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_1, множества $\Omega^{(N)} = \Omega^{z_N} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid 0 < x_1 < z_N\}$ можно определить с помощью неограниченной возрастающей последовательности положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$. При этом последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ называется λ-последовательностью, а условие (1.10) для разбиения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{z_N}$ принимает вид

$$1 \leqslant \theta\lambda(z_{N-1}, z_N)\Delta_N^{m+1},\ \Delta_N = z_N - z_{N-1}, \quad N = \overline{1, \infty}, \tag{1. 11}$$

$$\lambda(r_1, r_2) = \inf\left\{ \int\limits_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |\nabla g|^{m+1} d\mathbf{x} \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \int\limits_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |g|^{m+1} d\mathbf{x} = 1 \right\}. \tag{1. 12}$$

Здесь и ниже используется обозначение: $\Omega_{r_1}^{r_2} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid r_1 < x_1 < r_2\}$, значения параметров $r_1 = 0$ и $r_2 = \infty$ могут быть опущены.

Приведем простое условие, необходимое и достаточное для существования λ-последовательности (см. следствие к утверждению 3):

$$\text{для любого } r_1 > 0 \text{ найдется } r_2 > r_1 \text{ такое, что } \lambda(r_1, r_2) > 0. \tag{1. 13}$$

Чтобы ограничить влияние функций $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = (\Phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \Phi_n(\mathbf{x})),\ \Phi(\mathbf{x})$ на поведение решения, будем считать, что они имеют компактный носитель:

$$\operatorname{supp} \mathbf{\Phi} \subset \Omega^{(0)}, \quad \operatorname{supp} \Phi \subset \Omega^{(0)}. \tag{1. 14}$$

Теорема 1. *Пусть для области* Ω *существует* λ*-разбиение* $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ *и выполнено условие* (1. 14). *Тогда найдутся положительные числа* $\kappa(\theta, \widehat{a}, \overline{a}, m)$, $M(\theta, \widehat{a}, \overline{a}, \overline{b}, m, \Phi, \mathbf{\Phi})$ *такие, что для решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1. 1), (1. 2) *при* $N \geq 0$ *справедливы оценки*

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega^{(N)}} |u(\mathbf{x})|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega^{(N)}} |\nabla u(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant M\exp(-\kappa N). \tag{1. 15}$$

Оценка (1.15) зависит от представления $\Omega = \bigcup\limits_{N=0} \Omega^{(N)}$. Задача оптимизации λ-разбиения достаточно сложная и здесь не решалась, однако для λ-последовательностей этот вопрос рассмотрен. Для областей, расположенных вдоль оси Ox_1, назовем $\overline{\lambda}$-последовательность $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ с $\overline{\theta} > 0$ оптимальной, если для любой λ-последовательности $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ с $\theta > 0$ существует положительная постоянная $C(\theta)$ такая, что при $N \geq 1$ справедлива импликация

$$(x_L \leqslant \overline{x}_N) \Rightarrow (L \leqslant CN). \tag{1. 16}$$

Установлено, что оптимальной является $\overline{\lambda}$-последовательность с минимально возможными интервалами $(\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)$, при которых условия (1. 11) не нарушаются (см. утверждение 4).

Рассмотрим область вращения

$$\Omega(f) = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0,\ |\mathbf{x}'| < f(x_1)\} \tag{1. 17}$$

с положительной функцией $f(x_1)$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью.

Для областей вращения вида (1.17), не содержащих полупространства $x_1 > r, \forall r > 0$, утверждение теоремы 1 переформулируем в терминах функции $f(x)$, определяющей область $\Omega(f)$, без привлечения понятия λ-разбиения. Для этого введем понятие П-последовательности.

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ назовем П-последовательностью функции f, если справедливы равенства

$$z_0 = 1, \quad z_j = \sup\left\{r \,\middle|\, \inf_{[z_{j-1},r)} f(x) \geq r - z_{j-1}\right\}, \quad j = \overline{1,\infty}. \tag{1. 18}$$

Отметим, что П-последовательность функции f можно построить всегда, она является λ-последовательностью для области $\Omega(f)$ (см. утверждение 5).

Следствием теоремы 1 для областей вращения вида (1.17) является следующее утверждение.

Теорема 2. *Существуют положительные постоянные κ, $\widetilde{M}$ такие, что для решения $u(\mathbf{x})$ задачи* (1. 1), (1. 2) *в области вращения $\Omega(f)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{\Omega_r(f)} |u(\mathbf{x})|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_r(f)} |\nabla u(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant \widetilde{M} \exp\left(-\kappa \int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)}\right), \quad r \geq 1. \tag{1. 19}$$

Если существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [x - f(x),\, x + f(x)]\} \leqslant \omega f(x), \quad x \geq 1, \tag{1. 20}$$

то П-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ является оптимальной λ-последовательностью для области $\Omega(f)$ (см. утверждение 6). Кроме того, оценка (1. 19) будет того же порядка, что и оценка (1. 15).

В области $\Omega(f_1)$ с функцией $f_1(x) = 1/e,\ 0 < x < e,\ \ f_1(x) = \ln x/x,\ x \geq e$, для решения задачи (1. 1), (1. 2) справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega_r(f_1)} |u(\mathbf{x})|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_r(f_1)} |\nabla u(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant M_1 \exp\left(-\kappa_1 r^2/\ln r\right), \quad r \geq 1.$$

В области $\Omega(f_2)$ с функцией $f_2(x) = e,\ 0 < x < e,\ \ f_2(x) = x/\ln x,\ x \geq e$, для решения задачи (1. 1), (1. 2) установлена оценка

$$\int\limits_{\Omega_r(f_2)} |u(\mathbf{x})|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_r(f_2)} |\nabla u(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant M_2 \exp\left(-\kappa_2 \ln^2 r\right), \quad r \geq 1.$$

Для решения задачи Дирихле в случае линейного эллиптического уравнения второго порядка

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) u_{x_\alpha})_{x_\beta} = \Phi(\mathbf{x}) \tag{1. 21}$$

в классе неограниченных областей, расположенных вдоль оси Ox_1, в работе [4] в терминах λ-последовательности $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ получены оценки

$$\int\limits_{\Omega_{z_N}} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leqslant M\exp(-\kappa N), \quad N \geq 0. \tag{1. 22}$$

Кроме того, для широкого класса областей вращения вида (1.17) установлена их точность. А именно, доказано, что если П-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ положительной функции $f(x),\ x > 0$, подчиняется неравенствам

$$\overline{\omega}^{-1} \leqslant \frac{z_{N+2} - z_{N+1}}{z_{N+1} - z_N} \leqslant \overline{\omega}, \quad \overline{\omega} \geq 1, \quad N = \overline{0, \infty},$$

то для неотрицательного решения задачи (1.21), (1.2) в области $\Omega(f)$ существуют положительные числа K, μ такие, что справедливы неравенства

$$\int\limits_{\Omega_{z_N}(f)} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \geq \mu\exp(-KN), \quad N \geq 1.$$

2. Вспомогательные сведения

Через $\|u\|_{p,Q}$ будем обозначать норму в $L_p(Q)$. В случае, когда $p = 2,\ Q = \Omega$, индексы $p,\ Q$ опускаем. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\nabla v\|_{m+1} + \|v\|_{q+1}$.

Обобщенным решением задачи (1. 1), (1. 2) с $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{(q+1)/q}(\Omega),\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{(m+1)/m}(\Omega)$ назовем функцию $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) v_{x_\alpha} + a(\mathbf{x}, u)v \right\} d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha v_{x_\alpha} + \Phi v \right\} d\mathbf{x} \tag{2. 1}$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$.

Используя условия (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) для функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$, выводим неравенства

$$\|\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)\|_{(m+1)/m} \leqslant \widehat{a} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x} \right)^{m/(m+1)} = \widehat{a}\|\nabla u\|_{m+1}^m, \tag{2. 2}$$

$$\|a(\mathbf{x}, u)\|_{(q+1)/q} \leqslant \widehat{b} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{q+1} d\mathbf{x} \right)^{q/(q+1)} = \widehat{b}\|u\|_{q+1}^q. \tag{2. 3}$$

Определение обобщенного решения корректно, поскольку входящие в (2.1) интегралы конечны. Действительно, используя неравенство Гельдера, применяя оценки (2.2), (2.3), для функций $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$ выводим

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{n} |a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)||v_{x_\alpha}| d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)||\nabla v| d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)\|_{(m+1)/m} \|\nabla v\|_{m+1} \leqslant \widehat{a}\|\nabla u\|_{m+1}^m \|\nabla v\|_{m+1},$$

$$\int\limits_{\Omega} |a(\mathbf{x}, u)||v| d\mathbf{x} \leqslant \|a(\mathbf{x}, u)\|_{(q+1)/q} \|v\|_{q+1} \leqslant \widehat{b}\|u\|_{q+1}^q \|v\|_{q+1}.$$

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия* (1.3)–(1.8)*, тогда существует обобщенное решение* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1.1)*,* (1.2) *с вектор-функцией* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{(m+1)/m}(\Omega)$ *и функцией* $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{(q+1)/q}(\Omega)$.

Доказательство проводится методом галеркинских приближений аналогично доказательству соответствующего утверждения в случае ограниченной области Ω (см. [10, гл.4, §9]).

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия* (1.3)–(1.8)*, тогда обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *единственно. Для решения* $u(\mathbf{x})$ *с* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{(m+1)/m}(\Omega)$, $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{(q+1)/q}(\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\|\nabla u\|_{m+1}^{m+1} + \|u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant C(m, \overline{a}, \overline{b}) \left\{ \|\mathbf{\Phi}\|_{(m+1)/m}^{(m+1)/m} + \|\Phi\|_{(q+1)/q}^{(q+1)/q} \right\}. \tag{2. 4}$$

Доказательство. Пусть u^1, u^2 — обобщенные решения задачи (1.1), (1.2). Запишем тождество (2.1) дважды для u^1, u^2 и вычтем из первого второе, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u^1) - a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u^2) \right\} v_{x_\alpha} + \left\{ a(\mathbf{x}, u^1) - a(\mathbf{x}, u^2) \right\} v \right) d\mathbf{x} = 0,$$

в котором положим $v = u^1 - u^2 = \delta u$, в результате получим тождество

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u^1) - a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u^2) \right\} (\delta u)_{x_\alpha} + \left\{ a(\mathbf{x}, u^1) - a(\mathbf{x}, u^2) \right\} \delta u \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Применяя (1.3), (1.6), установим неравенство

$$\overline{a}\|\nabla \delta u\|_{m+1}^{m+1} + \overline{b}\|\delta u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant 0,$$

из которого следует $\delta u = u^1 - u^2$ в Ω.

В интегральном тождестве (2. 1) положим $v = u$, применяя (1.3), (1.5), (1.6), (1.8), установим неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \overline{a}|\nabla u|^{m+1} + \overline{b}|u|^{q+1} \right\} d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} \left\{ |\mathbf{\Phi}||\nabla u| + |\Phi||u| \right\} d\mathbf{x}.$$

Далее используя неравенство Гельдера, получим соотношение

$$\overline{a}\|\nabla u\|_{m+1}^{m+1} + \overline{b}\|u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant \|\mathbf{\Phi}\|_{(m+1)/m}\|\nabla u\|_{m+1} + \|\Phi\|_{(q+1)/q}\|u\|_{q+1}.$$

Воспользовавшись неравенством Юнга, выводим соотношение

$$\overline{a}\|\nabla u\|_{m+1}^{m+1} + \overline{b}\|u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant \frac{\overline{a}}{m+1}\|\nabla u\|_{m+1}^{m+1} + \frac{\overline{b}}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} +$$

$$+ \frac{m}{(m+1)\overline{a}^{1/m}}\|\mathbf{\Phi}\|_{(m+1)/m}^{(m+1)/m} + \frac{q}{(q+1)\overline{b}^{1/q}}\|\Phi\|_{(q+1)/q}^{(q+1)/q},$$

из которого следует оценка (2.4).

3. Оценки сверху

В этом параграфе приводятся доказательства теорем 1, 2.

Доказательство теоремы 1. Выберем κ так, чтобы $(m+1)\theta^{1/(m+1)}\kappa e^{\kappa}\widehat{a} \leqslant \overline{a}$. Зафиксируем натуральное число $N \geq 2$. Построим определенную в Ω липшицеву функцию $\xi(\mathbf{x})$, удовлетворяющую условиям

$$\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega^{(0)}}; \\ \exp(-\kappa(N-1)) \min\left(1, \dfrac{\operatorname{dist}(\widetilde{S}_i^{(0)},\ \mathbf{x})}{t_i^{(1)}}\right),\ \mathbf{x} \in \omega_i^{(1)},\ i = \overline{1, p^{(1)}}; \\ \ \exp(-\kappa(N+1-\nu)) \exp\left(\kappa \min\left(1, \dfrac{\operatorname{dist}(\widetilde{S}_i^{(\nu-1)},\ \mathbf{x})}{t_i^{(\nu)}}\right)\right), \\ \ \mathbf{x} \in \omega_i^{(\nu)},\ i = \overline{1, p^{(\nu)}},\ \nu = \overline{2, N}; \\ 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega \backslash \Omega^{(N)}. \end{cases}$$

Нетрудно установить следующие соотношения

$$|\nabla \xi| \leqslant \frac{\exp(-\kappa(N-1))}{t_i^{(1)}}, \quad \mathbf{x} \in \omega_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, p^{(1)}}; \tag{3. 1}$$

$$|\nabla \xi| \leqslant \frac{\kappa \xi}{t_i^{(\nu)}}, \quad \mathbf{x} \in \omega_i^{(\nu)}, \quad i = \overline{1, p^{(\nu)}}, \quad \nu = \overline{2, N}; \tag{3. 2}$$

$$\max_{\omega_i^{(\nu)}} \xi(\mathbf{x}) = e^{\kappa} \min_{\omega_i^{(\nu)}} \xi(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, p^{(\nu)}}, \quad \nu = \overline{2, N}; \tag{3. 3}$$

$$\max_{\Omega_{(0)}^{(1)}} \xi(\mathbf{x}) = \exp(-\kappa(N-1)). \tag{3. 4}$$

В интегральном тождестве (2. 1) положим $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$, ввиду того, что $\Phi\xi = 0$, $\mathbf{\Phi}\xi \equiv \mathbf{0}$, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) u_{x_\alpha} + a(\mathbf{x}, u) u \right\} \xi d\mathbf{x} = -\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) u \xi_{x_\alpha} d\mathbf{x}.$$

Далее, применяя условия (1.3)–(1.6), (1.8) выводим

$$\int\limits_{\Omega} \xi \left\{ \overline{a} |\nabla u|^{m+1} + \overline{b} |u|^{q+1} \right\} d\mathbf{x} \leqslant \widehat{a} \int\limits_{\Omega} |u| |\nabla u|^m |\nabla \xi| d\mathbf{x} = I. \tag{3. 5}$$

Используя (3. 1), (3. 2), оценим правую часть последнего неравенства:

$$I = \widehat{a} \int\limits_{\Omega_{(0)}^{(1)}} |u| |\nabla u|^m |\nabla \xi| d\mathbf{x} + \widehat{a} \sum_{\nu=1}^{N-1} \int\limits_{\Omega_{(\nu)}^{(\nu+1)}} |u| |\nabla u|^m |\nabla \xi| d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{a} \sum_{i=1}^{p^{(1)}} \int\limits_{\omega_i^{(1)}} |u| |\nabla u|^m \frac{\exp(-\kappa(N-1))}{t_i^{(1)}} d\mathbf{x} + \widehat{a} \sum_{\nu=2}^{N} \sum_{i=1}^{p^{(\nu)}} \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} |u| |\nabla u|^m \frac{\kappa \xi}{t_i^{(\nu)}} d\mathbf{x}. \tag{3. 6}$$

Установим соотношения

$$\int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{|u| |\nabla u|^m}{t_i^{(\nu)}} d\mathbf{x} \leqslant \theta^{1/(m+1)} \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} |\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x}, \quad i = \overline{1, p^{(\nu)}}, \quad \nu = \overline{1, N}. \tag{3. 7}$$

Для этого достаточно воспользоваться неравенством Юнга и определением λ-разбиения (1. 9), (1. 10), тогда для $i = \overline{1, p^{(\nu)}}$, $\nu = \overline{1, \infty}$ имеем

$$\int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{|u \,||\, \nabla u|^m}{t_i^{(\nu)}} d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{m \varepsilon^{1/m} |\nabla u|^{m+1}}{m+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{|u|^{m+1}}{(m+1)(t_i^{(\nu)})^{m+1} \varepsilon} d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{m\varepsilon^{1/m}|\nabla u|^{m+1}}{m+1}d\mathbf{x} + \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{\theta\lambda_i^{(\nu)}|u|^{m+1}}{(m+1)\varepsilon}d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m+1}\int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \left(m\varepsilon^{1/m} + \frac{\theta}{\varepsilon}\right)|\nabla u|^{m+1}d\mathbf{x}.$$

Выбрав $\varepsilon = \theta^{m/(m+1)}$, получаем (3. 7). Ввиду (3. 3), из (3. 7) выводим неравенства

$$\int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{\xi|u||\nabla u|^m}{t_i^{(\nu)}}d\mathbf{x} \leqslant e^{\kappa}\theta^{1/(m+1)}\int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \xi|\nabla u|^{m+1}d\mathbf{x}, \quad i = \overline{1, p^{(\nu)}}, \quad \nu = \overline{2, N}.$$

Пользуясь (3. 6), (3. 7) и последним соотношением, нетрудно привести (3. 5) к виду

$$\int\limits_{\Omega} \xi\left\{\overline{a}|\nabla u|^{m+1} + \overline{b}|u|^{q+1}\right\}d\mathbf{x} \leqslant \widehat{a}\theta^{1/(m+1)}\exp(-\kappa(N-1))\int\limits_{\Omega_{(0)}^{(1)}} |\nabla u|^{m+1}d\mathbf{x}+$$

$$+\widehat{a}\kappa\theta^{1/(m+1)}e^{\kappa}\int\limits_{\Omega_{(1)}^{(N)}} \xi|\nabla u|^{m+1}d\mathbf{x}.$$

Благодаря выбору числа κ последнее неравенство можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega^{(N)}} \left\{\frac{\overline{a}m}{m+1}|\nabla u|^{m+1} + \overline{b}|u|^{q+1}\right\}d\mathbf{x} \leqslant \widehat{a}\theta^{1/(m+1)}\exp(-\kappa(N-1))\int\limits_{\Omega_{(0)}^{(1)}} |\nabla u|^{m+1}d\mathbf{x}.$$

Применив к оценке правой части соотношение (2. 4), устанавливаем неравенство (1. 15). При $N = 0, 1$, оценка (1. 15) также справедлива ввиду ограниченности соответственно сверху левой и снизу правой частей.

Доказательство теоремы 2. Для П-последовательности $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$, ввиду (1. 18), справедливы неравенства

$$\int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{dx}{f(x)} \leqslant \frac{\Delta_j}{\inf\limits_{[z_{j-1},z_j)} f(x)} \leqslant 1, \quad j = \overline{1, \infty},$$

суммируя которые по $j = \overline{1, N+1}$ выводим

$$\int\limits_{1}^{z_{N+1}} \frac{dx}{f(x)} \leqslant N+1, \quad N \geq 0. \tag{3. 8}$$

Пусть λ-разбиение определяется П-последовательностью $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$. Соединяя (3. 8), (1. 15), получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega_{z_N}(f)} |u|^{q+1}d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_{z_N}(f)} |\nabla u|^{m+1}d\mathbf{x} \leqslant Me^{\kappa}\exp\left(-\kappa\int\limits_{1}^{z_{N+1}} \frac{dx}{f(x)}\right), \quad N \geq 0. \tag{3. 9}$$

Выберем произвольное $r \geq 1$, зафиксируем $N \geq 0$ такое, что $r \in [z_N, z_{N+1})$, из (3. 9) выводим соотношение (1. 19).

4. λ-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В этом параграфе для областей, расположенных вдоль оси Ox_1, доказывается необходимое и достаточное условие существования λ-последовательности, приводится способ построения λ-последовательности, являющейся оптимальной.

Лемма 1. *Пусть z, a, b, c такие действительные числа, что $0 < z \leqslant a < b \leqslant c$, $\triangle = (z,a) \cup (b,c)$, $|\triangle| = a - z + c - b$, тогда для любой функции $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ при $k \geq 1$ справедливо неравенство*

$$\|g\|_{k,\triangle} \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a}\right)^{1/k} \|g\|_{k,(a,b)} + (c-z)\|g'\|_{k,(z,c)}. \tag{4. 1}$$

Доказательство. Из формулы Ньютона–Лейбница следует неравенство

$$|g(x)| \leqslant |g(y)| + \int\limits_y^x |g'(t)|dt, \quad a \leqslant y < x \leqslant c. \tag{4. 2}$$

Используя неравенство Гельдера, оценим интеграл

$$\int\limits_y^x 1 \cdot |g'(t)|dt \leqslant (x-y)^{(k-1)/k}\|g'\|_{k,(y,x)},$$

тогда неравенство (4. 2) можем записать в виде

$$\begin{gathered} |g(x)| \leqslant |g(y)| + (x-y)^{(k-1)/k}\|g'\|_{k,(y,x)} \leqslant \\ \leqslant |g(y)| + (c-a)^{(k-1)/k}\|g'\|_{k,(a,c)}, \quad a \leqslant y < x \leqslant c. \end{gathered} \tag{4. 3}$$

Применив интегральное неравенство Минковского по $x \in (b,c)$ и $y \in (a,b)$, будем иметь

$$(b-a)^{1/k}\|g\|_{k,(b,c)} \leqslant (c-b)^{1/k}\left\{\|g\|_{k,(a,b)} + (c-a)^{(k-1)/k}(b-a)^{1/k}\|g'\|_{k,(a,c)}\right\}. \tag{4. 4}$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$(b-a)^{1/k}\|g\|_{k,(z,a)} \leqslant (a-z)^{1/k}\left\{\|g\|_{k,(a,b)} + (b-z)^{(k-1)/k}(b-a)^{1/k}\|g'\|_{k,(z,b)}\right\}. \tag{4. 5}$$

Объединив (4. 4) и (4. 5), можем записать

$$(b-a)^{1/k}\|g\|_{k,\Delta} \leqslant |\Delta|^{1/k}\left\{\|g\|_{k,(a,b)} + (c-z)^{(k-1)/k}(b-a)^{1/k}\|g'\|_{k,(z,c)}\right\}.$$

Учитывая то, что $|\triangle| < c - z$, из последнего выводим (4. 1).

Утверждение 3. *Пусть $0 < z \leqslant a < b \leqslant c$, $k = m + 1$, $m \geq 1$, тогда*

$$\lambda^{-1/k}(z,c) \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a} + 1\right)^{1/k} \lambda^{-1/k}(a,b) + (c-z). \tag{4. 6}$$

Если дополнительно выполнено условие

$$2 \leqslant \lambda(a,b)(b-a)(c-z)^m, \tag{4. 7}$$

то

$$1 \leqslant 2^k(c-z)^k\lambda(z,c). \tag{4. 8}$$

Доказательство. Применим неравенство (4.1) к интервалам $(a,b) \subset (z,c)$ и функции $g(x_1, \mathbf{x}') \in C_0^\infty(\Omega)$, продолженной нулем вне Ω, по переменной x_1 в следующем виде

$$\|g(\mathbf{x}')\|_{k,\Delta} \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a}\right)^{1/k} \|g(\mathbf{x}')\|_{k,(a,b)} + (c-z)\|D_{x_1}g(\mathbf{x}')\|_{k,(z,c)}, \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}_{n-1}.$$

Применяя интегральное неравенство Минковского по $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}_{n-1}$, находим, что

$$\|g\|_{k,\Omega_z^a\cup\Omega_b^c} \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a}\right)^{1/k}\|g\|_{k,\Omega_a^b} + (c-z)\|\nabla g\|_{k,\Omega_z^c}.$$

Используя неравенство Минковского для сумм, выводим

$$\|g\|_{k,\Omega_z^c} \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a}+1\right)^{1/k}\|g\|_{k,\Omega_a^b} + (c-z)\|\nabla g\|_{k,\Omega_z^c}.$$

Применив определение (1.12), получим неравенство (4.6).

Учитывая что $c-z > b-a$, из (4.6) имеем

$$\lambda^{-1/k}(z,c) \leqslant \left[\left(\frac{2}{\lambda(a,b)(b-a)(c-z)^{k-1}}\right)^{1/k}+1\right](c-z).$$

Из последнего неравенства и условия (4.7) следует (4.8).

Следствие. *Если область удовлетворяет условию* (1. 13)*, то λ-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ существует при произвольном $z_0>0$ с числом $\theta \geq 2^{m+1}$.*

Доказательство. Пусть z_{N-1} — элемент λ-последовательности с числом $\theta \geq 2^{m+1}$, и по предположению (1.13) $\lambda(z_{N-1},z_*) > 0$. В качестве следующего элемента λ-последовательности можно взять произвольное $z_N \geq z_*$, удовлетворяющее неравенству $2 \leqslant \lambda(z_{N-1},z_*)(z_*-z_{N-1})(z_N-z_{N-1})^m$. Тогда соотношение (1.11) следует из утверждения 3 при $a=z=z_{N-1},\ b=z_*,\ c=z_N.$

Построим специальную $\overline{\lambda}$-последовательность $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ с числом $\overline{\theta} \geq 2^{m+1}$ и покажем, что она является оптимальной. Для этого сначала докажем справедливость неравенства

$$\varlimsup_{r\to r_2}\lambda(r_1,r) \leqslant \lambda(r_1,r_2). \tag{4. 9}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем ненулевую функцию $g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$(\lambda(r_1,r_2)+\varepsilon)\|g(\mathbf{x})\|^{m+1}_{m+1,\Omega_{r_1}^{r_2}} \geq \|\nabla g(\mathbf{x})\|^{m+1}_{m+1,\Omega_{r_1}^{r_2}}.$$

Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, нетрудно установить существование такого числа $\delta>0$, что

$$(\lambda(r_1,r_2)+2\varepsilon)\|g(\mathbf{x})\|^{m+1}_{m+1,\Omega_{r_1}^{r}} \geq \|\nabla g(\mathbf{x})\|^{m+1}_{m+1,\Omega_{r_1}^{r}}$$

при всех r таких, что $|r-r_2|<\delta$. Отсюда следует, что

$$\lambda(r_1,r) \leqslant \lambda(r_1,r_2)+2\varepsilon, \quad r:\ |r-r_2|<\delta.$$

Таким образом, неравенство (4.9) установлено.

Пусть построен элемент $\overline{z}_{\nu-1}$, положим

$$\overline{z}_\nu = \inf\{x > \overline{z}_{\nu-1} \mid 1 \leqslant \overline{\theta}\lambda(\overline{z}_{\nu-1},x)(x-\overline{z}_{\nu-1})^{m+1}\}.$$

Непустота множества под знаком inf при $\overline{\theta} \geq 2^{m+1}$ вытекает из следствия. Благодаря (4.9) имеем неравенство

$$1 \leqslant \overline{\theta}\lambda(\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu)(\overline{z}_\nu-\overline{z}_{\nu-1})^{m+1}. \tag{4. 10}$$

Кроме того, при любом $c \in (\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu)$ выполнено противоположное неравенство

$$1 > \overline{\theta}\lambda(\overline{z}_{\nu-1},c)(c-\overline{z}_{\nu-1})^{m+1}. \tag{4. 11}$$

Утверждение 4. *Пусть $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольная λ-последовательность с $\theta>0$, $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ — специальная $\overline{\lambda}$-последовательность с $\overline{\theta} \geq 2^{m+1}$. Тогда найдется число $C(\theta)>0$ такое, что справедлива импликация* (1.16).

Доказательство. Достаточно установить неравенство

$$\overline{z}_\nu - \overline{z}_{\nu-1} \leqslant D(z_j - z_{j-1}) \tag{4. 12}$$

для вложенных отрезков $[z_{j-1}, z_j] \subset [\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)$. Действительно, на промежутке $[\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)$ расположится не более $[D]$ целых отрезков $[z_{j-1}, z_j]$ и, возможно, два нецелых отрезка на концах. Всего отрезок $[\overline{z}_0, \overline{z}_N]$ будет содержать не более $(D+1)N$ отрезков $[z_{j-1}, z_j]$, поэтому справедливо (1.16). Для доказательства неравенства (4.12) установим оценку

$$c - \overline{z}_{\nu-1} \leqslant D(z_j - z_{j-1}) \tag{4. 13}$$

при некотором $c \geq \overline{z}_\nu$.

Положим $D = (2\theta)^{\frac{1}{m}}$, выберем число c_1 из равенства

$$\frac{c_1 - \overline{z}_{\nu-1}}{z_j - z_{j-1}} = D, \tag{4. 14}$$

обеспечивающего (4.13). Тогда, пользуясь определением λ-последовательности (1. 11), выводим

$$\frac{(c_1 - \overline{z}_{\nu-1})^m}{\theta(z_j - z_{j-1})^m} = 2 \geq \frac{2}{\theta\lambda(z_{j-1}, z_j)(z_j - z_{j-1})^{m+1}},$$

и условие (4.7) выполнено при $z = \overline{z}_{\nu-1},\ a = z_{j-1},\ b = z_j,\ c = \max(c_1, z_j)$. Применим утверждение 3, из (4.8) следует, что точка $\overline{z}_\nu$ специальной $\overline{\lambda}$-последовательности должна удовлетворять неравенству $\overline{z}_\nu \leqslant c$. Поскольку $z_j < \overline{z}_\nu$, то $c = c_1$ и (4.13) справедливо. Утверждение доказано.

5. П-последовательности

В этом параграфе доказывается, что П-последовательность является λ-последовательностью, а при дополнительном требовании на функцию f — оптимальной λ-последовательностью.

Лемма 2. *Рассмотрим область* $\Pi_a^{b+} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \mid a < x < b,\ y > 0\}$ *и функцию* $g(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_2)$, *равную нулю в окрестности луча* $\{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \mid x = a,\ y > h\}$. *При* $k \geq 1$ *справедливо обобщенное неравенство Фридрихса–Стеклова*

$$\|g\|_{k,\Pi_a^{b+}} \leqslant 3^{1/k}(b-a)\|D_x g\|_{k,\Pi_a^{b+}} + 2h\|D_y g\|_{k,\Pi_a^{b+}}. \tag{5. 1}$$

Доказательство. Ввиду того, что $g(a,y) = 0$ при $y > h$, неравенство (4.3) запишем в виде

$$|g(x,y)| \leqslant (b-a)^{(k-1)/k}\|D_x g(y)\|_{k,(a,b)}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Из последнего неравенства выводим:

$$\|g\|_{k,(a,b)\times(h,\infty)} \leqslant (b-a)\|D_x g\|_{k,(a,b)\times(h,\infty)}. \tag{5. 2}$$

Далее, при каждом $x,\ x \in (a,b)$, из неравенства (4. 1) при $z = 0,\ a = h,\ b = c = 2h$ получаем

$$\|g(x)\|_{k,(0,h)} \leqslant 2^{1/k}\|g(x)\|_{k,(h,2h)} + 2h\|D_y g(x)\|_{k,(0,2h)}.$$

Пользуясь интегральным неравенством Минковского по $x \in (a,b)$, выводим

$$\|g\|_{k,(a,b)\times(0,h)} \leqslant 2^{1/k}\|g\|_{k,(a,b)\times(h,2h)} + 2h\|D_y g\|_{k,(a,b)\times(0,2h)}. \tag{5. 3}$$

Объединяя неравенства (5. 2) и (5. 3), пользуясь неравенством Минковского для сумм, установим неравенство (5. 1).

Утверждение 5. П-*последовательность* $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ *функции* $f(x)$ *является* λ-*последовательностью для области вращения* $\Omega(f)$.

Доказательство. Для каждого $s = \overline{2,n}$ рассмотрим область типа слоя

$$\Omega[f,s] = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0,\ |x_s| < f(x_1)\},$$

с положительной функцией $f(x_1)$.

Зафиксируем номер $j \in \mathbb{N}$. Функцию $g(x_1, \mathbf{x}') \in C_0^\infty(\Omega[f,s])$ продолжим на все $\mathbb{R}_n$ нулем за пределы $\Omega[f,s]$. Пусть точка $\widehat{z}_j \in [z_{j-1}, z_j]$ такая, что $\inf\limits_{[z_{j-1},z_j]} f(x) = f(\widehat{z}_j)$, тогда из (1. 18) следует

$$f(\widehat{z}_j) \leqslant \Delta_j. \tag{5. 4}$$

Введем обозначения:

$$\Pi_a^b = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}_2 \mid a < x_1 < b\},$$

$$\Pi_a^{b\pm} = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}_2 \mid a < x_1 < b,\ \pm x_s > 0\}.$$

Воспользовавшись неравенством (5. 1) при $k = m+1,\ m \geq 1$, для полуполосы $\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}$, получим

$$\|g(\mathbf{x}'')\|_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}} \leqslant 2\Delta_j \|D_{x_1} g(\mathbf{x}'')\|_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}} + 2f(\widehat{z}_j)\|D_{x_s} g(\mathbf{x}'')\|_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}},$$

$x'' = (x_2, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}_{n-2}$. Применив (5. 4), выводим

$$\|g(\mathbf{x}'')\|^k_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}} \leqslant 4^k \Delta_j^k \|\nabla g(\mathbf{x}'')\|_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}}.$$

Установив аналогичные неравенства для областей $\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j-}$, $\Pi_{\widehat{z}_j}^{z_j+}$, $\Pi_{\widehat{z}_j}^{z_j-}$, сложив эти четыре неравенства и проинтегрировав по x'', получим соотношение

$$\|g\|^k_{k,\Omega_{z_{j-1}}^{z_j}[f,s]} \leqslant 4^k \Delta_j^k \|\nabla g\|^k_{k,\Omega_{z_{j-1}}^{z_j}[f,s]}.$$

Из него следует оценка

$$1 \leqslant 4^{m+1}\Delta_j^{m+1}\lambda(z_{j-1}, z_j; \Omega[f,s]).$$

Поскольку $\Omega(f) \subset \Omega[f,s]$, то $\lambda(a,b;\Omega[f,s]) \leqslant \lambda(a,b;\Omega(f))$. Это следует из того, что для $\Omega(f)$ сужается множество, по которому берется инфимум в (1. 12). Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Если выполнено условие* (1. 20), *то* Π-*последовательность* $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ *функции* $f(x)$ *является оптимальной* λ-*последовательностью для* $\Omega(f)$. *При этом для области* $\Omega(f)$ *вида* (1. 17) *оценка* (1.19) *решения задачи* (1. 1), (1. 2) *будет того же порядка, что и оценка* (1. 15).

Доказательство. При доказательстве утверждения Π-последовательность $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ и связанные с ней атрибуты будем помечать чертой сверху. Сначала установим для Π-последовательности импликацию (1. 16). Зафиксируем натуральное ν. Обозначим через $\widehat{\overline{z}}_\nu$ любую точку отрезка $[\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu]$ такую, что $\inf\limits_{[\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu]} f(x) = f(\widehat{\overline{z}}_\nu)$. Применяя условие (1.20), находим вблизи $\widehat{\overline{z}}_\nu$ точку $\overline{z}_\nu^* \in [\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)$ такую, что

$$f(\overline{z}_\nu^*) \leqslant \omega f(\widehat{\overline{z}}_\nu). \tag{5. 5}$$

Из определения Π-последовательности следуют неравенства

$$\overline{\Delta}_\nu \leqslant \inf_{[\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu)} f(x) \leqslant f(\overline{z}_\nu^*), \tag{5. 6}$$

$$f(\widehat{\overline{z}}_\nu) \leqslant \overline{\Delta}_\nu. \tag{5. 7}$$

Соединяя (5. 6) и (5. 5), выводим

$$\overline{\Delta}_\nu \leqslant \omega f(\widehat{\overline{z}}_\nu). \tag{5. 8}$$

Пользуясь (5. 6), из неравенства (1. 20) при $x = \overline{z}_\nu^*$ находим, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [\overline{z}_\nu^* - \overline{\Delta}_\nu, \overline{z}_\nu^* + \overline{\Delta}_\nu]\} \leqslant \omega f(\overline{z}_\nu^*).$$

Ввиду включений $[\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu] \subset [\overline{z}_\nu^* - \overline{\Delta}_\nu, \overline{z}_\nu^* + \overline{\Delta}_\nu]$, применяя (5. 5), устанавливаем справедливость неравенств

$$f(\widehat{\overline{z}}_\nu) \leqslant f(x) \leqslant \omega f(\overline{z}_\nu^*) \leqslant \omega^2 f(\widehat{\overline{z}}_\nu), \quad x \in [\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu]. \tag{5. 9}$$

Далее, для любого отрезка $[a,b]\subset[\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu]$ докажем неравенства

$$\frac{\delta_1}{f^{m+1}(\widehat{\overline{z}}_\nu)}\leqslant\lambda(a,b;\Omega(f))\leqslant\frac{\delta_2}{f^{m+1}(\widehat{\overline{z}}_\nu)},\tag{5. 10}$$

с положительными числами δ_1,δ_2, не зависящими от ν.

Положим $h=\omega^2 f(\widehat{\overline{z}}_\nu)$, тогда из (5. 9) следуют неравенства $\lambda(a,b;\Omega(f))\geq\lambda(a,b;\Omega[f,s])\geq$ $\geq\lambda(a,b;\Omega[h,s])$, $s=\overline{2,n}$. Совершая замену переменных $x_s=hy_s$, полагая $v(x_1,...,y_s,...,x_n)=g(x_1,...,x_s,...,x_n)$, получим

$$\lambda(a,b;\Omega[h,s])\geq\inf_{v(x_1,...,y_s,...,x_n)\in C_0^\infty(\Omega[1,s])}\frac{\int\limits_{\Omega_a^b[1,s]}|D_{y_s}v|^{m+1}dx_1...dy_s...dx_n}{h^{m+1}\int\limits_{\Omega_a^b[1,s]}|v|^{m+1}dx_1...dy_s...dx_n}=\frac{\delta_1}{f^{m+1}(\widehat{\overline{z}}_\nu)}.$$

Чтобы доказать правое неравенство (5.10), положим $h=f(\widehat{\overline{z}}_\nu)$, тогда справедливы неравенства

$$\lambda(a,b;\Omega(f))\leqslant\lambda(a,b;\Omega(h)).$$

Далее, нетрудно показать, что

$$\lambda(a,b;\Omega(h))=\inf_{g(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega(h))}\frac{\int\limits_{\Omega_a^b(h)}|\nabla g|^{m+1}d\mathbf{x}}{\int\limits_{\Omega_a^b(h)}|g|^{m+1}d\mathbf{x}}=\inf_{g(\mathbf{x}')\in C_0^\infty(B(h,\mathbf{0}'))}\frac{\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}|\nabla' g|^{m+1}d\mathbf{x}'}{\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}|g|^{m+1}d\mathbf{x}'}.$$

Совершая замену переменных $\mathbf{x}'=h\mathbf{y}'$, полагая $v(\mathbf{y}')=g(\mathbf{x}')$, оценим величину

$$\lambda(a,b;\Omega(h))=\frac{1}{h^{m+1}}\inf_{v(\mathbf{y}')\in C_0^\infty(B(1,\mathbf{0}'))}\frac{\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}|\nabla' v|^{m+1}d\mathbf{y}'}{\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}|v|^{m+1}d\mathbf{y}'}=\frac{\delta_2}{h^{m+1}},$$

где $\nabla' v=(D_{y_2}v,...,D_{y_n}v)$. Неравенства (5. 10) доказаны.

Пусть $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ — произвольная λ-последовательность с $\theta>0$. Для вложенных отрезков $[z_{j-1},z_j]\subset[\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu]$ из определения λ-последовательности (1. 11) и неравенств (5. 10), (5. 8) вытекают оценки

$$\Delta_j^{m+1}\geq\frac{1}{\theta\lambda(z_{j-1},z_j)}\geq\frac{f^{m+1}(\widehat{\overline{z}}_\nu)}{\theta\delta_2}\geq\frac{\overline{\Delta}_\nu^{m+1}}{\theta\delta_2\omega^{m+1}},$$

из которых следуют неравенства $\overline{\Delta}_\nu\leqslant D\Delta_j$. Таким образом, для рассматриваемой П-последовательности $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ и произвольной λ-последовательности $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ справедливо неравенство (4. 12). Повторяя рассуждения утверждения 4, устанавливаем импликацию (1. 16).

Для доказательства второй части утверждения достаточно установить неравенства

$$\alpha_1\int\limits_1^r\frac{dx}{f(x)}\leqslant N\leqslant\alpha_2\int\limits_1^r\frac{dx}{f(x)},\tag{5. 11}$$

при $r\in[\overline{z}_N,\overline{z}_{N+1})$, $N\geq1$. Левая часть неравенства (5.11) следует из (3.8). Применяя (5. 9), (5. 7), выводим

$$\int\limits_{\overline{z}_{\nu-1}}^{\overline{z}_\nu}\frac{dx}{f(x)}\geq\frac{\overline{\Delta}_\nu}{\omega^2 f(\widehat{\overline{z}}_\nu)}\geq\frac{1}{\omega^2},\quad\nu=\overline{1,\infty}.\tag{5. 12}$$

Просуммировав по $\nu=\overline{1,N}$ последние неравенства, устанавливаем правую часть (5. 11).

Авторы выражают искренною благодарность Ф.Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей* // Матем. сб. 1980. Т. 112, № 4. С. 588–610.
2. Ландис Е.М., Панасенко Г.П. *Об одном варианте типа Фрагмена-Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной* // Труды сем. им. И.Г. Петровского. 1979. Вып. 5. С. 105–136.
3. Кондратьев В.А., Копачек И., Лекнеишвили Д.М., Олейник О.А. *Неулучшаемые оценки в пространствах Гельдера и точный принцип Сен-Венана для решений бигармонического уравнения* // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 166. С. 91–106.
4. Кожевникова Л.М. *Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Матем. сб. 2008. Т. 199, №8. С. 61–94.
5. Тедеев А.Ф., Шишков А.Е. *О качественных свойствах решений и субрешений квазилинейных эллиптических уравнений* // Изв. вузов. 1984. Матем. №1. С. 62–68.
6. Шишков А.Е. *Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28, №6. С. 134–146.
7. Кожевникова Л.М. *О существовании и единственности решений задачи Дирихле для псевдодифференциальных эллиптических уравнений в областях с некомпактными границами* // Уфимск. матем. журн. 2009. Т.1, №1. С. 38–68.
8. Кожевникова Л.М. *Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений* // Изв. РАН. 2006. Т. 70, №6. С. 93–128.
9. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О единственности решения смешанной задачи для уравнений теории упругости в неограниченной области* // УМН. 1976. Т. 31, №5. С. 247–248.
10. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973.

Лариса Михайловна Кожевникова,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: kosul@mail.ru

Руслан Халикович Каримов,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: ruslan7k7@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 67-89.

УДК 517.5

БАЗИСЫ "ПО ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫМ ГРУППАМ"

А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. Изучаются базисы в инвариантном подпространстве, составленные из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования, показатели которых разбиты на относительно малые группы.

Ключевые слова: экспонента, базис, инвариантное подпространство, целая функция.

Пусть D — выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $H(D)$ будем обозначать пространство функций, аналитических в D, с топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть W — нетривиальное ($W \neq H(D)$ и $W \neq \{0\}$) замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, т.е. вместе с каждой функцией g подпространство W содержит и ее производную g'. В работе изучаются базисы в W, составленные из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций этого оператора, показатели которых разбиты на относительно малые группы.

Собственными функциями оператора дифференцироания в $H(D)$ являются $\exp(\lambda z)$, а его собственные числа λ заполняют всю комплексную плоскость. В подпространстве W спектр оператора дифференцирования является уже не более чем счетным множеством. При этом если он бесконечен, то единственная его предельная точка ∞. Поясним сказанное. Пусть $\hat{\mu}(\lambda)$ обозначает преобразование Лапласа функционала $\mu \in H^*(D)$: $\hat{\mu}(\lambda) = \mu(\exp(\lambda z))$. Функция $\hat{\mu}(\lambda)$ является целой и имеет экспоненциальный тип, т.е. для некоторых $A, B > 0$ верно неравенство $|\hat{\mu}(\lambda)| \leqslant A \exp(B|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Более того, известно (см., например, [1]), что преобразование Лапласа устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм пространств $H^*(D)$ и P_D, где P_D есть индуктивный предел Банаховых пространств,

$$P_s = \{f \in H(\mathbb{C}) : ||f||_s = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)| \exp(-H_{K_s}(\lambda)) < \infty\}.$$

Поскольку подпространство $W \subset H(D)$ нетривиально, то существует ненулевой аналитический функционал μ в области D, аннулирующий W ($\mu(g) = 0 \ \forall g \in W$). В частности, он обращается в ноль на всех собственных функциях оператора дифференцирования в W, т. е. на всех экспонентах, принадлежащих подпространству W. Другими словами, если $\exp(\lambda z)$ — одна из таких функций, то по определению преобразования Лапласа $\hat{\mu}(\lambda) = 0$. Нулевое множество целой функции $\hat{\mu}(\lambda)$ не более чем счетно. Если оно бесконечно, то единственной его предельной точкой является ∞. Таким образом, верно сказанное выше относительно спектра оператора дифференцирования в W. Пусть J обозначает множество преобразований Лапласа всех функционалов $\mu \in H^*(D)$, аннулирующих подпространство W. Тогда J — замкнутое линейное подпространство в P_D.

Пусть $\{\lambda_k\}$ — набор общих нулей всех функций из J. Уже отмечено, что в случае, когда $\exp(\lambda z)$ — собственная функция оператора дифференцирования в W, ее показатель

A.S. Krivosheyev, Basis is broken by relatively small groups.

Поступила 28 апреля 2010 г.

λ совпадает с одним из чисел λ_k. Обратно, пусть функция $\exp(\lambda z)$ не принадлежит подпространству W. Тогда в силу замкнутости последнего найдется функционал $\mu \in H^*(D)$, аннулирующий W и такой, что $\hat{\mu}(\lambda) = \mu(\exp(\lambda z)) \neq 0$. Следовательно, λ не входит в число общих нулей функций из J. Таким образом, множество $\{\lambda_k\}$ является спектром оператора дифференцирования в подпространстве W.

Наша основная задача — найти представление функций из W при помощи некоторых простых (с точки зрения их определения) функций этого подпространства. Таковыми несомненно являются собственные функции оператора дифференцирования. Однако одних лишь собственных функций недостаточно для такого представления даже в случае, когда W есть пространство решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Фундаментальный принцип Л. Эйлера утверждает, что это пространство совпадает с линейной оболочкой всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Последние, как известно, имеют вид $z^n \exp(\lambda z)$.

Пусть E — множество всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Опишем его. Поскольку подпространство W инвариантно относительно дифференцирования, то вместе с каждой функцией $z^n \exp(\lambda z)$ оно содержит и все функции вида $z^m \exp(\lambda z)$, где $0 \leqslant m \leqslant n$. Поэтому с учетом сказанного ранее заключаем, что E есть совокупность функций $\{z^n \exp(\lambda_k z)\}$, где $\{\lambda_k\}$ — набор общих нулей функций из J, и $0 \leqslant n < n_k$. При этом для каждого номера k число n_k конечно и совпадает с кратностью общего нуля λ_k. Последняя определяется из условий: 1) $\varphi^{(n)}(\lambda_k) = 0$ для любого $n = 0, 1, \ldots, n_k - 1$ и любой функции $\varphi \in J$, 2) существует $\varphi_k \in J$ такая, что $\varphi_k^{(n_k)}(\lambda_k) \neq 0$. Действительно, дифференцируя равенство из определения преобразования Лапласа по λ, получаем: $\hat{\mu}^{(n)}(\lambda) = (\mu, z^n \exp(\lambda z))$. Следовательно, если функция $z^n \exp(\lambda z)$ принадлежит W, то λ совпадает с одним из чисел λ_k и $n < n_k$. Обратно, если $z^n \exp(\lambda z)$ не принадлежит W, то, как и выше, найдется функционал $\mu \in H^*(D)$, аннулирующий W и такой, что $\hat{\mu}^{(n)}(\lambda) = (\mu, z^n \exp(\lambda z)) \neq 0$. Таким образом, $E = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$, где $\{\lambda_k, n_k\}$ — совокупность общих нулей и их кратностей всех функций из J.

Очевидно, что необходимым условием представления функций из подпространства W посредством собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W является полнота множества E в W. Если это имеет место, то говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать только подпространства $W \subset H(D)$, которые допускают спектральный синтез. К настоящему времени проблема спектрального синтеза в выпуклых областях комплексной плоскости достаточно хорошо изучена. К примеру, в очень важном частном случае, когда W является пространством решений однородного уравнения свертки

$$M_\mu(g)(w) = \mu(g(z - w)) = 0, \qquad g \in H(D), \mu \in H^*(D),$$

спектральный синтез всегда имеет место (см. [2]). Заметим, что, по крайней мере, для некоторых выпуклых областей D замкнутые подпространства в $H(D)$, инвариантные относительно оператора дифференцирования, совпадают с пространствами решений системы однородных уравнений свертки (см., например, [3, 4]). Следовательно, наиболее общим примером инвариантных подпространств W можно считать пространства решений системы уравнений

$$M_{\mu_1}(g)(w) = \mu_1(g(z - w)) = 0, \ldots, M_{\mu_l}(g)(w) = \mu_l(g(z - w)) = 0.$$

В этом случае есть простые достаточные условия наличия спектрального синтеза в W. Он имеет место, если существует функция $\varphi \in J$, которая делится на характеристическую функцию $\hat{\mu}_j$ каждого оператора свертки M_{μ_j}, $j = 1, \ldots, l$ (см. [5, 6]). Для общих инвариантных подпространств также имеются необходимые и достаточные условия допустимости спектрального синтеза (см. [5, 6]).

В дальнейшем для удобства обозначений мы ограничимся рассмотрением замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез и имеющих бесконечный спектр, поскольку в противном случае инвариантное подпространство W совпадает с пространством решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Такое пространство представляет собой линейную оболочку собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Этот факт составляет содержание фундаментального принципа Л. Эйлера, который полностью решает проблему представления функций из W в этом случае.

Из сказанного выше следует, что любое нетривиальное замкнутое инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, можно получить следующим образом. Выберем последовательность $\{\lambda_k, n_k\}$, где λ_k — комплексные, а n_k — натуральные числа, удовлетворяющую условию: система $E = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$ не полна в $H(D)$. По теореме Хана – Банаха последнее равносильно существованию ненулевого аналитического функционала $\mu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на функциях системы E. Другими словами, найдется функция $\varphi \in P_D$ (преобразование Лапласа функционала μ), которая обращается в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k. В качестве W возьмем теперь замыкание в $H(D)$ линейной оболочки системы E. Полученное подпространство, как нетрудно видеть, является нетривиальным замкнутым инвариантным относительно оператора дифференцирования и допускает спектральный синтез. Таким образом можно получить любое указанное подпространство.

Лемма 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, W — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $H(D)$, $E = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ — семейство собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) подпространство W допускает спектральный синтез,
2) множество J совпадает с множеством функций $\varphi \in P_D$, которые обращаются в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k, $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Предположим, что утверждение 1 имеет место и пусть $\varphi \in J$. Если μ — аналитический функционал в D, преобразованием Лапласа которого является функция φ, то по определению множества J функционал μ аннулирует подпространство W. В частности, он обращается в ноль на всех функциях системы E. Поэтому $\varphi = \hat{\mu}$ обращается в ноль во всех точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k. Пусть теперь $\varphi \in P_D$ обращается в ноль во всех точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k, и $\mu \in H^*(D)$ такой, что $\varphi = \hat{\mu}$. Тогда μ обращается в ноль на всех функциях системы E. Поскольку E полна в W, то отсюда с учетом непрерывности функционала μ следует, что он аннулирует подпространство W. Поэтому согласно определению множества J оно содержит функцию φ.

$2 \Rightarrow 1$. Предположим, что утверждение 2 верно, но тем не менее подпространство W не допускает спектральный синтез, т.е. система E не полна в W. Через $\tilde{W}$ обозначим замыкание в $H(D)$ линейной оболочки множества E. Тогда найдется функция $g \in W$, которая не принадлежит $\tilde{W}$. По теореме Хана – Банаха существует функционал $\mu \in H^*(D)$, аннулирующий подпространство $\tilde{W}$ и такой, что $\mu(g) \neq 0$. Последнее означает, что функция $\hat{\mu} \in P_D$ не принадлежит множеству J. С другой стороны, функционал μ аннулирует $\tilde{W}$ и, в частности, обращается в ноль на всех функциях системы E. Это означает, что $\hat{\mu}$ обращается в ноль во всех точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k. Тогда согласно утверждению 2 функция $\hat{\mu}$ принадлежит множеству J. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Элементы инвариантного подпространства W с бесконечным спектром в отличие от случая конечного спектра не всегда могут быть представлены как линейные комбинации собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W и даже как ряды по таким функциям. Как уже было отмечено во введении, такому представлению может помешать излишняя концентрация точек спектра, т.е. сильное сближение точек λ_k друг с другом при $k \to \infty$. Некоторые элементы системы E в такой ситуации, являясь линейно независимыми, будут тем не менее слишком схожи по поведению. В результате появляются ряды по функциям системы E, которые расходятся, но после подходящей расстановки скобок в них становятся сходящимися. Это приводит к тому, что некоторые функции из W (суммы "рядов со скобками") не могут быть представлены рядами по функциям системы E. Иногда удается исправить ситуацию с представлением, заменив функции системы E другими функциями. Для этого нужно провести процедуру, схожую (но лишь по смыслу) с процессом ортогонализации полной системы в гильбертовом пространстве, после которой новая полная система становится базисом. К осуществлению подобной процедуры мы сейчас и приступим.

Пусть W — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, и $E = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ — система собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Функции новой системы, которая должна стать базисом в W, будем искать как линейные комбинации элементов системы E, разбитой на "относительно малые группы". Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ разбита на группы U_m, $m = 1, 2, \ldots$ Сделаем перенумерацию членов этой последовательности. Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности — $n_{m,l}$. Здесь первый индекс m совпадает с номером группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m — число точек спектра, попавших в группу U_m. Будем говорить, что группы U_m, $m = 1, 2, \ldots$, относительно малы, если выполнено следующее:

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

Заметим, что числа $\lambda_{m,1}$ здесь можно заменить любыми другими представителями $\lambda_{m,j}$ групп U_m. Это сразу следует из соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j}|}{|\lambda_{m,1}|} \leqslant \lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} + \lim_{m\to\infty} \frac{|\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} = 1.$$

В новых обозначениях система собственных и присоединенных функций выглядит следующим образом: $E = \{z^n \exp \lambda_{m,l} z\}_{m=1,l=1,n=0}^{\infty,M_m,n_{m,l}-1}$. Пусть N_m — число точек спектра, попавших в группу U_m, $m = 1, 2, \ldots$, с учетом их кратности, т.е. $N_m = \sum\limits_{l=1}^{M_m}$. По системе E построим систему функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$. Положим

$$e_{m,j}(z) = \sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} z^n \exp(\lambda_{m,l} z), \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, N_m.$$

Наша ближайшая задача — подходящим образом определить коэффициенты $c_{m,j,l,n}$. Фиксируем номер $m \geq 1$. Пусть W_m — линейная оболочка функций $z^n \exp(\lambda_{m,l} z)$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$. Множество W_m — конечномерное (а значит, и замкнутое) подпространство в $H(D)$ размерности N_m. Предполагается, что система $\tilde{E}$ будет базисом в W. Поэтому набор функций $e_{m,j}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, N_m$ должен быть базисом в W_m. Сопряженное к W_m пространство W_m^* можно отождествить со стандартным подпространством $Q(N_m - 1)$ многочленов степени не выше $N_m - 1$. Поэтому проще всего искать базис в W_m как базис, биортогональный к базису в этом подпространстве. Для дальнейшего нам удобно поподробнее описать процесс отождествления W_m^* с $Q(N_m - 1)$.

Поскольку $H(D)$ является пространством Фреше – Шварца, а W_m — его замкнутое подпространство, то (см., например, [7]) W_m^* алгебраически и топологически изоморфно фактор-пространству $H^*(D)/W_m^0$, где W_m^0 — замкнутое подпространство в $H^*(D)$, состоящее из функционалов, аннулирующих W_m. Используя преобразование Лапласа, мы как следствие получаем также изоморфизм $W_m^* \cong P_D/J_m$, где J_m — замкнутое подпространство в P_D, состоящее из преобразований Лапласа элементов W_m^0. Поскольку W_m — линейная оболочка функций $z^n \exp(\lambda_{m,l} z)$, $l = 1, \ldots, M_m$, $n = 0, \ldots, n_{m,l} - 1$, то функционал из $H^*(D)$ принадлежит подпространству W_m^0 тогда и только тогда, когда он обращается в ноль на всех этих функциях. Следовательно, множество J_m состоит из тех и только тех функций $\varphi \in P_D$, которые обращаются в ноль в точках $\lambda_{m,l}$ с кратностью не меньшей, чем $n_{m,l}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$. Поэтому функция $\omega \in P_D$ принадлежит классу эквивалентности $[\psi] \in P_D/J_m$, порожденному функцией ψ, тогда и только тогда, когда выполнены равенства $\omega^{(n)}(\lambda_{m,l}) = \psi^{(n)}(\lambda_{m,l})$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$. Пространство P_D содержит в себе все многочлены. Кроме того, существует единственный многочлен $q(\lambda)$ степени не выше $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,l}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно принимает заданные значения $a_{m,l} \in \mathbb{C}$. Таким образом, имеет место изоморфизм между пространствами W_m^* и $Q(N_m - 1)$, определяемый равенствами $\nu(z^n \exp(\lambda_{m,l} z)) = q^{(n)}(\lambda_{m,l})$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$ где $\nu \in W_m^*$ и $q \in Q(N_m - 1)$.

Чтобы обеспечить подходящие оценки на функции $e_{m,j}(z)$, мы несколько модифицируем стандартный базис в пространстве многочленов $Q(N_m - 1)$. В качестве базиса в этом пространстве возьмем систему $\Theta_m = \{\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}\}_{j=0}^{N_m - 1}$. Теперь мы можем определить базис в пространстве W_m как систему функций $\tilde{E}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$, биортогональную к Θ_m. Пусть $\nu_{m,j}$ — функционал из W_m^*, соответствующий многочлену $\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^{j-1}}{(j-1)!}$ при указанном изоморфизме. Положим $b_{m,j,l,n} = \nu_{m,j}(z^n \exp(\lambda_{m,l} z))$, $j = 1, 2, \ldots, N_m$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$. Биортогональность систем $\tilde{E}_m$ и Θ_m обеспечивают равенства

$$\sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} b_{m,j,l,n} = 1, \quad \sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} b_{m,j,l,n} = 0, \quad k \neq j.$$

Следовательно, вектор, составленный из коэффициентов $c_{m,j,l,n}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$, является j-й строкой квадратной матрицы порядка $N_m \times N_m$, обратной к матрице, j-м столбцом которой является вектор, составленный из чисел $b_{m,j,l,n}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$. Заметим, что в частном случае, когда группа U_m состоит лишь из одной точки $\lambda_{m,1}$ (и тогда $N_m = n_{m,1}$), указанные матрицы являются единичными. В этом случае система $\tilde{E}_m$ имеет вид $\tilde{E}_m = \{z^{j-1} \exp(\lambda_{m,1} z)\}_{j=1}^{N_m}$.

Таким образом, мы построили систему функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, обладающую следующим свойством: для каждого $m = 1, 2, \ldots$ набор элементов $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$ является базисом в пространстве W_m, биортогональным к базису $\Theta_m = \{\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}\}_{j=0}^{N_m - 1}$ в пространстве $Q(N_m - 1)$. При этом действие функционала из W_m^*, определяемого многочленом $\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{J!}$, на функцию $z^n \exp(\lambda_{m,l} z)$ задается как значение n-й производной этого многочлена, вычисленной в точке $\lambda_{m,l}$.

Отметим, что построенная система функций $\tilde{E}$ обладает биортогональной последовательностью функционалов $\{\mu_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} \subset H^*(D)$. Действительно, любая неполная в $H(D)$ система функций $E = \{z^n \exp(\lambda_{m,l} z)\}_{m=1,l=1,n=0}^{\infty,M_m,n_{m,l}-1}$ (это имеет место в нашем случае, поскольку W — собственное подпространство в $H(D)$) обладает биортогональной последовательностью функционалов из $H^*(D)$ (см., например, [3, гл.2,] или [8]). Для каждого

$m = 1, 2, \ldots$ функционалы $\mu_{m,j}$, $j = 1, \ldots, N_m$ можно определить как линейные комбинации элементов последней последовательности. Коэффициенты этих линейных комбинаций являются строками указанной выше матрицы, составленной из производных многочленов $\frac{(\lambda-\lambda_{m,1})^j}{j!}$, вычисленных в точках $\lambda_{m,l}$. Таким образом, коэффициенты любого ряда $\sum d_{m,j} e_{m,j}(z)$, сходящегося равномерно на компактах в области D к функции $g \in H(D)$, однозначно определяются по формулам $d_{m,j} = \mu_{m,j}(g)$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_m$.

Приведем теперь другое представление функций $e_{m,j}(z)$, удобное для их оценок. Пусть Γ_m — контур, охватывающий точки $\lambda_{m,l}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, группы U_m, и $\omega_m(\lambda)$ — многочлен с этими нулями с учетом их кратности и со старшим коэффициентом, равным единице, т.е.

$$\omega_m = \prod_{l=1}^{M_m} (\lambda - \lambda_{m,l})^{n_{m,l}}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Для функции $f(\varsigma)$, аналитической на контуре Γ_m и внутри него, положим

$$q_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{f(\varsigma)(\omega_m(\varsigma) - \omega_m(\lambda))}{(\varsigma - \lambda)\omega_m(\varsigma)} d\varsigma, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

В случае, когда $f(\varsigma) = \exp(z\varsigma)$, вместо $q_m(\lambda, \exp(z\varsigma))$ будем использовать обозначение $q_m(\lambda, z)$. Формула (1) определяет известный интерполяционный многочлен степени не выше $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями функции $f(\varsigma)$ и ее производных, т.е.

$$q_m^{(n)}(\lambda_{m,l}, f) = f^{(n)}(\lambda_{m,l}), \qquad l = 1, 2, \ldots, M_m, n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1. \tag{2}$$

Если $f \in P_D$, то из последних равенств вытекает, что класс эквивалентности $[f] \in P_D/J_m$, порожденный функцией f, содержит многочлен $q_m(\lambda, f)$. Поэтому f и $q_m(\lambda, f)$ определяют один и тот же функционал из W_m^*. Функция $\exp(z\varsigma)$ является преобразованием Лапласа δ-функции, сосредоточенной в точке z: $\exp(z\varsigma) = \delta_z(\exp(w\varsigma))$. Следовательно, многочлен $q_m(\lambda, z)$ определяет функционал δ_z. Разложим $q_m(\lambda, z)$ по элементам системы Θ_m:

$$q_m(\lambda, z) = \sum_{j=0}^{N_m - 1} q_{m,j}(z) \frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}.$$

С учетом биортогональности систем Θ_m и $\tilde{E}_m$ находим отсюда, что при $p = 1, \ldots, N_m$

$$e_{m,p}(z) = \delta_z(e_{m,p}) = (q_m(\lambda, z), e_{m,p}) = \sum_{j=0}^{N_m - 1} q_{m,j}(z) (\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}, e_{m,p}) = q_{m,p-1}(z). \tag{3}$$

Таким образом, в каждой точке z функция $e_{m,p}(z)$ совпадает с $(p-1)$-й производной многочлена $q_m(\lambda, z)$, вычисленной в точке $\lambda_{m,1}$. Используя интегральную формулу Коши для производных, получаем:

$$e_{m,p}(z) = \frac{(p-1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda - \lambda_{m,1}| = 1} \frac{q_m(\lambda, z) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{m,1})^p}, \qquad p = 1, \ldots, N_m. \tag{4}$$

Это представление позволяет установить оценки сверху на функции системы $\tilde{E}$. Но прежде введем еще некоторые обозначения и докажем вспомогательные результаты. Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Положим

$$X(D) = \{\xi \in \mathbb{C} : H_D(\xi) = +\infty\}.$$

Из выпуклости и однородности функции $H_D(\xi)$ следует, что дополнение $\mathbb{C} \setminus X(D)$ — конус. Другими словами, $\mathbb{C} \setminus X(D)$ является углом раствора не более чем π, за исключением четырех следующих случаев: 1) $\mathbb{C} \setminus X(D)$ — вся плоскость ($X(D)$ =), если D ограничена; 2) $\mathbb{C} \setminus X(D)$ совпадает с началом координат, если $D = \mathbb{C}$; 3) $\mathbb{C} \setminus X(D)$ — луч, если D — полуплоскость; 4) $\mathbb{C} \setminus X(D)$ — прямая, если D — полоса. Таким образом, в случае, когда D — неограниченная область, реализуется одна из четырех следующих возможностей: 1) $X(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если $D = \mathbb{C}$; 2) $X(D)$ — плоскость без луча, если D — полуплоскость; 3) $X(D)$ — плоскость без прямой, если D — полоса; 4) $X(D)$ — угол раствора не меньше π.

Пусть T — подмножество $\mathbb{S}$ — единичной окружности с центром в начале координат. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ через $\Lambda(T)$ обозначим ее подпоследовательность $\{\lambda_{m_p,l}, n_{m_p,l}\}$, состоящую из всех членов $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}$ таких, что $\lambda_{m,l}/|\lambda_{m,l}| \in T$. Положим $N(\Lambda(T))$, если $\Lambda(T)$ содержит лишь конечное число элементов, и

$$N(\Lambda(T)) = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{N_{m_p}}{|\lambda_{m_p,1}|}$$

в противном случае. Легко видеть, что

$$N(\Lambda(T_1)) \leqslant N(\Lambda(T_2)), \quad \text{если} \quad T_1 \subseteq T_2.$$

В частности, $N(\Lambda(T)) \leqslant N(\Lambda(\mathbb{S})) = N(\Lambda)$ для всех $T \subseteq \mathbb{S}$. В ситуации, в которой мы находимся, каждая точка $\lambda_{m,l}$ является нулем кратности не меньшей, чем $n_{m,l}$ любой целой функции $f \in J$. Поскольку f имеет экспоненциальный тип, и последовательность Λ разбита на относительно малые группы, то, например, из теоремы 2.3 в книге [3, гл. 1] легко следует, что $N(\Lambda) < +\infty$. Пусть F — компактное подмножество $\mathbb{S}$. Если область D отлична от всей плоскости, положим

$$N_F(\Lambda) = \inf_{T\supset F} N(\Lambda(T)), \quad N_D(\Lambda) = \sup_{F\subset(\mathbb{S}\setminus X(D))},$$

где инфимум берется по всем открытым на $\mathbb{S}$ множествам T, содержащим F, а супремум — по всем компактным подмножествам $F \subset (\mathbb{S} \setminus X(D))$.

Пусть $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая область D, т.е. выполнено следующее: 1) $K_p \subset intK_{p+1}$ для всех $p \geq 1$ (int обозначает внутренность множества), 2) $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$. Пусть $H_M(z)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(z) = \sup_{w\in M} Re(zw), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда из условия 1 следует, что для каждого $p \geq 1$ существует число $\alpha_p > 0$ такое, что

$$H_{K_p}(z) + \alpha_p|z| \leqslant H_{K_{p+1}}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda) = 0$. Тогда для каждого $p = 1, 2, \ldots$ существуют номера $s > p$ и m_0, для которых выполнены неравенства*

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N_m-1} \| \ln \frac{n!}{|\lambda_{m,1}|^n} \| \leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1}) - H_{K_p}(\lambda_{m,1}), \quad m \geq m_0.$$

Доказательство. Выше мы отметили, что $N(\Lambda) < +\infty$. Следовательно, для некоторого $\beta > 1$, не зависящего от номера m, верно неравенство $N_m \leqslant \beta|\lambda_{m,1}|$. Пусть $m = 1, 2, \dots$ и $n = 0, 2, \dots, N_m - 1$. Имеем

$$\frac{n!}{|\lambda_{m,1}|^n} \leqslant \frac{n^n}{|\lambda_{m,1}|^n} \leqslant (\frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|})^n \leqslant (\frac{\beta|\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|})^n = \beta^n \leqslant \beta^{N_m}. \tag{6}$$

Кроме того, учитывая, что $n! \geq 3^{-n}n^n$ при всех $n = 1, 2, \dots$, функция $x^{-1}\ln(3x)$ убывает, когда $\ln(3x) > 1$, и $x^{-1}\ln(3x) < 2$ для всех $x > 0$, имеем:

$$\frac{\ln(|\lambda_{m,1}|^n/n!)}{|\lambda_{m,1}|} \leqslant \frac{\ln(3^n|\lambda_{m,1}|^n/n^n)}{|\lambda_{m,1}|} = \frac{n\ln(3|\lambda_{m,1}|/n)}{|\lambda_{m,1}|} \leqslant \frac{N_m\ln(3|\lambda_{m,1}|/N_m)}{|\lambda_{m,1}|}, \tag{7}$$

если $\ln(3|\lambda_{m,1}|/N_m) > 1$, и

$$\frac{\ln(|\lambda_{m,1}|^n/n!)}{|\lambda_{m,1}|} < 2. \tag{8}$$

Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда для некоторого $p = 1, 2, \dots$ и каждого $s > p$ найдется номер $m(s)$ такой, что $m(s) \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N_{m(s)}-1} \| \ln \frac{n!}{|\lambda_{m(s),1}|^n} \| \geq H_{K_s}(\lambda_{m(s),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s),1}). \tag{9}$$

Выделим подпоследовательность номеров $s(r)$, $r = 1, 2, \dots$ такую, что $\lambda_{m(s(r)),1}/|\lambda_{m(s(r)),1}|$ при $r \to \infty$ сходится к некоторой точке $\xi \in \mathbb{S}$. Пусть вначале $\xi \in \mathbb{S} \setminus X(D)$. По условию с учетом определения величины $N_D(\Lambda)$ получаем $N_F(\Lambda) = 0$, где $F = \{\xi\}$. Тогда согласно определению $N_F(\Lambda)$ для каждого $\varepsilon > 0$ на окружности $\mathbb{S}$ найдем окрестность T точки ξ, для которой выполнено неравенство $N(\Lambda(T)) < \varepsilon/2$. Оно означает, что начиная с некоторого номера $r = r_0$ верна оценка

$$\frac{N_{m(s(r))}}{|\lambda_{m(s(r)),1}|} < \varepsilon. \tag{10}$$

Выберем $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что $\varepsilon \ln \beta < \alpha_p$ и $-\varepsilon \ln(\varepsilon/3) < \alpha_p$, где α_p — число из соотношения (5). Тогда в силу (6), (7) и (10) с учетом (5) получаем

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N_{m(s(r))}-1} | \ln \frac{n!}{|\lambda_{m(s(r)),1}|^n} | \leqslant \alpha_p |\lambda_{m(s(r)),1}| \leqslant H_{K_{p+1}}(\lambda_{m(s(r)),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s(r)),1}), \quad r \geq r_0.$$

Это противоречит (9), так как $H_{K_s} \geq H_{K_{p+1}}$ при $s \geq p + 1$.

Пусть теперь $\xi \in \mathbb{S} \cap X(D)$. Положим

$$H = \max_{\eta \in \mathbb{S}} H_{K_p}(\eta).$$

Согласно определениям множества $X(D)$ и опорной функции H_D с учетом того, что компакты K_l, $l = 1, 2, \dots$, исчерпывают область D, найдем номер l, удовлетворяющий условиям:

$$H_{K_l}(\xi) > H + \beta \ln \beta, \quad H_{K_l}(\xi) > H + 2.$$

В силу непрерывности опорной функции компакта эти оценки продолжаются в окрестность V точки ξ:

$$H_{K_l}(\eta) > H + \beta \ln \beta, \quad H_{K_l}(\eta) > H + 2, \quad \eta \in V.$$

Тогда из (6), (8) и неравенства $N_m \leqslant \beta|\lambda_{m,1}|$, $m = 1, 2, \dots$, получаем:

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N_m-1}|\ln\frac{n!}{|\lambda_{m,1}|^n}|<(H_{K_l}(\eta)-H)|\lambda_{m,1}|,\quad \eta\in V,\quad m=1,2,\ldots$$

Выберем номер r_1 такой, что при $r\geq r_1$ точка $\lambda_{m(s(r)),1}/|\lambda_{m(s(r)),1}|$ принадлежит множеству V. С учетом определения H и однородности опорной функции из предыдущего имеем:

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N_{m(s(r))}-1}\|\ln\frac{n!}{|\lambda_{m(s(r)),1}|^n}\|\geq H_{K_l}(\lambda_{m(s(r)),1})-H_{K_p}(\lambda_{m(s(r)),1}),\quad r\geq r_1.$$

Как и выше, это противоречит (9). Лемма доказана.

Замечание. Если $N(\Lambda)=0$, то из неравенств (6) и (7) легко следует, что

$$\lim_{m\to\infty}|\lambda_{m,1}|^{-1}\max_{0\leqslant n\leqslant N_m-1}|\ln\frac{n!}{|\lambda_{m,1}|^n}|=0.$$

Лемма 3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda=\{\lambda_{m,l},n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda)=0$, и $a\geq 1$. Тогда для каждого $p=1,2,\ldots$ существуют номера $s>p$ и m_0, для которых выполнены неравенства*

$$N_m\ln a\leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1})-H_{K_p}(\lambda_{m,1}),\quad m\geq m_0.$$

Доказательство. Заметим лишь, что после получения оценки (6) в лемме 2 мы, по сути, доказывали утверждение данной леммы.

В дальнейшем символом $B(\eta,\tau)$ будем обозначать открытый круг с центром в точке η и радиуса τ.

Лемма 4. *Пусть $H(\lambda)$ — вещественнозначная, положительно однородная порядка один функция. Пусть далее $F\subset\mathbb{S}$, $\varepsilon>0$ и $\tau\in(0,1/3)$ такие, что*

$$|H(\lambda)-H(\eta)|\leqslant\varepsilon/3,\quad\forall\eta\in F,\quad\lambda\in B(\eta,\tau),\tag{11}$$

тогда верно неравенство

$$\sup_{y\in B(z,\tau|z|)}H(y)\leqslant\inf_{y\in B(z,\tau|z|)}H(y)+\varepsilon\inf_{y\in B(z,\tau|z|)}|y|,\quad\forall z:z/|z|\in F.\tag{12}$$

Доказательство. Пусть $z/|z|\in F$ и $y,x\in B(z,\tau|z|)$. В силу положительной однородности функции $H(\lambda)$ и неравенства (11) имеем:

$$|H(y)-H(x)|\leqslant|H(y)-H(z)|+|H(x)-H(z)|\leqslant|z||H(y/|z|)-H(z/|z|)|+|z||H(x/|z|)-H(z/|z|)|\leqslant$$
$$\leqslant 3^{-1}2\varepsilon|z|.$$

Следовательно,

$$\sup_{y\in B(z,\tau|z|)}H(y)\leqslant\inf_{y\in B(z,\tau|z|)}H(y)+3^{-1}2\varepsilon|z|,\quad\forall z:z/|z|\in F.$$

Заметим, что $|z|=(1-\tau)^{-1}\inf_{y\in B(z,\tau|z|)}|y|$, $\forall z\neq 0$. Поэтому, учитывая включение $\tau\in(0,1/3)$, из предыдущего легко получаем (12). Лемма доказана.

Теперь мы можем получить оценки сверху на функции системы $\tilde{E}$. Эти оценки являются частным случаем следующего более общего результата. Для функции f, аналитической на контуре Γ_m и внутри него через $q_{m,j}(f)$, $j=0,1,\ldots,N_m-1$, обозначим коэффициенты разложения многочлена $q_m(\lambda,f)$ по функциям системы Θ_m, т.е.

$$q_m(\lambda,f)=\sum_{j=0}^{N_m-1}q_{m,j}(f)\frac{(\lambda-\lambda_{m,1})^j}{j!}.$$

Лемма 5. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ с относительно малыми группами $U_m = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda) = 0$, $\delta > 0$ и $p = 1, 2, \ldots$ Существуют постоянная C_p и номер $s > p$ такие, что для каждой функции f, аналитической в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, а также на контуре Γ_m и внутри него, $m = 1, 2, \ldots$, и удовлетворяющей условию*

$$|f(\xi)| \leqslant C \exp H_{K_p}(\xi), \quad \xi \in \Gamma_m \cup B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

выполнены неравенства

$$|q_{m,j}(f)| \leqslant CC_p \exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, N_m - 1.$$

Доказательство. Пусть α_p — число из неравенства (5). В силу равномерной непрерывности функции H_{K_p} на окружности $\mathbb{S}$ найдется $\tau \in (0, \delta/4)$ такое, что

$$|H_{K_p}(\eta) - H_{K_p}(\lambda)| < \alpha_p/3, \quad \forall \eta \in \mathbb{S}, \quad \lambda \in B(\eta, 4\tau). \tag{13}$$

Поскольку группы U_m, $m = 1, 2, \ldots$, относительно малы, то начиная с некоторого номера m_0 группа U_m целиком лежит в круге $B(\lambda_{m,1}, \tau|\lambda_{m,1}|)$. Тогда согласно интегральной теореме Коши контур Γ_m в определении функции $q_m(\lambda, f)$ при $m \geq m_0$ можно заменить контуром $S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)$ — окружностью с центром в точке $\lambda_{m,1}$ и радиуса $3\tau|\lambda_{m,1}|$, т.е.

$$q_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)} \frac{f(\xi)(\omega_m(\varsigma) - \omega_m(\xi))}{(\xi - \lambda)\omega_m(\xi)} \xi, \quad m \geq m_0.$$

Для конечного числа номеров $m = 1, 2, \ldots, m_0 - 1$ при оценке интегралов, определяющих числа $q_{m,j}(f)$, воспользуемся тем, что функция $\frac{(\omega_m(\xi) - \omega_m(\lambda))}{(\xi - \lambda)}$ аналитична. Для таких m легко получаем требуемое неравенство:

$$|q_{m,j}(f)| \leqslant CC\_p \exp H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}),$$

где постоянная C_p' зависит от функции $H_{K_{p+1}}$, но не зависит от f. Пусть теперь $m \geq m_0$. Учитывая оценку на $|f(\varsigma)|$ из условия леммы и то, что $U_m \subset B(\lambda_{m,1}, \tau|\lambda_{m,1}|)$, из последнего представления получаем:

$$\max_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\tau|\lambda_{m,1}|)} |q_m(\lambda, f)| \leqslant \frac{2\pi 3\tau|\lambda_{m,1}|}{2\pi} \max_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\tau|\lambda_{m,1}|)} \max_{\xi \in S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)} \frac{|f(\xi)||\omega_m(\xi) - \omega_m(\lambda)|}{|\xi - \lambda||\omega_m(\xi)|} \leqslant$$

$$\leqslant C \max_{\xi \in S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)} \exp H_{K_p}(\xi) \frac{2(3\tau|\lambda_{m,1}|)^{N_m} 3\tau|\lambda_{m,1}|}{(2\tau|\lambda_{m,1}|)^{N_m} \tau|\lambda_{m,1}|} = 6C(\frac{3}{2})^{N_m} \max_{\xi \in S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)} \exp H_{K_p}(\xi).$$

Можно считать, что круги $B(\lambda_{m,1}, 4\tau|\lambda_{m,1}|)$ при $m \geq m_0$ не содержат начала координат. Тогда с учетом (13) по лемме 4 имеем:

$$\max_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\tau|\lambda_{m,1}|)} |q_m(\lambda, f)| \leqslant 6C(\frac{3}{2})^{N_m} \exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}) + \alpha_p|\lambda_{m,1}|).$$

Используя неравенство (5), получаем отсюда

$$\max_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\tau|\lambda_{m,1}|)} |q_m(\lambda, f)| \leqslant 6C(\frac{3}{2})^{N_m} \exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}).$$

Перейдем теперь к оценке производных функции $q_m(\lambda, f)$. Имеем:

$$q_{m,j}(f)=\frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1}\frac{q_m(\lambda,f)d\lambda}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}}=\frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=\tau|\lambda_{m,1}|}\frac{q_m(\lambda,f)\lambda}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}}.$$

Из последней оценки следует, что

$$|q_{m,j}(f)|\leqslant\frac{j!}{(\tau|\lambda_{m,1}|)^j}6C(\frac{3}{2})^{N_m}\exp H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}),\quad m\geq m_0,\quad j=0,1,\ldots,N_m-1.$$

В силу леммы 2 найдутся номер $l>p+1$ и число $C''>0$ такие, что

$$\frac{j!}{|\lambda_{m,1}|}\leqslant C''\exp(H_{K_l}(\lambda_{m,1})-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1})),\quad m\geq m_0,\quad j=0,1,\ldots,N_m-1.$$

Можно считать, что $\tau<1$. Поэтому $\tau^{-j}\leqslant\tau^{N_m}$, $j=0,1,\ldots,N_m-1$. Тогда по лемме 3 найдем номер $s>l$ и число $C'''>0$, для которых верна оценка

$$\tau^{-j}(\frac{3}{2})^{N_m}\leqslant(\frac{3}{2\tau})^{N_m}\leqslant C'''\exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})-H_{K_l}(\lambda_{m,1})),\quad m\geq m_0,\quad j=0,1,\ldots,N_m-1.$$

Таким образом, из последних соотношений получаем

$$|q_{m,j}(f)|\leqslant 6CC''C'''\exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}),\quad m\geq m_0,\quad j=0,1,\ldots,N_m-1.$$

Остается заметить, что постоянные C'' и C''' зависят от последовательности Λ, номера p и номера l (который зависит от p), но не зависят от функции f. Лемма доказана.

Замечание. Поскольку Γ_m — произвольный контур, охватывающий группу U_m, то условие аналитичности функции f на Γ_m и внутри него можно заменить на условие аналитичности f в какой-нибудь односвязной области, содержащей точки группы U_m.

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda=\{\lambda_{m,l},n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ с относительно малыми группами $U_m=\{\lambda_{m,l},n_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda)=0$. Для каждого $p=1,2,\ldots$ существуют постоянная C_p и номер $s>p$ такие, что*

$$\sup_{w\in K_p}|e_{m,j}(w)|\leqslant C_p\exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}),\quad m=1,2,\ldots,j=1,\ldots,N_m.$$

Доказательство. Пусть $w\in K_p$. Тогда по определению опорной функции имеем:

$$|\exp(w\xi)|\leqslant\exp H_{K_p}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{C}.$$

Отсюда по лемме 3.5 получаем требуемое утверждение. Следствие доказано.

Замечание. Мы показали, что при условии $N_D(\Lambda)=0$, для системы $\tilde{E}=\{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности в работе [9].

Приведем результат, сводящий решение проблемы базисности системы $\tilde{E}$ в W к решению специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа P_D. Но прежде введем некоторые обозначения и докажем вспомогательные результаты.

Лемма 6. *Для каждого $\alpha>0$ сходится ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty}N_m\exp(-\alpha|\lambda_{m,1}|).$$

Доказательство. Пусть $\Lambda'=\{\xi_k\}$ — последовательность, составленная из всех точек $\lambda_{m,l}$, $m=1,2,\ldots$, $l=1,\ldots,M_m$, причем каждая $\lambda_{m,l}$ встречается в ней ровно $n_{m,l}$ раз. Поскольку все точки $\lambda_{m,l}$ являются нулями кратности не меньшей, чем $n_{m,l}$ целой функции экспоненциального типа (из таких функций состоит множество J), то (см., например, [3]), последовательность Λ' имеет конечную верхнюю плотность, т.е. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, k/\xi_k$. Отсюда следует, что $\Im(\Lambda') = 0$. Тогда по лемме 2 из работы [9] для каждого $\alpha > 0$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\alpha|\xi_k|) = \sum_{m=1,l=1}^{\infty,M_m} n_{m,l} \exp(-\alpha|\lambda_{m,l}|) < \infty.$$

Так как группы U_m относительно малы, то при $m \geq m_0$ выполнено неравенство $2^{-1}|\lambda_{m,l}| \leqslant |\lambda_{m,1}|$. Следовательно, для каждого $\alpha > 0$

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} N_m \exp(-\alpha|\lambda_{m,1}|) \leqslant \sum_{m=m_0,l=1}^{\infty,M_m} n_{m,l} \exp(-2^{-1}\alpha|\lambda_{m,1}|) < \infty.$$

Лемма доказана.

Замечание. С учетом леммы 2 в работе [9] утверждение леммы 6 означает, что $\Im(\tilde{\Lambda}) = 0$ (величина $\Im(\tilde{\Lambda})$ определена в работе [9]), где $\tilde{\Lambda}$ — последовательность, составленная из точек $\lambda_{m,1}$, $m = 1, 2, \ldots$, причем каждая $\lambda_{m,1}$ встречается в ней ровно N_m раз.

Для каждого $p = 1, 2, \ldots$ введем банаховы пространства последовательностей

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_{m,j}\} : ||d||_p = \sup_{m,j}(|d_{m,j}| \exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}))) < \infty\},$$

$$R_p(\Lambda) = \{b = \{b_{m,j}\} : ||b||_p = \sup_{m,j}(|b_{m,j}| \exp(-H_{K_p}(\lambda_{m,1}))) < \infty\},$$

здесь $m = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, \ldots, N_m$. Пусть $Q(\Lambda, D)$ — проективный предел пространств $Q_p(\Lambda)$, а $R(\Lambda, D)$ — индуктивный предел пространств $R_p(\Lambda)$. Определим оператор $\mathfrak{U}$, действующий на пространстве $Q^*(\Lambda, D)$, сопряженном к $Q(\Lambda, D)$, по правилу: функционалу $\nu \in Q^*(\Lambda, D)$ поставим в соответствие последовательность $b = \{b_{m,j}\}$, составленную из значений ν на координатных векторах, т.е. $b_{n,l} = \nu(T_{n,l})$, где $T_{n,l} = \{d_{m,j}\}$ — элемент $Q(\Lambda, D)$ такой, что $d_{m,j} = 1$, если $m = n$, $j = l$, и $d_{m,j} = 0$ в противном случае.

Лемма 7. *Пространство $Q(\Lambda, D)$ рефлексивно. Оператор $\mathfrak{U}$ является изоморфизмом линейных топологических пространств $Q^*(\Lambda, D)$ и $R(\Lambda, D)$. Если $\nu \in Q^*(\Lambda, D)$, то*

$$\nu(d) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} b_{m,j}, \quad \forall d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D),$$

где $b = \{b_{m,j}\} = \mathfrak{U}(\nu)$.

Доказательство. Пусть ν — произвольный функционал из $Q^*(\Lambda, D)$. Поскольку $Q(\Lambda, D)$ является проективным пределом, то найдется номер $p = 1, 2, \ldots$ такой, что $\nu \in Q_p^*(\Lambda)$. Через $||\nu||_p'$ обозначим норму функционала ν в пространстве $Q_p^*(\Lambda)$. Тогда имеем:

$$|b_{n,l}| = |\nu(T_{n,l})| \leqslant ||\nu||_p' ||T_{n,l}||_p = ||\nu||_p' \exp(H_{K_p}(\lambda_{n,1})), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad l = 1, \ldots, N_n.$$

Следовательно, $||\mathfrak{U}(\nu)||_p = ||b||_p \leqslant ||\nu||_p'$. Это означает, что оператор $\mathfrak{U}$ непрерывным образом переводит пространство $Q^*(\Lambda, D)$ в пространство $R(\Lambda, D)$. Покажем теперь, что он инъективен и сюръективен.

Заметим, что координатные векторы $T_{m,j}$ образуют базис в пространстве $Q(\Lambda, D)$. Действительно, для любого $d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D)$ и каждого $p = 1, 2, \ldots$ с учетом (5) имеем:

$$||\sum_{m=m_0,j=j_0}^{\infty,N_m} d_{m,j}T_{m,j}||_p = \sup_{m\geq m_0,j\geq j_0}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}))) =$$
$$= \sup_{m\geq m_0,j\geq j_0}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}))\exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}))\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}))) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{m\geq m_0,j\geq j_0}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}))\exp(-\alpha|\lambda_{m,1}|)) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{m\geq m_0,j\geq j_0}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1})))\sup_{m\geq m_0}(\exp(-\alpha_p|\lambda_{m,1}|)) \leqslant$$
$$\leqslant ||d||_p \sup_{m\geq m_0}(\exp(-\alpha_p|\lambda_{m,1}|)) \to 0, \quad m_0 \to \infty.$$

Таким образом, верно представление

$$d = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j}T_{m,j}.$$

Причем ряд сходится в топологии пространства $Q(\Lambda, D)$. Тогда для любого функционала $\nu \in Q^*(\Lambda, D)$ имеем:

$$\nu(d) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j}\nu(T_{m,j}), \quad d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D).$$

Следовательно, совпадение значений функционалов $\nu_1, \nu_2 \in Q^*(\Lambda, D)$ на координатных векторах влечет за собой их равенство, т.е. $\mathfrak{U}$ — инъективный оператор.

Пусть теперь $b = \{b_{m,j}\}$ — произвольный элемент пространства $R(\Lambda, D)$. Согласно его определению найдется номер $p = 1, 2, \ldots$ такой, что $b \in R_p(\Lambda)$, т.е. $||b||_p < \infty$. Определим функционал ν по формуле

$$\nu(d) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j}b_{m,j}, \quad d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D).$$

Поскольку $||d||_{p+1} < \infty$, то с учетом (5) и леммы 6 верно неравенство

$$|\nu(d)| \leqslant \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}b_{m,j}| \leqslant \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} ||d||_{p+1}\exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}))||b||_p\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1})) \leqslant$$
$$\leqslant ||d||_{p+1}||b||_p\sum_{m=1}^{\infty} N_m\exp(-\alpha_p|\lambda_{m,1}|) \leqslant C||d||_{p+1}||b||_p.$$

Это означает, что $\nu \in Q^*_{p+1}(\Lambda)$, причем $||\nu||'_p \leqslant C||b||_p$. Следовательно, $\mathfrak{U}$ — сюръективный оператор, а его обратный $\mathfrak{U}^{-1}$ непрерывен.

Мы показали, что $\mathfrak{U}$ осуществляет изоморфизм пространств $Q^*(\Lambda, D)$ и $R(\Lambda, D)$. Аналогично доказывается, что сопряженный к $\mathfrak{U}$ оператор $\mathfrak{U}^*$ осуществляет изоморфизм пространств $R^*(\Lambda, D)$ и $Q(\Lambda, D)$. Лемма доказана.

На фактор-пространстве P_D/J определим оператор $\mathfrak{G}$, действующий следующим образом. Каждому классу эквивалентности $[f] \in P_D/J$ поставим в соответствие последовательность $b = \{b_{m,j}\}$, определяемую по формуле: $b_{m,j} = q_{m,j-1}(f)$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_m$. Оператор $\mathfrak{G}$ корректно определен, т.е. любой другой представитель φ-класса эквивалентности $[f]$ порождает ту же последовательность $b = \{b_{m,j}\}$, что и функция f. Действительно, пусть $\varphi \in [f]$. Тогда $(\varphi - f) \in J$. Следовательно, функция $\varphi - f$ обращается в ноль во всех точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно. Этим же свойством обладает и многочлен $q_m(\lambda,\varphi-f)$, $m=1,2,\ldots$ Поскольку его степень не превосходит N_m-1, то $q_m(\lambda,\varphi-f)\equiv 0$. Отсюда вытекает, что $q_{m,j}(\varphi-f)=q_{m,j}(\varphi)-q_{m,j}(f)=0$, $m=1,2,\ldots$, $j=0,\ldots,N_m-1$.

Теорема 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, W — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, $E=\{z^n\exp(\lambda_{m,l}z)\}_{m=1,l=1,n=0}^{\infty,M_m,n_{m,l}-1}$ — система собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W, последовательность $\Lambda=\{\lambda_{m,l},n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ с относительно малыми группами $U_m=\{\lambda_{m,l},n_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda)=0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) Система функций $\tilde{E}=\{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ является почти экспоненциальным базисом в W (см. [9]) с показателями $\lambda_{m,1}$, $m=1,2,\ldots$ (точнее говоря, с показателями $\lambda'_{m,j}$, где $\lambda'_{m,j}=\lambda_{m,1}$, $j=1,\ldots,N_m$).

2) Для каждой последовательности $b=\{b_{m,j}\}$ из пространства $R(\Lambda,D)$ существует функция $f\in P_D$ такая, что $b_{m,j}=q_{m,j-1}(f)$, $m=1,2,\ldots$, $j=1,\ldots,N_m$.

3) Оператор $\mathfrak{G}$ является изоморфизмом пространств P_D/J и $R(\Lambda,D)$.

Доказательство. 1⇒2. Пусть $b\in R(\Lambda,D)$. По лемме 7 найдем функционал $\nu\in Q^*(\Lambda,D)$, для которого выполнены равенства $b_{m,j}=\nu(T_{m,j})$, $m=1,2,\ldots$, $j=1,\ldots,N_m$. Тогда согласно утверждению 1 и теореме 3 существует функционал $\mu\in W^*$ такой, что

$$\mu(e_{m,j})=b_{m,j},\quad m=1,2,\ldots,\quad j=1,\ldots,N_m. \tag{14}$$

Поскольку μ — непрерывный функционал, то найдутся номер p и постоянная C, удовлетворяющие условию

$$|\mu(g)|\leqslant C\sup_{z\in K_p}|g(z)|,\quad \forall g\in W.$$

По теореме Хана – Банаха μ продолжается как линейный функционал на все пространство $H(D)$ с сохранением последней оценки. Она означает, что μ продолжается и как непрерывный функционал. Пусть $f\in P_D$ — преобразование Лапласа функционала $\mu\in H^*(D)$ и χ — функция, ассоциированная по Борелю с f. Она аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, а все ее особенности лежат в области D. Имеет место представление (см. [3])

$$\mu(g)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(z)\chi(z)z,\quad g\in H(D),$$

где L — контур в области D, охватывающий особенности функции χ. В частности,

$$f(\varsigma)=\mu(\exp(\varsigma z))=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \exp(\varsigma z)\chi(z)dz.$$

Отсюда с учетом (4), (14) и определения чисел $q_{m,j}(f)$ получаем:

$$q_{m,j}(f)=\frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1}\frac{q_m(\lambda,f)d\lambda}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}}=\frac{j!}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1}\int\limits_{\Gamma_m}\frac{f(\varsigma)(\omega_m(\varsigma)-\omega_m(\lambda))}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}(\varsigma-\lambda)\omega_m(\varsigma)}d\varsigma d\lambda=$$

$$=\frac{j!}{(2\pi i)^3}\int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1}\int\limits_{\Gamma_m}\int\limits_L\frac{\exp(\varsigma z)\chi(z)(\omega_m(\varsigma)-\omega_m(\lambda))}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}(\varsigma-\lambda)\omega_m(\varsigma)}dzd\varsigma\lambda=$$

$$= \frac{j!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1} \int\limits_{L} \frac{q_m(\lambda, z)\chi(z)}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}} z d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} e_{m,j+1}(z)\chi(z)dz = \mu(e_{m,j+1}) = b_{m,j+1},$$

$m = 1, 2, \ldots, j = 0, \ldots, N_m - 1$. Таким образом, импликация 1⇒2 доказана.

2⇒3. Пусть $[f_1], [f_2] \in P_D/J$. Предположим, что $\mathfrak{G}[f_1] = \mathfrak{G}[f_2]$. Тогда для каждого $m = 1, 2, \ldots$ коэффициенты многочленов $q_m(\lambda, f_1)$ и $q_m(\lambda, f_2)$ в базисе $\Theta_m = \{\frac{(\lambda-\lambda_{m,1})^j}{j!}\}_{j=0}^{N_m-1}$, а вместе с ними и сами многочлены, совпадают. Выше было отмечено, что во всех точках $\lambda_{m,l}$ значения многочлена $q_m(\lambda, f)$ и функции f, а также их соответствующих производных до порядка $n_{m,l}-1$ включительно, равны. Следовательно, разность $f_1 - f_2$ обращается в ноль во всех точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно. По условию подпространство W допускает спектральный синтез. Тогда по лемме 1 функция $f_1 - f_2$ принадлежит множеству J, т.е. $[f_1] = [f_2]$. Это означает, что оператор $\mathfrak{G}$ инъективен. Согласно утверждению 2 он еще и сюръективен.

Пусть $k = 1, 2, \ldots$ По лемме 5 существуют постоянная C_k и номер $s > k$ такие, что для каждой функции $\in P_k$ верно неравенство

$$|q_{m,j}(f)| \leqslant ||f||_k C_k \exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, N_m - 1.$$

Поскольку каноническое отображение $P_D \to P_D/J$ открыто, то отсюда вытекает, что оператор $\mathfrak{G} : P_D/J \to R(\Lambda, D)$ непрерывен. Тогда по теореме об открытом отображении (см. [10], приложение 1, теорема 2) для отделимых пространств, покрываемых счетным семейством своих подпространств Фреше (каковыми, очевидно, являются пространства P_D/J и $R(\Lambda, D)$), оператор $\mathfrak{G}$ есть изоморфизм линейных топологических пространств.

3⇒1. Для доказательства утверждения 1 достаточно проверить выполнение условий теоремы 4 из работы [9]. Согласно следствию из леммы 5 и замечанию к лемме 6 для последовательности $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ выполнены все условия леммы 3 из работы [9]. Поэтому в силу этой леммы для каждого элемента $d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D)$ ряд

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z)$$

сходится равномерно на компактах в области D. Другими словами, оператор $\mathfrak{B} : Q(\Lambda, D) \to W$ из работы [9] определен на всем пространстве $Q(\Lambda, D)$.

Выше было отмечено, что для системы функций $\tilde{E}$ существует биортогональная последовательность функционалов из $H^*(D)$. Таким образом, с учетом замечания к лемме 6 остается показать, что $\mathfrak{B}$ — сюръективный оператор, т.е. любая функция $g \in W$ раскладывается в ряд по системе $\tilde{E}$, сходящийся равномерно на компактах из D.

Пусть $g \in W$. Функция g определяет линейный непрерывный функционал на пространстве W^*, сопряженном к W. Поскольку $H(D)$ является пространством Фреше – Шварца, а W — его замкнутое подпространство, то (см., например, [7]) W^* алгебраически и топологически изоморфно фактор-пространству $H^*(D)/W^0$, где W^0 — множество всех функционалов μ из $H^*(D)$, аннулирующих подпространство W. С учетом преобразования Лапласа имеет место также изоморфизм между пространствами W^* и P_D/J. Пусть σ — линейный непрерывный функционал на пространстве P_D/J, такой, что

$$(\sigma, [f]) = ([\mu], g), \quad \forall[\mu] \in H^*(D)/W^0,$$

где f — преобразование Лапласа функционала $\mu \in H^*(D)$. Поскольку утверждение 3 верно, то найдется функционал $\rho \in R^*(\Lambda, D)$, для которого

$$(\rho, \mathfrak{G}([f])) = (\sigma, [f]) = ([\mu], g), \forall [\mu] \in H^*(D)/W^0.$$

По лемме 7 существует элемент $d = \{d_{m,j}\}$ пространства $Q(\Lambda, D)$ такой, что

$$([\mu], g) = (\sigma, [f]) = (\rho, \mathfrak{G}([f])) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty, N_m} d_{m,j} q_{m,j-1}(f), \quad \forall [\mu] \in H^*(D)/W^0.$$

В качестве функционала $\mu \in H^*(D)$ в этих равенствах возьмем δ-функцию, сосредоточенную в точке $z \in D$. Тогда с учетом (3) имеем:

$$g(z) = ([\delta_z], g) = (\sigma, [\exp(\lambda z)]) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty, N_m} d_{m,j} q_{m,j-1}(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty, N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z), \quad z \in D.$$

Остается показать, что последний ряд сходится равномерно на компактах в области D. Пусть K — компакт в D. Поскольку последовательность $\{K_p\}$ исчерпывает область D, то найдется номер p такой, что $K \subset K_p$. Пусть $z \in K_p$. Тогда $\exp(\lambda z) \in P_p \subset P_D$, причем $||\exp(\lambda z)||_p \leqslant 1$. Следовательно, с учетом определения топологии на фактор-пространстве и утверждения 3 данной теоремы найдутся номер s и постоянная $C > 0$, для которых верно неравенство

$$||\mathfrak{G}(\exp(\lambda z))||_s \leqslant C, \quad \forall z \in K_p.$$

Отсюда, пользуясь непрерывностью функционала ρ на пространстве $R(\Lambda, D)$, а значит, и на пространстве $R_{s+1}(\Lambda)$, и неравенством (5), получаем:

$$\sup_{z \in K_p} \Big| \sum_{m=m_0, j=j_0}^{\infty, N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z) \Big| \leqslant \sup_{z \in K_p} C' \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (|e_{m,j}(z)| \exp(-H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1}))) =$$

$$= C' \sup_{z \in K_p} \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (|e_{m,j}(z)| \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) \exp(-H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})) \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1})) \leqslant$$

$$\leqslant C' \sup_{z \in K_p} \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (|e_{m,j}(z)| \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) \exp(-\alpha_s |\lambda_{m,1}|) \leqslant$$

$$\leqslant C' \sup_{z \in K_p} \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (|e_{m,j}(z)| \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (\exp(-\alpha_s |\lambda_{m,1}|)) \leqslant$$

$$\leqslant C' \sup_{z \in K_p} ||\mathfrak{G}(\exp(\lambda z))||_s \sup_{m \geq m_0} \exp(-\alpha_s |\lambda_{m,1}|) \leqslant C'C \sup_{m \geq m_0} \exp(-\alpha_s |\lambda_{m,1}|) \to 0,$$

когда $m_0 \to \infty$. Таким образом, требуемый ряд сходится равномерно на компактах в области D. Теорема полностью доказана.

Теорема 1 сводит решение проблемы существования базиса в подпространстве W к решению специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа P_D. Однако в теореме 1 мы имеем дело только с конкретной системой функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty, N_m}$. Естественно возникает вопрос о наличии в W других, отличных от $\tilde{E}$ базисов по относительно малым группам (т.е. базисов, подобных $\tilde{E}$). Далее мы дадим ответ на этот вопрос. Покажем, что при дополнительном условии на систему $\tilde{E}$ из существования базиса по относительно малым группам в подпространстве W следует базисность системы $\tilde{E}$ в W. Кроме того, опираясь на систему $\tilde{E}$, дадим описание всех возможных базисов по относительно малым группам в подпространстве W.

Будем говорить, что система функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ обладает групповым свойством Кете, если для любого номера p существуют номер s и постоянная C, удовлетворяющие следующему условию: для каждого $m = 1, 2, \dots$ и каждой функции h вида

$$h(z) = \sum_{j=1}^{N_m} a_{m,j} e_{m,j}(z)$$

выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N_m} |a_{m,j}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,j}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_s} |h(z)|.$$

Заметим, что любая функция $h \in W_m$ является линейной комбинацией элементов системы $\tilde{E}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$, так как эта система биортогональна к базису Θ_m в пространстве $Q(N_m - 1)$.

Наряду с системой $\tilde{E}$ рассмотрим и другие системы функций $\tilde{E}' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, построенные по относительно малым группам. Элементы любой такой системы можно разложить по базисам $\tilde{E}_m$ в W_m. Положим

$$e'_{m,j}(z) = \sum_{k=1}^{N_m} a_{m,j} e_{m,k}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, N_m.$$

Будем говорить, что система E' нормирована, если для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N_m} |a_{m,j,k}| = 1, \quad j = 1, \dots, N_m.$$

Лемма 8. *Пусть $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$ — почти экспоненциальная последовательность в области D с показателями $\lambda_{m,1}$, обладающая групповым свойством Кете. Тогда любая нормированная система $E' = \{e'_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$ является почти экспоненциальной последовательностью в D с показателями $\lambda_{m,1}$.*

Доказательство. Фиксируем $p \geq 1$. Поскольку $\tilde{E}$ — почти экспоненциальная последовательность, то существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w\in K_p} |e_{m,j}(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})), \quad m = 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, N_m.$$

Отсюда, учитывая, что E' — нормированная система, получаем

$$\sup_{w\in K_p} |e'_{m,j}(w)| \leqslant \sum_{k=1}^{N_m} \sup_{w\in K_p} |a_{m,j,k} e_{m,k}(w)| \leqslant N_m a \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})).$$

Пусть α_s — число из неравенства (5). В силу леммы 6 имеем оценку

$$N_m \leqslant \exp(\alpha_s |\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \dots$$

Следовательно, согласно (5)

$$\sup_{w\in K_p} |e'_{m,j}(w)| \leqslant a \exp(\alpha_s |\lambda_{m,1}|) \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})) \leqslant a \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})).$$

Это дает нам пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности в работе [9]. Проверим теперь пункт 2 этого определения. Фиксируем $p \geq 1$. Поскольку $\tilde{E}$ — почти экспоненциальная последовательность, то существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1})) \leqslant \sup_{w\in K_p} |e_{m,j}(w)|, \quad m=1,2,\ldots,j=1,\ldots,N_m.$$

Кроме того, $\tilde{E}$ обладает групповым свойством Кете. Следовательно, существуют номер n и постоянная C, для которых верна оценка

$$\sum_{k=1}^{N_m} |a_{m,j,k}| \sup_{z\in K_s} |e_{m,k}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_n} |e'_{m,j}(z)|, \quad m=1,2,\ldots,j=1,\ldots,N_m.$$

По условию система E' нормирована. Поэтому для каждых $m=1,2,\ldots$ и $j=1,\ldots,N_m$ имеется коэффициент $a_{m,j,k}$ с модулем, равным единице. Тогда в силу предыдущих неравенств

$$b\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1})) \leqslant \sup_{z\in K_s} |e_{m,k}(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{N_m} |a_{m,j,k}| \sup_{z\in K_s} |e_{m,k}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_n} |e'_{m,j}(z)|.$$

Это дает нам необходимую оценку. Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $E' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ является базисом в подпространстве W, т.е. каждая функция из W единственным образом раскладывается в ряд по системе E', который сходится равномерно на компактах в области D. Поделив каждый элемент $e'_{m,j}(z)$ этой системы на самый большой по модулю коэффициент $a_{m,j,k}$, $k=1,\ldots,N_m$, мы получим нормированный базис в W. При выполнении условий леммы 8 этот базис становится почти экспоненциальным.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — почти экспоненциальная последовательность в области D с показателями $\lambda_{m,1}$, обладающая групповым свойством Кете. Если в подпространстве W существует базис по относительно малым группам, то система $\tilde{E}$ также является базисом в W.*

Доказательство. Пусть $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — базис в подпространстве W, т.е. каждая функция $g \in W$ имеет единственное представление

$$g(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e'_{m,j}(z),$$

причем ряд сходится равномерно на компактах в области D. Можно считать, что система E' нормирована. Тогда по лемме 8 она является почти экспоненциальным базисом в W. Следовательно, с учетом замечания к лемме 6 согласно следствию из леммы 3 в работе [9] для каждого номера $s \geq 1$ сходится ряд

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z\in K_s} |e'_{m,j}(z)| < \infty. \tag{15}$$

Используя определение функций $e'_{m,j}$, из предыдущего разложения получаем:

$$g(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e'_{m,j}(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} \sum_{k=1}^{N_m} a_{m,j,k} e_{m,k}(z) =$$

$$= \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} e_{m,k}(z) \sum_{j=1}^{N_m} d_{m,j} a_{m,j,k} = \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} b_{m,k} e_{m,k}(z).$$

Таким образом, мы имеем разложение функции $g(z)$ по системе $\tilde{E}$. Оно является единственным, так как $\tilde{E}$ обладает биортогональной системой функционалов. Поскольку $g(z)$ —

произвольная функция из подпространства W, то для установления базисности системы $\tilde{E}$ в W достаточно доказать, что последний ряд сходится равномерно на компактах в области D.

Фиксируем $p \geq 1$. Имеем:

$$\sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} |b_{m,k}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)| \leqslant= \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)| \sum_{j=1}^{N_m} ||d_{m,j}a_{m,j,k}| =$$
$$= \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sum_{k=1}^{N_m} |a_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)|.$$

По условию система $\tilde{E}$ обладает групповым свойством Кете. Следовательно, существуют номер s и постоянная C такие, что

$$\sum_{k=1}^{N_m} |a_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_s} |e'_{m,j}(z)|, \quad m = 1,2,\ldots, j = 1,\ldots,N_m.$$

Отсюда с учетом (15) получаем

$$\sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} |b_{m,k}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)| \leqslant C \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z\in K_s} |e'_{m,j}(z)| < \infty.$$

Это означает, что рассматриваемый ряд сходится равномерно на компактах K_p, $p = 1,2,\ldots$. Поскольку эти компакты исчерпывают область D, то мы получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Теорема 2 проблему существования базиса по относительно малым группам в подпространстве W сводит к проверке базисности системы $\tilde{E}$ в этом подпространстве. В заключение работы дадим описание всех возможных базисов в W.

Для каждого $m = 1,2,\ldots$ через $\mathfrak{A}_m = \{a_{m,j,k}\}$ обозначим матрицу, составленную из коэффициентов разложения функций $e'_{m,j}(z)$ по базису $\tilde{E}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$. Пусть $\mathfrak{A}_m$ — невырожденная и $\mathfrak{A}_m^{-1} = (b_{m,j,k})$ — матрица, обратная к $\mathfrak{A}_m$. Если T — открытое подмножество единичной окружности $\mathbb{S}$, то символом $\mathbb{A}(T)$ будем обозначать подпоследовательность $\{\mathfrak{A}_{m(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ последовательности $\mathbb{A} = \{\mathfrak{A}_m\}$, состоящую из всех матриц $\mathfrak{A}$ таких, что точка $\lambda_{m,1}/|\lambda_{m,1}|$ попадает в T. Положим $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) = 0$, если $\mathbb{A}(T)$ содержит лишь конечное число элементов, и

$$\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{1\leqslant j,k\leqslant N_{m(l)}} \frac{\ln|b_{m(l),j,k}|}{|\lambda_{m(l),1}|}$$

в противном случае. Для $T = \mathbb{S}$ вместо $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T))$ будем использовать обозначение $\mathfrak{a}(\mathbb{A})$.

Пусть F — компактное подмножество $\mathbb{S}$. Если область D отлична от всей плоскости, положим

$$\mathfrak{a}_F(\mathbb{A}) = \inf_{E\supset F} \mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)), \quad \mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = \sup_{F\subset(\mathbb{S}\setminus X(D))} \mathfrak{a}_F(\mathbb{A}),$$

где инфимум берется по всем открытым на $\mathbb{S}$ множествам T, содержащим F, а супремум — по всем компактным подмножествам $F \subset (\mathbb{S} \setminus X(D))$.

Лемма 9. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Соотношения $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = 0$ и $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$ имеют место тогда и только тогда, когда для каждого $p = 1,2,\ldots$ существуют номер $s > p$ и постоянная $\gamma > 0$ такие, что выполнены неравенства*

$$\ln|b_{m,j,k}| \leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1}) - H_{K_p}(\lambda_{m,1}) + \gamma, \quad m = 1,2,\ldots, \quad j,k = 1,\ldots,N_m. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = 0$ и $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$. Предположим, что неравенство (16) неверно. Тогда для некоторого $p = 1, 2, \dots$ и каждого $s > p$ найдется номер $m(s)$ такой, что $m(s) \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_{m(s)}} \ln |b_{m(s),j,k}| \geq H_{K_s}(\lambda_{m(s),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s),1}). \tag{17}$$

Выделим подпоследовательность номеров $s(r)$, $r = 1, 2, \dots$ такую, что $\lambda_{m(s(r)),1}/|\lambda_{m(s(r)),1}|$ при $r \to \infty$ сходится к некоторой точке $\xi \in \mathbb{S}$. Пусть вначале $\xi \in \mathbb{S} \setminus X(D)$. По условию с учетом определения величины $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A})$ получаем $\mathfrak{a}_F(\mathbb{A}) = 0$, где $F = \{\xi\}$. Тогда согласно определению $\mathfrak{a}_F(\mathbb{A})$ для каждого $\varepsilon > 0$ на окружности $\mathbb{S}$ найдем окрестность T точки ξ, для которой выполнено неравенство $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) < \varepsilon/2$. Оно означает, что начиная с некоторого номера $r = r_0$ верна оценка

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_{m(s(r))}} \frac{\ln |b_{m(s(r)),j,k}|}{|\lambda_{m(s(r)),1}|} < \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon < \alpha_p$, где α_p — число из соотношения (5). Тогда из последнего неравенства с учетом (5) получаем

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_{m(s(r))}} \ln |b_{m(s(r)),j,k}| \leqslant \alpha_p |\lambda_{m(s(r)),1}| \leqslant H_{K_{p+1}}(\lambda_{m(s(r)),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s(r)),1}), r \geq r_0.$$

Это противоречит (17), так как $H_{K_s} \geq H_{K_{p+1}}$ при $s \geq p + 1$.

Пусть теперь $\xi \in \mathbb{S} \cap X(D)$. Так как $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$, то по определению величины $\mathfrak{a}(\mathbb{A})$ найдется постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_m} \ln |b_{m,j,k}| \leqslant \beta |\lambda_{m,1}|, \quad m = 1, 2, \dots \tag{18}$$

Положим $H = \max_{\eta \in \mathbb{S}} H_{K_p}(\eta)$. Согласно определениям множества $X(D)$ и опорной функции H_D с учетом того, что компакты K_l, $l = 1, 2, \dots$, исчерпывают область D, найдем номер l, удовлетворяющий условию: $H_{K_l}(\xi) > H + \beta$. В силу непрерывности опорной функции компакта эта оценка продолжается в окрестность V точки ξ: $H_{K_l}(\eta) > H + \beta$, $\eta \in V$. Тогда из (18) получаем:

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_m} \ln |b_{m,j,k}| \leqslant \beta |\lambda_{m,1}| < (H_{K_l}(\eta) - H)|\lambda_{m,1}|, \quad \eta \in V, \quad m = 1, 2, \dots$$

Выберем номер r_1 такой, что при $r \geq r_1$ точка $\lambda_{m(s(r)),1}/|\lambda_{m(s(r)),1}|$ принадлежит множеству V. С учетом определения H и однородности опорной функции из предыдущего имеем:

$$\max_{1, \leqslant j,k \leqslant N_{m(s(r))}} \ln |b_{m(s(r)),j,k}| < H_{K_l}(\lambda_{m(s(r)),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s(r)),1}), \quad r \geq r_1.$$

Как и выше, это противоречит (17). Таким образом, наше допущение неверно, т.е. (16) имеет место.

Предположим теперь, что выполнено неравенство (16). Согласно ему найдем номер $s > 1$ и постоянную $\gamma > 0$, удовлетворяющие условию

$$\ln |b_{m,j,k}| \leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1}) - H_{K_1}(\lambda_{m,1}) + \gamma, \quad m = 1, 2, \dots, \quad j, k = 1, \dots, N_m.$$

Положим $H_2 = \max_{\eta \in \mathbb{S}} H_{K_s}(\eta)$ и $H_1 = \min_{K_1}(\eta)$. Тогда с учетом однородности опорной функции получаем:

$$\ln |b_{m,j,k}| \leqslant H_2 |\lambda_{m,1}| - H_1 |\lambda_{m,1}|, \quad m = 1, 2, \dots, \quad j, k = 1, \dots, N_m.$$

Следовательно, $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) \leqslant H_2 - H_1 < \infty$. Остается показать, что $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = 0$. Для этого согласно определению величины $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A})$ достаточно установить равенство $\mathfrak{a}_F(\mathbb{A}) = 0$, где F — произвольное компактное подмножество $\mathbb{S} \setminus X(D)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и компакт $F \subset \mathbb{S} \setminus X(D)$. Поскольку последовательность $\{K_p\}$ исчерпывает область D и $H_D(\varsigma) \neq \infty$, то с учетом определения опорной функции для каждого $\varsigma \in F$ найдется номер $p(\varsigma)$ такой, что $H_{K_{p(\varsigma)}} > H_D(\varsigma) - \varepsilon$. По предположению выполнено (16). Поэтому для каждого $p(\varsigma)$, $\varsigma \in F$, существуют номер $s(\varsigma) > p(\varsigma)$ и постоянная $\gamma(\varsigma) > 0$ такие, что

$$\ln|b_{m,j,k}| \leqslant H_{K_{s(\varsigma)}}(\lambda_{m,1}) - H_{K_{p(\varsigma)}}(\lambda_{m,1}) + \gamma(\varsigma), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j, k = 1, \ldots, N_m. \tag{19}$$

Компакт K_s для всех $s = 1, 2, \ldots$ лежит в области D. Это влечет за собой неравенство $H_D \leqslant H_{K_{s(\varsigma)}}$. Следовательно, в силу выбора номера $p(\varsigma)$ получаем: $H_{K_{p(\varsigma)}}(\varsigma) > H_{K_{s(\varsigma)}}(\varsigma) - \varepsilon$. По непрерывности последнее неравенство продолжается в окрестность $V(\varsigma)$ точки ς:

$$H_{K_{p(\varsigma)}}(\eta) > H_{K_{s(\varsigma)}}(\eta) - \varepsilon, \quad \eta \in V(\varsigma). \tag{20}$$

Из покрытия $V(\varsigma)$, $\varsigma \in F$, компакта F выделим конечное подпокрытие $V(\varsigma(1)), \ldots, V(\varsigma(t))$. Положим $T = \mathbb{S} \cap (\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant t} V(\varsigma(i)))$ и $\gamma_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant t} \gamma(\varsigma(i))$. Пусть $\mathbb{A}(T) = \{\mathfrak{A}_{m(l)}\}$. Используя однородность опорной функции из (19) и (20), получаем:

$$\ln|b_{m(l),j,k}| \leqslant \varepsilon|\lambda_{m(l),1}| + \gamma_0, \quad l \geq 1.$$

Если $\mathbb{A}(T)$ содержит лишь конечное число элементов, то по определению $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) = 0$. В противном случае $|\lambda_{m(l),1}| \to \infty$ при $l \to \infty$. Тогда из последнего неравенства следует, что $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) \leqslant \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\mathfrak{a}_F(\mathbb{A}) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — почти экспоненциальный базис с показателями $\lambda_{m,1}$ в подпространстве W, а $\tilde{E}' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — нормированная последовательность. Система E' является базисом в W тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = 0$, $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$.*

Доказательство. По условию $\tilde{E}$ — почти экспоненциальный базис в W. Тогда с учетом замечания к лемме 6 по следствию из теоремы 3 в работе [9] система $\tilde{E}$ является базисом Кете в W, т.е. для любого $p \geq 1$ существуют номер l и $\beta > 0$, не зависящие от $g \in W$, такие, что

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z \in K_p} |e_{m,j}(z)| \leqslant \beta \sup_{z \in K_l} |g(z)|, \tag{21}$$

где $g(z) = \sum\limits_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z)$. В частности, последнее неравенство выполнено для любой функции $g \in W_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Это означает, что система $\tilde{E}$ обладает групповым свойством Кете. Следовательно, по лемме 8 E' — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями $\lambda_{m,1}$. Предположим, что система E' является базисом в подпространстве W. Тогда $E' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — базис в W_m. Поэтому для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существует матрица $\mathfrak{A}_m^{-1} = (b_{m,j,k})$, обратная к $\mathfrak{A}_m$. Кроме того, по тем же соображениям, что и для $\tilde{E}$, система E' обладает групповым свойством Кете. В частности, для любого $l \geq 1$ существуют номер r и постоянная $\beta > 0$, не зависящие от $m = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, \ldots, N_m$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z \in K_l} |e'_{m,k}(z)| \leqslant \beta \sup_{z \in K_r} |e_{m,j}(z)|,$$

где $e_{m,j}(z)=\sum_{k=1}^{N_m} b_{m,j,k}e'_{m,k}(z)$. Отсюда следует, что

$$\ln|b_{m,j,k}|\leqslant \ln\sup_{z\in K_r}|e_{m,j}(z)|-\ln\sup_{z\in K_l}|e'_{m,k}(z)|+\ln\beta,\quad m=1,2,\dots,j,k=1,\dots,N_m.$$

Поскольку последовательность E' почти экспоненциальная, то для каждого $p\geq 1$ существуют постоянная $b>0$ и номер l такие, что

$$b\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}))\leqslant \sup_{w\in K_l}|e'_{m,k}(w)|,\quad m=1,2,\dots,k=1,\dots,N_m.$$

Последовательность $\tilde{E}$ также является почти экспоненциальной. Поэтому для каждого $r\geq 1$ существуют постоянная $a>0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w\in K_r}|e_{m,j}(w)|\leqslant \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})),\quad m=1,2,\dots,j=1,\dots,N_m.$$

Из последних неравенств получаем:

$$\ln|b_{m,j,k}|\leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1})-H_{K_p}(\lambda_{m,1})+\ln\beta-\ln b+\ln a,\quad m=1,2,\dots,j,k=1,\dots,N_m.$$

Тогда по лемме 9 имеют место соотношения $\mathfrak{a}_D\mathbb{A}=0$ и $\mathfrak{a}(\mathbb{A})<\infty$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{a}_D\mathbb{A}=0$ и $\mathfrak{a}(\mathbb{A})<\infty$, и покажем, что в этом случае система E' является базисом в W. Пусть g — произвольная функция из подпространства W. По условию $\tilde{E}$ — базис в W. Следовательно, верно представление

$$g(z)=\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j}e_{m,j}(z).$$

Отсюда как и в теореме 2 получаем

$$g(z)=\sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} b_{m,k}e'_{m,k}(z),$$

где $b_{m,k}=\sum_{j=1}^{N_m} d_{m,j}b_{m,j,k}$. Разложение функции g по системе E' единственное, так как последняя обладает биортогональной последовательностью функционалов $\{\mu'_{m,k}\}$. Действительно, как было отмечено ранее, биортогональной последовательностью функционалов $\{\mu_{m,j}\}$ обладает система $\tilde{E}$. Положим $\mu'_{m,k}=\sum_{j=1}^{N_m} b_{m,j,k}\mu_{m,j}$. Тогда последовательность $\{\mu'_{m,k}\}$ биортогональна к E'. Остается показать, что ряд для функции g по системе E' сходится равномерно на компактах в области D. Поскольку выполнено (21), то чтобы установить этот факт, как и в теореме 2 достаточно доказать, что для каждого номера p существуют номер s и постоянная C такие, что

$$\sum_{k=1}^{N_m}|b_{m,j,k}|\sup_{z\in K_p}|e'_{m,k}(z)|\leqslant C\sup_{z\in K_s}|e_{m,j}(z)|,\quad m=1,2,\dots,j=1,\dots,N_m. \tag{22}$$

Фиксируем $p=1,2,\dots$ В силу того, что E' — почти экспоненциальная последовательность, найдутся $a>0$ и номер l, для которых верна оценка

$$\sup_{w\in K_p}|e'_{m,k}(w)|\leqslant a\exp(H_{K_l}(\lambda_{m,1})),\quad m=1,2,\dots,k=1,\dots,N_m.$$

По лемме (9) существуют номер r и постоянная γ такие, что

$$\ln|b_{m,j,k}|\leqslant H_{K_r}(\lambda_{m,1})-H_{K_l}(\lambda_{m,1})+\gamma,\quad m=1,2,\dots,j,k=1,\dots,N_m.$$

Таким образом, имеем:

$$\sum_{k=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \leqslant aN_m \exp(H_{K_r}(\lambda_{m,1}) - H_{K_l}(\lambda_{m,1}) + \gamma) \exp(H_{K_l}(\lambda_{m,1})) =$$

$$= aN_m \exp(H_{K_r}(\lambda_{m,1}) + \gamma), \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N_m.$$

Согласно лемме 6 выберем $d > 0$ такое, что $N_m \exp(-\alpha_r) \leqslant d$, $m = 1, 2, \ldots$, где α_r — число из неравенства (5). Тогда из предыдущего с учетом этого неравенства получаем:

$$\sum_{k=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \leqslant a \exp(H_{K_{r+1}}(\lambda_{m,1}) + \gamma), \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N_m.$$

Последовательность $\tilde{E}$ является почти экспоненциальной. Поэтому для каждого существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_{r+1}}(\lambda_{m,1}) \leqslant \sup_{w\in K_s} |e_{m,j}(w)|, \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N_m.$$

Объединяя две последних оценки, получаем (22). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука, 1982.
2. Красичков-Терновский И.Ф. *Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях* // ДАН СССР. 1971. Т. 197, № 1.
3. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
4. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
5. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 87(129), № 4.
6. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный анализ на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 88(130), № 1.
7. Гротендик А.О. *О пространствах (F) и (DF)* // Сб. Математика. 1958. Т. 2, № 3.
8. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в вы- пуклых областях* // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68. № 2.
9. Кривошеев А.С.*Особые точки суммы ряда экспонент на границе области сходимости* // Уфимский математичексий журал. 2009. Т. 1, № 4. С. 78–109.
10. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж.*Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 90-101.

УДК 517.5

СВОЙСТВА АДАМАРОВСКИХ КОМПОЗИЦИЙ ПРОИЗВОДНЫХ ГЕЛЬФОНДА–ЛЕОНТЬЕВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Л.Л. ЛУГОВАЯ, О.М. МУЛЯВА, М.Н. ШЕРЕМЕТА

Аннотация. Для целых и аналитических в единичном круге функций исследованы сходимость и рост адамаровских композиций их производных Гельфонда–Леонтьева. Изучено поведение максимальных членов таких композиций.

Ключевые слова: аналитическая функция, производная Гельфонда – Леонтьева, композиция Адамара, максимальный член.

1. Введение

Для степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

с радиусом сходимости $R[f] = R \in [0, \infty]$ и степенного ряда $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$ с $R[f] = R \in [0, \infty]$ и $l_k > 0$ для всех $k \geq 0$ степенной ряд

$$D_l^{(n)} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k \tag{2}$$

называется [1] производной Гельфонда – Леонтьва n-го порядка. Если $l(z) = e^z$, то $D_l^{(n)} f(z) = f^{(n)}(z)$ является обычной производной n-го порядка.

Степенной ряд

$$(f * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k z^k \tag{3}$$

называется адамаровской композицией ряда (1) и $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k$. Известно [2], что $R[f * g] \geq R[f]R[g]$ и обратное неравенство может не выполняться. Свойства адамаровских композиций используются для исследования аналитических продолжений функций (например, см. [3]–[4]).

Если $R[f] > 0$, то для $0 \leq r < R[f]$ пусть $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu(r, f) = \max\{|f_k|r^k : k \geq 0\}$ — максимальный член ряда (1), а $\nu(r, f) = \max\{n : |f_k|r^k = \mu(r, f)\}$ — его центральный индекс. Связь между ростом максимального члена производной $(f * g)^{(n)}$ адамаровской композиции $f * g$ целых функций

L.L. Luhova, O.M. Mulyava, M.M. Sheremeta, Properties of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions.

Поступила 1 марта 2010 г.

f и g и ростом максимального члена адамаровской композиции $f^{(n)} * g^{(n)}$ их производных исследовал М. Сен [5]–[6]. В частности, в [6] доказано, что если функция $f * g$ имеет нижний порядок λ и порядок ϱ, то для любого $\varepsilon > 0$ и всех $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$r^{(n+2)\lambda-1-\varepsilon} \leq \frac{\mu(r, f^{(n+1)} * g^{(n+1)})}{\mu(r,(f*g)^n)} \leq r^{(n+2)\varrho-1+\varepsilon}.$$

Мы продолжим исследования М. Сена, рассматривая вместо обычных производных производные Гельфонда-Леонтьева и кроме целых функций аналитические в единичном круге функции.

2. Аналитичность адамаровской композиции производных Гельфонда–Леонтьева

Естественно, что не всегда радиус сходимости производной Гельфонда – Леонтьева ряда (1) совпадает с радиусом сходимости этого ряда. Однако, используя формулу Коши-Адамара, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Для того, чтобы для любого ряда (1) равенства* $R[f] = +\infty$ *и* $R[D_l^{(n)} f] = +\infty$ *были равносильными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$0 < q = \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \leq \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = Q < +\infty, \tag{4}$$

а для эквивалентности равенств $R[f] = 1$ *и* $R[D_l^{(n)} f] = 1$ *необходимым и достаточным является условие*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = 1. \tag{5}$$

Доказательство. Начнем с первой части леммы. Используя формулу Коши – Адамара, легко показать, что для радиусов сходимости рядов (1) и (2) в силу (4) справедливы неравенства $qR[D_l^1 f] \leq R[f] \leq QR[D_l^1 f]$, откуда следует, что равенства $R[f] = +\infty$ и $R[D_l^1 f] = +\infty$ равносильные.

Предположим теперь, что $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = +\infty$, т. е. не выполняется второе из условий (4). Тогда существуют возрастающая последовательность (k_n) натуральных чисел и последовательность $(\varkappa_n)$ положительных чисел такие, что $\varkappa_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $l_{k_n}/l_{k_n+1} = \varkappa_n^{k_n}$ для $n \geq 1$. Положим $f_{k_n+1} = \varkappa_n^{-(k_n+1)/2}$ и $f_k = 0$ для $k \neq k_n + 1$. Тогда $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[k_n+1]{|f_{k_n+1}|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \varkappa_n^{-1/2} = 0$, т. е. $f \in A(+\infty)$, а с другой стороны, $\sqrt[k_n]{\dfrac{l_{k_n}}{l_{k_n+1}} f_{k_n+1}} = \varkappa_n^{(k_n-1)/(2k_n)} \to +\infty$ при $n \to +\infty$, т. е. $D_l^1 f \notin A(+\infty)$.

Если же не выполняется первое из условий (4), т. е. существует возрастающая последовательность (k_j) натуральных чисел такая, что $\sqrt[k_j]{l_{k_j}/l_{k_j+1}} = \varepsilon_j \to 0\,(j \to \infty)$, то положим $f_{k_j+1} = \varepsilon_j^{-(k_n+1)/2}$ и $f_k = 0$ для $k \neq k_j + 1$. Тогда $\sqrt[k_j+1]{|f_{k_j+1}|} = \varepsilon_j^{-1/2} \to +\infty$ и $\sqrt[k_j]{\dfrac{l_{k_j}}{l_{k_j+1}}|f_{k_j+1}|} \to 0$ при $j \to \infty$, т. е. $D_l^1 f \in A(+\infty)$ и $f \notin A(+\infty)$. Первая часть леммы доказана.

Докажем вторую часть. При выполнении условия (5) $\dfrac{1}{R[D_l^1 f]} = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|} = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_{k+1}|} = \dfrac{1}{R[f]}$, так что это условие является достаточным. Если же оно не выполняется, то существует возрастающая последовательность (k_n) натуральных чисел такая, что $\sqrt[k_n]{l_{k_n}/l_{k_n+1}} \to q \neq 1$ при $n \to \infty$. Полагая $f_{k_n+1} = 1$ и $f_k = 0$ для $k \neq k_n + 1$ $(n \geq 1)$, получаем $R[f] = 1$ и $R[D_l^1 f] = 1/q \neq 1$, а если положим $f_{k_n+1} = l_{k_n+1}/l_{k_n}$ и $f_k = 0$ для

$k \neq k_n + 1$ $(n \geq 1)$, то получим $R[D_l^1 f] = 1$ и $R[f] = q \neq 1$, т. е. условие (5) является также необходимым. Лемма 1 доказана полностью.

Несмотря на общность, условия (4) и (5) в лемме 1 являются достаточными для одновременной аналитичности производной Гельфонда-Леонтьева адамаровской композиции

$$D_l^{(n)}(f * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} g_{k+n} z^k \tag{6}$$

функций f и g и адамаровской композиции

$$(D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^2 f_{k+n} g_{k+n} z^k. \tag{7}$$

их производных Гельфонда – Леонтьева. Другими словами, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *При выполнении условия (4) равносильными являются равенства* $R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = +\infty$ *и* $R[D_l^{(n)}(f * g)] = +\infty$, *а при выполнении условия (5) такими являются равенства* $R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = 1$ *и* $R[D_l^{(n)}(f * g)] = 1$.

Доказательство. Используя формулу Коши – Адамара и свойства верхнего и нижнего предела, имеем

$$\frac{1}{R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g]} = \varlimsup_{k\to\infty} \left(\left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^2 |f_{k+n}||g_{k+n}|\right)^{1/k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{R[D_l^{(n)}(f * g)]} \varlimsup_{k\to\infty} \left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^{1/k}$$

и

$$\frac{1}{R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g]} \geq \frac{1}{R[D_l^{(n)}(f * g)]} \varliminf_{k\to\infty} \left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^{1/k},$$

откуда легко вытекает справедливость леммы 2.

3. Рост производных Гельфонда – Леонтьева

Наиболее употребительными характеристиками роста целой функции f являются ее нижний порядок $\lambda[f]$ и порядок $\varrho[f]$, определенные формулами

$$\lambda[f] = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}, \quad \varrho[f] = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}.$$

Имеет место следующая хорошо известная лемма:

Лемма 3. *Для каждой целой функции (1)*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \nu(r, f)}{\ln r} = \lambda[f], \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \nu(r, f)}{\ln r} = \varrho[f].$$

Для порядка эту лемму доказал Ж. Валирон ([7], С. 33), а для нижнего порядка — Дж. Уиттекер [8].

Для функций, аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, нижний порядок $\lambda^*[f]$ и порядок $\varrho^*[f]$ определяются формулами

$$\lambda^*[f] = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \ln M(r, f)}{-\ln(1-r)}, \quad \varrho^*[f] = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \ln M(r, f)}{-\ln(1-r)}.$$

Лемма 4. [9]. *Для каждой аналитической в $\mathbb{D}$ функции (1) справедливы неулучшаемые оценки*

$$\lambda^*[f] \le \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \nu(r,f)}{-\ln(1-r)} \le \lambda^*[f]+1, \quad \varrho^*[f] \le \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \nu(r,f)}{-\ln(1-r)} \le \varrho^*[f]+1.$$

Следующая лемма устанавливает связь между ростом целой функции и ее производной Гельфонда – Леонтьева.

Лемма 5. *При выполнении условия (4) для целой функции (1) имеют место равенства $\lambda[D_l^{(n)} f] = \lambda[f]$ и $\varrho[D_l^{(n)} f] = \varrho[f]$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Из условия (4) вытекает существование чисел $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$ таких, что $q_1^k \le l_k/l_{k+1} \le q_2^k$ для всех $k \ge 0$. Поэтому $r\mu(r, D_l^1 f) = \max\left\{\dfrac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|r^{k+1} : k \ge 0\right\} \le \dfrac{1}{q_2}\max\{|f_{k+1}|(q_2 r)^{k+1} : k \ge 0\} \le \le \dfrac{\mu(q_2 r, f)}{q_2}$ и, аналогично, $r\mu(r, D_l^1 f) \ge \dfrac{\mu(q_1 r, f)}{q_1}$ для всех достаточно больших r, так как $\mu(r,f) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Отсюда, учитывая, что для целых трансцендентных функций $\ln r = o(\ln \mu(r,f))$ при $r \to +\infty$, получаем асимптотические неравенства

$$(1+o(1))\ln \mu(q_1 r, f) \le \ln \mu(r, D_l^1 f) \le (1+o(1))\ln \mu(q_2 r, f), \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши

$$\mu(r,f) \le M(r,f) \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|(2r)^k 2^{-k} \le 2\mu(2r,f). \tag{9}$$

Из (8)–(9) легко следует справедливость леммы 5.

Следствие 1. *Если f и g — целые функции, то при выполнении условия (4) $\lambda[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \lambda[D_l^{(n)}(f*g)] = \lambda[f*g]$ и $\varrho[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \varrho[D_l^{(n)}(f*g)] = \varrho[f*g]$.*

Действительно, равенства $\lambda[D_l^{(n)}(f*g)] = \lambda[f*g]$ и $\varrho[D_l^{(n)}(f*g)] = \varrho[f*g]$ вытекают непосредственно из леммы 5. Чтобы доказать равенства $\lambda[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)] = \lambda[D_l^{(n)}(f*g)]$ и $\varrho[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)] = \varrho[D_l^{(n)}(f*g)]$, достаточно заметить, что, как при доказательстве леммы 5, можно получить неравенства $q_1^n \mu(r, D_l^{(n)}(f*g)) \le \mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \le q_2^n \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ и использовать (9).

В отличие от целых функций, для которых условие (4) является достаточным для равенства порядков функции и ее производной Гельфонда – Леонтьева, в случае аналитических в $\mathbb{D}$ функций условие (5) недостаточно для равности таких порядков. Например, функция $f(z) = 1/(1-z)$ имеет нулевой порядок, а ее производная Гельфонда – Леонтьева $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(l_k/l_{k+1})z^k$ в силу произвольности коэффициентов l_k/l_{k+1} может иметь даже бесконечный порядок. Однако если $l_k = 1/k!$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Для каждой аналитической в $\mathbb{D}$ функции f имеют место равенства $\lambda^*[f] = \lambda^*[f']$ и $\varrho^*[f] = \varrho^*[f']$.*

Доказательство. Из интегральной формулы Коши $f'(z) = = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\tau - z| = (1-|z|)/2} \dfrac{f(\tau)d\tau}{(\tau - z)^2}$ получаем неравенство $M(r, f') \le \dfrac{2}{1-r} M\left(\dfrac{1+r}{2}, f\right)$, а в силу формулы Лейбница – Ньютона $f(z) = \int\limits_0^z f'(\tau)d\tau + f(0)$ имеет место неравенство $M(r,f) \le \le M(r,f') + |f(0)|$, откуда легко вытекают равенства $\lambda^*[f'] = \lambda^*[f]$ и $\varrho^*[f'] = \varrho^*[f]$.

Поскольку $l_k/l_{k+1} = k+1$, если $D_l^1 f = f'$, то естественно предположить правильным аналог леммы 6 при условии

$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} \le \varlimsup_{k\to\infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} < +\infty, \tag{10}$$

т. е. справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *При выполнении условия (10) для аналитической в $\mathbb{D}$ функции (1) $\lambda^*[D_l^{(n)}f] = \lambda^*[f]$ и $\varrho^*[D_l^{(n)}f] = \varrho^*[f]$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Из (10) вытекает существование чисел $0 < h_1 \le h_2 < +\infty$ таких, что $h_1(k+1) \le l_k/l_{k+1} \le h_2(k+1)$ для всех $k \ge 0$. Поэтому $\mu(r, D_l^1 f) \le h_2 \max\{(k+1)|f_{k+1}|r^k : k \ge 0\} = h_2\mu(r, f')$ и, аналогично, $\mu(r, D_l^1 f) \ge h_1\mu(r, f')$. Так как для аналитической в $\mathbb{D}$ функции (1)

$$\mu(r,f) \le M(r,f) \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \left(\frac{1+r}{2}\right)^k \left(\frac{2r}{1+r}\right)^k \le \frac{1+r}{1-r}\mu\left(\frac{1+r}{2}, f\right), \tag{11}$$

то отсюда и леммы 6 следует лемма 7.

Следствие 2. *Если f и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, то при выполнении условия (10) $\lambda^*[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g] = \lambda^*[D_l^{(n)}(f*g)] = \lambda^*[f*g]$ и $\varrho^*[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g] = \varrho^*[D_l^{(n)}(f*g)] = \varrho^*[f*g]$.*

Действительно, согласно лемме 7 достаточно доказать равенства $\lambda^*[D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)] = = \lambda^*[D_l^{(n)}(f*g)]$ и $\varrho^*[D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)] = \varrho^*[D_l^{(n)}(f*g)]$, а для этого достаточно заметить, что при условии (10) $\mu(r, D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g) \le h_2^n \max\left\{(k+1)\dots(k+n)\dfrac{l_k}{l_{k+n}}|f_{k+n}||g_{k+n}|r^k : k \ge 0\right\} = = h_2^n\mu(r, F^{(n)})$, где

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n}g_{k+n}z^{k+n} = z^n D_l^{(n)}(f*g)(z),$$

и, аналогично, $\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g) \ge h_1^n\mu(r, F^{(n)})$. Отсюда, используя (11), нетрудно получить равенства $\lambda^*[D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g] = \lambda^*[F] = \lambda^*[D_l^{(n)}(f*g)]$ и $\varrho^*[D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g] = \varrho^*[F] = = \lambda^*[D_r^{(n)}(f*g)]$, что и требовалось доказать.

4. Поведение максимальных членов адамаровских композиций целых функций

Используя формулу Адамара для нахождения порядка, можно показать, что $1/\varrho[f*g] \ge 1/\varrho[f] + 1/\varrho[g]$. Противоположное неравенство, вообще говоря, неверно: возможны даже равенства $\varrho[f] = \varrho[g] = +\infty$ и $\varrho[f*g] = 0$. Поэтому далее рост максимальных членов $\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ и $\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)$ будем изучать в терминах порядка и нижнего порядка функции $f*g$. Начнем со следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть f и g — целые функции, $\lambda[f*g] = \lambda$ и $\varrho[f*g] = \varrho$, тогда:*
1) если выполнено условие (4) с $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \lambda, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \varrho;$$

2) если выполнено условие (10), то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = n\lambda, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = n\varrho;$$

3) если

$$0 < p_1 \le l_k/l_{k+1} \le p_2 < +\infty \quad (k \ge 0), \tag{12}$$

то $\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f * g))$ *при* $r \to +\infty$.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}} \le \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}}. \tag{13}$$

Действительно, с одной стороны,

$$\mu(r, D_l^{(n)}(f * g)) =$$

$$= \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}} |f_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}||g_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}| r^{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))} =$$

$$= \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}} \left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}} \right)^2 |f_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}||g_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}| \times$$

$$\times r^{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))} \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}} \mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g),$$

а с другой стороны,

$$\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) =$$

$$= \left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}} \right)^2 |f_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}||g_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}| \times$$

$$\times r^{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)} \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}} \mu(r, D_l^{(n)}(f * g)),$$

так что неравенства (12) доказаны.

Из (4) с $q > 1$ вытекает существование чисел $1 < q_1 \le q_2 < +\infty$ таких, что $q_1^{kn} \le l_k/l_{k+n} \le q_2^{kn}$ для всех $k \ge k_0$. Поэтому из (13) имеем

$$n\nu(r, D_l^{(n)}(f * g)) \ln q_1 \le \ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} \le n\nu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \ln q_2, \tag{14}$$

для $r \ge r_0$. По лемме 3

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \nu(r, D_l^{(n)}(f * g)}{\ln r} = \lambda[D_l^{(n)}(f * g)], \ \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \nu(r, D_l^{(n)}(f * g))}{\ln r} = \varrho[D_l^{(n)}(f * g)] \tag{15}$$

и эти равенства остаются в силе, если вместо $D_l^{(n)}(f*g)$ поставить $D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g$, а поскольку $0 < n \ln q_1 \le n \ln q_2 < +\infty$, то из (14) в силу следствия 1 легко получаем утверждение 1 теоремы 1.

Если же выполняется условие (10), то существуют числа $0 < h_1 \le h_2 < +\infty$ такие, что $h_1 k^n \le l_k/l_{k+n} \le h_2 k^n$ для всех $k \ge 0$. Поэтому из (13) для всех $r \ge r_0$ имеем

$$h_1 \nu^n(r, D_l^{(n)}(f * g)) \le \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} \le h_2 \nu^n(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g), \tag{16}$$

откуда, как при доказательстве утверждения 1, получаем утверждение 2.

Наконец, при выполнении условия (12) $p_1^n \le l_k/l_{k+n} \le p_2^n$ для всех $k \ge 0$, а из (13) следует, что $p_1^n \le \dfrac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le p_2^n$ для всех $r > 0$, что указывает на справедливость утверждения 3. Теорема 1 полностью доказана.

В следующей теореме указана связь между $\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))$ и $\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$.

Теорема 2. *Пусть f и g — целые функции, $\lambda[f*g] = \lambda$ и $\varrho[f*g] = \varrho$, тогда для $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ и $n < m$:*

1) если выполняется условие (4) с $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \lambda, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \varrho;$$

2) если выполняется условие (10), то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (m-n)\lambda$$

и

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (m-n)\varrho;$$

3) если выполняется условие (12), то $r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ при $r \to +\infty$.

Доказательство. Сначала покажем, что для всех достаточно больших $r > 0$ имеют место неравенства

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g)+n-m}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}} \le \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g)+m-n}}. \tag{17}$$

Действительно, с одной стороны,

$$\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)) = \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n+1)}(f*g))+m}} \times$$

$$\times |f_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m}||g_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m}| r^{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))} =$$

$$= \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n}} \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))m-n+n}} \times$$

$$\times |f_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))m-n+n}||g_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n+n}| r^{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n} r^{n-m} \le$$

$$\le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))m-n}} \frac{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))}{r^{m-n}},$$

откуда следует правое неравенство (17). Если $r > 0$ настолько большое, что $\nu(r, D_l^{(n)}(f*g)) \ge m-n$, то, меняя в последнем неравенстве местами m и n, получаем

$$\mu(r, D_l^{(n)}(f*g)) \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n-m}} \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{r^{n-m}},$$

откуда следует левое неравенство (17).

Если теперь выполняется условие (4) с $q > 1$, то, как при доказательстве теоремы 1, из (17) для всех достаточно больших $r > 0$ имеем

$$(m-n)\nu(r, D_l^{(n)}(f*g)) \ln q_1 \le \ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le$$
$$\le (m-n)\nu(r, D_l^{(m)}(f*g)) \ln q_2,$$

откуда, используя (15) и следствие 1, получаем утверждение 1 теоремы 2.

Если же выполняется условие (10), то, при доказательсте утверждения 2 теоремы 1, для всех достаточно больших $r > 0$ имеем

$$h_1 \nu^{m-n}(r, D_l^{(n)}(f*g)) \le \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le h_2 \nu^{m-n}(r, D_l^{(m)}(f*g)),$$

откуда, как выше, получаем утверждение 2 теоремы 2.

Наконец, доказательство утверждения 3 теоремы 2 такое же, как доказательство утверждения 3 теоремы 1. Теорема 2 полностью доказана.

Взяв в доказательстве неравенств (17) $D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g$ и $D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g$ вместо $D_l^{(m)}(f*g)$ и $D_l^{(n)}(f*g)$ и учитывая, что ряд (7) отличается от ряда (6) только тем, что вместо l_k/l_{k+n} стоит $(l_k/l_{k+n})^2$, легко доказать неравенства

$$\left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g)+n-m}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)^2 \le \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le \left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g)+m-n}}\right)^2$$

для всех достаточно больших $r > 0$, откуда, как при доказательстве теоремы 2, получим следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть f и g — целые функции, $\lambda[f*g] = \lambda$ и $\varrho[f*g] = \varrho$, тогда для $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ и $n < m$:*

1) если выполняется условие (4) с $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)} = \lambda, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)} = \varrho;$$

2) если выполняется условие (10), то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g))} = 2(m-n)\lambda$$

и

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g))} = 2(m-n)\varrho;$$

3) если выполняется условие (11), то $r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)$ при $r \to +\infty$.

Комбинируя доказательства теорем 1 и 2 (или теорем 1 и 3), можно установить связь между $\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)$ и $\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$. Здесь мы остановимся только на случае, когда $m = n+1$, и докажем следующую теорему, обобщающую указанный во введении результат М. Сена.

Теорема 4. *Пусть f и g — целые функции, $\lambda[f*g] = \lambda$ и $\varrho[f*g] = \varrho$, тогда:*

1) если выполняется условие (4) с $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)}f * D_l^{(n+1)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \lambda,$$

и

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \varrho;$$

2) если выполняется условие (10), то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (n+2)\lambda - 1,$$

и

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (n+2)\varrho - 1;$$

3) если выполняется условие (11), то $r\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ *при* $r \to +\infty$.

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g))} \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))},$$

то в силу (13) и (17) имеем

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}} \left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)-1}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)}}\right)^2 \le \frac{r\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le$$

$$\le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}} \left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n+1)} f*D_l^{(n+1)} g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n+1)} f*D_l^{(n+1)} g)+1}}\right)^2,$$

откуда, используя следствие 1, как выше, получаем утверждения 1–3 теоремы 4.

Упомянутый результат М. Сена вытекает из утверждения 2 теоремы 4, если выбрать $l_k = 1/k!$.

Замечание 1. Условие $q > 1$ в утверждении 1 теорем 1–4 существенно. Остановимся только на теореме 1. Пусть $f(z) = g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k/\sqrt{k!}$, а $l_k/l_{k+1} = q^k$. Тогда $(f*g)(z) = e^z$, $l_k/l_{k+n} = q^{nk+n(n-1)/2}$, $D_l^{(n)}(f*g)(z) = \dfrac{1}{q^{n(n-1)/2} z^n} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(zq^n)^k}{k!}$ и $(D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)(z) = \dfrac{1}{q^{n(n-1)} z^n} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(zq^{2n})^k}{k!}$. Поэтому для всех достаточно больших r имеют место равенства $\mu(r, D_l^{(n)}(f*g)) = \dfrac{1}{q^{n(n-1)/2} r^n} \mu(rq_1^n)$ и $\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g) = = \dfrac{1}{q^{n(n-1)} r^n} \mu(rq^{2n})$, где $\mu(r)$ — максимальный член степенного разложения функции e^z. Ясно, что $\lambda[f*g] = \varrho[f*g] = 1$, а $\mu(r, D_l^{(n)}(f*g)) = \mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)$, если $q = 1$, и $\dfrac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \dfrac{\mu(rq^{2n})}{q^{n(n-1)/2}\mu(rq^n)} \to 0$ при $r \to +\infty$, если $q < 1$ (см. [10], с.12), т. е. утверждение 1 теоремы 1 неверно.

5. Поведение максимальных членов адамаровских композиций аналитических в $\mathbb{D}$ функций

Аналоги теорем 1–4 для функций, аналитических в единичном круге, отличаются от этих теорем тем, что в силу леммы 4 вместо равенств теперь будем иметь неравенства. Кроме того, утверждения 1 из теорем 1–4 не могут иметь аналогов согласно сделаному в п. 3 замечанию. Наконец, из равенства $R[f] = R[g] = 1$ вытекает только неравенство $R[f*g] \geq 1$, и поэтому в условиях дальнейших утверждений будем требовать, чтобы $R[f*g] = 1$.

Теорема 5. *Пусть f и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, $R[f*g] = 1$, $\lambda^*[f*g] = \lambda^*$ и $\varrho^*[f*g] = \varrho^*$, тогда:*

1) если выполняется условие (10), то

$$n\lambda^* \leq \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = n(\lambda^* + 1)$$

и

$$n\varrho^* \leq \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = n(\varrho^* + 1);$$

2) если выполняется условие (12), то $\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ при $r \uparrow 1$.

Доказательство. Если выполняется условие (10), то из (13), как видно из доказательства теоремы 1, вытекает (16). По лемме 4

$$\lambda^*[D_l^{(n)}(f*g)] \leq \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \nu(r, D_l^{(n)}(f*g))}{-\ln(1-r)} \leq \lambda^*[D_l^{(n)}(f*g)] + 1,$$

$$\varrho^*[D_l^{(n)}(f*g)] \leq \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \nu(r, D_l^{(n)}(f*g))}{-\ln(1-r)} \leq \varrho^*[D_l^{(n)}(f*g)] + 1,$$

и эти неравенства имеют место, если вместо $D_l^{(n)}(f*g)$ поставить $D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g$. Поэтому в силу следствия 2 утверждение 1 теоремы 5 доказано.

Утверждение 2 также легко вытекет из (13).

Следующие три теоремы доказываются аналогично к доказательству теорем 2–5.

Теорема 6. *Пусть f и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, $R[f*g] = 1$, $\lambda^*[f*g] = \lambda^*$ и $\varrho^*[f*g] = \varrho^*$, тогда для $n < m$:*

1) если выполняется условие (10), то

$$(m-n)\lambda^* \leq \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (m-n)(\lambda^* + 1)$$

и

$$(m-n)\varrho^* \leq \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (m-n)(\varrho^* + 1);$$

2) если выполняется условие (12), то $\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ при $r \uparrow 1$.

Теорема 7. *Пусть f и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, $R[f*g] = 1$, $\lambda^*[f*g] = \lambda^*$ и $\varrho^*[f*g] = \varrho^*$, тогда для $n < m$:*

1) если выполняется условие (10), то

$$2(m-n)\lambda^* \leq \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(m)} f * D_l^{(m)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)} = 2(m-n)(\lambda^* + 1)$$

и

$$2(m-n)\varrho^* \le \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(m)} f * D_l^{(m)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)} = 2(m-n)(\varrho^*+1);$$

2) если выполняется условие (12), то $\mu(r, D_l^{(m)} f * D_l^{(m)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)$ *при* $r \uparrow 1$.

Теорема 8. *Пусть* f *и* g *— аналитические в* $\mathbb{D}$ *функции,* $R[f*g]=1$, $\lambda^*[f*g]=\lambda^*$ *и* $\varrho^*[f*g]=\varrho^*$, *тогда:*

1) если выполняется условие (10), то

$$(n+2)\lambda^* \le \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (n+2)(\lambda^*+1)$$

и

$$(n+2)\varrho^* \le \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (n+2)(\varrho^*+1);$$

2) если выполняется условие (12), то $\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ *при* $r \uparrow 1$.

Замечание 2. Из утверждения 1 теоремы 8 следует, что если функция $f*g$ имеет нижний порядок $\lambda^* > 0$ и порядок $\varrho^* < +\infty$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ и всех $r \in [r_n(\varepsilon), 1)$ имеет место следующий аналог неравенств М. Сена

$$\left(\frac{1}{1-r}\right)^{(n+2)\lambda^*-\varepsilon} \le \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le \left(\frac{1}{1-r}\right)^{(n+2)(\varrho^*+1)+\varepsilon}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. 1957. Т. 23, №3. С. 477–500.
2. J. Hadamard *Theoreme sur le series entieres* // Acta math. Bd. 22. 1899. P. 55–63.
3. J. Hadamard *La serie de Taylor et son prolongement analytique* // Scientia phys.-math. 1901. №12. P. 42–63.
4. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* М.: Наука, 1967. 239 с.
5. M.K. Sen *On some properties of an integral function* $f*g$ // Riv. Math. Univ. Parma (2). 1967. V. 8. P. 317–328.
6. M.K. Sen *On the maximum term of a class of integral functions and its derivatives* // Ann. Pol. Math. 1970. V. 22. P. 291–298.
7. G. Valiron *Integral functions.* Toulouse. 1923. 354 p.
8. J.M. Whittaker *The lower order of integral functions* // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. P. 20–27.
9. L.R. Sons *Regularity of growth and gaps* // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 24. P. 296–306.
10. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа. II.* М.: Наука, 1978. 432 с.

Любомира Любомировна Луговая,
Институт предпринимательства и перспективных технологий,
ул. Горбачевского, 18,
79000, г. Львов, Украина
E-mail: Lyubomyrka@ukr.net

Оксана Мирославовна Мулява,
Киевский национальный университет пищевых технологий,
ул. Владимирская, 68,
01038, г. Киев, Украина
E-mail: info@nuft.edu.ua

Мирослав Николаевич Шеремета,
Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1,
79000, г. Львов, Украина
E-mail: m_m_sheremeta@list.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 102-117.

УДК 517.968

ON SOLVABILITY OF SOME CLASSES OF URYSOHN NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS WITH NONCOMPACT OPERATORS

KH.A. KHACHATRYAN

Abstract. In present paper the classes of nonlinear integral equations with non completely continuous operators are considered.
It is assumed that conservative nonlinear operator of Wiener-Hopf-Hankell-Hammerstein type is a linear minorant to the initial Urysohn operator. The alternative theorems of the existence of positive solutions of above-mentioned class equations are proved. The asymptotic behavior of the obtained solutions at infinity is investigated. The article is finalized by the presentation of some examples arising in applications.

Keywords: Wiener-Hopf operator, eighen-value, limit of solution, one parameter family of positive solutions, asymptotic properties, Caratede'ory condition.

1. Introduction

The present work is devoted to the solvability and investigation of asymptotic behavior of solutions of the following classes nonlinear integral equations of Urysohn's type

$$\varphi(x) = \int_0^\infty U(x,t,\varphi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{1.1}$$

in regard to unknown measurable real function $\varphi(x)$. Here $U(x,t,\tau)$ is defined on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ real function, satisfying the following conditions:
a) There exists number $A > 0$, such that $U(x,t,\tau) \uparrow$ by τ on $[A,+\infty)$, for each fixed pairs $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
b) The function $U(x,t,\tau)$ satisfies Caratede'ory condition on set $\Delta_A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [A,+\infty)$ by τ, i.e. for each fixed $\tau \in [A,+\infty)$, $U(x,t,\tau)$ is measurable by $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ and for almost all $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $U(x,t,\tau)$ is continuous by τ on $[A,+\infty)$.
c) Let $\overset{\circ}{K}(x)$ is defined on $\mathbb{R}$ and summerable function of the following structure:

$$\overset{\circ}{K}(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s), \tag{1.2}$$

where

$$\sigma \uparrow [a,b), \quad 0 < a < b \leqslant +\infty, \quad 2\int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s} = 1. \tag{1.3}$$

Хачатур Агавардович Хачатрян, О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений Урысона с некомпактными операторами.

Поступила 20 марта 2010 г.

Let ω is the measurable function on $\mathbb{R}$, and

$$\omega \in L_1(0,+\infty) \cap C(0,+\infty) \quad m_1(\omega) \equiv \int\limits_0^\infty x\omega(x)dx < +\infty, \tag{1.4}$$

$$\omega(x) \geq 0, \quad x \in [A,+\infty), \quad \omega \downarrow \text{ by } x \text{ on } [A,+\infty). \tag{1.5}$$

We also assume, that function $U(x,t,\tau)$ satisfies the following inequality: there exists non negative function $K^*(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}^+$, $\quad K^*(x) < \overset{\circ}{K}(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}^+$ and number $p > 1$, such that

$$U(x,t,\tau) \geq (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))(\tau - \omega(t+\tau)), \tag{1.6}$$

for all $(x,t,\tau) \in \Delta_A$.

Historically Urysohn equation was studied in case when limit of integration is finite, and corresponding Urysohn operator is completely continuous in considered banach spaces (see for example and [1]-[6]).

Equation (1.1), besides independent mathematical interest, has an important applications in different fields of mathematical physics (see [7]-[9]). In particular case, $i)$ when $U(x,t,\tau) = \overset{\circ}{K}(x-t)(\tau - \omega(\tau+t))$ equation (1.1) was studied in works [10]-[12], $ii)$ when in (1.6) $K^* \equiv 0$ equation (1.1) was considered in works [12]-[14].

In present work putting additional condition on function U the alternative theorems of existence of positive solution is proved. Asymptotic property of the obtained solutions at infinity is also investigated. At the end of the work the obtained results are illustrated by examples.

2. Auxiliary Facts and Denotations

Let E–be one of the following Banach spaces $L_p(0,+\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $M(0,+\infty)$, $C_M(0,+\infty)$, $C_0(0,+\infty)$. We denote by Ω the class of Wiener-Hopf integral operators: $\mathcal{K} \in \Omega$ if function $K \in L_1(\mathbb{R})$ exists, such that

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int\limits_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad f \in E. \tag{2.1}$$

Operators $\mathcal{K} \in \Omega$ act in Banach spaces E, still these operators are not completely continuous in E (see [15],[17]).

It is known that in each of space E, the norm of operators $\mathcal{K} \in \Omega$ is estimated (upper) by the mentioned below form.

$$\|\mathcal{K}\|_E \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(z)|dz. \tag{2.2}$$

We also introduce the following class of Henkell operators: $\mathcal{K}^* \in \Omega^*$ measurable function $K^* \in L_1(0,+\infty)$, $\quad m_1(K^*) \equiv \int\limits_0^\infty xK^*(x)dx < +\infty$, such that

$$(\mathcal{K}^*f)(x) = \int\limits_0^\infty K^*(x+pt)f(t)dt, \quad p \geq 1, \tag{2.3}$$

$$f \in E. \tag{2.4}$$

In contradistinction to Wiener-Hopf operators, the Henkell integral operators are completely continuous in E. Let $\Omega^{\pm} \subset \Omega$–are class of the following lower and upper Vollteryan type integral operators: $V_{\pm} \in \Omega^{+}$ if functions $v_{\pm} \in L_1(0,+\infty)$ exist such that

$$(V_{-}f)(x) = \int_x^{\infty} v_{-}(t-x)f(t)dt, \quad (V_{+}f)(x) = \int_0^{x} v_{+}(x-t)f(t)dt, \quad f \in E. \tag{2.5}$$

Let kernel $\overset{\circ}{K}$ of Wiener-Hopf integral operator is given by formulae (1.6). From the results of the work [16] it follows that operator $I - \overset{\circ}{\mathcal{K}}$ permits the following factorization

$$I - \overset{\circ}{\mathcal{K}} = (I - V_{+})(I - H)(I - V_{+}). \tag{2.6}$$

It means as an equality of integral operators acting in E. Here I–is an unite operator, $V_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ are operators of the following simple structures:

$$(V_{-}f)(x) = a\int_x^{\infty} e^{-a(t-x)}f(t)dt, \quad (V_{+}f)(x) = a\int_0^{x} e^{-a(x-t)}f(t)dt, \tag{2.7}$$

$f \in E$, and $H \in \Omega$, kernel of H is the form of

$$h(x) = \int_a^{b} e^{-|x|s}\left(1 - \frac{a^2}{s^2}\right)d\sigma(s) \tag{2.8}$$

From (2.8) it follows that

$$h(x) \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^{+}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 1 - 2a^2\int_a^{b}\frac{d\sigma(s)}{s^3} \equiv \rho < 1. \tag{2.9}$$

Taking into account (2.2) we state that operator $H \in \Omega$, in contradistinction to initial operator $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \in \Omega$, is contractive in each spaces E with contraction coefficient $\rho < 1$.

We denote by $I + \Phi_{\pm}$ resolvent operators of Volteryan operators $I - V_{\pm}$ giving by (2.7). It is easy to check that

$$(\Phi_{-}\varphi)(x) = a\int_x^{\infty}\varphi(t)dt, \quad (\Phi_{+}f)(x) = a\int_0^{x} f(t)dt$$

$$\varphi \in L_1(0,+\infty), \quad f \in E. \tag{2.10}$$

The following Lemma will be used in future:

Lemma 1. *Let $K^*(x)$ is the kernel of operator $\mathcal{K}^* \in \Omega^*$, satisfying condition $0 \leqslant K^*(x) < \overset{\circ}{K}(x)$. Then*

$$\Phi_{-}\mathcal{K}^* \in \Omega^*, \quad \mathcal{K}^*\Phi_{+} \in \Omega^*.$$

Proof. For example we prove the second statement. For arbitrary function $f \in E$ we have

$$(\mathcal{K}^*\Phi_{+})f(x) = a\int_0^{\infty} K^*(x+pt)\int_0^{t} f(\tau)d\tau dt.$$

Changing the order of integration in last formulae we get

$$(\mathcal{K}^*\Phi_{+}f)(x) = a\int_0^{\infty} f(\tau)\int_{\tau}^{\infty} K^*(x+pt)dtd\tau =$$

$$= \frac{a}{p} \int_0^\infty f(\tau) \int_{x+p\tau}^\infty K^*(z) dz d\tau \equiv \int_0^\infty T^*(x+p\tau) f(\tau) d\tau,$$

where

$$T^*(x) = \frac{a}{p} \int_x^\infty K^*(\tau) d\tau. \tag{2.11}$$

To finish the proving of the theorem we have to show that

$$m_j(T^*) = \int_0^\infty x^j T^*(x) dx < +\infty, \quad j = 0, 1. \tag{2.12}$$

Let $r > 0$–is the arbitrary number. We estimate the integral

$$\int_0^r x^j T^*(x) dx = \frac{a}{p} \int_0^r x^j \int_x^r K^*(\tau) d\tau dx +$$

$$+ \frac{a}{p} \int_0^r x^j \int_r^\infty K^*(\tau) d\tau dx \leqslant \frac{a}{p(j+1)} \left(\int_0^r \tau^{j+1} K^*(\tau) d\tau + \int_r^\infty \tau^{j+1} K^*(\tau) d\tau \right) =$$

$$= \frac{a}{p(j+1)} \int_0^\infty \tau^{j+1} K^*(\tau) d\tau < +\infty.$$

Thus lemma has been proved.

Corollary. From lemma 1 it immediately follows, that if K^* satisfy condition (1.6), then $\Phi_- \mathcal{K}^* \Phi_+ \in \Omega^*$.

Below using lemma 1 the operator $I - \overset{\circ}{\mathcal{K}} + \mathcal{K}^*$ we represent the form of products of five factors

$$I - \overset{\circ}{\mathcal{K}} + \mathcal{K}^* = (I - V_-)(I - H)(I - V_+) + \mathcal{K}^* = (I - V_-)(I - H + (I + \Phi_-)\mathcal{K}^*(I + \Phi_+))(I - V_+) =$$

$$= (I - V_-)(I - H + T)(I - V_+).$$

As operator $H \in \Omega$ is contractive in E, then $I - H$ permits the factorization (see [13]):

$$I - H = (I - U_-)(I - U_+), \tag{2.13}$$

where $U_\pm \in \Omega_\pm$ are contractive operators of the form:

$$(U_- f)(x) = \int_x^\infty u(t - x) f(t) dt,$$

$$(U_+ f)(x) = \int_0^x u(x - t) f(t) dt, \quad f \in E, \tag{2.14}$$

$$0 \leqslant u \in L_1(0, +\infty), \quad \gamma = \int_0^\infty u(\tau) d\tau < 1. \tag{2.15}$$

Taking into account (2.13) and lemma 2.1 we obtain

$$I - \overset{\circ}{\mathcal{K}} + \mathcal{K}^* = (I - V_-)(I - U_-)(I + W)(I - U_+)(I - V_+), \tag{2.16}$$

where

$$W \equiv (I - U_-)^{-1} T (I - U_+)^{-1} \in \Omega^*. \tag{2.17}$$

In next paragraph we'll study the construction of nontrivial monotonic solution and investigation of asymptotic properties of the following linear equation.

$$S(x)=\int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x-t)S(t)dt-\int_0^\infty K^*(x+pt)S(t)dt. \tag{2.18}$$

3. Asymptotic Behavior of Nontrivial Solution of Equation (2.18)

Using factorization (2.16) the solution of equation (2.18) will be written in the form of

$$(I-V_-)(I-U_-)(I+W)(I-U_+)(I-V_+)S=0. \tag{3.1}$$

The solution of equation (3.1) is equivalent to the sequence solation of the following coupled equations:

$$(I-V_-)S_0=0, \tag{3.2}$$

$$(I-U_-)S_1=S_0, \tag{3.3}$$

$$(I+W)S_2=S_1, \tag{3.4}$$

$$(I-U_+)S_3=S_2, \tag{3.5}$$

$$(I-V_+)S=S_3. \tag{3.6}$$

The following two possibilities will be discussed separately.
a) $\varepsilon=-1$ is the eighen-value for the operator W
b) $\varepsilon=-1$ is not eighen-value for the operator W.
First we consider case *a*).

a) From the definition of operator V_- it immediately follows that $S_0(x)\equiv 1$ satisfies equation (3.2). Substituting in (3.3) we come to the following Volltera equation

$$S_1(x)=1+\int_x^\infty u(t-x)S_1(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{3.7}$$

In factorization (2.13) passing to equality of symbols at point 0 we obtain

$$1-\rho=(1-\gamma)^2, \quad \gamma\equiv\int_0^\infty u(\tau)d\tau<1, \tag{3.8}$$

or

$$\gamma=1-\sqrt{1-\rho}. \tag{3.9}$$

By direct checking it is confirmed that function

$$S_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \tag{3.10}$$

satisfies equation (3.7).

Now let consider the equation (3.4)

$$S_2(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho}}-\int_0^\infty W(x+pt)S_2(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{3.11}$$

As $\varepsilon=-1$ is not eighen-value for completely continuous operator $W\in\Omega^*$, then equation (3.11) has bounded solution $S_2(x)$.

Taking into account the well known inequality $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$ and from the following simple estimation:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} - S_2(x)\right| \leqslant \sup_{x>0}|S_2(x)| - \frac{1}{p}\int_x^\infty W(\tau)d\tau \in L_1(0,+\infty)$$

we have

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} - S_2(x) \in L_1(0,+\infty) \tag{3.12}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} - S_2(x)\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} - |S_2(x)|\right| = 0. \tag{3.13}$$

Now we consider the equation (3.5):

$$S_3(x) = S_2(x) + \int_0^x u(x-t)S_3(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.14}$$

Denote

$$\frac{1}{1-\rho} - S_3(x) \equiv \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.15}$$

Then equation (3.14) takes the form of

$$\psi(x) = \frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{1-\rho}\int_0^x u(\tau)d\tau - S_2(x) + \int_0^x u(x-t)\psi(t)dt. \tag{3.16}$$

Note that

$$g(x) \equiv \frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{1-\rho}\int_0^x u(\tau)d\tau - S_2(x) \in L_1(0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0. \tag{3.17}$$

Really we get

$$|g(x)| \leqslant \left|\frac{1}{1-\rho} - S_2(x)\right| + \frac{1}{1-\rho}\int_x^\infty u(\tau)d\tau. \tag{3.18}$$

From (3.18) it follows that $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

On the other hand in (2.13) passing from equality of integral operators to equality of kernels we get to Yengibaryan's nonlinear factorization equation:

$$u(x) = h(x) + \int_0^\infty u(t)u(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.19}$$

As

$$\nu^+ \equiv \int_0^\infty xh(x)dx < +\infty,$$

then from (3.19) we obtain

$$\int_0^\infty xu(x)dx \leqslant \frac{\nu^+}{1-\gamma}. \tag{3.20}$$

From estimation (3.20) it follows that $\int\limits_x^\infty u(\tau)d\tau \in L_1(0,+\infty)$. Therefore from (3.18) and formulae (3.12) it follows that g belongs to space $L_1(0,+\infty)$. Taking into account (3.8) from (3.17) we conclude that equation (3.16) in space $L_1(0,+\infty)$ has unique solution, besides

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0. \tag{3.21}$$

Therefore

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\rho} - S_3(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\rho} - |S_3(x)|\right) = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{1-\rho} - S_3(x) \in L_1(0,+\infty). \tag{3.23}$$

Finally solving equation (3.6) we come to the following formulae:

$$S(x) = S_3(x) + a\int\limits_0^x S_3(t)dt. \tag{3.24}$$

We have

$$|S(x)| \leqslant \frac{1}{1-\rho}(1+ax), \quad \lim_{x\to\infty}\frac{|S(x)|}{1+ax} = \frac{1}{1-\rho}. \tag{3.25}$$

b) In this case as a $S_0(x)$ we choose trivial solution of equation (3.2). Inserting it in (2.14) and using contractility of operator U_- we obtain $S_1(x) \equiv 0$. As $\varepsilon = -1$ is the eighen-value for a operator W, then homogeneous equation

$$S_2(x) = -\int\limits_0^\infty W(x+pt)S_2(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.26}$$

has nontrivial bounded solution. From estimation

$$|S_2(x)| \leqslant \sup_{x>0}|S_2(x)|\frac{1}{p}\int\limits_x^\infty W(\tau)d\tau$$

it follows that

$$S_2 \in L_1(0,+\infty), \quad \lim_{x\to\infty} S_2(x) = 0. \tag{3.27}$$

Let's pass to the consideration of equation (3.5). As $\gamma < 1$, then from (3.27) follows that equation (3.5) in $L_1(0,+\infty)$, has in unique solution $S_3(x) \in L_1(0,+\infty)$, moreover

$$\lim_{x\to\infty} S_3(x) = 0. \tag{3.28}$$

Thus solution of equation (3.6) has another asymptotic

$$S \in C_M(0,+\infty), \quad \lim_{x\to\infty} S(x) = \int\limits_0^\infty S_3(\tau)d\tau. \tag{3.29}$$

The following lemma holds

Lemma 2. *Let the conditions (1.2), (1.3) are fulfilled, and* $0 \leqslant K^*(x) < \overset{\circ}{K}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, *then equation (2.18) has positive monotonic increasing solution, moreover*
a) *if* $\varepsilon = -1$ *is not eighen-value for operator* W, *then solution has asymptotic*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S^*(x)}{1+ax} = \frac{1}{1-\rho}$$

b) *if* $\varepsilon = -1$ *the eighen-value for operator* W, *then solution is the bounded function.*

It should be noted, that in both cases

$$inf\, S^*(x) > 0.$$

Proof. *a*) We consider the following iteration

$$S^{(n+1)}(x) = \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))S^{(n)}(t)dt, \tag{3.30}$$

$$S^{(0)}(x) = \frac{1}{1-\rho}(1+ax), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

First we prove that sequence of functions $\{S^{(n)}(x)\}_0^\infty$ monotonic decreases by n.

Really, we have

$$S^{(1)}(x) \leqslant \frac{1}{1-\rho}\int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x-t)(1+at)dt =$$

$$= \frac{1}{1-\rho}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{K}(z)(1+a(x-z))dz - \int_x^\infty \overset{\circ}{K}(z)(1+a(x-z))dz\right) =$$

$$= \frac{1+ax}{1-\rho} - \int_x^\infty \overset{\circ}{K}(z)(1+a(x-z))dz \leqslant \frac{1}{1-\rho}(1+ax) = S^{(0)}(x),$$

because

$$(1+ax)\int_x^\infty \overset{\circ}{K}(z)dz \geq a\int_x^\infty \overset{\circ}{K}(z)zdz, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

We assume that $S^{(n)}(x) \leqslant S^{(n-1)}(x)$.
Taking into account that

$$K(x,t) \equiv \overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt) > 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

from (3.30) we obtain $S^{(n+1)}(x) \leqslant S^{(n)}(x)$. Now we prove that $S^{(n)}(x) \geq |S(x)|$, where $S(x)$ is nontrivial solution of equation (2.18). For $n = 0$ inequality follows from (3.25). Assume that $S^{(n)}(x) \geq |S(x)|$ then from (3.30) we have

$$S^{(n+1)}(x) \geq \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))|S(t)|dt \geq$$

$$\geq \left|\int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt)S(t)dt\right| = |S(x)|.$$

Therefore sequence $\{S^{(n)}(x)\}_0^\infty$ has pointwise limit

$$\lim_{n\to\infty} S^{(n)}(x) \equiv S^*(x) \geq 0, \quad S^*(x) \not\equiv 0.$$

From B. Levi's theorem (see [18]) it follows that $S^*(x)$ satisfies equation (2.18). Moreover, function $S^*(x)$ satisfies the following double inequalities:

$$|S(x)| \leqslant S^*(x) \leqslant \frac{1}{1-\rho}(1+ax). \tag{3.31}$$

Taking into account (3.25) from (3.31) we obtain

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S^*(x)}{1+ax}=\frac{1}{1-\rho}. \tag{3.32}$$

Now we show that $S^*(x)\uparrow$ by x. First we convince that $S^{(n)}(x)\uparrow$ by x. In case when $n=0$ it is obvious. Assume that $S^{(n)}(x)\uparrow$ by x. Then for arbitrary $x_1,x_2>0,\quad x_1>x_2$ we have

$$S^{(n+1)}(x_1)-S^{(n+1)}(x_2)\geq$$

$$\geq\int_{-\infty}^{x_2}\overset{\circ}{K}(\tau)(S^{(n)}(x_1-\tau)-S^{(n)}(x_2-\tau))d\tau+\frac{1}{p}\int_{x_2}^{\infty}K^*(\tau)(S^{(n)}(\tau-x_2)-S^{(n)}(\tau-x_1))d\tau\geq 0,$$

i.e. $S^{(n+1)}(x)\uparrow$ by x. Therefore $S^*(x)\uparrow$ by x.

Below we show that

$$\zeta\equiv\inf_{x>0}S^*(x)>0. \tag{3.33}$$

Really, as $S^*(x)\geq 0,\quad S^*(x)\not\equiv 0$ then there exist at least point $x_0\geq 0$, such that

$$\alpha_0\equiv S^*(x_0)>0 \tag{3.34}$$

We fixe this point. Then from (2.18) we have

$$S^*(x)\geq\int_{x_0}^{\infty}(\overset{\circ}{K}(x-t)-K^*(x+pt))S^*(t)dt\geq$$

$$\geq\frac{\alpha_0}{p}\left(\int_{-\infty}^{-x_0}\overset{\circ}{K}(\tau)d\tau-\int_{x_0}^{\infty}K^*(\tau)d\tau\right)=\frac{\alpha_0}{p}\left(\int_{x_0}^{\infty}[\overset{\circ}{K}(\tau)-K^*(\tau)]d\tau\right)>0.$$

Therefore

$$\zeta\geq\frac{\alpha_0}{p}\int_{x_0}^{\infty}(\overset{\circ}{K}(\tau)-K^*(\tau))d\tau>0.$$

b) In this case we consider the iteration:

$$S^{(n+1)}(x)=\int_0^{\infty}(\overset{\circ}{K}(x-t)-K^*(x+pt))S^{(n)}(t)dt, \tag{3.35}$$

$$S^{(0)}(x)\equiv\sup_{x>0}|S(x)|\equiv l_0,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

and making analogous discussion we have proved statement b) of lemma 2.
Lemma is proved.

4. Some A'priori Upper Estimations for Corresponding Linear Nonhomogeneous Equations

Let's consider the following nonhomogeneous integral equation:

$$f(x)=2\omega(x+A)+\int_0^{\infty}(\overset{\circ}{K}(x-t)-K^*(x+pt))f(t)dt,\quad x\in(0,+\infty), \tag{4.1}$$

where ω–satisfies conditions (1.4), (1.5).

Together with equation (4.1) we consider the following Wiener-Hopf integral equation

$$\widetilde{f}(x) = 2\omega(x + A) + \int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x - t)\widetilde{f}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.2}$$

Using factorization (2.6) and properties of function ω in work [17] has been proved, that equation (4.2) has nonnegative and bounded solution $\widetilde{f}(x)$.
We consider the following iteration:

$$f^{(n+1)}(x) = 2\omega(x + A) + \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x - t) - K^*(x + pt))f^{(n)}(t)dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

$$f^{(0)}(x) = 2\omega(x + A), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Using nonnegativity of kernel $K(x, t)$ by induction it is easy to check that $\{f^{(n)}(x)\}$ possesses the following properties

$$f^{(n)}(x) \uparrow \text{ by } n, \quad f^{(n)}(x) \geq 2\omega(x + A), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.4}$$

$$f^{(n)}(x) \leqslant \widetilde{f}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Therefore there exists

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = f(x) \leqslant \widetilde{f}(x) \tag{4.5}$$

and function $f(x)$ satisfies equation (4.1).

We introduce function $\lambda(x)$ defined on $(0, +\infty)$

$$\lambda(x) \equiv \lambda_c(x) = 1 - \frac{\omega(x + S_c(x))}{S_c(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{4.6}$$

where

$$S_c(x) = cS^*(x), \tag{4.7}$$

$$c \in \Pi \equiv \left[\max\left(\frac{\max(æ, \gamma_0)}{\zeta}, A\right), +\infty\right) \tag{4.8}$$

Here c–is the fixed number, $\gamma_0 \geq A$–some number for

$$\omega(\gamma_0) < \gamma_0, \tag{4.9}$$

and

$$æ = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} f(x). \tag{4.10}$$

We note, that if $c \in \Pi$, then

$$S_c(x) \geq æ. \tag{4.11}$$

The last inequality follows from the chain of inequalities:

$$S_c(x) = cS^*(x) \geq c\zeta \geq \max(æ, \gamma_0) \geq æ. \tag{4.12}$$

From (4.6) we immediately obtain the following properties of function $\lambda(x)$:

$$j_1) \quad 0 < 1 - \frac{\omega(\gamma_0)}{\gamma_0} \leqslant \lambda(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{4.13}$$

$$j_2) \quad (1 - \lambda(x))x^j \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad j = 0, 1, \tag{4.14}$$

$$j_3) \quad \lambda(x) \uparrow \text{ by } x \text{ and } \lim_{x\to\infty} \lambda(x) = 1. \tag{4.15}$$

The inequality (4.11) and properties of function $\lambda(x)$ will be of use in future.

Now the following more general nonhomogeneous integral equation is considered:

$$Q(x) = 2\omega(x + S_c(x)) + \lambda(x) \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x - t) - K^*(x + pt))Q(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{4.16}$$

in regard to function $Q(x)$.

We introduce the following iteration

$$Q^{(n+1)}(x) = 2\omega(x + S_c(x)) + \lambda(x) \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x - t) - K^*(x + pt))Q^{(n)}(t)dt, \tag{4.17}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad Q^{(0)}(x) \equiv 2\omega(x + S_c(x)), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

From estimation (3.16) it follows that $S_c(x) \geq \gamma_0 \geq A$, therefore

$$\omega(x + S_c(x)) \leqslant \omega(x + A), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.18}$$

Using inequalities (4.18), (4.13) by induction it is easy to check that

$$Q^{(n)}(x) \uparrow \text{ by } n, \quad Q^{(n)}(x) \leqslant f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.19}$$

$$Q^{(n)}(x) \geq 2\omega(x + S_c(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Thus there exists the limit of sequence $\{Q^{(n)}(x)\}_0^\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} Q^{(n)}(x) = Q(x) \leqslant f(x). \tag{4.20}$$

From B. Levi's theorem it follows that $Q(x)$ is the solution of equation (4.16).
Finally we get to the following chain of inequalities:

$$Q(x) \leqslant f(x) \leqslant \widetilde{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.21}$$

5. On Solution of Corresponding Homogeneous Equation

By direct checking it is easy to convince that the function

$$\widetilde{E}_c = 2S_c(x) - Q(x), \quad c \in \Pi \tag{5.1}$$

satisfies the following homogeneous equation:

$$E(x) = \lambda(x) \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x - t) - K^*(x + pt))E(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{5.2}$$

Note that

$$\widetilde{E}_c(x) \geq S_c(x), \quad c \in \Pi, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{5.3}$$

Really, from (4.11), (4.21) it follows that

$$\widetilde{E}_c(x) \geq 2S_c(x) - f(x) \geq S_c(x). \tag{5.4}$$

Consider the following iteration:

$$E^{(n+1)}(x) = \lambda(x) \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x - t) - K^*(x + pt))E^{(n)}(t)dt,$$

$$E^{(0)}(x) = 2S_c(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad c \in \Pi. \tag{5.5}$$

By induction it is easy to check that

$$\bullet \quad E^{(n)}(x) \downarrow \text{ by } n, \quad \bullet \quad E^{(n)}(x) \geq \widetilde{E}_c(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{5.6}$$

$$\bullet \quad E^{(n)}(x) \leqslant 2\lambda(x)S_c(x), \quad n = 1, 2, 3 \dots \tag{5.7}$$

From (5.6) it immediately follows that there exists limit of sequence $\{E^{(n)}(x)\}_0^\infty$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} E^{(n)}(x) = E(x)$. Moreover we have the following chain of inequalities:

$$S_c(x) \leqslant \widetilde{E}(x) \leqslant E(x) \leqslant 2\lambda(x)S_c(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{5.8}$$

It should be noted that if $E(x)$ satisfies equation (5.2) and inequality (5.8), then the function

$$Y(x) = \frac{E(x)}{\lambda(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{5.9}$$

will satisfy the equation

$$Y(x) = \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))\lambda(t)Y(t)dt \tag{5.10}$$

and inequality

$$S_c(x) \leqslant \widetilde{E}(x) \leqslant E(x) \leqslant Y(x) \leqslant 2S_c(x). \tag{5.11}$$

Using (5.1), (5.11), (4.7) in case a) we obtain

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Y(x)}{1+ax} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{S_c(x)}{1+ax} = \frac{2c}{1-\rho}, \tag{5.12}$$

and in case b) $\quad Y \in M(0,+\infty)$.

6. One Parameter Family of Positive Solutions for One Class Wiener-Hopf-Hammershtein Nonlinear Integral Equation

We consider the following class Wiener-Hopf-Hammershtein type nonlinear integral equation.

$$N(x) = \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))(N(t) - \omega(t+N(t)))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{6.1}$$

in regard to unknown function $N(x)$.

We introduce the following special iteration:

$$N^{(m+1)}(x) = \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))(N^{(m)}(t) - \omega(t+N^{(m)}(t)))dt,$$

$$N^{(0)}(x) = 2S_c(x), \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad c \in \Pi.$$

By induction it is easy to prove the truthfulness of the following statements.

$$\bullet \quad N^{(m)}(x) \downarrow \text{ by } m, \quad \bullet \quad N^{(m)}(x) \geq Y(x), \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{6.2}$$

- if $c_1, c_2 \in \Pi$, $\quad c_1 > c_2 -$ arbitrary numbers, then

$$N_{c_1}^{(m)}(x) - N_{c_2}^{(m)}(x) \geq 2(S_{c_1}(x) - S_{c_2}(x)) \geq 2(c_1 - c_2)\zeta, \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{6.3}$$

For example we prove (6.3). In case when $m = 0$ it is obvious. Assuming that inequality is true for $m \in N$, we prove it for $m+1$: We have

$$N_{c_1}^{(m+1)}(x) - N_{c_2}^{(m+1)}(x) = \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))(N_{c_1}^{(m)}(t) - N_{c_2}^{(m)}(t))dt+$$

$$+\int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))(\omega(t+N_{c_2}^{m}(t)) - \omega(t+N_{c_1}^{(m)}(t)))dt \geq 2(S_{c_1}(x) - S_{c_2}(x)) \geq 2(c_1-c_2)\zeta.$$

From (6.2) it follows that sequence has pointwise limit

$$\lim_{m\to\infty} N^m(x) = N(x) \geq Y(x), \tag{6.4}$$

and

$$S_c(x) \leqslant \widetilde{E}(x) \leqslant E(x) \leqslant Y(x) \leqslant N(x) \leqslant 2S_c(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{6.5}$$

Using B.Levi's theorem we conclude that $N(x)$ satisfies the equation (6.1). In inequality (6.3) passing $m \to \infty$, we conclude that for different values of parameter $c \in \Pi$ correspond different solutions of equation (6.1). Using (5.12) and taking into account (6.5) for case a) we obtain.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N_c(x)}{1+ax} = \frac{2c}{1-\rho}, \quad c \in \Pi, \tag{6.6}$$

and in case b) we have $N_c(x) \in M(0,+\infty)$.
Thus we come to the following result.

Theorem 1. *Let the conditions (1.2)-(1.5) are fulfilled, and* $0 \leqslant K^*(x) < \overset{\circ}{K}(x), \quad p \geq 1.$ *Then equation (6.1) possesses one parameter family of positive solutions* $\{N_c(x)\}_{c\in\Pi}$ *besides*
a) if $\varepsilon = -1$ *is the eighen-value for operator* W, *then functions* $N_c(x)$ *have asymptotic (6.6)*
b) if $\varepsilon = -1$ *is not eighen-value for operator* W, *then* $N_c(x) \in M(0,+\infty)$.

7. Solvability of Basic Equation (1.1)

First we consider the case a). The following theorem holds.

Theorem 2. *Let conditions (1.2)-(1.6) are fulfilled and there exists a number* $\delta \geq \frac{2}{1-\rho}\left(\max\left(\frac{\max(æ,\gamma_0)}{\zeta}, A\right)\right)$ *such that*

$$\frac{1}{1+ax}\int_0^\infty U(x,t,\delta(1+ax))dt \leqslant \delta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{7.1}$$

Then if $\varepsilon = -1$ *is the eighen-value for operator* W, *then equation (1.1) has positive solution* $\varphi_\delta(x)$ *with asymptotic*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_\delta(x)}{1+ax} = \delta.$$

Proof. Let's consider the following iteration to equation (1.1):

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \int_0^\infty U(x,t,\varphi^{(n)}(t))dt, \quad \varphi^{(0)}(x) = \delta(1+ax), \tag{7.2}$$

$$n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

From definition of number δ it follows that

$$c^* = \frac{\delta(1-\rho)}{2} \in \Pi. \tag{7.3}$$

Therefore from theorem 1 it follows that there is positive solution of equation (6.1) with asymptotic

$$N_{c^*}(x) = \delta + \delta a x + o(x), \quad x \to \infty. \tag{7.4}$$

Note that

$$N_{c^*}(x) \leqslant 2S_{c^*}(x) \leqslant \frac{2c^*(1+ax)}{1-\rho} = \delta(1+ax) \tag{7.5}$$

$$N_{c^*}(x) \geq S_{c^*}(x) \geq c^*\zeta \geq \begin{cases} \max(æ,\gamma_0) \geq \gamma_0 \geq A, & \zeta < 1, \\ A\zeta \geq A, & \zeta > 1. \end{cases}$$

Thus

$$A \leqslant N_{c^*}(x) \leqslant \delta(1+ax), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{N_{c^*}(x)}{1+ax} = \delta. \tag{7.6}$$

Below by induction we prove that

$$N_{c^*}(x) \leqslant \varphi^{(n)}(x) \leqslant \delta(1+ax), \quad n=0,1,2\dots. \tag{7.7}$$

If $n=0$ then estimation (7.7) follows from (7.6) and (7.2). Let (7.7) is true for $n=m\in N$. We prove it for $n=m+1$. From (7.1) it follows

$$\varphi^{(m+1)}(x) \leqslant \int_0^\infty U(x,t,\delta(1+at))dt \leqslant \delta(1+ax)$$

and from condition (1.6) we obtain

$$\varphi^{(m+1)}(x) \geq \int_0^\infty U(x,t,N_{c^*}(t))dt \geq \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t)-K^*(x+pt))(N_{c^*}(t)-\omega(t+N_{c^*}(t)))dt = N_{c^*}(x).$$

It is easy also to convince, that

$$\varphi^{(n)}(x) \downarrow \text{ by } n. \tag{7.8}$$

Therefore sequence of functions $\{\varphi^{(n)}(x)\}_0^\infty$ has limit

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(x) = \varphi(x), \tag{7.9}$$

besides

$$N_{c^*}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \delta(1+ax), \quad x\in\mathbb{R}^+ \tag{7.10}$$

and $\varphi(x)$ satisfies the basic equation (1.1). From (7.10) and (7.6) we conclude that

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_\delta(x)}{1+ax} = \delta.$$

Theorem is proved.

Analogously is proved the following:

Theorem 3. *We assume that conditions (1.2)-(1.6) are fulfilled and there exists a number* $\eta \geq 2l_0 \max\left(\frac{\max(æ,\gamma_0)}{\zeta}, A\right)$, *such that*

$$\int_0^\infty U(x,t,\eta)dt \leqslant \eta, \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{7.11}$$

where $l_0 = \sup_{x>0} |S^*(x)|$. *If* $\varepsilon = -1$ *is eighen-value for operator* W, *then equation (1.1) has positive and bounded solution* $\varphi_\eta(x)$, *besides* $\varphi_\eta(x) \leqslant \eta, \quad x\in\mathbb{R}^+$.

8. Some Examples of Function $U(x,t,\tau)$

For the following class of function $U(x,t,\tau)$ the conditions of formulated theorem 2 are fulfilled.

1) $U(x,t,\tau) = (\overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt))(\tau - \omega(t+\tau))$,

2) $U(x,t,\tau) = \overset{\circ}{K}(x-t)Q(t,\tau)$, where $Q(t,\tau)-$ is defined on $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ real and measurable function, satisfying conditions

- there exist number $A_1>0$, such that $\tau-\omega(t+\tau) \leqslant Q(t,\tau) \leqslant \tau, \quad (t,\tau)\in\mathbb{R}^+\times[A_1,+\infty)$,
- $Q(t,\tau)\uparrow$ by τ on $[A_0,+\infty)$, for each $t>0$ and some $A_0>0$.

- $Q(t,\tau) \in Carat(\mathbb{R}^+ \times [A,+\infty))$, $\quad A = \max(A_0, A_1)$.

As $Q(t,\tau)$ we can take, for example the following functions

$$Q(t,\tau) = (\tau^2 - \tau\omega(t+\tau))^{\frac{1}{2}}, \quad Q(t,\tau) = \frac{2(\tau^2 - \omega(t+\tau)\tau)}{2\tau - \omega(t+\tau)}$$

The following particular types of function $U(x,t,\tau)$ are the examples for theorem 3.

3) $U(x,t,\tau) = \widetilde{K}(x,t)(G_0(\tau) - \omega(t+\tau))$, where

$\widetilde{K}(x,t) \geq \overset{\circ}{K}(x-t) - K^*(x+pt)$, $\quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, and $\int\limits_0^\infty \widetilde{K}(x,t)dt \leqslant 1$, $\quad x \in \mathbb{R}^+$

and $G_0 \in C[A,\eta]$, $\quad G_0(x) \geq x$, $\quad x \in [A,\eta]$, $\quad G_0 \uparrow [A,\eta]$ and $G_0(\eta) = \zeta$.

4) $U(x,t,\tau) = \widetilde{K}(x,t)(G_0(\tau) - \omega_0(t,\tau))$,

where $\omega_0(t,\tau)$–is real function defined on set $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ and satisfying condition

$$0 \leqslant \omega_0(t,\tau) \leqslant \omega(t+\tau), \quad (t,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times [A_1,+\infty).$$

- $\omega_0(t,\tau) \downarrow$ by τ on $[A_0,+\infty)$ for each $t > 0$,
- $\omega_0 \in Carat(\mathbb{R}^+ \times [A_1,+\infty))$, $\quad A = \max(A_0, A_1)$.

Below we reduce simple example of nonlinear integral equation with concrete mentioned one parameter family of positive solutions. Let

$$U(x,t,\tau) = K_0(x-t)(\tau - \omega_0(\tau+t)), \tag{8.1}$$

$$K_0(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R},\ \omega_0(z) = e^{-z},\ z \in \mathbb{R}^+. \tag{8.2}$$

We have $\rho = 0$, $a = 1$, æ $= 4$, $\gamma_0 = (0, \frac{1}{2}]$, $\zeta = 1$, $A = 0$. Then from (4.8) we obtain the following set of parameter

$$c \in [4,+\infty). \tag{8.3}$$

Taking into account (8.1), (8.2), the equation (1.1) is reduced to the following nonlinear differential equation

$$\varphi''(x) = e^{-(x+\varphi(x))}. \tag{8.4}$$

One parameter family of positive solutions has a form

$$\varphi_c(x) = \ln\frac{[2(c+1)^2 e^{(c+1)x} + 1]^2}{4(c+1)^4 e^{(c+1)x}} - x > 0, \quad c \in [4,+\infty), \tag{8.5}$$

with asymptotic $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi_c(x)}{1+x} = c$.

Acknowledgement

Author expresses his deep gratitude to referee for useful remarks.

REFERENCES

1. P.P. Zabreyko *On continous and completely continous Urysohn operators* // Doklady academy Nauk SSSR. 1965. V. 161. №5. Pp. 1007–1010.(in Russian).
2. P.P. Zabreiko, E.I. Pustyl'nik *On continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L_p spaces* // UMN. 1964. V. 19. №2. pp. 204—205.
3. M.A. Krasnoselskii *Positive solutions of operator equations.* (In Russian). Moscow. 1962. 394 p.
4. H. Brezis, F.E. Browder *Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type* // Bull. amer. Math. soc.. 1975. V. 81. №1. Pp. 73–78.
5. C.D. Panchal *Existence theorems for equation of Hammerstein type* // Quartely Journal of Mathematics. 1984. V. 35. №3. Pp. 311–319.
6. M.A. Krasnoselski, P.P.Zabreyko, E.I. Pustilnik, P.E. Sobolevski *Integral operators in spaces of summerable functions.* Moscow. "Nauka". 1966. 500 p.(in Russian).

7. N.B Yengibaryan *On one nonlinear problem of radiative transfer* // Astrophysica. 1965. V. 1. №3. Pp. 297–302 (in Russian).
8. V.S. Vladimirov and Y.I. Volovich *Nonlinear dynamics equation in p-adic story theory* // Theoretical and Mathematical physics. 2004. V. 138. №3. Pp. 355–368.
9. P.H. Framton, Y. Okada *Effective scalar field theory of p-adic string* // Phys. Rev. 2004. V. 37. №10. Pp. 3077–3079.
10. L.G. Arabadzhyan *On existence of nontrivial solution of convolution type linear and nonlinear equations* // Ukrainian Math. Journal. 1989. V. 41. №12. Pp. 1587–1595 (in Russian).
11. L.G. Arabadzhyan *On solution of one Hammerstein type integral equation* // Izv. National academy of sciences, Armenia, Mathematica. 1997. V. 32. №1. Pp. 21–28 (in Russian).
12. Kh.A. Khachatryan *One-Parameter Family of Solutions for One Class of Hammerstein Nonlinear Equation on a Half-Line* // Doklady Mathematics. 2009. V. 80. №3. Pp. 872–876.
13. Kh.A. Khachatryan *Sufficient Conditions for the Solvability of the Urysohn Integral Equation on a Half-Line* // Doklady Mathematics. 2009. V. 79. №2. Pp. 246–249.
14. A.Kh. Khachatryan and Kh.A. Khachatryan *On one Hammerstein type nonlinear integral equation with non compact operator* Math. sbornik. 2010. V. 201. No 4. pp. 125-136.
15. L.G. Arabadzhyan and N.B Yengibaryan *Convolution equations and nonlinear functional equations. Itogi nauki and techniki* // Mathematical analysis and applications. 1984. V. 22. Pp. 175–242 (in Russian).
16. N.B Yengibaryan, B.N. Yengibaryan *Convolution integral equations on half line with completely monotonic kernels* Math. sbornik. 1996. V. 187. №10. Pp. 53–72 (in Russian).
17. I.Ts. Goxberg, I.A. Feldman. *Convolution equation and proection methods for solution.* Moscow. "Nauka". 1971. 352 p. (in Russian).
18. A.N. Kolmogorov and V.S. Fomin *Elements of theory functions and functional analysis.* Moscow. Nauka. 1981. 544 p. (in Russian).

Khachatur Khachatryan,
Institute of Mathematics National Academy of Sciences,
Bagramyan st., 24b,
0019, Yerevan, Armenia
E-mail: khach82@rambler.ru

ABSTRACTS

N.F. Valeev

The multiparameter inverse spectral problems for finite-dimensional operators

Abstract. The problem of restoration of the parameters of the linear operator from a finite set of eigenvalues was considered A new scheme of its solution proposed. This method for solving the joint eigenpair problem of a family of matrix pencils is then presented, wich, in turn, gives all solution of the problem.

Keywords: dynamic systems, inverse spectral problem, control of fundamental frequencies, mathematical model.

Yu.G. Voronova

About problem of Koshi for linear hyperbolic system of the equations with zero generalized Laplace invariants

Abstract. In the work it is shown that the solution of the generalised problem of Koshi for linear hyperbolic system of equations with zero generalized Laplace invariants is reduced to the solution of a problem of Gursa for system of the same kind. The exact solution of a problem of Koshi for one two-componental system of the equations is constructed.

Keywords: Laplace transformations, Riman function, generalized Laplace invariants, problem of Gursa.

A.M. Gaisin, Zh.G. Rakhmatullina

Real Sequences with Fejér Gaps

Abstract. We study the characteristics of the distribution of positive indefinitely increasing sequences that are most frequently used in the theory of entire functions and exponential series. We prove the equivalent propositions that interpret the given characteristic.

Keywords: entire functions, exponential series, condensation index, counting function.

B.E. Kanguzhin, B.D. Koshanov

Necessary and sufficient conditions of resolvability boundary problems for non-uniform polyharmonics equations in ball

Abstract. In the work are different boundary value problems for nonhomogeneous polyharmonic equations in a sphere of an arbitrary dimension. Also is to construct in the explicit form the Green function for Dirichlet problem for nonhomogeneous polyharmonic equation in a sphere.

Keywords: Dirichlet problem, Neumann's problem, the polyharmonics equation.

L.M. Kozhevnikova, R.Kh. Karimov

Behavior on infinity of decision quasilinear elliptical equations in unbounded domain

Abstract. The Dirihlet problem for quasilinear second order elliptic equations is considered in unbounded domains $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. The upper estimates, characterizing the dependence of behavior solutions on geometry domain Ω are established.

Keywords: decay, quasilinear elliptical equation, Dirihlet problem, unbounded domain.

A.S. Krivosheyev

Basis is broken by relatively small groups

Abstract. It is studied the basis in invariant subspace. These basis is constructed from linear combinations of exponential monoms, which belongs to this subspace. The indices of exponential monoms is broken by relatively small groups.

Keywords: basis, exponent, invariant subspace, entire function.

L.L. Luhova, O.M. Mulyava, M.M. Sheremeta

Properties of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions

Abstract. For entire and analytic functions in the unit disk the convergence and the growth of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives are investigated. It is studied the behavior of the maximal terms of this compositions.

Keywords: analytic function, Hadamard's composition, Gelfond-Leont'ev derivative, maximal term.

Kh.A. Khachatryan

On solvability of some classes of urysohn nonlinear integral equations with noncompact operators

Abstract. In present paper the classes of nonlinear integral equations with non completely continuous operators are considered.
It is assumed that conservative nonlinear operator of Wiener-Hopf-Hankell-Hammerstein type is a linear minorant to the initial Urysohn operator. The alternative theorems of the existence of positive solutions of above-mentioned class equations are proved. The asymptotic behavior of the obtained solutions at infinity is investigated. The article is finalized by the presentation of some examples arising in applications.

Keywords: Wiener-Hopf operator, eighen-value, limit of solution, one parameter family of positive solutions, asymptotic properties, Caratede'ory condition.

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 120-121.

CONTENTS

N.F. Valeev

The multiparameter inverse spectral problems for finite-dimensional operators
pp. 3–19

Yu.G. Voronova

About problem of Koshi for linear hyperbolic system of the equations with zero generalized Laplace invariants
pp. 20–26

A.M. Gaisin, Zh.G. Rakhmatullina

Real Sequences with Fejér Gaps
pp. 27–40

B.E. Kanguzhin, B.D. Koshanov

Necessary and sufficient conditions of resolvability boundary problems for non-uniform polyharmonics equations in ball
pp. 41–52

L.M. Kozhevnikova, R.Kh. Karimov

Behavior on infinity of decision quasilinear elliptical equations in unbounded domain
pp. 53–66

A.S. Krivosheyev

Basis is broken by relatively small groups
pp. 67–89

L.L. Luhova, O.M. Mulyava, M.M. Sheremeta

Properties of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions
pp. 90–101

Kh.A. Khachatryan

On solvability of some classes of urysohn nonlinear integral equations with noncompact operators
pp. 102–117

Abstracts

pp. 118–119

Contents

pp. 120–121

Information for authors

pp. 122–124

ДЛЯ АВТОРОВ

«Уфимский математический журнал» публикует оригинальные научные исследования преимущественно по теории функций, комплексному анализу, функциональному анализу, обыкновенным дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям в частных производных, математической физике, теории вероятностей и математической статистике. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре номера в год.

К публикации в периодическом издании «Уфимский математический журнал» принимаются статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более сорока страниц. Работы, превышающие сорок страниц, принимаются к публикации по особому решению редколлегии журнала.

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей также размещаются в свободном доступе в Интернете на сайте Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (http://matem.anrb.ru).

Публикации в журнале для авторов бесплатны.

1. Все материалы предоставляются в редакцию в двух экземплярах. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая страницы с рисунками, таблицами и списком литературы, следует пронумеровать. Авторам для окончательной правки высылается макет статьи в формате PDF или PS.

2. В отдельном файле, набранном в любом текстовом редакторе, указываются фамилии, имена, отчества всех авторов, название статьи, аннотации и ключевые слова на русском и английском языках. В этом же файле указываются ученое звание и ученая степень, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты, адрес прописки каждого из авторов. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Текст статьи должен быть подготовлен на компьютере в издательской системе LaTeX2e (стиль amsart, пакеты amsmath, amsfonts, amssymb). Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX , не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте (umj@matem.anrb.ru) или передаются в редакцию на любых электронных носителях. Официально поданным в журнал для публикации считается распечатанный и подписанный всеми авторами вариант.

В тексте статьи определяются индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся краткие, не более 20 строк, аннотации на русском и английском языках, даются списки ключевых слов на русском и английском языках. Далее в файле приводятся полностью фамилия, имя, отчество каждого из авторов и наименование учреждения, где была выполнена работа, с полным почтовым адресом.

В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами, не следует переопределять греческие буквы и другие стандартные команды. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета.

Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова Рис. с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отцентрированной надписью Табл. с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. В списке литературы должно быть не более 40 позиций.

В случае отклонения статьи авторы получают мотивированный отказ, экземпляры рукописи авторам не возвращаются.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:

ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, Россия, ул. Чернышевского, 112, к. 22.
Тел. +7 347 273 33 42.
Email: umj@matem.anrb.ru, сайт журнала: http://matem.anrb.ru

Information for authors

Requirements for preparation of manuscripts

Ufimskii Matematicheskii Zhurnal publishes original research papers on the theory of functions, complex analysis, ordinary differential equations, partial differential equations, mathematical physics, probability theory and mathematical statistics. It is intended for researchers, teachers, postgraduate and undergraduate students. The journal publishes four regular issues per each year. We publish papers written in Russian or English which generally comprise up to 40 printed pages. Paper exceeding 40 printed pages can be accepted for publication by special consideration by the Editorial board.

Papers published in the journal are also freely placed in full volume on the official site of the Institute of mathematics with computer center of RAS (http://matem.anrb.ru).

The publication of papers in the journal is free of charge.

1. All documents are presented to editorial board in duplicate. The manuscript should be carefully checked. All pages should be numbered including drawings, tables and bibliographical references. The layout of the paper in PDF or PS format will be sent to authors for the final proof-reading.

2. Manuscript should be prepared on computer using LaTeX2e publishing software (style amsart, packages amsmath, amsfonts, amssymb). Typewritten manuscripts or the ones prepared by the software, different from TeX, will not be considered. Files *.tex and *.ps (*.pdf) of the paper should be sent to the editorial board by e-mail or submitted on any electronic data carriers. A variant of the manuscript is regarded as officially filed if it is in printed form and is signed by all authors.

3. In a detached file using any text editor should be represented full names of all authors, title of the paper, annotation and key words in Russian and English. The file should also contain science title and academic degrees, positions, full names of scientific institutions, addresses with the post office code, phone numbers with city code and mobile phone numbers, e-mail addresses and registration addresses of all authors. It is necessary to indicate the author responsible for

corresponding with Editorial board.

The date of submission to editorial board of two copies of manuscript, signed by all the authors is considered as the official date of submission of the paper.

Exemplary setup of the file of the paper (*.tex)

In the text index UDC and the title of the paper is defined, then it follows initials and family names of all authors, short annotation (at most 20 lines) in Russian and English, and the list of key words in Russian and English. Further it is given full names of all authors and names of institutions, where the work was implemented with full post addresses.

It is not admissible for the annotation includes intricate formulas, references on the text of the paper or on reference list. It should be in special attention that it is undesirable to use new (defined by authors) command sequences, especially with parameters, to redefine the Greece letters and other standard commands! In general it should be used standard package means.

Black-and-white drawings should be prepared in EPS format (Encapsulated PostScript) in such a way that guarantees its adequate representation under sequel optical two time decrease. If using drawings it is necessary to attach package epsfig. Inscription under the drawing must be placed on the center and include the word Fig. with sequel number. The numbers of drawings must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to drawings should be placed in the text of the paper. The tables are accompanied by centered inscription Tab. with sequel number. The numbers of tables must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to tables should be placed in the text of the paper. Diagrams are made as drawings.

The list of references must include only the items with references in the text with the order of citing. It is inadmissible the references on unpublished papers, the results of which are used in the proofs of the paper. In the case of rejection of the paper authors receive a notice with relevant valid reasons. Manuscripts are not returned.

Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, 450008, Ufa, Russian Federation,
112 Chernyshevsky Street.
Tel. +7 347 273 33 42.
http://matem.anrb.ru
Email: umj@matem.anrb.ru