ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 90-101.

УДК 517.5

СВОЙСТВА АДАМАРОВСКИХ КОМПОЗИЦИЙ ПРОИЗВОДНЫХ ГЕЛЬФОНДА–ЛЕОНТЬЕВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Л.Л. ЛУГОВАЯ, О.М. МУЛЯВА, М.Н. ШЕРЕМЕТА

Аннотация. Для целых и аналитических в единичном круге функций исследованы сходимость и рост адамаровских композиций их производных Гельфонда–Леонтьева. Изучено поведение максимальных членов таких композиций.

Ключевые слова: аналитическая функция, производная Гельфонда – Леонтьева, композиция Адамара, максимальный член.

1. Введение

Для степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

с радиусом сходимости $R[f] = R \in [0, \infty]$ и степенного ряда $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$ с $R[f] = R \in [0, \infty]$ и $l_k > 0$ для всех $k \geq 0$ степенной ряд

$$D_l^{(n)} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k \tag{2}$$

называется [1] производной Гельфонда – Леонтьва n-го порядка. Если $l(z) = e^z$, то $D_l^{(n)} f(z) = f^{(n)}(z)$ является обычной производной n-го порядка.

Степенной ряд

$$(f * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k z^k \tag{3}$$

называется адамаровской композицией ряда (1) и $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k$. Известно [2], что $R[f * g] \geq R[f]R[g]$ и обратное неравенство может не выполняться. Свойства адамаровских композиций используются для исследования аналитических продолжений функций (например, см. [3]–[4]).

Если $R[f] > 0$, то для $0 \leq r < R[f]$ пусть $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu(r, f) = \max\{|f_k|r^k : k \geq 0\}$ — максимальный член ряда (1), а $\nu(r, f) = \max\{n : |f_k|r^k = \mu(r, f)\}$ — его центральный индекс. Связь между ростом максимального члена производной $(f * g)^{(n)}$ адамаровской композиции $f * g$ целых функций

L.L. Luhova, O.M. Mulyava, M.M. Sheremeta, Properties of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions.

Поступила 1 марта 2010 г.

f и g и ростом максимального члена адамаровской композиции $f^{(n)} * g^{(n)}$ их производных исследовал М. Сен [5]–[6]. В частности, в [6] доказано, что если функция $f * g$ имеет нижний порядок λ и порядок ϱ, то для любого $\varepsilon > 0$ и всех $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$r^{(n+2)\lambda-1-\varepsilon} \leq \frac{\mu(r, f^{(n+1)} * g^{(n+1)})}{\mu(r, (f * g)^n)} \leq r^{(n+2)\varrho-1+\varepsilon}.$$

Мы продолжим исследования М. Сена, рассматривая вместо обычных производных производные Гельфонда-Леонтьева и кроме целых функций аналитические в единичном круге функции.

2. Аналитичность адамаровской композиции производных Гельфонда–Леонтьева

Естественно, что не всегда радиус сходимости производной Гельфонда – Леонтьева ряда (1) совпадает с радиусом сходимости этого ряда. Однако, используя формулу Коши-Адамара, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Для того, чтобы для любого ряда (1) равенства $R[f] = +\infty$ и $R[D_l^{(n)} f] = +\infty$ были равносильными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$0 < q = \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \leq \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = Q < +\infty, \tag{4}$$

а для эквивалентности равенств $R[f] = 1$ и $R[D_l^{(n)} f] = 1$ необходимым и достаточным является условие

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = 1. \tag{5}$$

Доказательство. Начнем с первой части леммы. Используя формулу Коши – Адамара, легко показать, что для радиусов сходимости рядов (1) и (2) в силу (4) справедливы неравенства $qR[D_l^1 f] \leq R[f] \leq QR[D_l^1 f]$, откуда следует, что равенства $R[f] = +\infty$ и $R[D_l^1 f] = +\infty$ равносильные.

Предположим теперь, что $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = +\infty$, т. е. не выполняется второе из условий (4). Тогда существуют возрастающая последовательность (k_n) натуральных чисел и последовательность $(\varkappa_n)$ положительных чисел такие, что $\varkappa_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $l_{k_n}/l_{k_n+1} = \varkappa_n^{k_n}$ для $n \geq 1$. Положим $f_{k_n+1} = \varkappa_n^{-(k_n+1)/2}$ и $f_k = 0$ для $k \neq k_n + 1$. Тогда $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[k_n+1]{|f_{k_n+1}|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \varkappa_n^{-1/2} = 0$, т. е. $f \in A(+\infty)$, а с другой стороны, $\sqrt[k_n]{\dfrac{l_{k_n}}{l_{k_n+1}} f_{k_n+1}} = \varkappa_n^{(k_n-1)/(2k_n)} \to +\infty$ при $n \to +\infty$, т. е. $D_l^1 f \notin A(+\infty)$.

Если же не выполняется первое из условий (4), т. е. существует возрастающая последовательность (k_j) натуральных чисел такая, что $\sqrt[k_j]{l_{k_j}/l_{k_j+1}} = \varepsilon_j \to 0\,(j \to \infty)$, то положим $f_{k_j+1} = \varepsilon_j^{-(k_n+1)/2}$ и $f_k = 0$ для $k \neq k_j + 1$. Тогда $\sqrt[k_j+1]{|f_{k_j+1}|} = \varepsilon_j^{-1/2} \to +\infty$ и $\sqrt[k_j]{\dfrac{l_{k_j}}{l_{k_j+1}} |f_{k_j+1}|} \to 0$ при $j \to \infty$, т. е. $D_l^1 f \in A(+\infty)$ и $f \notin A(+\infty)$. Первая часть леммы доказана.

Докажем вторую часть. При выполнении условия (5) $\dfrac{1}{R[D_l^1 f]} = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{l_k}{l_{k+1}} |f_{k+1}|} = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_{k+1}|} = \dfrac{1}{R[f]}$, так что это условие является достаточным. Если же оно не выполняется, то существует возрастающая последовательность (k_n) натуральных чисел такая, что $\sqrt[k_n]{l_{k_n}/l_{k_n+1}} \to q \neq 1$ при $n \to \infty$. Полагая $f_{k_n+1} = 1$ и $f_k = 0$ для $k \neq k_n + 1$ $(n \geq 1)$, получаем $R[f] = 1$ и $R[D_l^1 f] = 1/q \neq 1$, а если положим $f_{k_n+1} = l_{k_n+1}/l_{k_n}$ и $f_k = 0$ для

$k \neq k_n + 1$ $(n \geq 1)$, то получим $R[D_l^1 f] = 1$ и $R[f] = q \neq 1$, т. е. условие (5) является также необходимым. Лемма 1 доказана полностью.

Несмотря на общность, условия (4) и (5) в лемме 1 являются достаточными для одновременной аналитичности производной Гельфонда-Леонтьева адамаровской композиции

$$D_l^{(n)}(f * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} g_{k+n} z^k \tag{6}$$

функций f и g и адамаровской композиции

$$(D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^2 f_{k+n} g_{k+n} z^k. \tag{7}$$

их производных Гельфонда – Леонтьева. Другими словами, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *При выполнении условия (4) равносильными являются равенства* $R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = +\infty$ *и* $R[D_l^{(n)}(f * g)] = +\infty$, *а при выполнении условия (5) такими являются равенства* $R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = 1$ *и* $R[D_l^{(n)}(f * g)] = 1$.

Доказательство. Используя формулу Коши – Адамара и свойства верхнего и нижнего предела, имеем

$$\frac{1}{R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g]} = \varlimsup_{k\to\infty} \left(\left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^2 |f_{k+n}||g_{k+n}|\right)^{1/k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{R[D_l^{(n)}(f * g)]} \varlimsup_{k\to\infty} \left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^{1/k}$$

и

$$\frac{1}{R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g]} \geq \frac{1}{R[D_l^{(n)}(f * g)]} \varliminf_{k\to\infty} \left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^{1/k},$$

откуда легко вытекает справедливость леммы 2.

3. Рост производных Гельфонда – Леонтьева

Наиболее употребительными характеристиками роста целой функции f являются ее нижний порядок $\lambda[f]$ и порядок $\varrho[f]$, определенные формулами

$$\lambda[f] = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}, \quad \varrho[f] = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}.$$

Имеет место следующая хорошо известная лемма:

Лемма 3. *Для каждой целой функции (1)*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \nu(r,f)}{\ln r} = \lambda[f], \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \nu(r,f)}{\ln r} = \varrho[f].$$

Для порядка эту лемму доказал Ж. Валирон ([7], С. 33), а для нижнего порядка — Дж. Уиттекер [8].

Для функций, аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, нижний порядок $\lambda^*[f]$ и порядок $\varrho^*[f]$ определяются формулами

$$\lambda^*[f] = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}, \quad \varrho^*[f] = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}.$$

Лемма 4. [9]. *Для каждой аналитической в $\mathbb{D}$ функции (1) справедливы неулучшаемые оценки*

$$\lambda^*[f] \le \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \nu(r,f)}{-\ln(1-r)} \le \lambda^*[f]+1, \quad \varrho^*[f] \le \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \nu(r,f)}{-\ln(1-r)} \le \varrho^*[f]+1.$$

Следующая лемма устанавливает связь между ростом целой функции и ее производной Гельфонда – Леонтьева.

Лемма 5. *При выполнении условия (4) для целой функции (1) имеют место равенства* $\lambda[D_l^{(n)} f] = \lambda[f]$ *и* $\varrho[D_l^{(n)} f] = \varrho[f]$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Из условия (4) вытекает существование чисел $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$ таких, что $q_1^k \le l_k/l_{k+1} \le q_2^k$ для всех $k \ge 0$. Поэтому $r\mu(r, D_l^1 f) = \max\left\{\dfrac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|r^{k+1} : k \ge 0\right\} \le \dfrac{1}{q_2}\max\{|f_{k+1}|(q_2 r)^{k+1} : k \ge 0\} \le$ $\le \dfrac{\mu(q_2 r, f)}{q_2}$ и, аналогично, $r\mu(r, D_l^1 f) \ge \dfrac{\mu(q_1 r, f)}{q_1}$ для всех достаточно больших r, так как $\mu(r,f) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Отсюда, учитывая, что для целых трансцендентных функций $\ln r = o(\ln \mu(r,f))$ при $r \to +\infty$, получаем асимптотические неравенства

$$(1+o(1))\ln \mu(q_1 r, f) \le \ln \mu(r, D_l^1 f) \le (1+o(1))\ln \mu(q_2 r, f), \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши

$$\mu(r,f) \le M(r,f) \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|(2r)^k 2^{-k} \le 2\mu(2r,f). \tag{9}$$

Из (8)–(9) легко следует справедливость леммы 5.

Следствие 1. *Если f и g — целые функции, то при выполнении условия (4)* $\lambda[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \lambda[D_l^{(n)}(f*g)] = \lambda[f*g]$ *и* $\varrho[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \varrho[D_l^{(n)}(f*g)] = \varrho[f*g]$.

Действительно, равенства $\lambda[D_l^{(n)}(f*g)] = \lambda[f*g]$ и $\varrho[D_l^{(n)}(f*g)] = \varrho[f*g]$ вытекают непосредственно из леммы 5. Чтобы доказать равенства $\lambda[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)] = \lambda[D_l^{(n)}(f*g)]$ и $\varrho[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)] = \varrho[D_l^{(n)}(f*g)]$, достаточно заметить, что, как при доказательстве леммы 5, можно получить неравенства $q_1^n \mu(r, D_l^{(n)}(f*g)) \le \mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \le q_2^n \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ и использовать (9).

В отличие от целых функций, для которых условие (4) является достаточным для равенства порядков функции и ее производной Гельфонда – Леонтьева, в случае аналитических в $\mathbb{D}$ функций условие (5) недостаточно для равности таких порядков. Например, функция $f(z) = 1/(1-z)$ имеет нулевой порядок, а ее производная Гельфонда – Леонтьева $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(l_k/l_{k+1})z^k$ в силу произвольности коэффициентов l_k/l_{k+1} может иметь даже бесконечный порядок. Однако если $l_k = 1/k!$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Для каждой аналитической в $\mathbb{D}$ функции f имеют место равенства* $\lambda^*[f] = \lambda^*[f']$ *и* $\varrho^*[f] = \varrho^*[f']$.

Доказательство. Из интегральной формулы Коши $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\tau - z| = (1-|z|)/2} \dfrac{f(\tau)d\tau}{(\tau - z)^2}$ получаем неравенство $M(r, f') \le \dfrac{2}{1-r} M\left(\dfrac{1+r}{2}, f\right)$, а в силу формулы Лейбница – Ньютона $f(z) = \int\limits_0^z f'(\tau)d\tau + f(0)$ имеет место неравенство $M(r,f) \le$ $\le M(r,f') + |f(0)|$, откуда легко вытекают равенства $\lambda^*[f'] = \lambda^*[f]$ и $\varrho^*[f'] = \varrho^*[f]$.

Поскольку $l_k/l_{k+1} = k+1$, если $D_l^1 f = f'$, то естественно предположить правильным аналог леммы 6 при условии

$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} \le \varlimsup_{k\to\infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} < +\infty, \tag{10}$$

т. е. справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *При выполнении условия (10) для аналитической в $\mathbb{D}$ функции (1) $\lambda^*[D_l^{(n)} f] = \lambda^*[f]$ и $\varrho^*[D_l^{(n)} f] = \varrho^*[f]$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Из (10) вытекает существование чисел $0 < h_1 \le h_2 < +\infty$ таких, что $h_1(k+1) \le l_k/l_{k+1} \le h_2(k+1)$ для всех $k \ge 0$. Поэтому $\mu(r, D_l^1 f) \le h_2 \max\{(k+1)|f_{k+1}|r^k : k \ge 0\} = h_2\mu(r, f')$ и, аналогично, $\mu(r, D_l^1 f) \ge h_1\mu(r, f')$. Так как для аналитической в $\mathbb{D}$ функции (1)

$$\mu(r,f) \le M(r,f) \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \left(\frac{1+r}{2}\right)^k \left(\frac{2r}{1+r}\right)^k \le \frac{1+r}{1-r}\mu\left(\frac{1+r}{2}, f\right), \tag{11}$$

то отсюда и леммы 6 следует лемма 7.

Следствие 2. *Если f и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, то при выполнении условия (10) $\lambda^*[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \lambda^*[D_l^{(n)}(f*g)] = \lambda^*[f*g]$ и $\varrho^*[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \varrho^*[D_l^{(n)}(f*g)] = \varrho^*[f*g]$.*

Действительно, согласно лемме 7 достаточно доказать равеноства $\lambda^*[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)] = \lambda^*[D_l^{(n)}(f*g)]$ и $\varrho^*[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)] = \varrho^*[D_l^{(n)}(f*g)]$, а для этого достаточно заметить, что при условии (10) $\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \le h_2^n \max\left\{(k+1)\ldots(k+n)\frac{l_k}{l_{k+n}}|f_{k+n}||g_{k+n}|r^k : k \ge 0\right\} = h_2^n \mu(r, F^{(n)})$, где

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} g_{k+n} z^{k+n} = z^n D_l^{(n)}(f*g)(z),$$

и, аналогично, $\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \ge h_1^n \mu(r, F^{(n)})$. Отсюда, используя (11), нетрудно получить равенства $\lambda^*[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \lambda^*[F] = \lambda^*[D_l^{(n)}(f*g)]$ и $\varrho^*[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \varrho^*[F] = \lambda^*[D_r^{(n)}(f*g)]$, что и требовалось доказать.

4. Поведение максимальных членов адамаровских композиций целых функций

Используя формулу Адамара для нахождения порядка, можно показать, что $1/\varrho[f*g] \ge 1/\varrho[f] + 1/\varrho[g]$. Противоположное неравенство, вообще говоря, неверно: возможны даже равенства $\varrho[f] = \varrho[g] = +\infty$ и $\varrho[f*g] = 0$. Поэтому далее рост максимальных членов $\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ и $\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)$ будем изучать в терминах порядка и нижнего порядка функции $f*g$. Начнем со следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть f и g — целые функции, $\lambda[f*g] = \lambda$ и $\varrho[f*g] = \varrho$, тогда:*
1) если выполнено условие (4) с $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \lambda, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \varrho;$$

2) если выполнено условие (10), то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = n\lambda, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = n\varrho;$$

3) если

$$0 < p_1 \le l_k/l_{k+1} \le p_2 < +\infty \quad (k \ge 0), \tag{12}$$

то $\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f * g))$ *при* $r \to +\infty$.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}} \le \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}}. \tag{13}$$

Действительно, с одной стороны,

$$\mu(r, D_l^{(n)}(f * g)) =$$

$$= \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}} |f_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}||g_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}| r^{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))} =$$

$$= \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}} \left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}}\right)^2 |f_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}||g_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}| \times$$

$$\times r^{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))} \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}} \mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g),$$

а с другой стороны,

$$\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) =$$

$$= \left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}}\right)^2 |f_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}||g_{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)+n}| \times$$

$$\times r^{\nu(r,D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g)} \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}} \mu(r, D_l^{(n)}(f * g)),$$

так что неравенства (12) доказаны.

Из (4) с $q > 1$ вытекает существование чисел $1 < q_1 \le q_2 < +\infty$ таких, что $q_1^{kn} \le l_k/l_{k+n} \le q_2^{kn}$ для всех $k \ge k_0$. Поэтому из (13) имеем

$$n\nu(r, D_l^{(n)}(f * g)) \ln\, q_1 \le \ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} \le n\nu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \ln\, q_2, \tag{14}$$

для $r \ge r_0$. По лемме 3

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\, \nu(r, D_l^{(n)}(f * g)}{\ln\, r} = \lambda[D_l^{(n)}(f * g)],\ \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\, \nu(r, D_l^{(n)}(f * g))}{\ln\, r} = \varrho[D_l^{(n)}(f * g)] \tag{15}$$

и эти равенства остаются в силе, если вместо $D_l^{(n)}(f*g)$ поставить $D_l^{(n)} f*D_l^{(n)} g$, а поскольку $0 < n \ln\, q_1 \le n \ln\, q_2 < +\infty$, то из (14) в силу следствия 1 легко получаем утверждение 1 теоремы 1.

Если же выполняется условие (10), то существуют числа $0 < h_1 \le h_2 < +\infty$ такие, что $h_1 k^n \le l_k/l_{k+n} \le h_2 k^n$ для всех $k \ge 0$. Поэтому из (13) для всех $r \ge r_0$ имеем

$$h_1 \nu^n(r, D_l^{(n)}(f * g)) \le \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} \le h_2 \nu^n(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g), \tag{16}$$

откуда, как при доказательстве утверждения 1, получаем утверждение 2.

Наконец, при выполнении условия (12) $p_1^n \le l_k/l_{k+n} \le p_2^n$ для всех $k \ge 0$, а из (13) следует, что $p_1^n \le \dfrac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le p_2^n$ для всех $r > 0$, что указывает на справедливость утверждения 3. Теорема 1 полностью доказана.

В следующей теореме указана связь между $\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))$ и $\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$.

Теорема 2. *Пусть f и g — целые функции, $\lambda[f*g] = \lambda$ и $\varrho[f*g] = \varrho$, тогда для $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ и $n < m$:*

1) если выполняется условие (4) с $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \lambda, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \varrho;$$

2) если выполняется условие (10), то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (m-n)\lambda$$

и

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (m-n)\varrho;$$

3) если выполняется условие (12), то $r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ при $r \to +\infty$.

Доказательство. Сначала покажем, что для всех достаточно больших $r > 0$ имеют место неравенства

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g)+n-m}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}} \le \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g)+m-n}}. \tag{17}$$

Действительно, с одной стороны,

$$\mu(r, D_l^{(m)}(f*g)) = \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n+1)}(f*g))+m}} \times$$

$$\times |f_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m}||g_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m}| r^{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))} =$$

$$= \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n}} \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))m-n+n}} \times$$

$$\times |f_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))m-n+n}||g_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n+n}| r^{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n} r^{n-m} \le$$

$$\le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))m-n}} \frac{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))}{r^{m-n}},$$

откуда следует правое неравенство (17). Если $r > 0$ настолько большое, что $\nu(r, D_l^{(n)}(f*g)) \ge m-n$, то, меняя в последнем неравенстве местами m и n, получаем

$$\mu(r, D_l^{(n)}(f*g)) \le \frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n-m}} \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{r^{n-m}},$$

откуда следует левое неравенство (17).

Если теперь выполняется условие (4) с $q > 1$, то, как при доказательстве теоремы 1, из (17) для всех достаточно больших $r > 0$ имеем

$$(m-n)\nu(r, D_l^{(n)}(f*g))\ln q_1 \le \ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le$$
$$\le (m-n)\nu(r, D_l^{(m)}(f*g))\ln q_2,$$

откуда, используя (15) и следствие 1, получаем утверждение 1 теоремы 2.

Если же выполняется условие (10), то, при доказательсте утверждения 2 теоремы 1, для всех достаточно больших $r > 0$ имеем

$$h_1\nu^{m-n}(r, D_l^{(n)}(f*g)) \le \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le h_2\nu^{m-n}(r, D_l^{(m)}(f*g)),$$

откуда, как выше, получаем утверждение 2 теоремы 2.

Наконец, доказательство утверждения 3 теоремы 2 такое же, как доказательство утверждения 3 теоремы 1. Теорема 2 полностью доказана.

Взяв в доказательстве неравенств (17) $D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g$ и $D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g$ вместо $D_l^{(m)}(f*g)$ и $D_l^{(n)}(f*g)$ и учитывая, что ряд (7) отличается от ряда (6) только тем, что вместо l_k/l_{k+n} стоит $(l_k/l_{k+n})^2$, легко доказать неравенства

$$\left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g)+n-m}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)^2 \le \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(n+1)}(f*g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le \left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g)+m-n}}\right)^2$$

для всех достаточно больших $r > 0$, откуда, как при доказательстве теоремы 2, получим следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть f и g — целые функции, $\lambda[f*g] = \lambda$ и $\varrho[f*g] = \varrho$, тогда для $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ и $n < m$:*

1) если выполняется условие (4) с $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r}\ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)} = \lambda, \ \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r}\ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)} = \varrho;$$

2) если выполняется условие (10), то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r}\ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g))} = 2(m-n)\lambda$$

и

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r}\ln \frac{r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g))} = 2(m-n)\varrho;$$

3) если выполняется условие (11), то $r^{m-n}\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g)$ при $r \to +\infty$.

Комбинируя доказательства теорем 1 и 2 (или теорем 1 и 3), можно установить связь между $\mu(r, D_l^{(m)}f * D_l^{(m)}g)$ и $\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$. Здесь мы остановимся только на случае, когда $m = n+1$, и докажем следующую теорему, обобщающую указанный во введении результат М. Сена.

Теорема 4. *Пусть f и g — целые функции, $\lambda[f*g] = \lambda$ и $\varrho[f*g] = \varrho$, тогда:*

1) если выполняется условие (4) с $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r}\ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)}f * D_l^{(n+1)}g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = \lambda,$$

и

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=\varrho;$$

2) если выполняется условие (10), то

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=(n+2)\lambda-1,$$

и

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=(n+2)\varrho-1;$$

3) если выполняется условие (11), то $r\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)\asymp\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))$ *при* $r\to+\infty$.

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=\frac{\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)}{\mu(r,D_l^{(n+1)}(f*g))}\frac{\mu(r,D_l^{(n+1)}(f*g))}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))},$$

то в силу (13) и (17) имеем

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}}\left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)-1}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}}\right)^2\le\frac{r\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le$$

$$\le\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)+n}}\left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)+1}}\right)^2,$$

откуда, используя следствие 1, как выше, получаем утверждения 1–3 теоремы 4.

Упомянутый результат М. Сена вытекает из утверждения 2 теоремы 4, если выбрать $l_k=1/k!$.

Замечание 1. Условие $q>1$ в утверждении 1 теорем 1–4 существенно. Остановимся только на теореме 1. Пусть $f(z)=g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k/\sqrt{k!}$, а $l_k/l_{k+1}=q^k$. Тогда $(f*g)(z)=e^z$, $l_k/l_{k+n}=q^{nk+n(n-1)/2}$, $D_l^{(n)}(f*g)(z)=\dfrac{1}{q^{n(n-1)/2}z^n}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{(zq^n)^k}{k!}$ и $(D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)(z)=\dfrac{1}{q^{n(n-1)}z^n}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{(zq^{2n})^k}{k!}$. Поэтому для всех достаточно больших r имеют место равенства $\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))=\dfrac{1}{q^{n(n-1)/2}r^n}\mu(rq_1^n)$ и $\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)=$ $=\dfrac{1}{q^{n(n-1)}r^n}\mu(rq^{2n})$, где $\mu(r)$ — максимальный член степенного разложения функции e^z. Ясно, что $\lambda[f*g]=\varrho[f*g]=1$, а $\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))=\mu(r,D_l^{(n+1)}f*D_l^{(n+1)}g)$, если $q=1$, и $\dfrac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=\dfrac{\mu(rq^{2n})}{q^{n(n-1)/2}\mu(rq^n)}\to0$ при $r\to+\infty$, если $q<1$ (см. [10], с.12), т. е. утверждение 1 теоремы 1 неверно.

5. Поведение максимальных членов адамаровских композиций аналитических в $\mathbb{D}$ функций

Аналоги теорем 1–4 для функций, аналитических в единичном круге, отличаются от этих теорем тем, что в силу леммы 4 вместо равенств теперь будем иметь неравенства. Кроме того, утверждения 1 из теорем 1–4 не могут иметь аналогов согласно сделаному в п. 3 замечанию. Наконец, из равенства $R[f] = R[g] = 1$ вытекает только неравенство $R[f * g] \geq 1$, и поэтому в условиях дальнейших утверждений будем требовать, чтобы $R[f * g] = 1$.

Теорема 5. *Пусть f и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, $R[f * g] = 1$, $\lambda^*[f * g] = \lambda^*$ и $\varrho^*[f * g] = \varrho^*$, тогда:*

1) если выполняется условие (10), то

$$n\lambda^* \leq \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} = n(\lambda^* + 1)$$

и

$$n\varrho^* \leq \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} = n(\varrho^* + 1);$$

2) если выполняется условие (12), то $\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f * g))$ при $r \uparrow 1$.

Доказательство. Если выполняется условие (10), то из (13), как видно из доказательства теоремы 1, вытекает (16). По лемме 4

$$\lambda^*[D_l^{(n)}(f * g)] \leq \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \nu(r, D_l^{(n)}(f * g))}{-\ln(1-r)} \leq \lambda^*[D_l^{(n)}(f * g)] + 1,$$

$$\varrho^*[D_l^{(n)}(f * g)] \leq \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \nu(r, D_l^{(n)}(f * g))}{-\ln(1-r)} \leq \varrho^*[D_l^{(n)}(f * g)] + 1,$$

и эти неравенства имеют место, если вместо $D_l^{(n)}(f * g)$ поставить $D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g$. Поэтому в силу следствия 2 утверждение 1 теоремы 5 доказано.

Утверждение 2 также легко вытекет из (13).

Следующие три теоремы доказываются аналогично к доказательству теорем 2–5.

Теорема 6. *Пусть f и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, $R[f * g] = 1$, $\lambda^*[f * g] = \lambda^*$ и $\varrho^*[f * g] = \varrho^*$, тогда для $n < m$:*

1) если выполняется условие (10), то

$$(m-n)\lambda^* \leq \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f * g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} = (m-n)(\lambda^* + 1)$$

и

$$(m-n)\varrho^* \leq \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f * g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} = (m-n)(\varrho^* + 1);$$

2) если выполняется условие (12), то $\mu(r, D_l^{(m)}(f * g)) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f * g))$ при $r \uparrow 1$.

Теорема 7. *Пусть f и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, $R[f * g] = 1$, $\lambda^*[f * g] = \lambda^*$ и $\varrho^*[f * g] = \varrho^*$, тогда для $n < m$:*

1) если выполняется условие (10), то

$$2(m-n)\lambda^* \leq \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(m)} f * D_l^{(m)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)} = 2(m-n)(\lambda^* + 1)$$

и

$$2(m-n)\varrho^* \le \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(m)} f * D_l^{(m)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)} = 2(m-n)(\varrho^*+1);$$

2) если выполняется условие (12), то $\mu(r, D_l^{(m)} f * D_l^{(m)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)$ *при* $r \uparrow 1$.

Теорема 8. *Пусть* f *и* g *— аналитические в* $\mathbb{D}$ *функции,* $R[f*g]=1$, $\lambda^*[f*g]=\lambda^*$ *и* $\varrho^*[f*g]=\varrho^*$, *тогда:*

1) если выполняется условие (10), то

$$(n+2)\lambda^* \le \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (n+2)(\lambda^*+1)$$

и

$$(n+2)\varrho^* \le \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{-\ln(1-r)} \ln^+ \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} = (n+2)(\varrho^*+1);$$

2) если выполняется условие (12), то $\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g) \asymp \mu(r, D_l^{(n)}(f*g))$ *при* $r \uparrow 1$.

Замечание 2. Из утверждения 1 теоремы 8 следует, что если функция $f*g$ имеет нижний порядок $\lambda^* > 0$ и порядок $\varrho^* < +\infty$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ и всех $r \in [r_n(\varepsilon), 1)$ имеет место следующий аналог неравенств М. Сена

$$\left(\frac{1}{1-r}\right)^{(n+2)\lambda^*-\varepsilon} \le \frac{\mu(r, D_l^{(n+1)} f * D_l^{(n+1)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))} \le \left(\frac{1}{1-r}\right)^{(n+2)(\varrho^*+1)+\varepsilon}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. 1957. Т. 23, №3. С. 477–500.
2. J. Hadamard *Theoreme sur le series entieres* // Acta math. Bd. 22. 1899. P. 55–63.
3. J. Hadamard *La serie de Taylor et son prolongement analytique* // Scientia phys.-math. 1901. №12. P. 42–63.
4. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* М.: Наука, 1967. 239 с.
5. M.K. Sen *On some properties of an integral function* $f*g$ // Riv. Math. Univ. Parma (2). 1967. V. 8. P. 317–328.
6. M.K. Sen *On the maximum term of a class of integral functions and its derivatives* // Ann. Pol. Math. 1970. V. 22. P. 291–298.
7. G. Valiron *Integral functions.* Toulouse. 1923. 354 p.
8. J.M. Whittaker *The lower order of integral functions* // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. P. 20–27.
9. L.R. Sons *Regularity of growth and gaps* // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 24. P. 296–306.
10. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа. II.* М.: Наука, 1978. 432 с.

Любомира Любомировна Луговая,
Институт предпринимательства и перспективных технологий,
ул. Горбачевского, 18,
79000, г. Львов, Украина
E-mail: Lyubomyrka@ukr.net

Оксана Мирославовна Мулява,
Киевский национальный университет пищевых технологий,
ул. Владимирская, 68,
01038, г. Киев, Украина
E-mail: info@nuft.edu.ua

Мирослав Николаевич Шеремета,
Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1,
79000, г. Львов, Украина
E-mail: m_m_sheremeta@list.ru