ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 67-89.

УДК 517.5

БАЗИСЫ "ПО ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫМ ГРУППАМ"

А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. Изучаются базисы в инвариантном подпространстве, составленные из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования, показатели которых разбиты на относительно малые группы.

Ключевые слова: экспонента, базис, инвариантное подпространство, целая функция.

Пусть D — выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $H(D)$ будем обозначать пространство функций, аналитических в D, с топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть W — нетривиальное ($W \neq H(D)$ и $W \neq \{0\}$) замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, т.е. вместе с каждой функцией g подпространство W содержит и ее производную g'. В работе изучаются базисы в W, составленные из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций этого оператора, показатели которых разбиты на относительно малые группы.

Собственными функциями оператора дифференцироания в $H(D)$ являются $\exp(\lambda z)$, а его собственные числа λ заполняют всю комплексную плоскость. В подпространстве W спектр оператора дифференцирования является уже не более чем счетным множеством. При этом если он бесконечен, то единственная его предельная точка ∞. Поясним сказанное. Пусть $\hat{\mu}(\lambda)$ обозначает преобразование Лапласа функционала $\mu \in H^*(D)$: $\hat{\mu}(\lambda) = \mu(\exp(\lambda z))$. Функция $\hat{\mu}(\lambda)$ является целой и имеет экспоненциальный тип, т.е. для некоторых $A, B > 0$ верно неравенство $|\hat{\mu}(\lambda)| \leqslant A\exp(B|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Более того, известно (см., например, [1]), что преобразование Лапласа устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм пространств $H^*(D)$ и P_D, где P_D есть индуктивный предел Банаховых пространств,

$$P_s = \{f \in H(\mathbb{C}) : ||f||_s = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |f(\lambda)| \exp(-H_{K_s}(\lambda)) < \infty\}.$$

Поскольку подпространство $W \subset H(D)$ нетривиально, то существует ненулевой аналитический функционал μ в области D, аннулирующий W ($\mu(g) = 0\ \forall g \in W$). В частности, он обращается в ноль на всех собственных функциях оператора дифференцирования в W, т. е. на всех экспонентах, принадлежащих подпространству W. Другими словами, если $\exp(\lambda z)$ — одна из таких функций, то по определению преобразования Лапласа $\hat{\mu}(\lambda) = 0$. Нулевое множество целой функции $\hat{\mu}(\lambda)$ не более чем счетно. Если оно бесконечно, то единственной его предельной точкой является ∞. Таким образом, верно сказанное выше относительно спектра оператора дифференцирования в W. Пусть J обозначает множество преобразований Лапласа всех функционалов $\mu \in H^*(D)$, аннулирующих подпространство W. Тогда J — замкнутое линейное подпространство в P_D.

Пусть $\{\lambda_k\}$ — набор общих нулей всех функций из J. Уже отмечено, что в случае, когда $\exp(\lambda z)$ — собственная функция оператора дифференцирования в W, ее показатель

A.S. Krivosheyev, Basis is broken by relatively small groups.

Поступила 28 апреля 2010 г.

λ совпадает с одним из чисел λ_k. Обратно, пусть функция $\exp(\lambda z)$ не принадлежит подпространству W. Тогда в силу замкнутости последнего найдется функционал $\mu \in H^*(D)$, аннулирующий W и такой, что $\hat{\mu}(\lambda) = \mu(\exp(\lambda z)) \neq 0$. Следовательно, λ не входит в число общих нулей функций из J. Таким образом, множество $\{\lambda_k\}$ является спектром оператора дифференцирования в подпространстве W.

Наша основная задача — найти представление функций из W при помощи некоторых простых (с точки зрения их определения) функций этого подпространства. Таковыми несомненно являются собственные функции оператора дифференцирования. Однако одних лишь собственных функций недостаточно для такого представления даже в случае, когда W есть пространство решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Фундаментальный принцип Л. Эйлера утверждает, что это пространство совпадает с линейной оболочкой всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Последние, как известно, имеют вид $z^n \exp(\lambda z)$.

Пусть E — множество всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Опишем его. Поскольку подпространство W инвариантно относительно дифференцирования, то вместе с каждой функцией $z^n \exp(\lambda z)$ оно содержит и все функции вида $z^m \exp(\lambda z)$, где $0 \leqslant m \leqslant n$. Поэтому с учетом сказанного ранее заключаем, что E есть совокупность функций $\{z^n \exp(\lambda_k z)\}$, где $\{\lambda_k\}$ — набор общих нулей функций из J, и $0 \leqslant n < n_k$. При этом для каждого номера k число n_k конечно и совпадает с кратностью общего нуля λ_k. Последняя определяется из условий: 1) $\varphi^{(n)}(\lambda_k) = 0$ для любого $n = 0, 1, \ldots, n_k - 1$ и любой функции $\varphi \in J$, 2) существует $\varphi_k \in J$ такая, что $\varphi_k^{(n_k)}(\lambda_k) \neq 0$. Действительно, дифференцируя равенство из определения преобразования Лапласа по λ, получаем: $\hat{\mu}^{(n)}(\lambda) = (\mu, z^n \exp(\lambda z))$. Следовательно, если функция $z^n \exp(\lambda z)$ принадлежит W, то λ совпадает с одним из чисел λ_k и $n < n_k$. Обратно, если $z^n \exp(\lambda z)$ не принадлежит W, то, как и выше, найдется функционал $\mu \in H^*(D)$, аннулирующий W и такой, что $\hat{\mu}^{(n)}(\lambda) = (\mu, z^n \exp(\lambda z)) \neq 0$. Таким образом, $E = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$, где $\{\lambda_k, n_k\}$ — совокупность общих нулей и их кратностей всех функций из J.

Очевидно, что необходимым условием представления функций из подпространства W посредством собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W является полнота множества E в W. Если это имеет место, то говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать только подпространства $W \subset H(D)$, которые допускают спектральный синтез. К настоящему времени проблема спектрального синтеза в выпуклых областях комплексной плоскости достаточно хорошо изучена. К примеру, в очень важном частном случае, когда W является пространством решений однородного уравнения свертки

$$M_\mu(g)(w) = \mu(g(z-w)) = 0, \qquad g \in H(D), \mu \in H^*(D),$$

спектральный синтез всегда имеет место (см. [2]). Заметим, что, по крайней мере, для некоторых выпуклых областей D замкнутые подпространства в $H(D)$, инвариантные относительно оператора дифференцирования, совпадают с пространствами решений системы однородных уравнений свертки (см., например, [3, 4]). Следовательно, наиболее общим примером инвариантных подпространств W можно считать пространства решений системы уравнений

$$M_{\mu_1}(g)(w) = \mu_1(g(z-w)) = 0, \ldots, M_{\mu_l}(g)(w) = \mu_l(g(z-w)) = 0.$$

В этом случае есть простые достаточные условия наличия спектрального синтеза в W. Он имеет место, если существует функция $\varphi \in J$, которая делится на характеристическую функцию $\hat{\mu}_j$ каждого оператора свертки M_{μ_j}, $j = 1, \ldots, l$ (см. [5, 6]). Для общих инвариантных подпространств также имеются необходимые и достаточные условия допустимости спектрального синтеза (см. [5, 6]).

В дальнейшем для удобства обозначений мы ограничимся рассмотрением замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез и имеющих бесконечный спектр, поскольку в противном случае инвариантное подпространство W совпадает с пространством решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Такое пространство представляет собой линейную оболочку собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Этот факт составляет содержание фундаментального принципа Л. Эйлера, который полностью решает проблему представления функций из W в этом случае.

Из сказанного выше следует, что любое нетривиальное замкнутое инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, можно получить следующим образом. Выберем последовательность $\{\lambda_k, n_k\}$, где λ_k — комплексные, а n_k — натуральные числа, удовлетворяющую условию: система $E = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$ не полна в $H(D)$. По теореме Хана – Банаха последнее равносильно существованию ненулевого аналитического функционала $\mu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на функциях системы E. Другими словами, найдется функция $\varphi \in P_D$ (преобразование Лапласа функционала μ), которая обращается в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k. В качестве W возьмем теперь замыкание в $H(D)$ линейной оболочки системы E. Полученное подпространство, как нетрудно видеть, является нетривиальным замкнутым инвариантным относительно оператора дифференцирования и допускает спектральный синтез. Таким образом можно получить любое указанное подпространство.

Лемма 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, W — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $H(D)$, $E = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ — семейство собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) подпространство W допускает спектральный синтез,
2) множество J совпадает с множеством функций $\varphi \in P_D$, которые обращаются в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k, $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Предположим, что утверждение 1 имеет место и пусть $\varphi \in J$. Если μ — аналитический функционал в D, преобразованием Лапласа которого является функция φ, то по определению множества J функционал μ аннулирует подпространство W. В частности, он обращается в ноль на всех функциях системы E. Поэтому $\varphi = \hat{\mu}$ обращается в ноль во всех точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k. Пусть теперь $\varphi \in P_D$ обращается в ноль во всех точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k, и $\mu \in H^*(D)$ такой, что $\varphi = \hat{\mu}$. Тогда μ обращается в ноль на всех функциях системы E. Поскольку E полна в W, то отсюда с учетом непрерывности функционала μ следует, что он аннулирует подпространство W. Поэтому согласно определению множества J оно содержит функцию φ.

$2 \Rightarrow 1$. Предположим, что утверждение 2 верно, но тем не менее подпространство W не допускает спектральный синтез, т.е. система E не полна в W. Через $\tilde{W}$ обозначим замыкание в $H(D)$ линейной оболочки множества E. Тогда найдется функция $g \in W$, которая не принадлежит $\tilde{W}$. По теореме Хана – Банаха существует функционал $\mu \in H^*(D)$, аннулирующий подпространство $\tilde{W}$ и такой, что $\mu(g) \neq 0$. Последнее означает, что функция $\hat{\mu} \in P_D$ не принадлежит множеству J. С другой стороны, функционал μ аннулирует $\tilde{W}$ и, в частности, обращается в ноль на всех функциях системы E. Это означает, что $\hat{\mu}$ обращается в ноль во всех точках λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k. Тогда согласно утверждению 2 функция $\hat{\mu}$ принадлежит множеству J. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Элементы инвариантного подпространства W с бесконечным спектром в отличие от случая конечного спектра не всегда могут быть представлены как линейные комбинации собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W и даже как ряды по таким функциям. Как уже было отмечено во введении, такому представлению может помешать излишняя концентрация точек спектра, т.е. сильное сближение точек λ_k друг с другом при $k \to \infty$. Некоторые элементы системы E в такой ситуации, являясь линейно независимыми, будут тем не менее слишком схожи по поведению. В результате появляются ряды по функциям системы E, которые расходятся, но после подходящей расстановки скобок в них становятся сходящимися. Это приводит к тому, что некоторые функции из W (суммы "рядов со скобками") не могут быть представлены рядами по функциям системы E. Иногда удается исправить ситуацию с представлением, заменив функции системы E другими функциями. Для этого нужно провести процедуру, схожую (но лишь по смыслу) с процессом ортогонализации полной системы в гильбертовом пространстве, после которой новая полная система становится базисом. К осуществлению подобной процедуры мы сейчас и приступим.

Пусть W — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, и $E = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ — система собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Функции новой системы, которая должна стать базисом в W, будем искать как линейные комбинации элементов системы E, разбитой на "относительно малые группы". Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ разбита на группы U_m, $m = 1, 2, \ldots$ Сделаем перенумерацию членов этой последовательности. Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности — $n_{m,l}$. Здесь первый индекс m совпадает с номером группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m — число точек спектра, попавших в группу U_m. Будем говорить, что группы U_m, $m = 1, 2, \ldots$, относительно малы, если выполнено следующее:

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

Заметим, что числа $\lambda_{m,1}$ здесь можно заменить любыми другими представителями $\lambda_{m,j}$ групп U_m. Это сразу следует из соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j}|}{|\lambda_{m,1}|} \leqslant \lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} + \lim_{m\to\infty} \frac{|\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} = 1.$$

В новых обозначениях система собственных и присоединенных функций выглядит следующим образом: $E = \{z^n \exp \lambda_{m,l} z\}_{m=1,l=1,n=0}^{\infty,M_m,n_{m,l}-1}$. Пусть N_m — число точек спектра, попавших в группу U_m, $m = 1, 2, \ldots$, с учетом их кратности, т.е. $N_m = \sum\limits_{l=1}^{M_m}$. По системе E построим систему функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$. Положим

$$e_{m,j}(z) = \sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} z^n \exp(\lambda_{m,l} z), \qquad m = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, N_m.$$

Наша ближайшая задача — подходящим образом определить коэффициенты $c_{m,j,l,n}$. Фиксируем номер $m \geq 1$. Пусть W_m — линейная оболочка функций $z^n \exp(\lambda_{m,l} z)$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$. Множество W_m — конечномерное (а значит, и замкнутое) подпространство в $H(D)$ размерности N_m. Предполагается, что система $\tilde{E}$ будет базисом в W. Поэтому набор функций $e_{m,j}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, N_m$ должен быть базисом в W_m. Сопряженное к W_m пространство W_m^* можно отождествить со стандартным подпространством $Q(N_m - 1)$ многочленов степени не выше $N_m - 1$. Поэтому проще всего искать базис в W_m как базис, биортогональный к базису в этом подпространстве. Для дальнейшего нам удобно поподробнее описать процесс отождествления W_m^* с $Q(N_m - 1)$.

Поскольку $H(D)$ является пространством Фреше – Шварца, а W_m — его замкнутое подпространство, то (см., например, [7]) W_m^* алгебраически и топологически изоморфно фактор-пространству $H^*(D)/W_m^0$, где W_m^0 — замкнутое подпространство в $H^*(D)$, состоящее из функционалов, аннулирующих W_m. Используя преобразование Лапласа, мы как следствие получаем также изоморфизм $W_m^* \cong P_D/J_m$, где J_m — замкнутое подпространство в P_D, состоящее из преобразований Лапласа элементов W_m^0. Поскольку W_m — линейная оболочка функций $z^n \exp(\lambda_{m,l} z)$, $l = 1, \ldots, M_m$, $n = 0, \ldots, n_{m,l} - 1$, то функционал из $H^*(D)$ принадлежит подпространству W_m^0 тогда и только тогда, когда он обращается в ноль на всех этих функциях. Следовательно, множество J_m состоит из тех и только тех функций $\varphi \in P_D$, которые обращаются в ноль в точках $\lambda_{m,l}$ с кратностью не меньшей, чем $n_{m,l}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$. Поэтому функция $\omega \in P_D$ принадлежит классу эквивалентности $[\psi] \in P_D/J_m$, порожденному функцией ψ, тогда и только тогда, когда выполнены равенства $\omega^{(n)}(\lambda_{m,l}) = \psi^{(n)}(\lambda_{m,l})$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$. Пространство P_D содержит в себе все многочлены. Кроме того, существует единственный многочлен $q(\lambda)$ степени не выше $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,l}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно принимает заданные значения $a_{m,l} \in \mathbb{C}$. Таким образом, имеет место изоморфизм между пространствами W_m^* и $Q(N_m - 1)$, определяемый равенствами $\nu(z^n \exp(\lambda_{m,l} z)) = q^{(n)}(\lambda_{m,l})$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$ где $\nu \in W_m^*$ и $q \in Q(N_m - 1)$.

Чтобы обеспечить подходящие оценки на функции $e_{m,j}(z)$, мы несколько модифицируем стандартный базис в пространстве многочленов $Q(N_m - 1)$. В качестве базиса в этом пространстве возьмем систему $\Theta_m = \{\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}\}_{j=0}^{N_m - 1}$. Теперь мы можем определить базис в пространстве W_m как систему функций $\tilde{E}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$, биортогональную к Θ_m. Пусть $\nu_{m,j}$ — функционал из W_m^*, соответствующий многочлену $\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^{j-1}}{(j-1)!}$ при указанном изоморфизме. Положим $b_{m,j,l,n} = \nu_{m,j}(z^n \exp(\lambda_{m,l} z))$, $j = 1, 2, \ldots, N_m$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$. Биортогональность систем $\tilde{E}_m$ и Θ_m обеспечивают равенства

$$\sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} b_{m,j,l,n} = 1, \quad \sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} b_{m,j,l,n} = 0, \quad k \neq j.$$

Следовательно, вектор, составленный из коэффициентов $c_{m,j,l,n}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$, является j-й строкой квадратной матрицы порядка $N_m \times N_m$, обратной к матрице, j-м столбцом которой является вектор, составленный из чисел $b_{m,j,l,n}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, $n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1$. Заметим, что в частном случае, когда группа U_m состоит лишь из одной точки $\lambda_{m,1}$ (и тогда $N_m = n_{m,1}$), указанные матрицы являются единичными. В этом случае система $\tilde{E}_m$ имеет вид $\tilde{E}_m = \{z^{j-1} \exp(\lambda_{m,1} z)\}_{j=1}^{N_m}$.

Таким образом, мы построили систему функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, обладающую следующим свойством: для каждого $m = 1, 2, \ldots$ набор элементов $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$ является базисом в пространстве W_m, биортогональным к базису $\Theta_m = \{\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}\}_{j=0}^{N_m - 1}$ в пространстве $Q(N_m - 1)$. При этом действие функционала из W_m^*, определяемого многочленом $\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{J!}$, на функцию $z^n \exp(\lambda_{m,l} z)$ задается как значение n-й производной этого многочлена, вычисленной в точке $\lambda_{m,l}$.

Отметим, что построенная система функций $\tilde{E}$ обладает биортогональной последовательностью функционалов $\{\mu_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} \subset H^*(D)$. Действительно, любая неполная в $H(D)$ система функций $E = \{z^n \exp(\lambda_{m,l} z)\}_{m=1,l=1,n=0}^{\infty,M_m,n_{m,l}-1}$ (это имеет место в нашем случае, поскольку W — собственное подпространство в $H(D)$) обладает биортогональной последовательностью функционалов из $H^*(D)$ (см., например, [3, гл.2,] или [8]). Для каждого

$m = 1, 2, \dots$ функционалы $\mu_{m,j}$, $j = 1, \dots, N_m$ можно определить как линейные комбинации элементов последней последовательности. Коэффициенты этих линейных комбинаций являются строками указанной выше матрицы, составленной из производных многочленов $\frac{(\lambda-\lambda_{m,1})^j}{j!}$, вычисленных в точках $\lambda_{m,l}$. Таким образом, коэффициенты любого ряда $\sum d_{m,j}e_{m,j}(z)$, сходящегося равномерно на компактах в области D к функции $g \in H(D)$, однозначно определяются по формулам $d_{m,j} = \mu_{m,j}(g)$, $m = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, N_m$.

Приведем теперь другое представление функций $e_{m,j}(z)$, удобное для их оценок. Пусть Γ_m — контур, охватывающий точки $\lambda_{m,l}$, $l = 1, 2, \dots, M_m$, группы U_m, и $\omega_m(\lambda)$ — многочлен с этими нулями с учетом их кратности и со старшим коэффициентом, равным единице, т.е.

$$\omega_m = \prod_{l=1}^{M_m}(\lambda - \lambda_{m,l})^{n_{m,l}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для функции $f(\varsigma)$, аналитической на контуре Γ_m и внутри него, положим

$$q_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \frac{f(\varsigma)(\omega_m(\varsigma) - \omega_m(\lambda))}{(\varsigma - \lambda)\omega_m(\varsigma)}d\varsigma, \quad m = 1, 2, \dots \tag{1}$$

В случае, когда $f(\varsigma) = \exp(z\varsigma)$, вместо $q_m(\lambda, \exp(z\varsigma))$ будем использовать обозначение $q_m(\lambda, z)$. Формула (1) определяет известный интерполяционный многочлен степени не выше $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями функции $f(\varsigma)$ и ее производных, т.е.

$$q_m^{(n)}(\lambda_{m,l}, f) = f^{(n)}(\lambda_{m,l}), \quad l = 1, 2, \dots, M_m, n = 0, 1, \dots, n_{m,l} - 1. \tag{2}$$

Если $f \in P_D$, то из последних равенств вытекает, что класс эквивалентности $[f] \in P_D/J_m$, порожденный функцией f, содержит многочлен $q_m(\lambda, f)$. Поэтому f и $q_m(\lambda, f)$ определяют один и тот же функционал из W_m^*. Функция $\exp(z\varsigma)$ является преобразованием Лапласа δ-функции, сосредоточенной в точке z: $\exp(z\varsigma) = \delta_z(\exp(w\varsigma))$. Следовательно, многочлен $q_m(\lambda, z)$ определяет функционал δ_z. Разложим $q_m(\lambda, z)$ по элементам системы Θ_m:

$$q_m(\lambda, z) = \sum_{j=0}^{N_m-1} q_{m,j}(z)\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}.$$

С учетом биортогональности систем Θ_m и $\tilde{E}_m$ находим отсюда, что при $p = 1, \dots, N_m$

$$e_{m,p}(z) = \delta_z(e_{m,p}) = (q_m(\lambda, z), e_{m,p}) = \sum_{j=0}^{N_m-1} q_{m,j}(z)(\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}, e_{m,p}) = q_{m,p-1}(z). \tag{3}$$

Таким образом, в каждой точке z функция $e_{m,p}(z)$ совпадает с $(p-1)$-й производной многочлена $q_m(\lambda, z)$, вычисленной в точке $\lambda_{m,1}$. Используя интегральную формулу Коши для производных, получаем:

$$e_{m,p}(z) = \frac{(p-1)!}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda - \lambda_{m,1}|=1} \frac{q_m(\lambda, z)d\lambda}{(\lambda - \lambda_{m,1})^p}, \quad p = 1, \dots, N_m. \tag{4}$$

Это представление позволяет установить оценки сверху на функции системы $\tilde{E}$. Но прежде введем еще некоторые обозначения и докажем вспомогательные результаты. Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Положим

$$X(D) = \{\xi \in \mathbb{C} : H_D(\xi) = +\infty\}.$$

Из выпуклости и однородности функции $H_D(\xi)$ следует, что дополнение $\mathbb{C} \setminus X(D)$ — конус. Другими словами, $\mathbb{C} \setminus X(D)$ является углом раствора не более чем π, за исключением четырех следующих случаев: 1) $\mathbb{C} \setminus X(D)$ — вся плоскость ($X(D) \;=$), если D ограничена; 2) $\mathbb{C} \setminus X(D)$ совпадает с началом координат, если $D = \mathbb{C}$; 3) $\mathbb{C} \setminus X(D)$ — луч, если D — полуплоскость; 4) $\mathbb{C} \setminus X(D)$ — прямая, если D — полоса. Таким образом, в случае, когда D — неограниченная область, реализуется одна из четырех следующих возможностей: 1) $X(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если $D = \mathbb{C}$; 2) $X(D)$ — плоскость без луча, если D — полуплоскость; 3) $X(D)$ — плоскость без прямой, если D — полоса; 4) $X(D)$ — угол раствора не меньше π.

Пусть T — подмножество $\mathbb{S}$ — единичной окружности с центром в начале координат. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ через $\Lambda(T)$ обозначим ее подпоследовательность $\{\lambda_{m_p,l}, n_{m_p,l}\}$, состоящую из всех членов $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}$ таких, что $\lambda_{m,l}/|\lambda_{m,l}| \in T$. Положим $N(\Lambda(T))$, если $\Lambda(T)$ содержит лишь конечное число элементов, и

$$N(\Lambda(T)) = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{N_{m_p}}{|\lambda_{m_p,1}|}$$

в противном случае. Легко видеть, что

$$N(\Lambda(T_1)) \leqslant N(\Lambda(T_2)), \quad \text{если} \quad T_1 \subseteq T_2.$$

В частности, $N(\Lambda(T)) \leqslant N(\Lambda(\mathbb{S})) = N(\Lambda)$ для всех $T \subseteq \mathbb{S}$. В ситуации, в которой мы находимся, каждая точка $\lambda_{m,l}$ является нулем кратности не меньшей, чем $n_{m,l}$ любой целой функции $f \in J$. Поскольку f имеет экспоненциальный тип, и последовательность Λ разбита на относительно малые группы, то, например, из теоремы 2.3 в книге [3, гл. 1] легко следует, что $N(\Lambda) < +\infty$. Пусть F — компактное подмножество $\mathbb{S}$. Если область D отлична от всей плоскости, положим

$$N_F(\Lambda) = \inf_{T\supset F} N(\Lambda(T)), \quad N_D(\Lambda) = \sup_{F\subset(\mathbb{S}\setminus X(D))},$$

где инфимум берется по всем открытым на $\mathbb{S}$ множествам T, содержащим F, а супремум — по всем компактным подмножествам $F \subset (\mathbb{S} \setminus X(D))$.

Пусть $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая область D, т.е. выполнено следующее: 1) $K_p \subset int K_{p+1}$ для всех $p \geq 1$ (int обозначает внутренность множества), 2) $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$. Пусть $H_M(z)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(z) = \sup_{w\in M} Re(zw), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда из условия 1 следует, что для каждого $p \geq 1$ существует число $\alpha_p > 0$ такое, что

$$H_{K_p}(z) + \alpha_p|z| \leqslant H_{K_{p+1}}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda) = 0$. Тогда для каждого $p = 1, 2, \ldots$ существуют номера $s > p$ и m_0, для которых выполнены неравенства*

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N_m-1} \| \ln \frac{n!}{|\lambda_{m,1}|^n} \| \leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1}) - H_{K_p}(\lambda_{m,1}), \quad m \geq m_0.$$

Доказательство. Выше мы отметили, что $N(\Lambda) < +\infty$. Следовательно, для некоторого $\beta > 1$, не зависящего от номера m, верно неравенство $N_m \leqslant \beta|\lambda_{m,1}|$. Пусть $m = 1, 2, \dots$ и $n = 0, 2, \dots, N_m - 1$. Имеем

$$\frac{n!}{|\lambda_{m,1}|^n} \leqslant \frac{n^n}{|\lambda_{m,1}|^n} \leqslant (\frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|})^n \leqslant (\frac{\beta|\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|})^n = \beta^n \leqslant \beta^{N_m}. \tag{6}$$

Кроме того, учитывая, что $n! \geq 3^{-n}n^n$ при всех $n = 1, 2, \dots$, функция $x^{-1}\ln(3x)$ убывает, когда $\ln(3x) > 1$, и $x^{-1}\ln(3x) < 2$ для всех $x > 0$, имеем:

$$\frac{\ln(|\lambda_{m,1}|^n/n!)}{|\lambda_{m,1}|} \leqslant \frac{\ln(3^n|\lambda_{m,1}|^n/n^n)}{|\lambda_{m,1}|} = \frac{n\ln(3|\lambda_{m,1}|/n)}{|\lambda_{m,1}|} \leqslant \frac{N_m\ln(3|\lambda_{m,1}|/N_m)}{|\lambda_{m,1}|}, \tag{7}$$

если $\ln(3|\lambda_{m,1}|/N_m) > 1$, и

$$\frac{\ln(|\lambda_{m,1}|^n/n!)}{|\lambda_{m,1}|} < 2. \tag{8}$$

Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда для некоторого $p = 1, 2, \dots$ и каждого $s > p$ найдется номер $m(s)$ такой, что $m(s) \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N_{m(s)}-1} \| \ln\frac{n!}{|\lambda_{m(s),1}|^n} \| \geq H_{K_s}(\lambda_{m(s),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s),1}). \tag{9}$$

Выделим подпоследовательность номеров $s(r)$, $r = 1, 2, \dots$ такую, что $\lambda_{m(s(r)),1}/|\lambda_{m(s(r)),1}|$ при $r \to \infty$ сходится к некоторой точке $\xi \in \mathbb{S}$. Пусть вначале $\xi \in \mathbb{S} \setminus X(D)$. По условию с учетом определения величины $N_D(\Lambda)$ получаем $N_F(\Lambda) = 0$, где $F = \{\xi\}$. Тогда согласно определению $N_F(\Lambda)$ для каждого $\varepsilon > 0$ на окружности $\mathbb{S}$ найдем окрестность T точки ξ, для которой выполнено неравенство $N(\Lambda(T)) < \varepsilon/2$. Оно означает, что начиная с некоторого номера $r = r_0$ верна оценка

$$\frac{N_{m(s(r))}}{|\lambda_{m(s(r)),1}|} < \varepsilon. \tag{10}$$

Выберем $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что $\varepsilon\ln\beta < \alpha_p$ и $-\varepsilon\ln(\varepsilon/3) < \alpha_p$, где α_p — число из соотношения (5). Тогда в силу (6), (7) и (10) с учетом (5) получаем

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N_{m(s(r))}-1} |\ln\frac{n!}{|\lambda_{m(s(r)),1}|^n}| \leqslant \alpha_p|\lambda_{m(s(r)),1}| \leqslant H_{K_{p+1}}(\lambda_{m(s(r)),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s(r)),1}), \quad r \geq r_0.$$

Это противоречит (9), так как $H_{K_s} \geq H_{K_{p+1}}$ при $s \geq p + 1$.

Пусть теперь $\xi \in \mathbb{S} \cap X(D)$. Положим

$$H = \max_{\eta\in\mathbb{S}} H_{K_p}(\eta).$$

Согласно определениям множества $X(D)$ и опорной функции H_D с учетом того, что компакты K_l, $l = 1, 2, \dots$, исчерпывают область D, найдем номер l, удовлетворяющий условиям:

$$H_{K_l}(\xi) > H + \beta\ln\beta, \quad H_{K_l}(\xi) > H + 2.$$

В силу непрерывности опорной функции компакта эти оценки продолжаются в окрестность V точки ξ:

$$H_{K_l}(\eta) > H + \beta\ln\beta, \qquad H_{K_l}(\eta) > H + 2, \quad \eta \in V.$$

Тогда из (6), (8) и неравенства $N_m \leqslant \beta|\lambda_{m,1}|$, $m = 1, 2, \dots$, получаем:

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N_m-1}|\ln\frac{n!}{|\lambda_{m,1}|^n}|<(H_{K_l}(\eta)-H)|\lambda_{m,1}|,\quad \eta\in V,\quad m=1,2,\dots$$

Выберем номер r_1 такой, что при $r\geq r_1$ точка $\lambda_{m(s(r)),1}/|\lambda_{m(s(r)),1}|$ принадлежит множеству V. С учетом определения H и однородности опорной функции из предыдущего имеем:

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N_{m(s(r))}-1}\|\ln\frac{n!}{|\lambda_{m(s(r)),1}|^n}\|\geq H_{K_l}(\lambda_{m(s(r)),1})-H_{K_p}(\lambda_{m(s(r)),1}),\quad r\geq r_1.$$

Как и выше, это противоречит (9). Лемма доказана.

Замечание. Если $N(\Lambda)=0$, то из неравенств (6) и (7) легко следует, что

$$\lim_{m\to\infty}|\lambda_{m,1}|^{-1}\max_{0\leqslant n\leqslant N_m-1}|\ln\frac{n!}{|\lambda_{m,1}|^n}|=0.$$

Лемма 3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda=\{\lambda_{m,l},n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda)=0$, и $a\geq 1$. Тогда для каждого $p=1,2,\dots$ существуют номера $s>p$ и m_0, для которых выполнены неравенства*

$$N_m\ln a\leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1})-H_{K_p}(\lambda_{m,1}),\quad m\geq m_0.$$

Доказательство. Заметим лишь, что после получения оценки (6) в лемме 2 мы, по сути, доказывали утверждение данной леммы.

В дальнейшем символом $B(\eta,\tau)$ будем обозначать открытый круг с центром в точке η и радиуса τ.

Лемма 4. *Пусть $H(\lambda)$ — вещественнозначная, положительно однородная порядка один функция. Пусть далее $F\subset\mathbb{S}$, $\varepsilon>0$ и $\tau\in(0,1/3)$ такие, что*

$$|H(\lambda)-H(\eta)|\leqslant\varepsilon/3,\quad \forall\eta\in F,\quad \lambda\in B(\eta,\tau),\tag{11}$$

тогда верно неравенство

$$\sup_{y\in B(z,\tau|z|)}H(y)\leqslant\inf_{y\in B(z,\tau|z|)}H(y)+\varepsilon\inf_{y\in B(z,\tau|z|)}|y|,\quad \forall z: z/|z|\in F.\tag{12}$$

Доказательство. Пусть $z/|z|\in F$ и $y,x\in B(z,\tau|z|)$. В силу положительной однородности функции $H(\lambda)$ и неравенства (11) имеем:

$$|H(y)-H(x)|\leqslant|H(y)-H(z)|+|H(x)-H(z)|\leqslant|z||H(y/|z|)-H(z/|z|)|+|z||H(x/|z|)-H(z/|z|)|\leqslant$$
$$\leqslant 3^{-1}2\varepsilon|z|.$$

Следовательно,

$$\sup_{y\in B(z,\tau|z|)}H(y)\leqslant\inf_{y\in B(z,\tau|z|)}H(y)+3^{-1}2\varepsilon|z|,\quad \forall z: z/|z|\in F.$$

Заметим, что $|z|=(1-\tau)^{-1}\inf_{y\in B(z,\tau|z|)}|y|$, $\forall z\neq 0$. Поэтому, учитывая включение $\tau\in(0,1/3)$, из предыдущего легко получаем (12). Лемма доказана.

Теперь мы можем получить оценки сверху на функции системы $\tilde{E}$. Эти оценки являются частным случаем следующего более общего результата. Для функции f, аналитической на контуре Γ_m и внутри него через $q_{m,j}(f)$, $j=0,1,\dots,N_m-1$, обозначим коэффициенты разложения многочлена $q_m(\lambda,f)$ по функциям системы Θ_m, т.е.

$$q_m(\lambda,f)=\sum_{j=0}^{N_m-1}q_{m,j}(f)\frac{(\lambda-\lambda_{m,1})^j}{j!}.$$

Лемма 5. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ с относительно малыми группами $U_m = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda) = 0$, $\delta > 0$ и $p = 1, 2, \ldots$ Существуют постоянная C_p и номер $s > p$ такие, что для каждой функции f, аналитической в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, а также на контуре Γ_m и внутри него, $m = 1, 2, \ldots$, и удовлетворяющей условию*

$$|f(\xi)| \leqslant C \exp H_{K_p}(\xi), \quad \xi \in \Gamma_m \cup B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

выполнены неравенства

$$|q_{m,j}(f)| \leqslant CC_p \exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, N_m - 1.$$

Доказательство. Пусть α_p — число из неравенства (5). В силу равномерной непрерывности функции H_{K_p} на окружности $\mathbb{S}$ найдется $\tau \in (0, \delta/4)$ такое, что

$$|H_{K_p}(\eta) - H_{K_p}(\lambda)| < \alpha_p/3, \quad \forall \eta \in \mathbb{S}, \quad \lambda \in B(\eta, 4\tau). \tag{13}$$

Поскольку группы U_m, $m = 1, 2, \ldots$, относительно малы, то начиная с некоторого номера m_0 группа U_m целиком лежит в круге $B(\lambda_{m,1}, \tau|\lambda_{m,1}|)$. Тогда согласно интегральной теореме Коши контур Γ_m в определении функции $q_m(\lambda, f)$ при $m \geq m_0$ можно заменить контуром $S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)$ — окружностью с центром в точке $\lambda_{m,1}$ и радиуса $3\tau|\lambda_{m,1}|$, т.е.

$$q_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)} \frac{f(\xi)(\omega_m(\varsigma) - \omega_m(\xi))}{(\xi - \lambda)\omega_m(\xi)} \xi, \quad m \geq m_0.$$

Для конечного числа номеров $m = 1, 2, \ldots, m_0 - 1$ при оценке интегралов, определяющих числа $q_{m,j}(f)$, воспользуемся тем, что функция $\frac{(\omega_m(\xi) - \omega_m(\lambda))}{(\xi - \lambda)}$ аналитична. Для таких m легко получаем требуемое неравенство:

$$|q_{m,j}(f)| \leqslant CC\_p \exp H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}),$$

где постоянная C'_p зависит от функции $H_{K_{p+1}}$, но не зависит от f. Пусть теперь $m \geq m_0$. Учитывая оценку на $|f(\varsigma)|$ из условия леммы и то, что $U_m \subset B(\lambda_{m,1}, \tau|\lambda_{m,1}|)$, из последнего представления получаем:

$$\max_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\tau|\lambda_{m,1}|)} |q_m(\lambda, f)| \leqslant \frac{2\pi 3\tau|\lambda_{m,1}|}{2\pi} \max_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\tau|\lambda_{m,1}|)} \max_{\xi \in S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)} \frac{|f(\xi)||\omega_m(\xi) - \omega_m(\lambda)|}{|\xi - \lambda||\omega_m(\xi)|} \leqslant$$

$$\leqslant C \max_{\xi \in S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)} \exp H_{K_p}(\xi) \frac{2(3\tau|\lambda_{m,1}|)^{N_m} 3\tau|\lambda_{m,1}|}{(2\tau|\lambda_{m,1}|)^{N_m} \tau|\lambda_{m,1}|} = 6C(\frac{3}{2})^{N_m} \max_{\xi \in S(\lambda_{m,1}, 3\tau|\lambda_{m,1}|)} \exp H_{K_p}(\xi).$$

Можно считать, что круги $B(\lambda_{m,1}, 4\tau|\lambda_{m,1}|)$ при $m \geq m_0$ не содержат начала координат. Тогда с учетом (13) по лемме 4 имеем:

$$\max_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\tau|\lambda_{m,1}|)} |q_m(\lambda, f)| \leqslant 6C(\frac{3}{2})^{N_m} \exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}) + \alpha_p|\lambda_{m,1}|).$$

Используя неравенство (5), получаем отсюда

$$\max_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\tau|\lambda_{m,1}|)} |q_m(\lambda, f)| \leqslant 6C(\frac{3}{2})^{N_m} \exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}).$$

Перейдем теперь к оценке производных функции $q_m(\lambda, f)$. Имеем:

$$q_{m,j}(f)=\frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1}\frac{q_m(\lambda,f)d\lambda}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}}=\frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=\tau|\lambda_{m,1}|}\frac{q_m(\lambda,f)\lambda}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}}.$$

Из последней оценки следует, что

$$|q_{m,j}(f)|\leqslant\frac{j!}{(\tau|\lambda_{m,1}|)^j}6C(\frac{3}{2})^{N_m}\exp H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}),\quad m\geq m_0,\quad j=0,1,\ldots,N_m-1.$$

В силу леммы 2 найдутся номер $l>p+1$ и число $C''>0$ такие, что

$$\frac{j!}{|\lambda_{m,1}|}\leqslant C''\exp(H_{K_l}(\lambda_{m,1})-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1})),\quad m\geq m_0,\quad j=0,1,\ldots,N_m-1.$$

Можно считать, что $\tau<1$. Поэтому $\tau^{-j}\leqslant\tau^{N_m}$, $j=0,1,\ldots,N_m-1$. Тогда по лемме 3 найдем номер $s>l$ и число $C'''>0$, для которых верна оценка

$$\tau^{-j}(\frac{3}{2})^{N_m}\leqslant(\frac{3}{2\tau})^{N_m}\leqslant C'''\exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})-H_{K_l}(\lambda_{m,1})),\quad m\geq m_0,\quad j=0,1,\ldots,N_m-1.$$

Таким образом, из последних соотношений получаем

$$|q_{m,j}(f)|\leqslant 6CC''C'''\exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}),\quad m\geq m_0,\quad j=0,1,\ldots,N_m-1.$$

Остается заметить, что постоянные C'' и C''' зависят от последовательности Λ, номера p и номера l (который зависит от p), но не зависят от функции f. Лемма доказана.

Замечание. Поскольку Γ_m — произвольный контур, охватывающий группу U_m, то условие аналитичности функции f на Γ_m и внутри него можно заменить на условие аналитичности f в какой-нибудь односвязной области, содержащей точки группы U_m.

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda=\{\lambda_{m,l},n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty,M_m}$ с относительно малыми группами $U_m=\{\lambda_{m,l},n_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda)=0$. Для каждого $p=1,2,\ldots$ существуют постоянная C_p и номер $s>p$ такие, что*

$$\sup_{w\in K_p}|e_{m,j}(w)|\leqslant C_p\exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}),\quad m=1,2,\ldots,j=1,\ldots,N_m.$$

Доказательство. Пусть $w\in K_p$. Тогда по определению опорной функции имеем:

$$|\exp(w\xi)|\leqslant\exp H_{K_p}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{C}.$$

Отсюда по лемме 3.5 получаем требуемое утверждение. Следствие доказано.

Замечание. Мы показали, что при условии $N_D(\Lambda)=0$, для системы $\tilde{E}=\{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности в работе [9].

Приведем результат, сводящий решение проблемы базисности системы $\tilde{E}$ в W к решению специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа P_D. Но прежде введем некоторые обозначения и докажем вспомогательные результаты.

Лемма 6. *Для каждого $\alpha>0$ сходится ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty}N_m\exp(-\alpha|\lambda_{m,1}|).$$

Доказательство. Пусть $\Lambda'=\{\xi_k\}$ — последовательность, составленная из всех точек $\lambda_{m,l}$, $m=1,2,\ldots$, $l=1,\ldots,M_m$, причем каждая $\lambda_{m,l}$ встречается в ней ровно $n_{m,l}$ раз. Поскольку все точки $\lambda_{m,l}$ являются нулями кратности не меньшей, чем $n_{m,l}$ целой функции экспоненциального типа (из таких функций состоит множество J), то (см., например, [3]), последовательность Λ' имеет конечную верхнюю плотность, т.е. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} k/\xi_k$. Отсюда следует, что $\Im(\Lambda') = 0$. Тогда по лемме 2 из работы [9] для каждого $\alpha > 0$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\alpha|\xi_k|) = \sum_{m=1,l=1}^{\infty,M_m} n_{m,l}\exp(-\alpha|\lambda_{m,l}|) < \infty.$$

Так как группы U_m относительно малы, то при $m \geq m_0$ выполнено неравенство $2^{-1}|\lambda_{m,l}| \leqslant |\lambda_{m,1}|$. Следовательно, для каждого $\alpha > 0$

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} N_m \exp(-\alpha|\lambda_{m,1}|) \leqslant \sum_{m=m_0,l=1}^{\infty,M_m} n_{m,l}\exp(-2^{-1}\alpha|\lambda_{m,1}|) < \infty.$$

Лемма доказана.

Замечание. С учетом леммы 2 в работе [9] утверждение леммы 6 означает, что $\Im(\tilde\Lambda) = 0$ (величина $\Im(\tilde\Lambda)$ определена в работе [9]), где $\tilde\Lambda$ — последовательность, составленная из точек $\lambda_{m,1}$, $m = 1, 2, \ldots$, причем каждая $\lambda_{m,1}$ встречается в ней ровно N_m раз.

Для каждого $p = 1, 2, \ldots$ введем банаховы пространства последовательностей

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_{m,j}\} : ||d||_p = \sup_{m,j}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}))) < \infty\},$$

$$R_p(\Lambda) = \{b = \{b_{m,j}\} : ||b||_p = \sup_{m,j}(|b_{m,j}|\exp(-H_{K_p}(\lambda_{m,1}))) < \infty\},$$

здесь $m = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, \ldots, N_m$. Пусть $Q(\Lambda, D)$ — проективный предел пространств $Q_p(\Lambda)$, а $R(\Lambda, D)$ — индуктивный предел пространств $R_p(\Lambda)$. Определим оператор $\mathfrak{U}$, действующий на пространстве $Q^*(\Lambda, D)$, сопряженном к $Q(\Lambda, D)$, по правилу: функционалу $\nu \in Q^*(\Lambda, D)$ поставим в соответствие последовательность $b = \{b_{m,j}\}$, составленную из значений ν на координатных векторах, т.е. $b_{n,l} = \nu(T_{n,l})$, где $T_{n,l} = \{d_{m,j}\}$ — элемент $Q(\Lambda, D)$ такой, что $d_{m,j} = 1$, если $m = n$, $j = l$, и $d_{m,j} = 0$ в противном случае.

Лемма 7. *Пространство $Q(\Lambda, D)$ рефлексивно. Оператор $\mathfrak{U}$ является изоморфизмом линейных топологических пространств $Q^*(\Lambda, D)$ и $R(\Lambda, D)$. Если $\nu \in Q^*(\Lambda, D)$, то*

$$\nu(d) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j}b_{m,j}, \quad \forall d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D),$$

где $b = \{b_{m,j}\} = \mathfrak{U}(\nu)$.

Доказательство. Пусть ν — произвольный функционал из $Q^*(\Lambda, D)$. Поскольку $Q(\Lambda, D)$ является проективным пределом, то найдется номер $p = 1, 2, \ldots$ такой, что $\nu \in Q^*_p(\Lambda)$. Через $||\nu||'_p$ обозначим норму функционала ν в пространстве $Q^*_p(\Lambda)$. Тогда имеем:

$$|b_{n,l}| = |\nu(T_{n,l})| \leqslant ||\nu||'_p||T_{n,l}||_p = ||\nu||'_p\exp(H_{K_p}(\lambda_{n,1})), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad l = 1, \ldots, N_n.$$

Следовательно, $||\mathfrak{U}(\nu)||_p = ||b||_p \leqslant ||\nu||'_p$. Это означает, что оператор $\mathfrak{U}$ непрерывным образом переводит пространство $Q^*(\Lambda, D)$ в пространство $R(\Lambda, D)$. Покажем теперь, что он инъективен и сюръективен.

Заметим, что координатные векторы $T_{m,j}$ образуют базис в пространстве $Q(\Lambda, D)$. Действительно, для любого $d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D)$ и каждого $p = 1, 2, \ldots$ с учетом (5) имеем:

$$||\sum_{m=m_0,j=j_0}^{\infty,N_m} d_{m,j}T_{m,j}||_p = \sup_{m\geq m_0,j\geq j_0}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}))) =$$
$$= \sup_{m\geq m_0,j\geq j_0}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}))\exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}))\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1}))) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{m\geq m_0,j\geq j_0}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}))\exp(-\alpha|\lambda_{m,1}|)) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{m\geq m_0,j\geq j_0}(|d_{m,j}|\exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1})))\sup_{m\geq m_0}(\exp(-\alpha_p|\lambda_{m,1}|)) \leqslant$$
$$\leqslant ||d||_p \sup_{m\geq m_0}(\exp(-\alpha_p|\lambda_{m,1}|)) \to 0, \quad m_0\to\infty.$$

Таким образом, верно представление

$$d = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j}T_{m,j}.$$

Причем ряд сходится в топологии пространства $Q(\Lambda, D)$. Тогда для любого функционала $\nu \in Q^*(\Lambda, D)$ имеем:

$$\nu(d) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j}\nu(T_{m,j}), \quad d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D).$$

Следовательно, совпадение значений функционалов $\nu_1, \nu_2 \in Q^*(\Lambda, D)$ на координатных векторах влечет за собой их равенство, т.е. $\mathfrak{U}$ — инъективный оператор.

Пусть теперь $b = \{b_{m,j}\}$ — произвольный элемент пространства $R(\Lambda, D)$. Согласно его определению найдется номер $p = 1, 2, \ldots$ такой, что $b \in R_p(\Lambda)$, т.е. $||b||_p < \infty$. Определим функционал ν по формуле

$$\nu(d) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j}b_{m,j}, \quad d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D).$$

Поскольку $||d||_{p+1} < \infty$, то с учетом (5) и леммы 6 верно неравенство

$$|\nu(d)| \leqslant \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}b_{m,j}| \leqslant \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} ||d||_{p+1}\exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m,1}))||b||_p\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1})) \leqslant$$
$$\leqslant ||d||_{p+1}||b||_p\sum_{m=1}^{\infty} N_m\exp(-\alpha_p|\lambda_{m,1}|) \leqslant C||d||_{p+1}||b||_p.$$

Это означает, что $\nu \in Q^*_{p+1}(\Lambda)$, причем $||\nu||'_p \leqslant C||b||_p$. Следовательно, $\mathfrak{U}$ — сюръективный оператор, а его обратный $\mathfrak{U}^{-1}$ непрерывен.

Мы показали, что $\mathfrak{U}$ осуществляет изоморфизм пространств $Q^*(\Lambda, D)$ и $R(\Lambda, D)$. Аналогично доказывается, что сопряженный к $\mathfrak{U}$ оператор $\mathfrak{U}^*$ осуществляет изоморфизм пространств $R^*(\Lambda, D)$ и $Q(\Lambda, D)$. Лемма доказана.

На фактор-пространстве P_D/J определим оператор $\mathfrak{G}$, действующий следующим образом. Каждому классу эквивалентности $[f] \in P_D/J$ поставим в соответствие последовательность $b = \{b_{m,j}\}$, определяемую по формуле: $b_{m,j} = q_{m,j-1}(f)$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_m$. Оператор $\mathfrak{G}$ корректно определен, т.е. любой другой представитель φ-класса эквивалентности $[f]$ порождает ту же последовательность $b = \{b_{m,j}\}$, что и функция f. Действительно, пусть $\varphi \in [f]$. Тогда $(\varphi - f) \in J$. Следовательно, функция $\varphi - f$ обращается в ноль во всех точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно. Этим же свойством обладает и многочлен $q_m(\lambda, \varphi - f)$, $m = 1, 2, \ldots$ Поскольку его степень не превосходит $N_m - 1$, то $q_m(\lambda, \varphi - f) \equiv 0$. Отсюда вытекает, что $q_{m,j}(\varphi - f) = q_{m,j}(\varphi) - q_{m,j}(f) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 0, \ldots, N_m - 1$.

Теорема 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, W — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, $E = \{z^n \exp(\lambda_{m,l} z)\}_{m=1,l=1,n=0}^{\infty, M_m, n_{m,l}-1}$ — система собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W, последовательность $\Lambda = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{m=1,l=1}^{\infty, M_m}$ с относительно малыми группами $U_m = \{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ такова, что $N_D(\Lambda) = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) Система функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty, N_m}$ является почти экспоненциальным базисом в W (см. [9]) с показателями $\lambda_{m,1}$, $m = 1, 2, \ldots$ (точнее говоря, с показателями $\lambda'_{m,j}$, где $\lambda'_{m,j} = \lambda_{m,1}$, $j = 1, \ldots, N_m$).

2) Для каждой последовательности $b = \{b_{m,j}\}$ из пространства $R(\Lambda, D)$ существует функция $f \in P_D$ такая, что $b_{m,j} = q_{m,j-1}(f)$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_m$.

3) Оператор $\mathfrak{G}$ является изоморфизмом пространств P_D/J и $R(\Lambda, D)$.

Доказательство. 1⇒2. Пусть $b \in R(\Lambda, D)$. По лемме 7 найдем функционал $\nu \in Q^*(\Lambda, D)$, для которого выполнены равенства $b_{m,j} = \nu(T_{m,j})$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_m$. Тогда согласно утверждению 1 и теореме 3 существует функционал $\mu \in W^*$ такой, что

$$\mu(e_{m,j}) = b_{m,j}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, \ldots, N_m. \tag{14}$$

Поскольку μ — непрерывный функционал, то найдутся номер p и постоянная C, удовлетворяющие условию

$$|\mu(g)| \leqslant C \sup_{z \in K_p} |g(z)|, \quad \forall g \in W.$$

По теореме Хана – Банаха μ продолжается как линейный функционал на все пространство $H(D)$ с сохранением последней оценки. Она означает, что μ продолжается и как непрерывный функционал. Пусть $f \in P_D$ — преобразование Лапласа функционала $\mu \in H^*(D)$ и χ — функция, ассоциированная по Борелю с f. Она аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, а все ее особенности лежат в области D. Имеет место представление (см. [3])

$$\mu(g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L g(z)\chi(z) z, \quad g \in H(D),$$

где L — контур в области D, охватывающий особенности функции χ. В частности,

$$f(\varsigma) = \mu(\exp(\varsigma z)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \exp(\varsigma z)\chi(z) dz.$$

Отсюда с учетом (4), (14) и определения чисел $q_{m,j}(f)$ получаем:

$$q_{m,j}(f) = \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda - \lambda_{m,1}|=1} \frac{q_m(\lambda, f) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{m,1})^{j+1}} = \frac{j!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\lambda - \lambda_{m,1}|=1} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{f(\varsigma)(\omega_m(\varsigma) - \omega_m(\lambda))}{(\lambda - \lambda_{m,1})^{j+1}(\varsigma - \lambda)\omega_m(\varsigma)} d\varsigma d\lambda =$$

$$= \frac{j!}{(2\pi i)^3} \int\limits_{|\lambda - \lambda_{m,1}|=1} \int\limits_{\Gamma_m} \int\limits_L \frac{\exp(\varsigma z)\chi(z)(\omega_m(\varsigma) - \omega_m(\lambda))}{(\lambda - \lambda_{m,1})^{j+1}(\varsigma - \lambda)\omega_m(\varsigma)} dz d\varsigma \lambda =$$

$$= \frac{j!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1} \int\limits_{L} \frac{q_m(\lambda,z)\chi(z)}{(\lambda-\lambda_{m,1})^{j+1}} z d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} e_{m,j+1}(z)\chi(z)dz = \mu(e_{m,j+1}) = b_{m,j+1},$$

$m = 1,2,\ldots, j = 0,\ldots,N_m - 1$. Таким образом, импликация 1⇒2 доказана.

2⇒3. Пусть $[f_1],[f_2] \in P_D/J$. Предположим, что $\mathfrak{G}[f_1] = \mathfrak{G}[f_2]$. Тогда для каждого $m = 1,2,\ldots$ коэффициенты многочленов $q_m(\lambda, f_1)$ и $q_m(\lambda, f_2)$ в базисе $\Theta_m = \{\frac{(\lambda-\lambda_{m,1})^j}{j!}\}_{j=0}^{N_m-1}$, а вместе с ними и сами многочлены, совпадают. Выше было отмечено, что во всех точках $\lambda_{m,l}$ значения многочлена $q_m(\lambda, f)$ и функции f, а также их соответствующих производных до порядка $n_{m,l}-1$ включительно, равны. Следовательно, разность $f_1 - f_2$ обращается в ноль во всех точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно. По условию подпространство W допускает спектральный синтез. Тогда по лемме 1 функция $f_1 - f_2$ принадлежит множеству J, т.е. $[f_1] = [f_2]$. Это означает, что оператор $\mathfrak{G}$ инъективен. Согласно утверждению 2 он еще и сюръективен.

Пусть $k = 1,2,\ldots$ По лемме 5 существуют постоянная C_k и номер $s > k$ такие, что для каждой функции $\in P_k$ верно неравенство

$$|q_{m,j}(f)| \leqslant ||f||_k C_k \exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}), \quad m = 1,2,\ldots, \quad j = 0,1,\ldots,N_m - 1.$$

Поскольку каноническое отображение $P_D \to P_D/J$ открыто, то отсюда вытекает, что оператор $\mathfrak{G} : P_D/J \to R(\Lambda, D)$ непрерывен. Тогда по теореме об открытом отображении (см. [10], приложение 1, теорема 2) для отделимых пространств, покрываемых счетным семейством своих подпространств Фреше (каковыми, очевидно, являются пространства P_D/J и $R(\Lambda, D)$), оператор $\mathfrak{G}$ есть изоморфизм линейных топологических пространств.

3⇒1. Для доказательства утверждения 1 достаточно проверить выполнение условий теоремы 4 из работы [9]. Согласно следствию из леммы 5 и замечанию к лемме 6 для последовательности $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ выполнены все условия леммы 3 из работы [9]. Поэтому в силу этой леммы для каждого элемента $d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, D)$ ряд

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z)$$

сходится равномерно на компактах в области D. Другими словами, оператор $\mathfrak{B} : Q(\Lambda, D) \to W$ из работы [9] определен на всем пространстве $Q(\Lambda, D)$.

Выше было отмечено, что для системы функций $\tilde{E}$ существует биортогональная последовательность функционалов из $H^*(D)$. Таким образом, с учетом замечания к лемме 6 остается показать, что $\mathfrak{B}$ — сюръективный оператор, т.е. любая функция $g \in W$ раскладывается в ряд по системе $\tilde{E}$, сходящийся равномерно на компактах из D.

Пусть $g \in W$. Функция g определяет линейный непрерывный функционал на пространстве W^*, сопряженном к W. Поскольку $H(D)$ является пространством Фреше – Шварца, а W — его замкнутое подпространство, то (см., например, [7]) W^* алгебраически и топологически изоморфно фактор-пространству $H^*(D)/W^0$, где W^0 — множество всех функционалов μ из $H^*(D)$, аннулирующих подпространство W. С учетом преобразования Лапласа имеет место также изоморфизм между пространствами W^* и P_D/J. Пусть σ — линейный непрерывный функционал на пространстве P_D/J, такой, что

$$(\sigma, [f]) = ([\mu], g), \quad \forall [\mu] \in H^*(D)/W^0,$$

где f — преобразование Лапласа функционала $\mu \in H^*(D)$. Поскольку утверждение 3 верно, то найдется функционал $\rho \in R^*(\Lambda, D)$, для которого

$$(\rho, \mathfrak{G}([f])) = (\sigma, [f]) = ([\mu], g), \forall [\mu] \in H^*(D)/W^0.$$

По лемме 7 существует элемент $d = \{d_{m,j}\}$ пространства $Q(\Lambda, D)$ такой, что

$$([\mu], g) = (\sigma, [f]) = (\rho, \mathfrak{G}([f])) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty, N_m} d_{m,j} q_{m,j-1}(f), \quad \forall [\mu] \in H^*(D)/W^0.$$

В качестве функционала $\mu \in H^*(D)$ в этих равенствах возьмем δ-функцию, сосредоточенную в точке $z \in D$. Тогда с учетом (3) имеем:

$$g(z) = ([\delta_z], g) = (\sigma, [\exp(\lambda z)]) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty, N_m} d_{m,j} q_{m,j-1}(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty, N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z), \quad z \in D.$$

Остается показать, что последний ряд сходится равномерно на компактах в области D. Пусть K — компакт в D. Поскольку последовательность $\{K_p\}$ исчерпывает область D, то найдется номер p такой, что $K \subset K_p$. Пусть $z \in K_p$. Тогда $\exp(\lambda z) \in P_p \subset P_D$, причем $|| \exp(\lambda z)||_p \leqslant 1$. Следовательно, с учетом определения топологии на фактор-пространстве и утверждения 3 данной теоремы найдутся номер s и постоянная $C > 0$, для которых верно неравенство

$$||\mathfrak{G}(\exp(\lambda z))||_s \leqslant C, \quad \forall z \in K_p.$$

Отсюда, пользуясь непрерывностью функционала ρ на пространстве $R(\Lambda, D)$, а значит, и на пространстве $R_{s+1}(\Lambda)$, и неравенством (5), получаем:

$$\sup_{z \in K_p} |\sum_{m=m_0,j=j_0}^{\infty, N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z)| \leqslant \sup_{z \in K_p} C' \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (|e_{m,j}(z)| \exp(-H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1}))) =$$

$$= C' \sup_{z \in K_p} \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (|e_{m,j}(z)| \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) \exp(-H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})) \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1})) \leqslant$$

$$\leqslant C' \sup_{z \in K_p} \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (|e_{m,j}(z)| \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) \exp(-\alpha_s |\lambda_{m,1}|) \leqslant$$

$$\leqslant C' \sup_{z \in K_p} \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (|e_{m,j}(z)| \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) \sup_{m \geq m_0, j \geq j_0} (\exp(-\alpha_s |\lambda_{m,1}|)) \leqslant$$

$$\leqslant C' \sup_{z \in K_p} ||\mathfrak{G}(\exp(\lambda z))||_s \sup_{m \geq m_0} \exp(-\alpha_s |\lambda_{m,1}|) \leqslant C'C \sup_{m \geq m_0} \exp(-\alpha_s |\lambda_{m,1}|) \to 0,$$

когда $m_0 \to \infty$. Таким образом, требуемый ряд сходится равномерно на компактах в области D. Теорема полностью доказана.

Теорема 1 сводит решение проблемы существования базиса в подпространстве W к решению специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа P_D. Однако в теореме 1 мы имеем дело только с конкретной системой функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty, N_m}$. Естественно возникает вопрос о наличии в W других, отличных от $\tilde{E}$ базисов по относительно малым группам (т.е. базисов, подобных $\tilde{E}$). Далее мы дадим ответ на этот вопрос. Покажем, что при дополнительном условии на систему $\tilde{E}$ из существования базиса по относительно малым группам в подпространстве W следует базисность системы $\tilde{E}$ в W. Кроме того, опираясь на систему $\tilde{E}$, дадим описание всех возможных базисов по относительно малым группам в подпространстве W.

Будем говорить, что система функций $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ обладает групповым свойством Кете, если для любого номера p существуют номер s и постоянная C, удовлетворяющие следующему условию: для каждого $m = 1, 2, \dots$ и каждой функции h вида

$$h(z) = \sum_{j=1}^{N_m} a_{m,j} e_{m,j}(z)$$

выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N_m} |a_{m,j}| \sup_{z \in K_p} |e_{m,j}(z)| \leqslant C \sup_{z \in K_s} |h(z)|.$$

Заметим, что любая функция $h \in W_m$ является линейной комбинацией элементов системы $\tilde{E}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$, так как эта система биортогональна к базису Θ_m в пространстве $Q(N_m - 1)$.

Наряду с системой $\tilde{E}$ рассмотрим и другие системы функций $\tilde{E}' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, построенные по относительно малым группам. Элементы любой такой системы можно разложить по базисам $\tilde{E}_m$ в W_m. Положим

$$e'_{m,j}(z) = \sum_{k=1}^{N_m} a_{m,j} e_{m,k}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, N_m.$$

Будем говорить, что система E' нормирована, если для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N_m} |a_{m,j,k}| = 1, \quad j = 1, \dots, N_m.$$

Лемма 8. *Пусть $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$ — почти экспоненциальная последовательность в области D с показателями $\lambda_{m,1}$, обладающая групповым свойством Кете. Тогда любая нормированная система $E' = \{e'_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$ является почти экспоненциальной последовательностью в D с показателями $\lambda_{m,1}$.*

Доказательство. Фиксируем $p \geq 1$. Поскольку $\tilde{E}$ — почти экспоненциальная последовательность, то существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w \in K_p} |e_{m,j}(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})), \quad m = 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, N_m.$$

Отсюда, учитывая, что E' — нормированная система, получаем

$$\sup_{w \in K_p} |e'_{m,j}(w)| \leqslant \sum_{k=1}^{N_m} \sup_{w \in K_p} |a_{m,j,k} e_{m,k}(w)| \leqslant N_m a \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})).$$

Пусть α_s — число из неравенства (5). В силу леммы 6 имеем оценку

$$N_m \leqslant \exp(\alpha_s |\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \dots$$

Следовательно, согласно (5)

$$\sup_{w \in K_p} |e'_{m,j}(w)| \leqslant a \exp(\alpha_s |\lambda_{m,1}|) \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})) \leqslant a \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})).$$

Это дает нам пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности в работе [9]. Проверим теперь пункт 2 этого определения. Фиксируем $p \geq 1$. Поскольку $\tilde{E}$ — почти экспоненциальная последовательность, то существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1})) \leqslant \sup_{w\in K_p} |e_{m,j}(w)|, \quad m = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, N_m.$$

Кроме того, $\tilde{E}$ обладает групповым свойством Кете. Следовательно, существуют номер n и постоянная C, для которых верна оценка

$$\sum_{k=1}^{N_m} |a_{m,j,k}| \sup_{z\in K_s} |e_{m,k}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_n} |e'_{m,j}(z)|, \quad m = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, N_m.$$

По условию система E' нормирована. Поэтому для каждых $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, \dots, N_m$ имеется коэффициент $a_{m,j,k}$ с модулем, равным единице. Тогда в силу предыдущих неравенств

$$b\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1})) \leqslant \sup_{z\in K_s} |e_{m,k}(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{N_m} |a_{m,j,k}| \sup_{z\in K_s} |e_{m,k}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_n} |e'_{m,j}(z)|.$$

Это дает нам необходимую оценку. Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $E' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ является базисом в подпространстве W, т.е. каждая функция из W единственным образом раскладывается в ряд по системе E', который сходится равномерно на компактах в области D. Поделив каждый элемент $e'_{m,j}(z)$ этой системы на самый большой по модулю коэффициент $a_{m,j,k}$, $k = 1, \dots, N_m$, мы получим нормированный базис в W. При выполнении условий леммы 8 этот базис становится почти экспоненциальным.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — почти экспоненциальная последовательность в области D с показателями $\lambda_{m,1}$, обладающая групповым свойством Кете. Если в подпространстве W существует базис по относительно малым группам, то система $\tilde{E}$ также является базисом в W.*

Доказательство. Пусть $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — базис в подпространстве W, т.е. каждая функция $g \in W$ имеет единственное представление

$$g(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e'_{m,j}(z),$$

причем ряд сходится равномерно на компактах в области D. Можно считать, что система E' нормирована. Тогда по лемме 8 она является почти экспоненциальным базисом в W. Следовательно, с учетом замечания к лемме 6 согласно следствию из леммы 3 в работе [9] для каждого номера $s \geq 1$ сходится ряд

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z\in K_s} |e'_{m,j}(z)| < \infty. \tag{15}$$

Используя определение функций $e'_{m,j}$, из предыдущего разложения получаем:

$$g(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e'_{m,j}(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} \sum_{k=1}^{N_m} a_{m,j,k} e_{m,k}(z) =$$
$$= \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} e_{m,k}(z) \sum_{j=1}^{N_m} d_{m,j} a_{m,j,k} = \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} b_{m,k} e_{m,k}(z).$$

Таким образом, мы имеем разложение функции $g(z)$ по системе $\tilde{E}$. Оно является единственным, так как $\tilde{E}$ обладает биортогональной системой функционалов. Поскольку $g(z)$ —

произвольная функция из подпространства W, то для установления базисности системы $\tilde{E}$ в W достаточно доказать, что последний ряд сходится равномерно на компактах в области D.

Фиксируем $p \geq 1$. Имеем:

$$\sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} |b_{m,k}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)| \leqslant= \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)| \sum_{j=1}^{N_m} ||d_{m,j} a_{m,j,k}| =$$
$$= \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sum_{k=1}^{N_m} |a_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)|.$$

По условию система $\tilde{E}$ обладает групповым свойством Кете. Следовательно, существуют номер s и постоянная C такие, что

$$\sum_{k=1}^{N_m} |a_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_s} |e'_{m,j}(z)|, \quad m = 1,2,\ldots, j = 1,\ldots,N_m.$$

Отсюда с учетом (15) получаем

$$\sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} |b_{m,k}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,k}(z)| \leqslant C \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z\in K_s} |e'_{m,j}(z)| < \infty.$$

Это означает, что рассматриваемый ряд сходится равномерно на компактах K_p, $p = 1,2,\ldots$. Поскольку эти компакты исчерпывают область D, то мы получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Теорема 2 проблему существования базиса по относительно малым группам в подпространстве W сводит к проверке базисности системы $\tilde{E}$ в этом подпространстве. В заключение работы дадим описание всех возможных базисов в W.

Для каждого $m = 1,2,\ldots$ через $\mathfrak{A}_m = \{a_{m,j,k}\}$ обозначим матрицу, составленную из коэффициентов разложения функций $e'_{m,j}(z)$ по базису $\tilde{E}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$. Пусть $\mathfrak{A}_m$ — невырожденная и $\mathfrak{A}_m^{-1} = (b_{m,j,k})$ — матрица, обратная к $\mathfrak{A}_m$. Если T — открытое подмножество единичной окружности $\mathbb{S}$, то символом $\mathbb{A}(T)$ будем обозначать подпоследовательность $\{\mathfrak{A}_{m(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ последовательности $\mathbb{A} = \{\mathfrak{A}_m\}$, состоящую из всех матриц $\mathfrak{A}$ таких, что точка $\lambda_{m,1}/|\lambda_{m,1}|$ попадает в T. Положим $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) = 0$, если $\mathbb{A}(T)$ содержит лишь конечное число элементов, и

$$\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \max_{1\leqslant j,k\leqslant N_{m(l)}} \frac{\ln |b_{m(l),j,k}|}{|\lambda_{m(l),1}|}$$

в противном случае. Для $T = \mathbb{S}$ вместо $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T))$ будем использовать обозначение $\mathfrak{a}(\mathbb{A})$.

Пусть F — компактное подмножество $\mathbb{S}$. Если область D отлична от всей плоскости, положим

$$\mathfrak{a}_F(\mathbb{A}) = \inf_{E\supset F} \mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)), \quad \mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = \sup_{F\subset(\mathbb{S}\setminus X(D))} \mathfrak{a}_F(\mathbb{A}),$$

где инфимум берется по всем открытым на $\mathbb{S}$ множествам T, содержащим F, а супремум — по всем компактным подмножествам $F \subset (\mathbb{S}\setminus X(D))$.

Лемма 9. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Соотношения $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = 0$ и $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$ имеют место тогда и только тогда, когда для каждого $p = 1,2,\ldots$ существуют номер $s > p$ и постоянная $\gamma > 0$ такие, что выполнены неравенства*

$$\ln |b_{m,j,k}| \leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1}) - H_{K_p}(\lambda_{m,1}) + \gamma, \quad m = 1,2,\ldots, \quad j,k = 1,\ldots,N_m. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = 0$ и $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$. Предположим, что неравенство (16) неверно. Тогда для некоторого $p = 1, 2, \ldots$ и каждого $s > p$ найдется номер $m(s)$ такой, что $m(s) \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_{m(s)}} \ln |b_{m(s),j,k}| \geq H_{K_s}(\lambda_{m(s),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s),1}). \tag{17}$$

Выделим подпоследовательность номеров $s(r)$, $r = 1, 2, \ldots$ такую, что $\lambda_{m(s(r)),1}/|\lambda_{m(s(r)),1}|$ при $r \to \infty$ сходится к некоторой точке $\xi \in \mathbb{S}$. Пусть вначале $\xi \in \mathbb{S} \setminus X(D)$. По условию с учетом определения величины $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A})$ получаем $\mathfrak{a}_F(\mathbb{A}) = 0$, где $F = \{\xi\}$. Тогда согласно определению $\mathfrak{a}_F(\mathbb{A})$ для каждого $\varepsilon > 0$ на окружности $\mathbb{S}$ найдем окрестность T точки ξ, для которой выполнено неравенство $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) < \varepsilon/2$. Оно означает, что начиная с некоторого номера $r = r_0$ верна оценка

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_{m(s(r))}} \frac{\ln |b_{m(s(r)),j,k}|}{|\lambda_{m(s(r)),1}|} < \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon < \alpha_p$, где α_p — число из соотношения (5). Тогда из последнего неравенства с учетом (5) получаем

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_{m(s(r))}} \ln |b_{m(s(r)),j,k}| \leqslant \alpha_p |\lambda_{m(s(r)),1}| \leqslant H_{K_{p+1}}(\lambda_{m(s(r)),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s(r)),1}), r \geq r_0.$$

Это противоречит (17), так как $H_{K_s} \geq H_{K_{p+1}}$ при $s \geq p + 1$.

Пусть теперь $\xi \in \mathbb{S} \cap X(D)$. Так как $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$, то по определению величины $\mathfrak{a}(\mathbb{A})$ найдется постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_m} \ln |b_{m,j,k}| \leqslant \beta |\lambda_{m,1}|, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Положим $H = \max_{\eta \in \mathbb{S}} H_{K_p}(\eta)$. Согласно определениям множества $X(D)$ и опорной функции H_D с учетом того, что компакты K_l, $l = 1, 2, \ldots$, исчерпывают область D, найдем номер l, удовлетворяющий условию: $H_{K_l}(\xi) > H + \beta$. В силу непрерывности опорной функции компакта эта оценка продолжается в окрестность V точки ξ: $H_{K_l}(\eta) > H + \beta$, $\eta \in V$. Тогда из (18) получаем:

$$\max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_m} \ln |b_{m,j,k}| \leqslant \beta |\lambda_{m,1}| < (H_{K_l}(\eta) - H)|\lambda_{m,1}|, \quad \eta \in V, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Выберем номер r_1 такой, что при $r \geq r_1$ точка $\lambda_{m(s(r)),1}/|\lambda_{m(s(r)),1}|$ принадлежит множеству V. С учетом определения H и однородности опорной функции из предыдущего имеем:

$$\max_{1, \leqslant j,k \leqslant N_{m(s(r))}} \ln |b_{m(s(r)),j,k}| < H_{K_l}(\lambda_{m(s(r)),1}) - H_{K_p}(\lambda_{m(s(r)),1}), \quad r \geq r_1.$$

Как и выше, это противоречит (17). Таким образом, наше допущение неверно, т.е. (16) имеет место.

Предположим теперь, что выполнено неравенство (16). Согласно ему найдем номер $s > 1$ и постоянную $\gamma > 0$, удовлетворяющие условию

$$\ln |b_{m,j,k}| \leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1}) - H_{K_1}(\lambda_{m,1}) + \gamma, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j, k = 1, \ldots, N_m.$$

Положим $H_2 = \max_{\eta \in \mathbb{S}} H_{K_s}(\eta)$ и $H_1 = \min_{K_1}(\eta)$. Тогда с учетом однородности опорной функции получаем:

$$\ln |b_{m,j,k}| \leqslant H_2 |\lambda_{m,1}| - H_1 |\lambda_{m,1}|, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j, k = 1, \ldots, N_m.$$

Следовательно, $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) \leqslant H_2 - H_1 < \infty$. Остается показать, что $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = 0$. Для этого согласно определению величины $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A})$ достаточно установить равенство $\mathfrak{a}_F(\mathbb{A}) = 0$, где F — произвольное компактное подмножество $\mathbb{S} \setminus X(D)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и компакт $F \subset \mathbb{S} \setminus X(D)$. Поскольку последовательность $\{K_p\}$ исчерпывает область D и $H_D(\varsigma) \neq \infty$, то с учетом определения опорной функции для каждого $\varsigma \in F$ найдется номер $p(\varsigma)$ такой, что $H_{K_{p(\varsigma)}} > H_D(\varsigma) - \varepsilon$. По предположению выполнено (16). Поэтому для каждого $p(\varsigma)$, $\varsigma \in F$, существуют номер $s(\varsigma) > p(\varsigma)$ и постоянная $\gamma(\varsigma) > 0$ такие, что

$$\ln |b_{m,j,k}| \leqslant H_{K_{s(\varsigma)}}(\lambda_{m,1}) - H_{K_{p(\varsigma)}}(\lambda_{m,1}) + \gamma(\varsigma), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j, k = 1, \ldots, N_m. \tag{19}$$

Компакт K_s для всех $s = 1, 2, \ldots$ лежит в области D. Это влечет за собой неравенство $H_D \leqslant H_{K_{s(\varsigma)}}$. Следовательно, в силу выбора номера $p(\varsigma)$ получаем: $H_{K_{p(\varsigma)}}(\varsigma) > H_{K_{s(\varsigma)}}(\varsigma) - \varepsilon$. По непрерывности последнее неравенство продолжается в окрестность $V(\varsigma)$ точки ς:

$$H_{K_{p(\varsigma)}}(\eta) > H_{K_{s(\varsigma)}}(\eta) - \varepsilon, \quad \eta \in V(\varsigma). \tag{20}$$

Из покрытия $V(\varsigma)$, $\varsigma \in F$, компакта F выделим конечное подпокрытие $V(\varsigma(1)), \ldots, V(\varsigma(t))$. Положим $T = \mathbb{S} \cap (\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant t} V(\varsigma(i)))$ и $\gamma_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant t} \gamma(\varsigma(i))$. Пусть $\mathbb{A}(T) = \{\mathfrak{A}_{m(l)}\}$. Используя однородность опорной функции из (19) и (20), получаем:

$$\ln |b_{m(l),j,k}| \leqslant \varepsilon |\lambda_{m(l),1}| + \gamma_0, \quad l \geq 1.$$

Если $\mathbb{A}(T)$ содержит лишь конечное число элементов, то по определению $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) = 0$. В противном случае $|\lambda_{m(l),1}| \to \infty$ при $l \to \infty$. Тогда из последнего неравенства следует, что $\mathfrak{a}(\mathbb{A}(T)) \leqslant \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\mathfrak{a}_F(\mathbb{A}) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $\tilde{E} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — почти экспоненциальный базис с показателями $\lambda_{m,1}$ в подпространстве W, а $\tilde{E}' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — нормированная последовательность. Система E' является базисом в W тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A}) = 0$, $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$.*

Доказательство. По условию $\tilde{E}$ — почти экспоненциальный базис в W. Тогда с учетом замечания к лемме 6 по следствию из теоремы 3 в работе [9] система $\tilde{E}$ является базисом Кете в W, т.е. для любого $p \geq 1$ существуют номер l и $\beta > 0$, не зависящие от $g \in W$, такие, что

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z \in K_p} |e_{m,j}(z)| \leqslant \beta \sup_{z \in K_l} |g(z)|, \tag{21}$$

где $g(z) = \sum\limits_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z)$. В частности, последнее неравенство выполнено для любой функции $g \in W_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Это означает, что система $\tilde{E}$ обладает групповым свойством Кете. Следовательно, по лемме 8 E' — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями $\lambda_{m,1}$. Предположим, что система E' является базисом в подпространстве W. Тогда $E' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — базис в W_m. Поэтому для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существует матрица $\mathfrak{A}_m^{-1} = (b_{m,j,k})$, обратная к $\mathfrak{A}_m$. Кроме того, по тем же соображениям, что и для $\tilde{E}$, система E' обладает групповым свойством Кете. В частности, для любого $l \geq 1$ существуют номер r и постоянная $\beta > 0$, не зависящие от $m = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, \ldots, N_m$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z \in K_l} |e'_{m,k}(z)| \leqslant \beta \sup_{z \in K_r} |e_{m,j}(z)|,$$

где $e_{m,j}(z) = \sum_{k=1}^{N_m} b_{m,j,k} e'_{m,k}(z)$. Отсюда следует, что

$$\ln|b_{m,j,k}| \leqslant \ln \sup_{z\in K_r} |e_{m,j}(z)| - \ln \sup_{z\in K_l} |e'_{m,k}(z)| + \ln\beta, \quad m = 1, 2, \ldots, j, k = 1, \ldots, N_m.$$

Поскольку последовательность E' почти экспоненциальная, то для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $b > 0$ и номер l такие, что

$$b\exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1})) \leqslant \sup_{w\in K_l} |e'_{m,k}(w)|, \quad m = 1, 2, \ldots, k = 1, \ldots, N_m.$$

Последовательность $\tilde{E}$ также является почти экспоненциальной. Поэтому для каждого $r \geq 1$ существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w\in K_r} |e_{m,j}(w)| \leqslant \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})), \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N_m.$$

Из последних неравенств получаем:

$$\ln|b_{m,j,k}| \leqslant H_{K_s}(\lambda_{m,1}) - H_{K_p}(\lambda_{m,1}) + \ln\beta - \ln b + \ln a, \quad m = 1, 2, \ldots, j, k = 1, \ldots, N_m.$$

Тогда по лемме 9 имеют место соотношения $\mathfrak{a}_D\mathbb{A} = 0$ и $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{a}_D\mathbb{A} = 0$ и $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) < \infty$, и покажем, что в этом случае система E' является базисом в W. Пусть g — произвольная функция из подпространства W. По условию $\tilde{E}$ — базис в W. Следовательно, верно представление

$$g(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z).$$

Отсюда как и в теореме 2 получаем

$$g(z) = \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} b_{m,k} e'_{m,k}(z),$$

где $b_{m,k} = \sum_{j=1}^{N_m} d_{m,j} b_{m,j,k}$. Разложение функции g по системе E' единственное, так как последняя обладает биортогональной последовательностью функционалов $\{\mu'_{m,k}\}$. Действительно, как было отмечено ранее, биортогональной последовательностью функционалов $\{\mu_{m,j}\}$ обладает система $\tilde{E}$. Положим $\mu'_{m,k} = \sum_{j=1}^{N_m} b_{m,j,k}\mu_{m,j}$. Тогда последовательность $\{\mu'_{m,k}\}$ биортогональна к E'. Остается показать, что ряд для функции g по системе E' сходится равномерно на компактах в области D. Поскольку выполнено (21), то чтобы установить этот факт, как и в теореме 2 достаточно доказать, что для каждого номера p существуют номер s и постоянная C такие, что

$$\sum_{k=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_s} |e_{m,j}(z)|, \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N_m. \tag{22}$$

Фиксируем $p = 1, 2, \ldots$ В силу того, что E' — почти экспоненциальная последовательность, найдутся $a > 0$ и номер l, для которых верна оценка

$$\sup_{w\in K_p} |e'_{m,k}(w)| \leqslant a\exp(H_{K_l}(\lambda_{m,1})), \quad m = 1, 2, \ldots, k = 1, \ldots, N_m.$$

По лемме (9) существуют номер r и постоянная γ такие, что

$$\ln|b_{m,j,k}| \leqslant H_{K_r}(\lambda_{m,1}) - H_{K_l}(\lambda_{m,1}) + \gamma, \quad m = 1, 2, \ldots, j, k = 1, \ldots, N_m.$$

Таким образом, имеем:

$$\sum_{k=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \leqslant aN_m \exp(H_{K_r}(\lambda_{m,1}) - H_{K_l}(\lambda_{m,1}) + \gamma) \exp(H_{K_l}(\lambda_{m,1})) =$$

$$= aN_m \exp(H_{K_r}(\lambda_{m,1}) + \gamma), \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N_m.$$

Согласно лемме 6 выберем $d > 0$ такое, что $N_m \exp(-\alpha_r) \leqslant d$, $m = 1, 2, \ldots$, где α_r — число из неравенства (5). Тогда из предыдущего с учетом этого неравенства получаем:

$$\sum_{k=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \leqslant a \exp(H_{K_{r+1}}(\lambda_{m,1}) + \gamma), \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N_m.$$

Последовательность $\tilde{E}$ является почти экспоненциальной. Поэтому для каждого существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_{r+1}}(\lambda_{m,1}) \leqslant \sup_{w\in K_s} |e_{m,j}(w)|, \quad m = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N_m.$$

Объединяя две последних оценки, получаем (22). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука, 1982.
2. Красичков-Терновский И.Ф. *Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях* // ДАН СССР. 1971. Т. 197, № 1.
3. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
4. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
5. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 87(129), № 4.
6. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный анализ на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 88(130), № 1.
7. Гротендик А.О. *О пространствах (F) и (DF)* // Сб. Математика. 1958. Т. 2, № 3.
8. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в вы- пуклых областях* // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68. № 2.
9. Кривошеев А.С.*Особые точки суммы ряда экспонент на границе области сходимости* // Уфимский математичексий журал. 2009. Т. 1, № 4. С. 78–109.
10. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж.*Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru