ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 41-52.

УДК 517.95

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Б.Е. КАНГУЖИН, Б.Д. КОШАНОВ

Аннотация. Исследуются вопросы о нахождении необходимых и достаточных условий разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре.

Ключевые слова: задача Дирихле, задача Неймана, полигармоническое уравнение.

1. Полигармонические функции, фундаментальные решения полигармонического уравнения

Рассмотрим однородное полигармоническое уравнение

$$\Delta^m u(x) = 0, \quad \Delta^m = \Delta(\Delta^{m-1}) \tag{1.1}$$

в ограниченной области $\Omega \subseteq R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, представляющим собой декартовы ортогональные координаты точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$ евклидова n-мерного пространства R^n, $n \geq 1$.

Определение 1.1. *Регулярные решения $u(x)$ уравнения (1.1) называются m-гармоническими функциями, так как при $m = 1$ и $m = 2$ регулярные решения $u(x)$ уравнения (1.1) представляют собой соответственно гармонические и бигармонические функции.*

Иногда вместо m-гармонических функций будем говорить "полигармонические функции". В дальнейшем через $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ обозначим длину x в R^n. Приведем следующий известный результат E. Almansi (1899 г.).

Теорема 1.1 (1). *Пусть Ω — произвольная область, звездная относительно начала координат. Полигармоническую функцию $u(x)$ в этой области можно представить в виде*

$$u(x) = \sum_{l=0}^{m-1} |x|^{2l}\, u_l(x), \tag{1.2}$$

где $u_l(x)$ — некоторые гармонические функции. Представление $u(x)$ в виде (1.2) единственно.

B.E. Kanguzhin, B.D. Koshanov, Necessary and sufficient conditions of resolvability boundary problems for non-uniform polyharmonics equations in ball.

Поступила 8 февраля 2010 г.

При изучении неоднородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x) = f(x) \tag{1.3}$$

важную роль играет так называемое фундаментальное решение.

Определение 1.2. *Фундаментальным решением уравнения (1.3) называется функция $\varepsilon(x) = \varepsilon_{2m,n}(x)$, удовлетворяющая во всем R^n полигармоническому уравнению*

$$\Delta^m \varepsilon_{2m,n}(x) = \delta(x), \tag{1.4}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Известно [2, 3], что фундаментальное решение задается согласно следующей лемме.

Лемма 1.1. *Фундаментальное решение уравнения (1.3):*
а) в случае нечетных $n > 1$ и четных n, для которых $n > 2m$, задается формулой

$$\varepsilon_{2m,n}(x) = d_{2m,n}|x|^{2m-n}, \tag{1.5}$$

где

$$d_{2m,n} = \frac{1}{(2m-n)2(m-1)(2(m-1)-n)2(m-2)...(2-n)2\cdot 2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^n};$$

б) в случае четных n, $n \le 2m$ задается формулой

$$\varepsilon_{2m,n}(x) = d_{2m,n}\,|x|^{2m-n}\ln|x|, \tag{1.6}$$

где

$$d_{2m,n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}-1}{\Gamma(m)\Gamma(m-\frac{n}{2}+1)2^{2m-1}\pi^{n/2}}.$$

2. Необходимые условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре

В данном пункте устанавливаются необходимые условия корректности различных краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре.

Пусть m — натуральное число и в n-мерном единичном шаре
$\Omega = \{x : |x| < 1\}$ рассмотрим полигармоническое уравнение

$$\Delta_x^m u(x) = f(x) \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}}u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_1(x), \quad x \in S = \partial\Omega,\\
&\frac{\partial^{k_2}}{\partial n_x^{k_2}}u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_2(x), \quad x \in S,\\
&\dots\\
&\frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_m(x), \quad x \in S,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$.

Определение 2.1. *Под регулярным решением задачи (2.1)–(2.2) будем понимать функцию $u(x) \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2.1) и краевым условиям (2.2).*

Известно [1, 4, 5], что для существования регулярного решения на исходные данные $f(x),\ \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$ накладываются ограничения двух типов:
1) требуется некоторая их гладкость,
2) некоторые условия типа ортогональности к решениям соответствующего однородного союзного уравнения.

В данной работе основной акцент направлен на выяснение ограничении типа 2, т.е. выясняется каким необходимым и достаточным условиям типа 2 должны удовлетворять функции $f(x),\ \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$, если их гладкостные свойства стандартны. Итак, пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varphi_s(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S),\ \ s = \overline{1, m}$. Надо сформулировать критерий разрешимости задачи (2.1)–(2.2) в исходных терминах.

К примеру, при $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varphi(x) \in C^{1+\alpha}(S)$ известно, что для существования решения задачи Неймана $\Delta u = f,\ \ \frac{\partial}{\partial n} u\,\big|_{x\in S} = \varphi(x)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_S \varphi(s) ds = \int\limits_\Omega f(x) dx.$$

Так как задача (2.1), (2.2) в некотором смысле является обобщением задачи Неймана, то естественно возникает вопрос:

Каким условиям должен удовлетворять набор функций $f(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2m-k_1+\alpha}(S) \times C^{2m-k_2+\alpha}(S) ... \times C^{2m-k_m+\alpha}(S)$, чтобы краевая задача (2.1)–(2.2) была разрешима?

На данный вопрос отвечает основной результат этого пункта.

Пусть $\varepsilon_{2m,n}(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения (2.1). Тогда известно [3], что $v(x) = \varepsilon_{2m,n} * f$ является решением неоднородного полигармонического уравнения (2.1), где знак $*$ означает свертку двух функции, то есть $\varepsilon_{2m,n} * f = \int\limits_\Omega \varepsilon_{2m,n}(x - y) f(y) dy$. Если $u(x)$ — решение задачи (2.1), (2.2), то разность $u(x) - v(x)$ представляет m-гармоническую функцию в области Ω. Поэтому согласно теореме 1.1 искомое решение ищем в виде

$$u(x) = \varepsilon_{2m,n} * f + \sum_{j=0}^{m-1} |x|^{2j} u_j(x), \tag{2.3}$$

где $\varepsilon_{2m,n}(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения (2.1), $u_j(x),\ j = \overline{0, m-1}$, — некоторые гармонические функции в области Ω.

Подставляя правую часть (2.3) в краевые условия (2.2), имеем соотношения

$$\frac{\partial^{k_s} u_0}{\partial n_x^{k_s}} + \sum_{j=1}^{m-1} \Big[2j(2j-1)...(2j-k_s+1)u_j + \begin{pmatrix} k_s \\ 1 \end{pmatrix} 2j(2j-1)...(2j-k_s+2)\frac{\partial u_j}{\partial n_x} + ...$$

$$+ \begin{pmatrix} k_s \\ 1 \end{pmatrix} 2j \frac{\partial^{k_s-1} u_j}{\partial n_x^{k_s-1}} + \frac{\partial^{k_s} u_j}{\partial n_x^{k_s}}\Big] = \varphi_s(x) - \frac{\partial^{k_s}}{\partial n_x^{k_s}} \varepsilon_{2m,n} * f,\ \ x \in S,\ \ s = 1, 2, ..., m, \tag{2.4}$$

связывающие краевые значения гармонических функций $u_j(x),\ j = \overline{0, m-1}$, правых частей $\varphi_s(x),\ s = \overline{1, m}$, $\varepsilon_{2m,n} * f$ и их нормальных производных на сфере $S = \{x : |x| = 1\}$.

Таким образом, определение решения задачи (2.1), (2.2) сводится к нахождению гармонических в шаре Ω функций $u_j(x),\ j = \overline{0, m-1}$, по краевым условиям (2.4).

Интегрируя равенства (2.4) по сфере S и учитывая следующие равенства

$$\int\limits_S \frac{\partial^{k_s} u_j}{\partial n_x^{k_s}} dS_x = \begin{cases} \omega_n\, u_j(0), & k_s = 0 \\ 0\,, & k_s > 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где ω_n — площадь сферы S, находим, что

$$\sum_{j=\left[\frac{(k_s+1)}{2}\right]}^{m-1} 2j(2j-1)..(2j-k_s+1)u_j(0) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_{k_s}(x) - \frac{\partial^{k_s}}{\partial n_x^{k_s}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x, \qquad (2.6)$$

$s = 1, 2, ..., m.$

Теперь найдем условия разрешимости системы уравнений (2.6), которая представляет собой линейную неоднородную систему m уравнений с m неизвестными $u_j(0),\ j = \overline{0, m-1}$.

Для этого составим матрицу размерности $2m \times m$ по правилу

$$A = \begin{bmatrix} 1=\frac{0!}{01} & 1=\frac{2!}{2!} & 1=\frac{4!}{4!} & 1=\frac{6!}{6!} & \cdots & (2m-4)!/(2m-4)! & (2m-2)!/(2m-2)! \\ 0 & 2!/1! & 4!/3! & 6!/5! & \cdots & (2m-4)!/(2m-5)! & (2m-2)!/(2m-3)! \\ 0 & 2!/0! & 4!/2! & 6!/4! & \cdots & (2m-4)!/(2m-6)! & (2m-2)!/(2m-4)! \\ 0 & 0 & 4!/1! & 6!/3! & \cdots & (2m-4)!/(2m-7)! & (2m-2)!/(2m-5)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2m-4)!/0! & (2m-2)!/2! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (2m-2)!/1! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (2m-2)!/0! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а также введем вектор размерности m

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_0(0) \\ u_1(0) \\ u_2(0) \\ \\ ... \\ u_{m-2}(0) \\ u_{m-1}(0) \end{pmatrix}$$

и вектор размерности m

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_1(x) - \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_2(x) - \frac{\partial^{k_2}}{\partial n_x^{k_2}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ \\ \\ ... \\ ... \\ \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_m(x) - \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \end{pmatrix}.$$

Через $A(k_1, k_2, ..., k_m)$ обозначим матрицу размерности $m \times m$, которая совпадает с матрицей A, в которой сохраняются строки с номерами, равными $k_1, k_2, ..., k_m$.

Таким образом, система (2.6) в новых обозначениях примет вид:

$$A(k_1, k_2, ..., k_m)\vec{U} = \vec{F} \qquad (2.7)$$

Отсюда в силу теоремы Кронекера–Капелли вытекает следующая

Теорема 2.1. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_{k_s}(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S)$, $s = \overline{1, m}$. Тогда необходимым условием разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.2) в классе $C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ при произвольном m и любом наборе $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$ является условие:*

$$rank\, A(k_1, k_2, ..., k_m) = rank\, \left(A(k_1, k_2, ..., k_m), \vec{F}\right), \tag{2.8}$$

то есть ранг расширенной матрицы системы (2.7) должен совпадать с рангом матрицы $A(k_1, k_2, ..., k_m)$.

3. Достаточные условия разрешимости краевых задач для бигармонического уравнения в шаре

В теореме 2.1 получены необходимые условия разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.2). Оказывается, что они являются также достаточными условиями разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.2). Для наглядности подробно рассмотрим случай $m = 2$.

Случай $m = 2$**,** $k_1 = 1,\ k_2 = 2$ (для простоты случай a: n — нечетное или n — четное, но $n > 4$).

В этом случае матрицы $A(1,2)$ и $(A(1,2), \vec{F})$ имеют вид

$$A(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad (A(1,2), \vec{F}) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & \tilde{\varphi}_1 \\ 0 & 2 & \tilde{\varphi}_2 \end{array}\right],$$

где $\tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) - \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\,|x-y|^{2-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})f(y)dy$,

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \varphi_2(x) - \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})^2 + |x-y|^{2-n}\right]f(y)dy.$$

Из условия (2.8) получим, что $\det \begin{vmatrix} 2 & \tilde{\varphi}_1 \\ 2 & \tilde{\varphi}_2 \end{vmatrix} = 0$, то есть

$$\int\limits_{|x|=1} \{\varphi_1(x) - \varphi_2(x) +$$

$$+ \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2 + |x-y|^{2-n}(x,y)\right]f(y)dy\}dS_x = 0, \tag{3.1}$$

где

$$d_{4,n} = \frac{(\frac{n}{2} - 2)}{(2)\,16\,\pi^{n/2}}.$$

Перепишем при $m = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2$ условия (2.4) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x} + 2u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \varphi_1(x) - \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\,|x-y|^{2-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})f(y)dy, \\ \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial n_x^2} + 2u_1(x) + 4\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial n_x^2} = \\ = \varphi_2(x) - \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})^2 + |x-y|^{2-n}\right]f(y)dy, x \in S. \end{cases} \tag{3.2}$$

Вычитая второе равенство (3.2) из первого, получим краевое условие Неймана

$$\frac{\partial \omega(x)}{\partial n_x} = \{\varphi_1(x) - \varphi_2(x) +$$

$$+\int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2+|x-y|^{2-n}(x,y)\right]f(y)dy\}=0, x\in S, \quad (3.3)$$

где

$$\omega(x)\equiv u_0(x)-3u_1(x)-(x,grad[u_0(x)+u_1(x)])=u_0(x)-3u_1(x)-(x,\nabla)[u_0(x)+u_1(x)] \quad (3.4)$$

— гармоническая функция в шаре Ω.

Нам известно, что выполнение условия (3.1) необходимо и достаточно для разрешимости задачи (3.3), (3.4). При соблюдении условия (3.1) функция $\omega(x)$ строится в квадратурах

$$\omega(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|x|=1} N(x,y)\{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)+$$

$$+\int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2+|x-y|^{2-n}(x,y)\right]f(y)dy\}dS_x+C, \quad (3.5)$$

где C — произвольная постоянная.

В силу (3.4), (3.5) имеем

$$u_0(x)-3u_1(x)-\frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}-\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}=\omega(x), x\in S. \quad (3.6)$$

Складывая первое из равенств (3.2) и (3.6), получим краевое условие Дирихле $\omega_1(x)=\varphi_1(x)+\omega(x),\ x\in S$ для гармонической функции

$$\omega_1(x)=u_0(x)-u_1(x),\ x\in\Omega. \quad (3.7)$$

Построив функцию $\omega_1(x)$ по формуле Пуассона, из (3.5) и (3.7) находим, что гармоническая функция $u_0(x)$ должна быть решением линейной смешанной краевой задачи

$$u_0(x)-\frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}=-\frac{1}{2}\left[\omega(x)-3\omega_1(x)-\frac{\partial\omega_1(x)}{\partial n_x}\right], x\in S. \quad (3.8)$$

Решение $u_0(x)$ этой задачи очевидно существует и его можно также выписать в квадратурах. После того как функции $\omega(x),\omega_1(x),u_0(x)$ построены, из равенства (3.7) определяем функцию $u_1(x)$, и искомое решение задачи (2.1), (2.2) в рассматриваемом случае находим по формуле

$$u(x)=\int\limits_{|y|<1} d_{4,n}|x-y|^{4-n}f(y)dy+u_0(x)+|x|^2u_1(x).$$

Таким образом, доказана достаточность (необходимость уже доказана в теореме 2.1) следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть $f(x)\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_1(x)\in C^{3+\alpha}(S)$, $\varphi_2(x)\in C^{2+\alpha}(S)$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости следующей краевой задачи*

$$\Delta^2u=f(x),\ \ |x|<1,$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial u}{\partial n_x}=\varphi_1(x),\quad |x|=1,\\ &\tfrac{\partial^2 u}{\partial n_x^2}=\varphi_2(x),\quad |x|=1,\end{aligned} \quad (3.9)$$

является условие (3.1), т.е.

$$\int\limits_{|x|=1} \{\varphi_1(x) - \varphi_2(x) +$$

$$+ \int\limits_{|y|<1} d_{4,n}\,(4-n)\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2 + |x-y|^{2-n}(x,y)\right] f(y)dy\} dS_x = 0,$$

где $d_{4,n} = \frac{(\frac{n}{2}-2)}{(2)\,16\,\pi^{n/2}}$.

Случай $m = 2,$ $k_1 = 1,\ k_2 = 3$ (для простоты случай a: n — нечетное или n — четное, но $n > 4$).
Перепишем при $m = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3$ условия (2.4) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x} + 2u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f, \quad x \in S, \\ \frac{\partial^3 u_0(x)}{\partial n_x^3} + 3\cdot 2\,\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} + 3\cdot 2\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial n_x^2} + \frac{\partial^3 u_1(x)}{\partial n_x^3} = \\ = \varphi_3(x) - \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{4,n} * f,\ \ x \in S. \end{cases} \tag{3.10}$$

В данном случае необходимое условие разрешимости записывается в виде

$$\int\limits_{|x|=1} \{\varphi_3(x) - \int\limits_{|y|<1} \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{4,n}(x,y) f(y)dy\} dS_x = 0. \tag{3.11}$$

Введем гармоническую функцию в шаре Ω по формуле

$$\omega(x) = \frac{\partial u_0^2(x)}{\partial n_x^2} + 6\,u_1 + 6\,(x,\nabla)u_1 + 6\,(x,\nabla)^2 u_1,$$

которая на границе S удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\omega(x) = \varphi_3(x) - \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{4,n} * f.$$

Последнее соотношение вытекает из второго равенства системы (3.10). Поскольку (3.11) является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Неймана, то функция $\omega(x)$ строится как решение задачи Неймана. Таким образом, $\omega(x)$ строится с точностью до постоянного слагаемого.

Запишем новую систему краевых условий

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x} + 2u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f, \quad x \in S, \\ \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial n_x^2} + 6\,u_1(x) + 6\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial n_x^2} = \omega(x), \quad x \in S, \end{cases} \tag{3.12}$$

которая построена с помощью первого соотношения из (3.10) и только что построенного решения задачи Неймана. Исключая из (3.12) величину $u_1(x), x \in S$ и обозначая через

$$\omega_1(x) = 3u_0(x) - 3u_1(x) - (x,\nabla)\,[u_0 + u_1]\text{при} \quad x \in \Omega,$$

видим, что $\omega_1(x)$ — гармоническая в шаре Ω функция, удовлетворяющая условию Неймана

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial n_x} = 3\varphi_1(x) - 3\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f - \omega(x), x \in S. \tag{3.13}$$

Для разрешимости указанной задачи Неймана необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_{|x|=1} (3\varphi_1(x) - 3\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f - \omega(x))dS_x = 0. \tag{3.14}$$

Предположим, соотношение (3.14) выполняется, тогда гармоническая функция $\omega_1(x)$ находится с точностью до постоянного слагаемого.
Запишем новую систему краевых условий

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x} + 2u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f, \quad x \in S, \\ 3u_0(x) - \frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x} - 3u_1(x) - \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \omega_1(x), \quad x \in S, \end{cases} \tag{3.15}$$

которая построена с помощью первого соотношения (3.10) и только что построенного решения задачи Неймана. Из (3.15) сразу же вытекает равенство

$$3u_0 - u_1 = \varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f + \omega_1(x), x \in S, \tag{3.16}$$

обозначаем через $\omega_2(x) = 3u_0(x) - u_1(x)$ при $x \in \Omega$. Введенная функция $\omega_2(x)$ является гармонической и удовлетворяет данным Дирихле (3.16). Отсюда следует, что $\omega_2(x)$ однозначно находится как решение задачи Дирихле. Теперь сравним

$$\omega_2(x) = 3u_0(x) - u_1(x),$$

$$(x, \nabla)\,\omega_2 = 3\,(x, \nabla)\,u_0 - (x, \nabla)\,u_1$$

и $\omega_1(x) = 3u_0(x) - 3u_1(x) - (x, \nabla)\,[u_0 + u_1]$ в шаре Ω. Отсюда можно исключить функцию $u_0(x)$ и ее нормальную производную. В результате имеем соотношение

$$\omega_1(x) - \omega_2(x) + \frac{1}{3}(x, \nabla)\,\omega_2 = -2u_1(x) - \frac{4}{3}(x, \nabla)\,u_1 \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, для нахождения гармонической в шаре Ω функции $u_1(x)$ достаточно решить смешанную задачу

$$2u_1(x) + \frac{4}{3}\frac{\partial u_1}{\partial n_x} = \omega_2(x) - \omega_1(x) - \frac{1}{3}\frac{\partial \omega_2}{\partial n_x}, x \in S.$$

Известно, что указанная задача имеет единственное решение. Если $u_1(x)$ при $x \in \Omega$ известны, то по $\omega_2(x)$ можно однозначно определить $u_0(x)$ при $x \in \Omega$. Таким образом, разрешимость краевой задачи при $m = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3$ доказана при выполнений условий (3.11) и (3.14). Причем решение находится неоднозначно, так как при решении двух задач Неймана возникали произвольные постоянные слагаемые.

Покажем, что на самом деле условие (3.14) всегда выполняется. Действительно, из второго соотношения (3.12) вытекает, что

$$6\int\limits_S u_1(x)dS_x = \int\limits_S \omega(x)dS_x,$$

а из первого соотношения (3.12) следует, что

$$2\int\limits_S u_1(x)dS_x = \int\limits_S (\varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{4,n} * f)dS_x.$$

Из этих двух равенств следует, что соотношение (3.14) всегда выполняется. Отсюда следует, что необходимое условие (3.11) является также и достаточным для решимости указанной задачи при $m = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3$.

Таким образом, полностью доказана следующая

Теорема 3.2. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_1(x) \in C^{3+\alpha}(S)$, $\varphi_3(x) \in C^{1+\alpha}(S)$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи*

$$\begin{aligned} &\Delta^2 u = f(x),\ |x| < 1, \\ &\tfrac{\partial}{\partial n_x} u = \varphi_1(x),\ |x| = 1, \\ &\tfrac{\partial^3}{\partial n_x^3} u = \varphi_3(x),\ |x| = 1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

является условие

$$\int\limits_{|x|=1} (\varphi_3(x) - \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{4,n} * f) dS_x = 0.$$

4. Достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре

Сформулируем основной результат данной статьи.

Теорема 4.1. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_{k_s}(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S)$, $s = \overline{1,m}$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.2) в классе $C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ при произвольном m и любом наборе $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$ является условие (2.8), т.е.*

$$rank\, A(k_1, k_2, ..., k_m) = rank\, \left(A(k_1, k_2, ..., k_m), \vec{F}\right).$$

Доказательство условий достаточности теоремы 4.1 приведем по следующей схеме.

Вначале запишем краевые условия (2.2) в матрично-векторной форме

$$A_0\vec{U} + A_1\frac{\partial}{\partial n_x}\vec{U} + ... + A_{k_{m-1}}\frac{\partial^{k_{m-1}}}{\partial n_x^{k_{m-1}}}\vec{U} + A_{k_m}\frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\vec{U} = \vec{F}_0, \quad x \in S, \tag{4.1}$$

где $\vec{U} = (u_0(0), u_1(0), ..., u_{m-1}(0))^T$,

$$\vec{F}_0 = (\varphi_{k_1} - \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}}\varepsilon_{2m,n} * f,\ \varphi_{k_2} - \frac{\partial^{k_2}}{\partial n_x^{k_2}}\varepsilon_{2m,n} * f, ..., \varphi_{k_m} - \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\varepsilon_{2m,n} * f)^T,$$

$A_0, A_1, ..., A_{k_m}$ — числовые матрицы размерности $m \times m$, причем $A_0 = A(k_1, k_2, ..., k_m)$. Допустим, что ранг матрицы A_0 равен t, где $t \le m$. По определению ранга матрицы это означает, что существует невырожденная матрица B такая, что последние $(m-t)$ строк матрицы BA_0 линейно независимы между собой. Умножим обе части равенства (4.1) на матрицу B, тогда имеем

$$BA_0\vec{U} + BA_1\frac{\partial}{\partial n_x}\vec{U} + ... + BA_{k_{m-1}}\frac{\partial^{k_{m-1}}}{\partial n_x^{k_{m-1}}}\vec{U} + BA_{k_m}\frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\vec{U} = B\vec{F}_0, \quad x \in S, \tag{4.2}$$

отсюда вытекает, что

$$[0, E_{m-t}]BA_0\vec{U} + ... + [0, E_{m-t}]BA_{k_m}\frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\vec{U} = [0, E_{m-t}]B\vec{F}_0, \quad x \in S, \tag{4.3}$$

где E_{m-t} — единичная матрица размерности $(m-t)$. Здесь учтено, что $[0, E_{m-t}]BA_0$ — нулевая матрица. Обозначим через

$$\omega(x) = [0, E_{m-t}]BA_1\vec{U} + [0, E_{m-t}]BA_2(x, \nabla)\,\vec{U} + ... + [0, E_{m-t}]BA_{k_m}\left((x, \nabla)\right)^{k_m-1}\vec{U},\ x \in \Omega,$$

тогда $\omega(x)$ является решением следующей задачи Неймана

$$\Delta_x \omega(x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\omega = [0, E_{m-t}]B\vec{F}_0,\ x \in S.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой задачи является условие

$$[0, E_{m-t}]B\int\limits_{\partial\Omega}\vec{F}_0\,dS_x = 0,$$

которое в точности совпадает с условием (2.8). Гармоническая функция $\omega(x)$ находится с точностью до постоянного слагаемого с помощью ядра Неймана. Считая, что функция $\omega(x)$ при $x \in \Omega$ известной и вычисляя ее значение на границе при $x \in S$, имеем

$$[0, E_{m-t}]BA_1\vec{U} + ... + [0, E_{m-t}]BA_{k_m}\frac{\partial^{k_m-1}}{\partial n_x^{k_m-1}}\vec{U} = \omega(x), \quad x \in S. \tag{4.4}$$

Добавляя полученные краевые значения (4.4) к оставшимся уравнениям системы (4.2), получим

$$\begin{cases} [E_t, 0]BA_0\vec{U} + ... + [E_t, 0]BA_{k_m-1}\frac{\partial^{k_m-1}}{\partial n_x^{k_m-1}}\vec{U} = [E_t, 0]B\vec{F}_0, \quad x \in S, \\ [0, E_{m-t}]BA_1\vec{U} + ... + [0, E_{m-t}]BA_{k_m}\frac{\partial^{k_m-1}}{\partial n_x^{k_m-1}}\vec{U} = \omega(x), \quad x \in S. \end{cases} \tag{4.5}$$

Заметим, что в системе (4.5) отсутствуют нормальные производные порядка k_m так как $[E_t, 0]BA_{k_m}$ — нулевая матрица.

Таким образом, нам удалось понизить порядок нормальной производной, входящей в краевые условия. Продолжая указанный процесс, можно исключить все нормальные производные из краевых условий. Заметим, что для всех последующих краевых задач необходимые и достаточные условия их разрешимости всегда выполняются. То есть дополнительных условий разрешимости не возникает. Теорема 4.1 полностью доказана.

В качестве примера рассмотрим задачу типа Неймана с краевыми условиями [6]:

$$\Delta^m u(x) = f(x),\ |x| < 1, \tag{4.6}$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i}u\right|_{x\in S} = \varphi_i(x), \quad x \in S, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{4.7}$$

то есть данной задаче соответствует матрица $A(1, 2, ..., m)$.

В этом случае $rank\,A(1, 2, ..., m) = m - 1$, тогда в силу условий (2.8) справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Для разрешимости задачи (4.6), (4.7) необходимо, чтобы ранг соответствующей расширенной матрицы был равен $m-1$, т.е. чтобы имело место равенство*

$$\det(A(1,2,...m),\vec{F}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \int\limits_S \left[\varphi_1(x) - \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \int\limits_S \left[\varphi_2(x) - \frac{\partial^2}{\partial n_x^2}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & \int\limits_S \left[\varphi_k(x) - \frac{\partial^k}{\partial n_x^k}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \int\limits_S \left[\varphi_m(x) - \frac{\partial^{m-}}{\partial n_x^m}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \end{vmatrix} = 0, \quad (4.8)$$

где

$$a_{kj} = \begin{cases} 0, \quad j = 1,...,\left[\frac{k+1}{2}\right] - 1, \\ 2j(2j-1)..(2j-k+1)\,, \quad j = \left[\frac{k+1}{2}\right],...,m-1. \end{cases}$$

5. Необходимые и достаточные условия разрешимости задач для неоднородного бигармонического уравнения в шаре с однородными краевыми условиями

Рассмотрим неоднородное бигармоническое уравнение

$$Lu \equiv \Delta^2 u(x) = f(x) \tag{5.1}$$

в шаре $\Omega_r = \{x : \|x\| < r\ \} \subseteq R^n$, (для простоты случая а: n — нечетное, а также при четных n, если $n > 4$).

В работах [7–9] для уравнения (5.1) было построено решение следующей краевой задачи **K-01**, т.е. задачи Дирихле

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u\right|_{x\in\partial\Omega_r} = 0, \quad i = 0, 1. \tag{5.2}$$

Единственное решение $u(x)$ имеет интегральное представление

$$u(x) = L^{-1} f\,(x) = \int\limits_\Omega G_{4,n}(x,y)\, f(y)dy, \tag{5.3}$$

где $G_{4,n}(x,y)$ — функция Грина задачи Дирихле (5.1)–(5.2) может быть записана в виде:

$$G_{4,n}(x,y) = \frac{1}{(4-n)4\cdot(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\left[|x-y|^{4-n} - \left|x - \frac{y}{|y|^2}r^2\right|^{4-n}\left|\frac{y}{r}\right|^{4-n}\right] +$$
$$+\frac{1}{2\cdot 4\cdot(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\cdot r^2\left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)\left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right)\left|x - \frac{y}{|y|^2}r^2\right|^{2-n}\left|\frac{y}{r}\right|^{2-n}. \tag{5.4}$$

Для бигармонического уравнения (5.1) рассмотрим следующую задачу **K-12**:

$$Lu \equiv \Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_r = \{x : \|x\| < r\ \} \subseteq R^n, \tag{5.5}$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u\right|_{x\in\partial\Omega_r} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.6}$$

Аналогично теореме 3.1 для данной задачи имеет место следующая

Теорема 5.1. *Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи К-12, т.е. задачи (5.5)–(5.6) является условие:*

$$\int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r}\left[(2-n)\,|x-y|^{-n}(r-\frac{(x,y)}{r})^2-2|x-y|^{2-n}(r-\frac{(x,y)}{r})\right]f(y)dydS_x=0. \qquad (5.7)$$

Теперь рассмотрим для бигармонического уравнения (5.1) следующую задачу **К-13**:

$$Lu\equiv\Delta^2u(x)=f(x),\quad x\in\Omega_r=\{x:|x|<r\ \}\subseteq R^n, \qquad (5.8)$$

$$\frac{\partial^i}{\partial n_x^i}u\bigg|_{x\in\partial\Omega_r}=0,\quad i=1,3. \qquad (5.9)$$

Аналогично теореме 3.2 имеет место следующая

Теорема 5.2. *Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи К-13, т.е. задачи (5.8)–(5.9) является условие*

$$\begin{cases} u_1(0)=\int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r}\frac{(4-n)d_{4,n}}{2r\omega_n}|x-y|^{2-n}(r-\frac{(x,y)}{r})f(y)dydS_x,\\ \int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r}\left\{-n|x-y|^{-n-2}(r-\frac{(x,y)}{r})^3+3|x-y|^{-n}(r-\frac{(x,y)}{r})\right\}f(y)dydS_x=0. \end{cases} \qquad (5.10)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n}=0$ // Annali di Mat. 1899. V. 3, № 2. P. 1–51.
2. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974. 808 с.
3. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981. 512 с.
4. M. Nicolesco *Les fonctions polyharmoniques.* Paris: Hermann ed. 1936. 54 p.
5. Соболев С.Л. *Математический сборник* // 1937. Т. 2, № 3. С. 467–500.
6. Бицадзе А.В. *О некоторых свойствах полигармонических функций* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 825–831.
7. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А. *Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений.* Алматы: Препринт. 2005. 54 с.
8. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. *Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре* // Доклады РАН. 2008. Т. 421. № 3. С. 305–307.
9. Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. *Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений* // Математический журнал. Т. 8, № 1(27). С. 50–58.

Балтабек Есматович Кангужин,
Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
ул. Пушкина, 125,
050010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: `kanbalta@mail.ru`

Бакытбек Данебекович Кошанов,
Институт математики, информатики и механики МОН РК,
ул. Пушкина, 125,
050010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: `koshanov@list.ru`