

УДК 517.956

# ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ: СЛУЧАЙ СУММИРУЕМЫХ КРАЕВЫХ ФУНКЦИЙ

**А.Б. МУРАВНИК**

**Аннотация.** Изучается задача Дирихле в полупространстве для эллиптических уравнений, содержащих, кроме дифференциальных операторов, операторы сдвига, действующие по тангенциальным (пространственноподобным) переменным, т.е., независимым переменным, изменяющимся на всей вещественной оси. Краевая функция задачи предполагается суммируемой, что в классическом случае дифференциальных эллиптических уравнений соответствует ситуации, в которой возможны только решения с конечной энергией.

Рассматриваются два (принципиально различных) случая: случай, в котором исследуемое уравнение содержит суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига, и случай, когда оно содержит их суммы (т.е. является уравнением с нелокальными потенциалами). Для обоих типов задач строится интегральное представление решения указанной задачи в смысле обобщенных функций, доказывается его бесконечная гладкость в открытом полупространстве (т.е. вне краевой гиперплоскости) и доказывается его равномерное стремление к нулю (а также равномерное стремление к нулю любой его производной) при стремлении к бесконечности времениподобной переменной (т.е. единственной независимой переменной, изменяющейся на положительной полуоси). Скорость этого стремления к нулю — степенная; порядок степени равен сумме размерности пространственноподобной независимой переменной и порядка производной решения.

Излагаются наиболее общие (на текущий момент) результаты: сдвиги независимых переменных допускаются в произвольных (тангенциальных) направлениях, а там, где сдвигов несколько, на их величины не накладывается никаких условий соизмеримости.

Таким образом, так же как и в классическом случае, задачи с суммируемыми краевыми функциями принципиальным образом отличаются от изученных ранее задач с существенно ограниченными краевыми функциями: последние, как установлено ранее, допускают решения, не имеющие предела при стремлении времениподобной переменной к бесконечности, а наличие или отсутствие такого предела определяется условием стабилизации Репникова-Эйдельмана.

**Ключевые слова:** эллиптические дифференциально-разностные уравнения, задачи в полупространстве, суммируемые краевые функции.

**Mathematics Subject Classification:** 35R10, 35J25

---

A.B. MURAVNIK, ELLIPTIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS IN HALF-SPACES: CASE OF SUMMABLE FUNCTIONS.

© Муравник А.Б. 2023.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (соглашение № 175-03-2020-233/3, FSSF-2023-0016).

Поступила 27 марта 2023 г.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционно, краевые задачи в *полупространстве* считаются естественными для *нестационарных* уравнений: единственная независимая переменная, меняющаяся на полуоси, естественным образом трактуется, как время, все остальные независимые переменные считаются пространственными, а данные, заданные на границе области (т.е. на гиперплоскости, ортогональной указанной полуоси), трактуются, соответственно, как начальные данные. Однако и для эллиптических уравнений хорошо известны корректные задачи в полупространстве. Более того, во многих таких случаях *пространственная* переменная, выбранная указанным выше способом (т.е. само уравнение не меняется, а всего лишь нарушается его изотропность в области), приобретает так называемые *временноподобные* свойства: в частности, разрешающий оператор обладает полугрупповым свойством и имеет место стабилизация решений при стремлении вышеуказанной времениподобной переменной к бесконечности.

Для классического случая *дифференциальных* эллиптических уравнений описанное явление известно не менее шести десятилетий (см., напр., [1], [2]). Относительно недавно выяснилось (см. [3]), что оно характерно и для *дифференциально-разностных* уравнений, т.е., для случая, когда на неизвестную функцию, кроме дифференциальных операторов, действуют еще и операторы сдвига.

Интерес к таким (и, более широко — *функционально-дифференциальным*) уравнениям в частных производных проявляется в настоящее время во всем мире (начиная с пионерской работы [4]). Это обусловлено как их многочисленными приложениями, не покрываемыми классическими моделями математической физики, так и чисто теоретическими причинами: *нелокальная* природа таких уравнений порождает принципиально новые эффекты, не возникающие в классическом случае дифференциальных уравнений, а различные методы исследований, доказавшие свою эффективность в теории дифференциальных уравнений, оказываются неприменимы (напр., это относится ко всем методам, основанным на принципе максимума, поскольку, в отличие от дифференциальных уравнений, исследуемое уравнение связывает значения искомой функции *в разных точках*); соответственно, нужно развивать качественно новые методы (см. [5]–[8] и имеющуюся там библиографию).

Как в дифференциальном, так и в дифференциально-разностном случае, задачи в полупространстве (это относится и к эллиптическому, и к параболическому типам), разделяются на следующие два класса: задачи с *ограниченными* краевыми функциями и задачи с *суммируемыми* краевыми функциями. Эта (естественная) разница в постановке задач принципиальна — она порождает решения с принципиально различными наборами свойств. В частности, постоянные решения возможны только у задач первого из этих классов. С другой стороны, только решения с конечной энергией возможны у задач второго класса. Иными словами, необходимое и достаточное условие стабилизации Репникова-Эйдельмана, согласно которому решение может иметь предел (вообще говоря, отличный от нуля), а может и не иметь его, имеет место только для задач первого класса. У задач второго класса решение всегда имеет нулевой предел, а исследование в основном сосредотачивается на скорости убывания решения.

На текущий момент изучение задач второго из указанных классов несколько отстает. Цель настоящей работы — упорядоченно изложить результаты, полученные для указанных задач (т.е., для задач с суммируемыми краевыми данными) к настоящему времени. Статья организована следующим образом. Задачи для уравнений, содержащих *суммы* дифференциальных операторов и операторов сдвига, и для уравнений, содержащих их *суперпозиции*, изучаются отдельно — обоснованность такого подхода, порожденного нелокальной природой указанных операторов, установлена при предыдущих исследованиях

дифференциально-разностных уравнений всех типов. В каждом из двух указанных разделов вначале подробно решается модельная задача, а затем излагаются результаты для максимального (на текущий момент) ее обобщения.

## 2. УРАВНЕНИЯ С СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ОПЕРАТОРОВ

В полупространстве  $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$  рассмотрим задачу Дирихле для следующего модельного уравнения

$$u_{x_1 x_1}(x, y) + a u_{x_1 x_1}(x_1 + h, x_2, \dots, x_n, y) + \sum_{j=2}^n u_{x_j x_j}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (2.1)$$

где  $|a| < 1$ , а  $h$  — произвольный вещественный параметр.

При указанном ограничении в  $\mathbb{R}^n$  корректно определены следующие функции:

$$\varphi(\xi) := \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) := \sqrt{|\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \xi_1^2 \cos h\xi_1 + a^2 \xi_1^4}, \quad (2.2)$$

$$G_1(\xi) := \sqrt{\frac{\varphi(\xi) + |\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1}{2}}, \quad (2.3)$$

$$G_2(\xi) := \sqrt{\frac{\varphi(\xi) - |\xi|^2 - a\xi_1^2 \cos h\xi_1}{2}}. \quad (2.4)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.1.** *Если  $|a| < 1$ , то функция*

$$\mathcal{E}(x, y) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi \quad (2.5)$$

корректно определена в полупространстве  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  и удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (2.1).

*Доказательство.* Для доказательства первого утверждения леммы подкоренное выражение в (2.3) оценивается снизу через  $(1 - |a|)|\xi|^2$ , а для доказательства второго его утверждения функции (2.3) и (2.4) представляются в виде  $\rho(\xi) \cos \theta(\xi)$  и  $\rho(\xi) \sin \theta(\xi)$  соответственно, где

$$\rho(\xi) = \left[ (|\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1)^2 + a^2 \xi_1^4 \sin^2 h\xi_1 \right]^{\frac{1}{4}}, \quad \theta(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a\xi_1^2 \sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1}. \quad (2.6)$$

Учитывая множество значений арктангенса, мы заключаем, что  $|\theta(\xi)| \leq \frac{\pi}{4}$ , а значит,  $\cos \theta(\xi) > 0$ , а  $\cos 2\theta(\xi) \geq 0$ , откуда следует, что

$$\cos \theta(\xi) = \sqrt{\frac{1 + \cos \left( \operatorname{arctg} \frac{a\xi_1^2 \sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1} \right)}{2}}.$$

Тогда, применяя формулу  $\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , получаем, что

$$\cos \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 \xi_1^4 \sin^2 h\xi_1}{(|\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1)^2}}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

а  $\sin \theta(\xi)$  вычисляем аналогично.

Теперь мы можем подставить функцию (2.5) в уравнение (2.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{x_j x_j}(x, y) &= - \int_{\mathbb{R}^n} \xi_j^2 e^{-yG_1(\xi)} \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi, \quad j = \overline{1, n}, \\ \mathcal{E}_{yy}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{-yG_1(\xi)} \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Учитывая неотрицательность  $\cos 2\theta(\xi)$ , из равенства

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin 2\theta(\xi)$$

выводим, что

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \frac{\rho^2(\xi) \operatorname{tg} 2\theta(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}} = \frac{a\rho^2(\xi)\xi_1^2 \sin h\xi_1}{\sqrt{(|\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1)^2 + \xi_1^4 (a \sin h\xi_1)^2}} = a\xi_1^2 \sin h\xi_1,$$

а

$$\begin{aligned} G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) &= \rho^2(\xi) \cos 2\theta(\xi) = \rho^2(\xi) \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}} \\ &= \rho^2(\xi) \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}} = |\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{x_j x_j}(x, y) + \mathcal{E}_{yy}(x, y) + a\mathcal{E}_{x_1 x_1}(x_1 + h_k, x_2, \dots, x_n, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ - \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + |\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1 \right] e^{-yG_1(\xi)} \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi \\ &\quad - a \int_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi - a \int_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 e^{-yG_1(\xi)} \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi) + h\xi_1] d\xi \\ &= a \int_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \cos h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi - a \int_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi \\ &\quad - a \int_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \cos h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi + a \int_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi = 0. \end{aligned}$$

□

Пусть теперь  $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *Если  $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$  и  $|a| < 1$ , то функция*

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x - \xi, y) u_0(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

бесконечно дифференцируема в  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  и удовлетворяет уравнению (2.1) в этом полупространстве.

*Доказательство.* Учтем Лемму 2.1 и промажорируем саму функцию  $\mathcal{E}(x, y)$  и ее производные произвольного порядка:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^m e^{-y|\xi| \sqrt{1-|a|}} d\xi = \frac{1}{(1-|a|)^{\frac{m+n}{2}} y^{m+n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^m e^{-|\eta|} d\eta = \frac{\text{const}}{y^{m+n}} \int_0^\infty \rho^{m+n-1} e^{-\rho} d\rho = \frac{\text{const}}{y^{m+n}}.$$

□

Найденная мажоранта дает и асимптотическую оценку решения и всех его производных:

**Теорема 2.2.** *Если  $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , то решение (2.8) и любая его производная бесконечно дифференцируемы в  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  и каждая из этих функций стремится к нулю при  $y \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

Максимальное обобщение уравнения (2.1), достигнутое на сегодняшний день (насколько известно автору) — следующее (см. [9]):

$$\sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, y) + u_{yy}(x, y) + \sum_{j=1}^n a_j u_{x_j x_j}(x + h_j, y) = 0, \quad (2.9)$$

где  $h_j := (h_{j1}, \dots, h_{jn})$ ,  $j = \overline{1, n}$ , — произвольные векторы из  $\mathbb{R}^n$ .

В этом случае на коэффициенты уравнения накладывается условие

$$a_0 := \max_{j=1, n} |a_j| < 1, \quad (2.10)$$

а функции  $G_1$  и  $G_2$  определяются следующим образом:

$$G_1(\xi) = \rho(\xi) \cos \theta(\xi), \quad G_2(\xi) = \rho(\xi) \sin \theta(\xi), \quad (2.11)$$

где

$$\rho(\xi) = \left[ \left( |\xi|^2 + \sum_{j=1}^n a_j \xi_j^2 \cos h_j \cdot \xi \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n a_j \xi_j^2 \sin h_j \cdot \xi \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (2.12)$$

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sum_{j=1}^n a_j \xi_j^2 \sin h_j \cdot \xi}{|\xi|^2 + \sum_{j=1}^n a_j \xi_j^2 \cos h_j \cdot \xi}.$$

В этом случае утверждения теорем 2.1-2.2 выполняются и для уравнения (2.9).

### 3. УРАВНЕНИЯ С СУММАМИ ОПЕРАТОРОВ

В полупространстве  $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$  рассмотрим модельное уравнение

$$u_{x_1 x_1}(x, y) - a u(x_1 + h, x_2, \dots, x_n, y) + \sum_{j=2}^n u_{x_j x_j}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad (3.1)$$

при условии, что

$$0 < a \leq \frac{2}{h^2}, \quad (3.2)$$

а  $h$  — произвольный вещественный параметр.

В этом случае введем

$$\rho(\xi) = (|\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h\xi_1 + a^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \theta(\xi) = \frac{1}{2} \arctan \frac{a \sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}, \quad (3.3)$$

а функции  $G_{\{2\}}(\xi)$  и, соответственно,  $\mathcal{E}(x, y)$  по-прежнему определяются формулами (2.11) и (2.5) соответственно.

Теперь, чтобы оценить функцию  $G_1(\xi)$  снизу, учтем, что значения арктангенса лежат в интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Значит,  $|\theta(\xi)| < \frac{\pi}{4}$ , т.е.  $\cos \theta(\xi) > 0$  и  $\cos 2\theta(\xi) > 0$ . Следовательно,  $\cos \theta(\xi)$  можно представить в виде  $\sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta(\xi)}{2}}$ , а  $\cos 2\theta(\xi)$  — в виде  $\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta(\xi)}}$ .

Поскольку

$$2\theta(\xi) = \arctan \frac{a \sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1},$$

имеем равенство

$$\tan 2\theta(\xi) = \frac{a \sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}. \quad (3.4)$$

Положительность последнего знаменателя обеспечивается условием (3.2). Действительно, он ограничен снизу функцией одной переменной  $f(\xi_1) := \xi_1^2 + a \cos h\xi_1$ . Ее производная  $f'(\xi_1)$  равна  $2\xi_1 - ah \sin h\xi_1 = \xi_1 \left( 2 - ah^2 \frac{\sin h\xi_1}{h\xi_1} \right)$ , а значит, неотрицательна на  $[0, +\infty)$ .

Следовательно,  $f(\xi_1)$  — неубывающая на положительной полуоси функция. Поэтому на указанной полуоси она ограничена снизу величиной  $f(0) = a > 0$ . Наконец, поскольку  $f(\xi_1)$  — четная функция, последняя оценка остается справедливой на всей оси.

Из этой положительности мы делаем вывод, что

$$\begin{aligned} \cos 2\theta(\xi) &= \left( 1 + \frac{a^2 \sin^2 h\xi_1}{[|\xi|^2 + a \cos h\xi_1]^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{[|\xi|^2 + a \cos h\xi_1]^2}{[|\xi|^2 + a \cos h\xi_1]^2 + a^2 \sin^2 h\xi_1}} \\ &= \frac{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{\sqrt{|\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h\xi_1 + a^2}} = \frac{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда  $\cos \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}}$  и, следовательно,

$$G_1(\xi) = \rho(\xi) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\rho^2(\xi) + |\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{2}}. \quad (3.6)$$

Поскольку

$$\rho^4(\xi) = |\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h\xi_1 + a^2 \geq |\xi|^4 - 2a|\xi|^2 + a^2 = (|\xi|^2 - a)^2,$$

неравенство  $\rho^2(\xi) \geq |\xi|^2 - a$  выполнено при условии, что  $|\xi| \geq \sqrt{a}$ . Значит, при  $|\xi| \geq \sqrt{a}$  подкоренное выражение в (3.6) ограничено снизу функцией  $\frac{|\xi|^2 - a + |\xi|^2 - a}{2} = |\xi|^2 - a$ .

Используя найденную оценку подкоренного выражения в (3.6), заключаем, что для любого положительного  $y$  модуль подынтегральной функции в (2.5) мажорируется интегрируемой функцией  $e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}}$  во внешности шара радиуса  $\sqrt{a}$  с центром в начале координат; внутри этого шара она мажорируется тождественной единицей. Таким образом, функция  $\mathcal{E}(x, y)$  корректно определена в  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ . Формально дифференцируя функцию  $\mathcal{E}(x, y)$  под знаком интеграла (по любой переменной и сколько угодно раз), мы получаем только дополнительные подынтегральные сомножители не более, чем полиномиального роста по  $\xi$ , которые не имеют особенностей. Абсолютная сходимость полученных интегралов обосновывается точно так же, как и в случае самой функции  $\mathcal{E}(x, y)$ , только мажоранты заменяются на  $a^{\frac{m}{2}}$  и  $|\xi|^{\frac{m}{2}} e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}}$  соответственно (здесь  $m$  — порядок производной). Следовательно, указанное выше формальное дифференцирование под знаком интеграла

законно и все производные функции  $\mathcal{E}(x, y)$  тоже корректно определены в полупространстве  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ .

Теперь, учитывая равенства (3.4)-(3.5), получаем соотношения

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi) [\cos^2 \theta(\xi) - \sin^2 \theta(\xi)] = \rho^2(\xi) \cos 2\theta(\xi) = |\xi|^2 + a \cos h\xi_1$$

и

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = 2\rho^2(\xi) \cos^2 \theta(\xi) \sin^2 \theta(\xi) = \rho^2(\xi) \sin 2\theta(\xi) \rho^2(\xi) \tan 2\theta(\xi) \cos 2\theta(\xi) = a \sin h\xi_1.$$

Тогда, применяя равенства (2.7), вычисляем лапласиан функции (2.5):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{x_j x_j}(x, y) + \mathcal{E}_{yy}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( - \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + |\xi|^2 + a \cos h\xi_1 \right) e^{-yG_1(\xi)} \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi \\ &\quad - a \int_{\mathbb{R}^n} \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi \\ &= a \int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \left( \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] \cos h\xi_1 - \sin [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] \sin h\xi_1 \right) d\xi \\ &= a \int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \cos [(x \cdot \xi + h\xi_1) - yG_2(\xi)] d\xi \\ &= a \int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \cos [(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi = a\mathcal{E}(x_1 + h, x', y), \end{aligned}$$

где  $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , а значит, при условии (3.2) функция (2.5) удовлетворяет уравнению (3.1).

Теперь используем найденные выше мажоранты подынтегральной функции в (2.5) и ее производных для того, чтобы оценить сверху саму функцию (2.5) и ее производные:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} \cos [x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi \right| &= \left| \int_{B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} d\xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} d\xi \right| \\ &\leq \left| \int_{B(2\sqrt{a})} |\xi|^m d\xi \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}} d\xi \right| =: C(a) + C(a, y), \end{aligned}$$

где  $B(r)$  — шар радиуса  $r$  с центром в начале координат. Таким образом, при выполнении условия (3.2), утверждения теорем (2.1)-(2.2), в которых  $\rho(\xi)$  и  $\theta(\xi)$  заданы формулами (3.3), справедливы и для уравнения (3.1).

Максимальное обобщение уравнения (3.1), достигнутое на сегодняшний день (насколько известно автору) — следующее (см. [10]):

$$\sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, y) - au(x + h, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (3.7)$$

где  $h$  — произвольный вектор из  $\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий неравенству

$$0 < a|h|^2 \leq \frac{\pi^2}{4}. \quad (3.8)$$

Для такого уравнения функции  $G_1$  и  $G_2$  и, соответственно, ядро  $\mathcal{E}$  по-прежнему определяются соотношениями (2.11), однако сами функции  $\rho(\xi)$  и  $\theta(\xi)$  вводятся следующим образом:

$$\rho(\xi) = (|\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h \cdot \xi + a^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \theta(\xi) = \frac{1}{2} \arctan \frac{a \sin h \cdot \xi}{|\xi|^2 + a \cos h \cdot \xi}. \quad (3.9)$$

Если условие (3.8) выполняется, то утверждения теорем 2.1-2.2 справедливы и для уравнения (3.7).

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ЯДРА ПУАССОНА

Покажем, как найти вид ядра Пуассона  $\mathcal{E}$ , свертками с которым являются построенные в настоящей работе решения, на примере модельного уравнения (2.1). Для этого, наряду с указанным уравнением, рассмотрим краевое условие

$$u \Big|_{y=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

и к задаче (2.1), (4.1) применим (формально) преобразование Фурье по ( $n$ -мерной) переменной  $x$ . Получим следующую начальную задачу для *обыкновенного* дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dy^2} = (|\xi|^2 + a\xi_1^2 e^{-ih\xi_1}) \widehat{u}, \quad y \in (0, +\infty), \quad (4.2)$$

$$\widehat{u}(0; \xi) = \widehat{u}_0(\xi). \quad (4.3)$$

Это — не задача Коши: порядок уравнения — два, а начальное условие только одно. Характеристическое уравнение полученного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (зависящего от  $n$ -мерного параметра  $\xi$ ) имеет два корня

$$\pm \sqrt{|\xi|^2 + a\xi_1^2 e^{-ih\xi_1}} = \pm \sqrt{|\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1 - ai\xi_1^2 \sin h\xi_1} = \pm \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

где  $\rho(\xi)$  и  $\theta(\xi)$  определяются соотношениями (2.6).

Решаем задачу (4.2)-(4.3), подходящим образом выбираем «свободную» произвольную постоянную (она появляется за счет того, что количество начальных условий меньше порядка уравнения) и применяем (формально) к полученному решению обратное преобразование Фурье. Получаем свертку граничной функции с функцией

$$e^{-y\rho(\xi) \cos \theta(\xi)} \cos[x \cdot \xi - y\rho(\xi) \sin \theta(\xi)],$$

т.е. в точности с подынтегральной функцией интеграла (2.5).

#### 5. ВЫПОЛНЕНИЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Чтобы доказать, что функция (2.8) принимает граничное значение  $u_0(x)$  на гиперплоскости  $\{y = 0\}$  в смысле обобщенных функций, используем ту же схему, что и в [11, Замечание 2]. А именно, краевая задача понимается в смысле Гельфанда—Шилова (см. [12, §10]), решение ищется в классе обобщенных функций ( $n$ -мерной) переменной  $x$ , зависящих от вещественного параметра  $y$ , дважды дифференцируемых по этому параметру на положительной полуоси и непрерывных по нему в начале координат (см., напр., [13, §9, п. 5]). Таким образом, вне граничной гиперплоскости построенное решение является гладким (классическим), при этом краевое условие (4.1) понимается как предельное соотношение  $u(\cdot, y) \rightarrow u_0$  в топологии обобщенных функций переменной  $x$  при стремящемся к нулю справа вещественном параметре  $y$ .

Таким образом, справедливы следующие утверждения.



**Теорема 5.1.** Если  $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$  и выполняется условие (2.10), то функция (2.8), где функции  $G_1(\xi)$  и  $G_2(\xi)$  заданы равенствами (2.11), а функции  $\rho(\xi)$  и  $\theta(\xi)$  заданы равенствами (2.12), удовлетворяет задаче (2.9),(4.1) в смысле обобщенных функций (по Гельфанду-Шилову), бесконечно дифференцируема в полупространстве в  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  и вместе с каждой своей производной стремится к нулю при  $y \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 5.2.** Если  $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$  и выполняется условие (3.8), то функция (2.8), где функции  $G_1(\xi)$  и  $G_2(\xi)$  заданы равенствами (2.11), а функции  $\rho(\xi)$  и  $\theta(\xi)$  заданы равенствами (3.9), удовлетворяет задаче (3.7),(4.1) в смысле обобщенных функций (по Гельфанду-Шилову), бесконечно дифференцируема в полупространстве в  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  и вместе с каждой своей производной стремится к нулю при  $y \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность участникам Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа — 2022» за полезные обсуждения его доклада, способствовавшие лучшему пониманию полученных результатов, их дальнейшему развитию и улучшению их изложения.

Автор глубоко признателен А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E.M. Stein, G. Weiss. *On the theory of harmonic functions of several variables. I: The theory of  $H^p$  spaces* // Acta Math. **103**:1-2, 25–62 (1960).
2. E.M. Stein. *On the theory of harmonic functions of several variables. II: Behavior near the boundary* // Acta Math. **106**:3-4, 137–174 (1961).
3. A.B. Muravnik. *Nonlocal problems and functional-differential equations: theoretical aspects and applications to mathematical modelling* // Math. Model. Nat. Phenom. **14**:6, 601 (2019).
4. P. Hartman, G. Stampacchia. *On some non-linear elliptic differential-functional equations* // Acta Math. **115**:1, 271–310 (1966).
5. A.L. Skubachevskii. *Elliptic functional differential equations and applications*. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser (1997).
6. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. I* // СМФН. **26**, 3–132 (2007).
7. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. II* // СМФН. **33**, 3–179 (2009).
8. А.Л. Скубачевский. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // УМН. **71**:5, 3–112 (2016).
9. V.V. Liiko, A.B. Muravnik. *Elliptic equations with arbitrarily directed translations in half-spaces* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics **43**, 64–77 (2023).
10. A.B. Muravnik. *Elliptic equations with general-kind nonlocal potentials in half-spaces* // Lobachevskii J. Math. **43**:10, 2725–2730 (2022).
11. А.Б. Муравник. *Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве* // Математ. заметки. **108**:5, 764–770 (2020).
12. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши* // УМН. **8**:6, 3–54 (1953).
13. Г.Е. Шилов. *Математический анализ. Второй специальный курс*. М.: Наука. 1965.

Андрей Борисович Муравник,  
 Российский университет дружбы народов,  
 ул. Миклухо-Маклая, 6,  
 117198, г. Москва, Россия  
 E-mail: amuravnik@mail.ru