ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 3 (2023). С. 91-99.

УДК 517.55

О ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬФАНДА-ШИЛОВА

А.В. ЛУЦЕНКО, И.Х. МУСИН, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. В работе, следуя схеме построения пространств Гельфанда-Шилова S_α и S^β, с помощью семейства $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ раздельно радиальных весовых функций $\mathcal{M}_\nu$ в $\mathbb{R}^n$ определены два пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Одно из них — пространство $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ — внутренний индуктивный предел счетно-нормированных пространств

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,\nu} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{Z}_+^n, \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n : |\alpha|\le m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\beta)} < \infty, \, m \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Аналогичным образом, исходя из нормированных пространств

$$\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{m,\nu}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\alpha)} < \infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, вводится пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. Показано, что при определенных естественных условиях на весовые функции преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$.

Ключевые слова: пространства Гельфанда-Шилова, преобразование Фурье, выпуклые функции.

Mathematics Subject Classification: 46F05, 46A13, 42B10

Введение

В середине 1950-х годов были введены в рассмотрение семейства пространств типа S бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, ставшие, наряду с пространством Шварца, одним из центральных объектов теории обобщенных функций, теории дифференциальных уравнений в частных производных и нашедшие значительные применения в теории псевдодифференциальных операторов, частотно-временном анализе. Их изучение началось с работ Г.Е. Шилова [1], И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова [2]-[4]. Они характеризовали пространства типа S в терминах преобразования Фурье функций и затем полученное описание применили для исследования единственности задачи Коши дифференциальных уравнений в частных производных и их систем.

Существенное развитие теория пространств типа S получила в работах М.А. Соловьева в ходе изучения проблем нелокальной теории поля. В частности, им было получено [5, раздел 4] описание образа преобразования Фурье пространства $S_b(\mathbb{R}^n)$, состоящего из

A.V. Lutsenko, I.Kh. Musin, R.S. Yulmukhametov, On Gelfand-Shilov spaces.

Работа первого автора поддержана Российским научным фондом (проект 21-11-00168), работа второго автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-950), работа третьего автора выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Поступила 31 марта 2023 г.

функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих при некоторых $C > 0$ и $\mu > 0$, зависящих от f и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, неравенствам

$$|x^\beta (D^\alpha f)(x)| \le C_\alpha \mu^{|\beta|} b_{|\beta|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где, как обычно, для мультииндекса $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$, при условии, что монотонно неубывающая последовательность $(b_k)_{k=0}^\infty$ чисел $b_k > 0$ удовлетворяет условию: существуют числа $B > 0$ и $h > 0$ такие, что

$$b_{k+1} \le B h^k b_k, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Одна из целей данной заметки — обобщить этот результат на более широкий класс пространств Гельфанда-Шилова такого типа.

1. Пространства $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. Основные результаты.

Пусть $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ — произвольное семейство функций $\mathcal{M}_\nu : \mathbb{Z}_+^n \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

i_1) существуют числа $a_1 = a_1(\nu) > 0$, $a_2 = a_2(\nu) > 0$ такие, что

$$\mathcal{M}_\nu(\alpha) \ge a_1 a_2^{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n;$$

i_2) $\lim\limits_{|\alpha| \to +\infty} \dfrac{\mathcal{M}_{\nu+1}(\alpha)}{\mathcal{M}_\nu(\alpha)} = +\infty.$

Определим пространство $S_{\mathcal{M}}$, следуя схеме построения пространства Гельфанда-Шилова S_α [3, Глава 4]. Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$\mathcal{S}_{m,\mathcal{M}_\nu} = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,\nu} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \le m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\beta)} < \infty \right\}.$$

Положим $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu} := \bigcap\limits_{m=0}^\infty \mathcal{S}_{m,\mathcal{M}_\nu}$. Класс $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$ — непустой: он содержит финитные функции с носителем в $[-a_2, a_2]^n$. Снабдим $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$ топологией, определяемой семейством норм $\|\cdot\|_{m,\nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). В силу условия i_2) пространство $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$ непрерывно вложено в $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_{\nu+1}}$ для каждого $\nu \in \mathbb{N}$. Положим $\mathcal{S}_{\mathcal{M}} := \bigcup\limits_{\nu=1}^\infty \mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ — линейное пространство. Наделим $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ топологией внутреннего индуктивного предела [6, с. 589] пространств $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$.

Определим пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. По $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство

$$\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{m,\nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\alpha)} < \infty \right\}.$$

Эквивалентная топология в $\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu}$ может быть введена с помощью норм

$$q_{m,\nu}(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n : |\beta| \le m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\alpha)}.$$

Очевидно, нормированное пространство $\mathcal{S}_{m+1}^{\mathcal{M}_\nu}$ непрерывно вложено в $\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu}$. Пусть $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu} := \bigcap\limits_{m=0}^\infty \mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu}$. Наделим пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$ топологией, определяемой семейством норм $\rho_{m,\nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). Ввиду условия i_2) $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$ непрерывно вложено в $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_{\nu+1}}$. Положим $\mathcal{S}^{\mathcal{M}} := \bigcup\limits_{\nu=1}^\infty \mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$. В $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ введем топологию внутреннего индуктивного предела пространств

$\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$. Пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ построено по аналогии с пространством Гельфанда-Шилова S^β [3, глава 4].

Будем придерживаться следующего определения преобразования Фурье $\hat{f}$ функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть семейство $\mathcal{M}$ таково, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:*
i_3) *существует число $d_\nu > 0$ такое, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n \cap [0,1]^n$*

$$\mathcal{M}_\nu(\alpha + \beta) \le d_\nu \mathcal{M}_{\nu+1}(\alpha);$$

i_4) *каково бы ни было $m \in \mathbb{N}$ существует число $d_{\nu,m} > 0$ такое, что*

$$\mathcal{M}_{\nu+1}(\alpha) \ge d_{\nu,m} \mathcal{M}_\nu(\alpha) \prod_{k=1}^n (1+\alpha_k)^m, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Тогда отображение $\mathcal{F} : f \in S_{\mathcal{M}} \to \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$.

Следствие 1.1. *В предположениях Теоремы 1.1 преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$.*

Замечание 1.1. *Если $(b_k)_{k=0}^\infty$ — монотонно неубывающая последовательность чисел $b_k > 0$ таких, что при некоторых $B > 0$ и $h > 1$, $b_{k+1} \le B h^k b_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, то семейство $\{h^{\nu n|\alpha|} b_{|\alpha|}\}_{\nu=1}^\infty$ удовлетворяет условиям $i_1) - i_4$). В этом случае пространство $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ совпадает с пространством $S_b(\mathbb{R}^n)$.*

Замечание 1.2. *Если монотонно неубывающая последовательность $(b_k)_{k=0}^\infty$ чисел $b_k > 0$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{b_{k+1}}{b_k}\right)^{\frac{1}{k}} = 1$, то семейство $\{(\sigma - 2^{-\nu})^{|\alpha|} b_{|\alpha|}\}_{\nu=1}^\infty$, где $\sigma > 0$, удовлетворяет условиям $i_1) - i_4$).*

Далее, пусть $\mathcal{H}$ — произвольное семейство неотрицательных функций h_ν в $\mathbb{R}^n$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:
H_1) $h_\nu(x) = h_\nu(|x_1|, \dots, |x_n|)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;
H_2) существуют числа $Q_1 = Q_1(\nu) > 0$, $Q_2 = Q_2(\nu) > 0$ такие, что

$$h_\nu(x) \le \sum_{1 \le j \le n : x_j \ne 0} x_j \ln \frac{x_j}{Q_1} + Q_2,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n;$$

H_3) $\lim\limits_{x\to\infty} (h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x)) = +\infty$.

Отметим, что функции $\mathcal{M}_\nu(\alpha) = \alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, где $h_\nu \in \mathcal{H}$, удовлетворяют требованиям i_1) и i_2), предъявляемым к функциям семейства $\mathcal{M}$. Таким образом, если $\mathcal{M} = \{\alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, то пространство $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ состоит из функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ найдется число $K_\alpha > 0$ такое, что

$$|x^\beta (D^\alpha f)(x)| \le K_\alpha \beta! e^{-h_\nu(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

а пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ — из функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ найдется число $L_\beta > 0$ такое, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|x^\beta (D^\alpha f)(x)| \le L_\beta \alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Чтобы выделить этот частный случай семейства $\mathcal{M}$ пространство $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ будем обозначать через $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$, пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$ — через $\mathbb{S}(h_\nu)$, пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ — через $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$.

Тогда из Теоремы 1.1 имеем еще одно следствие.

Следствие 1.2. *Пусть семейство $\mathcal{M}$ состоит из функций $\mathcal{M}_\nu(\alpha) = \alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, где функции $h_\nu \in \mathcal{H}$ удовлетворяют дополнительным условиям:*

H_4) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует число $\tau_\nu > 0$ такое, что для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n$, $y \in [0, 1]^n$

$$h_\nu(x + y) - h_{\nu+1}(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + x_k) - \tau_\nu;$$

H_5) для любых $\nu, m \in \mathbb{N}$ существует число $\tau_{\nu,m} > 0$ такое, что для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n$, $y \in [0, 1]^n$

$$h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x) \geq m \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + x_k) - \tau_{\nu,m}.$$

Тогда отображение $\mathcal{F} : f \in \mathbb{S}_\mathcal{H} \to \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathbb{S}_\mathcal{H}$ и $\mathbb{S}^\mathcal{H}$.

Действительно, условие H_4) гарантирует выполнение условия i_3), а условие H_5) — выполнение условия i_4).

Следствие 1.3. *Пусть семейство $\mathcal{M}$ состоит из функций $\mathcal{M}_\nu(\alpha) = \alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, где неубывающие по каждой переменной на $[0, \infty)^n$ функции $h_\nu \in \mathcal{H}$ удовлетворяют условию H_5).*

Тогда отображение $\mathcal{F} : f \in \mathbb{S}_\mathcal{H} \to \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathbb{S}_\mathcal{H}$ и $\mathbb{S}^\mathcal{H}$.

Представляется интересным рассмотрение случая, когда все функции семейства $\mathcal{H}$ удовлетворяют условию

H_6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$ ($\|x\|$ — евклидова норма $x \in \mathbb{R}^n$).

Дело в том, что в этом случае какова бы ни была функция f из $\mathbb{S}^\mathcal{H}$ для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $c_\varepsilon(f) > 0$ такое, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq c_\varepsilon(f) \varepsilon^{|\alpha|} \alpha!, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

и, следовательно, f допускает (единственное) продолжение до целой функции в $\mathbb{C}^n$. Через F_f обозначим указанное продолжение, а через $\mathcal{A}$ — отображение: $f \in \mathbb{S}^\mathcal{H} \to F_f$. Естественным образом возникает задача описания образа $\mathbb{S}^\mathcal{H}$ при отображении $\mathcal{A}$. Ее решение получено при дополнительных условиях на $\mathcal{H}$ (Теорема 1.2). Приведем ряд определений и обозначений, встречающихся в формулировке и доказательстве Теоремы 1.2. Для произвольной функции $g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty)$ такой, что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$ через g^* и $\tilde{g}$ обозначим функции, заданные в $\mathbb{R}^n$ по правилу:

$$g^*(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\langle \alpha, x \rangle - g(\alpha)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\tilde{g}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - g(y)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Функция $\tilde{g}$ называется преобразованием Юнга-Фенхеля функции g [7]. Теперь для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ определим функцию φ_ν в $\mathbb{R}^n$, полагая

$$\varphi_\nu(x) = h_\nu^*(\ln^+ |x_1|, \dots, \ln^+ |x_n|), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\ln^+ t = 0$ при $t \in [0, 1)$ и $\ln^+ t = \ln t$ при $t \in [1, \infty)$. Так как выпуклая в $\mathbb{R}^n$ функция h_ν^* принимает конечные значения, то она непрерывна в $\mathbb{R}^n$ [8, §11]. Значит, функция φ_ν

непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, ее сужение на $[0,\infty)^n$ не убывает по каждой переменной. Ввиду условия H_2) при некотором $Q_3 = Q_3(\nu) > 0$ справедливо неравенство

$$\varphi_\nu(x) \geq \frac{Q_1}{e}\sum_{k=1}^{n}|x_k| - Q_3, \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Благодаря условиям H_6) и H_3)

$$\lim_{x\to\infty}(h^*_{\nu+1}(x) - h^*_\nu(x)) = +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}(\varphi_{\nu+1}(x) - \varphi_\nu(x)) = +\infty. \tag{1.1}$$

Далее, для произвольных $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство

$$\mathcal{P}_m(\varphi_\nu) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : p_{\nu,m}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n}\frac{|f(z)|(1+\|z\|)^m}{e^{\varphi_\nu(Im\, z)}} < \infty \right\}.$$

Очевидно, пространство $\mathcal{P}_{m+1}(\varphi_\nu)$ непрерывно вложено в $\mathcal{P}_m(\varphi_\nu)$. Пусть $\mathcal{P}(\varphi_\nu)$ есть пересечение пространств $\mathcal{P}_m(\varphi_\nu)$. Снабдим $\mathcal{P}(\varphi_\nu)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{P}_m(\varphi_\nu)$. В силу (1.1) пространство $\mathcal{P}(\varphi_\nu)$ непрерывно вложено в $\mathcal{P}(\varphi_{\nu+1})$. Обозначим семейство $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ через Φ. Пусть $\mathcal{P}(\Phi) := \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}\mathcal{P}(\varphi_\nu)$. Наделим $\mathcal{P}(\Phi)$ топологией внутреннего индуктивного предела пространств $\mathcal{P}(\varphi_\nu)$. В разделе 4 доказана следующая

Теорема 1.2. *Пусть функции семейства $\mathcal{H}$ являются выпуклыми и, помимо условия H_6), удовлетворяют условиям:*

H_7) каково бы ни было $a > 0$ существует число $l_{\nu,a} > 0$ такое, что

$$h_{\nu+1}(x+y) \leq h_\nu(x) + l_{\nu,a}, \quad x \in [0,\infty)^n, \quad y \in [0,a]^n;$$

H_8) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ найдется число $s \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{|\alpha|\geq 0} e^{h_{\nu+s}(\alpha)-h_\nu(\alpha)} < \infty.$$

Тогда отображение $\mathcal{A}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{P}(\Phi)$.

В силу этих двух теорем справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть функции семейства $\mathcal{H}$ являются выпуклыми и удовлетворяет условиям H_5) – H_7). Тогда отображение $\mathcal{AF}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{P}(\Phi)$.*

2. Вспомогательный результат

При доказательстве Теоремы 1.2 понадобится Следствие из следующего утверждения.

Предложение 2.1. *Пусть функции семейства $\mathcal{H}$ удовлетворяют условиям H_6) и H_7), $m \in \mathbb{N}$ произвольно и $\tilde{m} = (m,\ldots,m) \in \mathbb{N}^n$. Тогда для любого $\nu \in \mathbb{N}$*

$$h^*_{\nu+1}(x) \geq h^*_\nu(x) + \langle x, \tilde{m}\rangle - l_{\nu,m}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

где $l_{\nu,m}$ то же, что и в условии H_7).

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}^n_+$. Тогда

$$\begin{aligned} h^*_{\nu+1}(x) &= \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(\langle x,\alpha\rangle - h_{\nu+1}(\alpha)) = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+}(\langle x,\alpha\rangle - h_{\nu+1}(\alpha)) \\ &\geq \sup_{\alpha\geq\tilde{m}}(\langle x,\alpha\rangle - h_{\nu+1}(\alpha)) = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+}(\langle x,\alpha+\tilde{m}\rangle - h_{\nu+1}(\alpha+\tilde{m})). \end{aligned}$$

Далее, пользуясь условием H_7) на $\mathcal{H}$, имеем

$$h^*_{\nu+1}(x) \geq \langle x, \tilde{m}\rangle + \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+}(\langle x,\alpha\rangle - h_\nu(\alpha)) - l_{\nu,m}$$
$$= \langle x, \tilde{m}\rangle + \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(\langle x,\alpha\rangle - h_\nu(\alpha)) - l_{\nu,m} = h^*_\nu(x) + \langle x, \tilde{m}\rangle - l_{\nu,m}.$$

□

В условиях Предложения 2.1 справедливо

Следствие 2.1. *Для любых* $\nu, m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_\nu(x) + m\ln(1+\|x\|) \leq \varphi_{\nu+1}(x) + b_{\nu,m} > 0, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $b_{\nu,m} = l_{\nu,m} + 2mn\ln 2$.

3. Доказательство Теоремы 1.1

Покажем вначале, что отображение $\mathcal{F}$ действует из $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ в $\mathcal{S}^\mathcal{M}$. Пусть $g\in\mathcal{S}_\mathcal{M}$. Тогда $g\in\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$ для некоторого $\nu\in\mathbb{N}$. Поэтому каково бы ни было $m\in\mathbb{Z}_+$ для всех $\gamma\in\mathbb{Z}^n_+$ с $|\gamma|\leq m$, $\mu\in\mathbb{Z}^n_+$, $x\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|x^\mu(D^\gamma g)(x)| \leq \|g\|_{m,\nu}\mathcal{M}_\nu(\mu). \tag{3.1}$$

Покажем, что $\hat{g}\in\mathcal{S}^\mathcal{M}$. Пусть $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}^n_+$ произвольны. Положим $\kappa_s := \min(\alpha_s,\beta_s)$ для $s=1,\dots,n$ и $\kappa := (\kappa_1,\dots,\kappa_n)$. Так как

$$(i\xi)^\beta(D^\alpha\hat{g})(\xi) = \frac{(-1)^{|\beta|}}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n_+:j\leq\kappa} C^j_\beta(D^{\beta-j}g)(x)(D^j(ix)^\alpha)e^{i\langle x,\xi\rangle}\,dx,$$

то

$$|\xi^\beta(D^\alpha\hat{g})(\xi)| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n_+:j\leq\kappa} C^j_\beta\int_{\mathbb{R}^n}|(D^{\beta-j}g)(x)||D^j(x^\alpha)|\,dx. \tag{3.2}$$

Согласно [5], если $u\in S(\mathbb{R}^n)$, то при любых $\mu, j\in\mathbb{Z}^n_+$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n}|D^j(x^\mu)||u(x)|\,dx \leq \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}^n}|x^\mu||(D^j u)(x)|\,dx. \tag{3.3}$$

Пользуясь им, из неравенства (3.2) получим, что

$$|\xi^\beta(D^\alpha\hat{g})(\xi)| \leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n_+:j\leq\kappa} C^j_\beta\int_{\mathbb{R}^n}|x^\alpha(D^\beta g)(x)|\,dx. \tag{3.4}$$

Продолжим оценку (3.4), следуя [5, с. 371]. А именно:

1) представляем $\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x^\alpha(D^\beta g)(x)|\,dx$ в виде суммы 2^n интегралов по непересекающимся подмножествам $\mathbb{R}^n$, описываемых n неравенствами вида $|x_k|\leq 1$ или $|x_k|>1$;

2) в интегралах по множествам, в описании которых участвует неравенство $|x_k|>1$, умножаем и делим подынтегральное выражение на x_k^2.

Тогда из (3.4), пользуясь неравенством (3.1), получим, что

$$|\xi^\beta(D^\alpha\hat{g})(\xi)| \leq \frac{(\sqrt{2})^{3n+1}}{(\sqrt{\pi})^n}2^{|\beta|}\|g\|_{|\beta|,\nu}\sup_{\substack{\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\mathbb{Z}^n_+:\\ \omega_j\leq 2, j=1,\dots,n}}\mathcal{M}_\nu(\alpha+\omega).$$

Отсюда, благодаря условию i_3) на $\mathcal{M}$, имеем

$$|\xi^\beta(D^\alpha\hat{g})(\xi)| \leq C_1\|g\|_{|\beta|,\nu}2^{|\beta|}\mathcal{M}_{\nu+2}(\alpha),$$

где $C_1 = \frac{(\sqrt{2})^{3n+1}}{(\sqrt{\pi})^n} d_\nu d_{\nu+1}$. Но тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ можно найти постоянную $C_2 > 0$ такую, что

$$(1 + \|\xi\|)^k |(D^\alpha \hat{g})(\xi)| \le C_2 \|g\|_{k,\nu} \mathcal{M}_{\nu+2}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{3.5}$$

Следовательно, $\hat{g} \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}_{\nu+2}}$. Итак, $\hat{g} \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. В силу неравенства (3.5)

$$\rho_{k,\nu+2}(\hat{g}) \le C_2 \|g\|_{k,\nu}, \quad g \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отсюда следует, что отображение $\mathcal{F}$ действует из $S_{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ непрерывно.

Очевидно, линейное отображение $\mathcal{F}$ действует из $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ инъективно.

Покажем, что $\mathcal{F}$ — отображение «на». Пусть $F \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. Тогда $F \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Поэтому каково бы ни было $m \in \mathbb{Z}_+$ для всех $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\gamma F)(x)| \le \rho_{m,\nu}(F) \mathcal{M}_\nu(\gamma). \tag{3.6}$$

Положим $f(x) := \hat{F}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любых $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(i\xi)^\beta (D^\alpha f)(\xi) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta (F(x)(ix)^\alpha) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx.$$

То есть,

$$(i\xi)^\beta (D^\alpha f)(\xi) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j (D^{\beta-j} F)(x) (D^j (ix)^\alpha) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx,$$

где $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, $\kappa_s := \min(\alpha_s, \beta_s)$ для $s = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(D^{\beta-j} F)(x)| |D^j (x^\alpha)|\, dx.$$

Пользуясь неравенством (3.3), имеем

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(D^\beta F)(x)| |x^\alpha|\, dx.$$

Отсюда получим, что

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(D^\beta F)(x)| (1 + \|x\|)^{|\alpha|}\, dx.$$

Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ произвольно. Тогда для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \le m$

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(D^\beta F)(x)| (1 + \|x\|)^{m+2n} \frac{dx}{\prod\limits_{k=1}^n (1 + x_k^2)}.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (3.6), имеем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \le m$

$$\begin{aligned} |\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| &\le \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^n \rho_{m+2n,\nu}(F) \mathcal{M}_\nu(\beta) \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j \\ &\le \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^n \rho_{m+2n,\nu}(F) (m+1)^n (1 + \beta_1)^m \cdots (1 + \beta_n)^m \mathcal{M}_\nu(\beta). \end{aligned}$$

Наконец, пользуясь условием i_4) на $\mathcal{M}$ получим, что при некотором $C_3 = C_3(\nu, m) > 0$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \le m$ и всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \le C_3 \rho_{m+2n,\nu}(F) \mathcal{M}_{\nu+1}(\beta), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Следовательно, $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}_{\nu+1}}$. Значит, $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$. Ясно, что $\hat{f} = F$. Таким образом, отображение $\mathcal{F}$ действует из $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ на $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. Оценка (3.7) означает, что

$$\|f\|_{m,\nu+1} \le C_3 \rho_{m+2n,\nu}(F), \quad F \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}.$$

Из нее вытекает, что обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}$ непрерывно.

Из доказанного следует, что отображение $\mathcal{F}$ устанавливает изоморфизм между $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$.

4. Доказательство Теоремы 1.2

Пусть $f \in \mathbb{S}^{\mathcal{H}}$. Докажем, что $F_f \in \mathcal{P}(\Phi)$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ произвольно. Пользуясь разложением $F_f(z)$ $(z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}^n)$ в ряд Тейлора в точке x и тем, что $f \in \mathbb{S}(h_\nu)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$, имеем

$$(1+\|z\|)^m |F_f(z)| \le \rho_{m,\nu}(f)(1+\|y\|)^m \sum_{|\alpha|\ge 0} e^{-h_\nu(\alpha)} \prod_{j=1}^{n} (|y_j|^+)^{\alpha_j}$$

$$\le B_{\nu,s}\rho_{m,\nu}(f)(1+\|y\|)^m e^{\sup\limits_{t=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n}(t_1 \ln^+ |y_1| + \cdots + t_n \ln^+ |y_n| - h_{\nu+s}(t))},$$

где $B_{\nu,s} := \sum\limits_{|\alpha|\ge 0} e^{h_{\nu+s}(\alpha)-h_\nu(\alpha)}$, s — из условия H_8). Следовательно,

$$(1+\|z\|)^m |F_f(z)| \le B_{\nu,s}\rho_{m,\nu}(f)(1+\|y\|)^m e^{\varphi_{\nu+s}(Im\, z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Из этой оценки, пользуясь Следствием 1.1, получим, что при некотором $K_{\nu,m} > 0$

$$(1+\|z\|)^m |F_f(z)| \le K_{\nu,m}\rho_{m,\nu}(f) e^{\varphi_{\nu+s+1}(Im\, z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

То есть,

$$p_{\nu+s+1,m}(F_f) \le K_{\nu,m}\rho_{m,\nu}(f), \quad f \in \mathbb{S}(h_\nu).$$

Ввиду произвольности $m \in \mathbb{Z}_+$, $F_f \in \mathcal{P}(\varphi_{\nu+s+1})$. Таким образом, $F_f \in \mathcal{P}(\Phi)$. Кроме того, последнее неравенство означает, что линейное отображение $\mathcal{A}$ непрерывно.

Очевидно, $\mathcal{A}$ — взаимно однозначное отображение из $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{P}(\Phi)$.

$\mathcal{A}$ сюръективно. Действительно, пусть $F \in \mathcal{P}(\Phi)$. Тогда $F \in \mathcal{P}(\varphi_\nu)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Пользуясь интегральной формулой Коши и неубыванием φ_ν по каждой переменной на $[0,\infty)^n$, получим (действуя, например, как при доказательстве Теоремы 1 в [9]), что для любого $R \in (0,\infty)^n$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha F)(x)| \le \frac{\alpha! p_{\nu,m}(F)(1+\|R\|)^m e^{\varphi_\nu(R)}}{R^\alpha}.$$

Отсюда, пользуясь Следствием 1.1, имеем

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha F)(x)| \le e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F) \frac{e^{\varphi_{\nu+1}(R)}}{R^\alpha}.$$

Положим для краткости $\varphi_{\nu+1}[e](r) := \varphi_{\nu+1}(e^{r_1}, \ldots, e^{r_n})$, $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha F)(x)| \le e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F) \inf_{R\in(0,\infty)^n} \frac{e^{\varphi_{\nu+1}(R)}}{R^\alpha}$$

$$= \frac{e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup\limits_{r\in\mathbb{R}^n} (\langle \alpha, r\rangle - \varphi_{\nu+1}[e](r)))} \le \frac{e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup\limits_{r\in\mathbb{R}^n_+} (\langle \alpha, r\rangle - \varphi_{\nu+1}[e](r)))}$$

$$= \frac{e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup\limits_{r=(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}^n_+} (\langle \alpha, r\rangle - h^*_{\nu+1}(\ln^+ e^{r_1}, \ldots, \ln^+ e^{r_n})))}$$

$$= \frac{e^{b_{\nu,m}}\alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup\limits_{r\in\mathbb{R}^n_+}(\langle\alpha, r\rangle - h^*_{\nu+1}(r)))} = \frac{e^{b_{\nu,m}}\alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup\limits_{r\in\mathbb{R}^n}(\langle\alpha, r\rangle - h^*_{\nu+1}(r)))}$$

$$= e^{b_{\nu,m}}\alpha! p_{\nu,m}(F)\exp(-\widetilde{h^*_{\nu+1}}(\alpha))) = e^{b_{\nu,m}}\alpha! p_{\nu,m}(F)\exp(-h_{\nu+1}(\alpha)).$$

В концовке этой оценки воспользовались тем, что в силу выпуклости функции $h_{\nu+1}$ $\widetilde{h^*_{\nu+1}}(\alpha) = h_{\nu+1}(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ согласно Предложению 1 из [10]. Из полученной оценки вытекает, что

$$\rho_{m,\nu+1}(F_{|\mathbb{R}^n}) \le e^{b_{\nu,m}} p_{\nu,m}(F), \quad F \in \mathcal{P}(\varphi_\nu). \tag{4.1}$$

Следовательно, $F_{|\mathbb{R}^n} \in \mathbb{S}(h_{\nu+1})$. Итак, $F_{|\mathbb{R}^n} \in \mathbb{S}^{\mathcal{H}}$. Очевидно, $\mathcal{A}(F_{|\mathbb{R}^n}) = F$ и неравенство (4.1) гарантирует непрерывность отображения $\mathcal{A}^{-1}$. Таким образом, отображение $\mathcal{A}$ устанавливает изоморфизм между $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{P}(\varPhi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.Е. Шилов. *Об одной проблеме квазианалитичности* // ДАН СССР. **102**:5, 893–895 (1955).
2. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши* // УМН. **8**:6(58), 3–54 (1953).
3. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Обобщенные функции (Пространства основных и обобщенных функций).* М.: Физматгиз. 1958.
4. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Обобщенные функции (Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений).* М.: Физматгиз. 1958.
5. М.А. Соловьев. *Пространственно-подобная асимптотика вакуумных средних в нелокальной теории поля* // ТМФ. **52**:3, 363–37 (1982).
6. Р. Эдвардс. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1972.
7. Р. Рокафеллар. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.
8. В.С. Владимиров. *Методы теории функций многих комплексных переменных.* М.: Наука. 1964.
9. I.Kh. Musin. *On a space of entire functions rapidly decreasing on $\mathbb{R}^n$ and its Fourier transform* // Concrete Operators. **1**:2, 120–138 (2015).
10. А.В. Луценко, И.Х. Мусин, Р.С. Юлмухаметов. *О классе периодических функций в $\mathbb{R}^n$* // Уфимск. матем. журн. **14**:4, 73–79 (2022).

Анастасия Владимировна Луценко,
ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `Lutsenko.AV@yandex.ru`

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `musin_ildar@mail.ru`

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия,
ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `Yulmukhametov@mail.ru`