ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 3 (2023). С. 82-90.

УДК 517.9

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, СВЯЗАННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БЭКЛУНДА

М.Н. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. В данной работе описаны пары нелинейных гиперболичесих систем уравнений вида $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$, где $u^i_{xy} = f^i$, $i = 1, 2, \dots n$, линеаризации которых связаны преобразованиями Лапласа первого порядка. На основе преобразований Лапласа, связывающих линеаризации, построены преобразования Бэклунда, связывающие решения нелинейных систем.

Классическое преобразование Бэклунда определяется для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, решением которого является функция от двух независимых переменных. Преобразование Бэклунда для пары нелинейных уравнений это система соотношений, которая содержит функции и первые производные от функций, и обеспечивает преобразование решения одного уравнения в решение другого и наоборот. Преобразования Бэклунда сохраняют интегрируемость. Проблема Бэклунда заключается в перечислении возможных преобразований Бэклунда и уравнений, которые такие преобразования допускают.

Метод каскадного интегрирования Лапласа является одним из классических методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Преобразование Лапласа является частным случаем преобразования Бэклунда для линейных уравнений. Метод, используемый в данной работе, ранее был применен к нелинейным гиперболическим уравнениям. В данной работе этот метод применяется для описания систем, связанных преобразованиями Бэклунда.

Ключевые слова: нелинейная гиперболическая система, преобразование Лапласа, преобразование Бэклунда, линеаризация.

Mathematics Subject Classification: 35L10, 35L51, 35L70

Посвящается светлой памяти моего научного руководителя А.В. Жибера, которому принадлежит постановка данной задачи.

1. Введение

В настоящей работе приводится классификация нелинейных гиперболических систем уравнений вида

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y), \quad (u^i_{xy} = f^i, \quad i = 1, 2, \dots n), \tag{1.1}$$

$$q_{xy} = F(q, q_x, q_y), \quad (q^i_{xy} = F^i, \quad i = 1, 2, ..., n) \tag{1.2}$$

при условии, что их линеаризации связаны преобразованиями Лапласа первого порядка. На основе преобразования Лапласа, связывающего решения линеаризованных систем, построено преобразование Бэклунда, связывающее решения нелинейных систем (1.1), (1.2).

M.N. Kuznetsova, On nonlinear hyperbolic systems related by Bäcklund transforms.

Поступила 17 марта 2023 г.

Метод каскадного интегрирования Лапласа является классическим методом интегрирования линейных уравнений вида (см. [1]–[4])

$$v_{xy} + a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v = 0.$$

Преобразование Лапласа представляет собой дифференциальную подстановку (замену, содержащую неизвестную функцию и ее производную), преобразующую исходное уравнение в уравнение того же вида. Пара дифференциальных подстановок задает переход от одного уравнения к другому и обратно. Подробное описание метода можно найти в [5], [6].

В работах [7], [8], [9], [5] рассматривались нелинейные гиперболические уравнения. В качестве определения точно интегрируемого уравнения лиувиллевского типа было выбрано свойство двухстороннего обрыва цепочки инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения. В обзоре [5] приводится процедура нахождения общего решения нелинейных гиперболических уравнений, основанная на использовании инвариантов Лапласа. В работах [10], [11] были описаны свойства инвариантов Лапласа нелинейных уравнений, обладающих дифференциальными подстановками.

В работе [12] предложено обобщение каскадного метода интегрирования Лапласа на случай линейных гиперболических систем уравнений. На основе этого доказано, что система уравнений с обращающимся в нуль произведением инвариантов Лапласа обладает полным набором решений, зависящих от произвольных функций.

Понятие преобразования Бэклунда объясним на конкретном примере. Уравнения

$$u_{xy} = \sin u, \quad v_{xy} = v\sqrt{1 - v_y^2} \tag{1.3}$$

связаны преобразованием Бэклунда

$$v = u_x, \quad v_y = \sin u.$$

Последние соотношения обеспечивают следующий переход: если u есть решение первого уравнения (1.3), то v – решение второго уравнения (1.3), и обратно. Другими словами, это пара дифференциальных подстановок, связывающих решения нелинейных уравнений. Историю проблемы Бэклунда см. в [13]. Частным случаем преобразования Бэклунда является преобразование Лапласа для линейных уравнений. Преобразования Бэклунда, сохраняющие исходное уравнение используются для построения точных решений. Так, например, были найдены решения типа солитонов для уравнения синус-Гордона [14]. В работах [15], [16] преобразования Бэклунда использовались для решения краевых задач и построения точных решений эволюционных уравнений.

Широкий класс примеров дифференциальных подстановок, связывающих пары нелинейных гиперболических уравнений второго порядка можно найти в работах [5], [10], [11], [17], [18]. В работе [19] были описаны нелинейные гиперболические уравнения, линеаризации которых связаны преобразованиями Лапласа, и построены преобразования Бэклунда, связывающие решения нелинейных уравнений.

Настоящая работа состоит из следующих разделов. В §2 описаны системы $u_{xy} = f(u)$ и (1.2), линеаризации которых связаны преобразованием Лапласа первого порядка. Построено преобразование Бэклунда, связывающее решение нелинейных систем. В §3 решается та же задача для пары систем (1.1), (1.2). В §4 приводятся примеры.

2. Системы уравнений $u_{xy} = f(u)$ и $q_{xy} = F(q, q_x, q_y)$

В данном параграфе описаны все нелинейные гиперболические системы уравнений вида

$$u_{xy} = f(u), \quad (u^i_{xy} = f^i, \quad i = 1, 2, \dots n), \tag{2.1}$$

$$q_{xy} = F(q, q_x, q_y), \quad (q^i_{xy} = F^i, \quad i = 1, 2, ..., n) \tag{2.2}$$

при условии, что их линеаризации связаны преобразованиями Лапласа первого порядка.

Первоначально введем обозначения и укажем предположения, которыми будем пользоваться далее. Для этого рассмотрим скалярное уравнение вида (1.1). Все равенства, в которых фигурирует функция u, должны тождественно выполняться на любом решении уравнения (1.1). Другими словами, буква u всюду обозначает произвольное решение уравнения (1.1). Последнее позволяет любую смешанную производную от u выражать посредством системы (1.1) через переменные u, $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$, $\bar{u}_i = \frac{\partial^i u}{\partial y^i}$. Поэтому будем считать, что все функции являются бесконечно-дифференцируемыми, зависящими от конечного числа указанных переменных. Нетрудно видеть, что эти переменные нельзя связать между собой при помощи уравнения (1.1), поэтому определяем их как независимые.

Обозначим через D и $\bar{D}$ операторы полного дифференцирования по переменным x и y соответственно. Дифференцирования D и $\bar{D}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned}
&D(u_i) = u_{i+1}, \quad \bar{D}(\bar{u}_i) = \bar{u}_{i+1}, \quad u_0 = \bar{u}_0 = u, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \\
&D\bar{D}u = f(u, u_1, \bar{u}_1), \quad [D, \bar{D}] = 0.
\end{aligned}$$

На функциях, зависящих от конечного числа переменных u, u_i, $\bar{u}_i$, операторы D и $\bar{D}$ действуют по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{i=0}^{\infty} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{D}^{i-1}(f) \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i}, \\
\bar{D} &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} + \sum_{i=1}^{\infty} D^{i-1}(f) \frac{\partial}{\partial u_i}.
\end{aligned}$$

Действие D и $\bar{D}$ на векторах и матрицах определяется как результат покомпонентного применения этих операций.

Рассмотрим линейную систему гиперболических уравнений

$$v_{xy} + a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v = 0. \tag{2.3}$$

Здесь v — n-мерный вектор, a, b и c — матрицы размера $n \times n$. Систему (2.3) можно переписать в виде:

$$v_{xy} + av_x + bv_y + cv = v_{xy} + av_x + bv_y + (b_y + ab - k)v = \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)v - kv = 0.$$

Здесь

$$k = b_y + ab - c. \tag{2.4}$$

Теперь легко видеть, что система (2.3) эквивалентна системе

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)v = v_{-1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)v_{-1} = kv. \tag{2.5}$$

Первое уравнение (2.5) задает так называемое x-преобразование Лапласа для системы (2.3), которое состоит в переходе от неизвестной v к неизвестной v_{-1}. Если $\det(k) \neq 0$, тогда из второй формулы (2.4) определяем, что

$$v = k^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)v_{-1}.$$

Подставим последнюю функцию в исходную систему (2.3)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)k^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)v_{-1} - v_{-1} = 0. \tag{2.6}$$

Дифференцируя равенство $kk^{-1}=E$ по переменной x получаем, что $k_xk^{-1}+k(k^{-1})_x=0$, откуда $(k^{-1})_x=-k^{-1}k_xk^{-1}$. Используя последнюю формулу преобразуем систему (2.6) к виду

$$k^{-1}\left((v_{-1})_{xy}+a(v_{-1})_x+\big(kbk^{-1}-k_xk^{-1}\big)(v_{-1})_y+\Big(a_x+\big(kbk^{-1}-k_xk^{-1}\big)a-k\Big)v_{-1}\right)=0.$$

Таким образом, в результате применения x-преобразования Лапласа к системе (2.3) мы получаем систему того же вида, что и исходная:

$$(v_{-1})_{xy}+a_{-1}(v_{-1})_x+b_{-1}(v_{-1})_y+c_{-1}v_{-1}=0,$$

где

$$a_{-1}=a,\quad b_{-1}=\big(kb-k_x\big)k^{-1},\quad c=a_x+b_{-1}a_{-1}-k. \tag{2.7}$$

Предположим, что решения $u(x,y,\tau)$ и $q(x,y,\tau)$ систем (2.1) и (2.2) соответственно, зависят от некоторого параметра τ и определим функции $v=u_\tau$ и $p=q_\tau$. Тогда функции v и p удовлетворяют линеаризованным системам

$$D\bar{D}v=Cv, \tag{2.8}$$

$$\big(D\bar{D}-A_{-1}D-B_{-1}\bar{D}-C_{-1}\big)p=0. \tag{2.9}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C=\left(\frac{\partial f^i(u)}{\partial u^j}\right),\quad i,j=1,...,n, \tag{2.10}$$

$$A_{-1}=\left(\frac{\partial F^i(q,q_x,q_y)}{\partial q_x^j}\right),\quad B_{-1}=\left(\frac{\partial F^i(q,q_x,q_y)}{\partial q_y^j}\right),\quad C_{-1}=\left(\frac{\partial F^i(q,q_x,q_y)}{\partial q^j}\right).$$

Допустим, что система (2.9) получается из системы (2.8) в результате применения x-преобразования Лапласа. Задача состоит в описании соответствующих нелинейных систем (2.2) и (2.1). В силу формул (2.7) справедливы следующие соотношения:

$$A_{-1}=0,\quad B_{-1}=D(k)k^{-1},\quad C_{-1}=k, \tag{2.11}$$

где, согласно формуле (2.4),

$$k=C. \tag{2.12}$$

Решения систем (2.8), (2.9), согласно формулам (2.5), связаны соотношениями

$$Dv=p,\quad \bar{D}p=kv. \tag{2.13}$$

Теорема 2.1. *Пусть линеаризованная система* (2.9) *является результатом применения x-преобразования Лапласа к системе* (2.8)*. Тогда системы* (2.1) *и* (2.2) *имеют следующий вид:*

$$u_{xy}=f(u),\quad q_{xy}=C\big(f^{-1}(q_y)\big)q, \tag{2.14}$$

где матрица $C(u)$ определена формулой (2.10) *и* $\det C\neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим соотношения (2.13). Заметим, что если

$$u_x=q, \tag{2.15}$$

тогда первая формула (2.13) верна. Применим к левой и правой частям соотношения (2.15) дифференцирование $\bar{D}$:

$$f(u)=q_y. \tag{2.16}$$

Отметим, что дифференцирование равенства (2.16) по параметру τ приводит ко второй формуле (2.13). Далее, применяя к левой и правой частям соотношения (2.16) оператор D, получаем, что

$$q^i_{xy} = f^i_{u^1}u^1_x + f^i_{u^2}u^2_x + \cdots + f^i_{u^n}u^n_x, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Здесь вектор $u^1, u^2, ..., u^n$ надо понимать, как решение алгебраической системы (2.16). Учитывая обозначение (2.10) получаем, что q удовлетворяет второму уравнению (2.14). Теорема доказана. □

Замечание 2.1. *При доказательстве теоремы было найдено преобразование Бэклунда*

$$q = u_x, \quad q_y = f(u),$$

связывающее решения систем (2.14).

3. Системы уравнений вида $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$

Предположим, что решения $u(x, y, \tau)$ и $q(x, y, \tau)$ систем (1.1) и (1.2) соответственно, зависят от некоторого параметра τ и определим функции $v = u_\tau$ и $p = q_\tau$. Тогда функции v и p удовлетворяют линеаризованным системам

$$\big(D\bar{D} - AD - B\bar{D} - C\big)v = 0, \tag{3.1}$$

$$\big(D\bar{D} - \tilde{A}D - \tilde{B}\bar{D} - \tilde{C}\big)p = 0. \tag{3.2}$$

Здесь $A, B, C, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ квадратные матрицы $n-$го порядка следующего вида

$$A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j_1}\right), \quad B = \left(\frac{\partial f^i}{\partial \bar{u}^j_1}\right), \quad C = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right),$$

$$\tilde{A} = \left(\frac{\partial F^i}{\partial q^j_1}\right), \quad \tilde{B} = \left(\frac{\partial F^i}{\partial \bar{q}^j_1}\right), \quad \tilde{C} = \left(\frac{\partial F^i}{\partial q^j}\right), \quad i, j = 1, ..., n.$$

Предположим, что система (3.2) получается из системы (3.1) в результате применения x-преобразования Лапласа. Задача состоит в описании соответствующих нелинейных систем (1.2) и (1.1). Тогда справедливы следующие соотношения

$$\big(D - B\big)v = p, \quad \big(\bar{D} - A\big)p = Hv. \tag{3.3}$$

Здесь $H = -\bar{D}(B) + AB + C$, $\det H \neq 0$. В силу формул (2.7) коэффициенты систем (3.1), (3.2) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\tilde{A} = A, \quad \tilde{B} = \big(HB + D(H)\big)H^{-1}, \quad \tilde{C} = D(A) - \tilde{B}\tilde{A} + H. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Пусть линеаризованная система* (3.2) *является результатом применения* x*-преобразования Лапласа к системе* (3.1)*. Тогда системы* (1.1) *и* (1.2) *имеют следующий вид:*

$$u_{xy} = \varphi(u, u_1) + \lambda'(u)\bar{u}_1,$$

$$q_{xy} = \frac{\partial\varphi\big(U, q + \lambda(U)\big)}{\partial u_1}\, q_1 + \big(q + \lambda(U)\big)\left(\frac{\partial\varphi\big(U, q + \lambda(U)\big)}{\partial u} + \frac{\partial\varphi\big(U, q + \lambda(U)\big)}{\partial u_1}\,\lambda'(U)\right).$$

Здесь $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^T$, $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)^T$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\right)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j_1}\right)$, $\lambda'(U) = \left(\frac{\partial\lambda^i(U)}{\partial u^j}\right)$*. При этом, вектор-функция* $U(q, \bar{q}_1) = \big(U^1(q, \bar{q}_1), \ldots, U^n(q, \bar{q}_1)\big)^T$ *определяется из системы*

$$\varphi\big(U, q + \lambda(U)\big) = \bar{q}_1.$$

Замечание 3.1. *Построено преобразование Бэклунда*

$$q = u_1 - \lambda(u), \quad \bar{q_1} = \varphi(u, u_1),$$

связывающее решения приведенных выше систем.

Доказательство. Применим к первому соотношению (3.4) дифференцирование по параметру τ:

$$F^i_{q_1^j q^k} p^k + F^i_{q_1^j q_1^k} p_1^k + F^i_{q_1^j \bar{q}_1^k} \bar{p}_1^k = f^i_{u_1^j u^k} v^k + f^i_{u_1^j u_1^k} v_1^k + f^i_{u_1^j \bar{u}_1^k} \bar{v}_1^k.$$

Здесь и далее $i, j = 1, \ldots, n$, по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до n. Перепишем последние соотношения, используя равенства (3.3)

$$F^i_{q_1^j q^k}\big(v_1^k - f^k_{\bar{u}_1^s} v^s\big) + F^i_{q_1^j q_1^k}\Big(v_2^k - D(f^k_{\bar{u}_1^s}) v^s - f^k_{\bar{u}_1^s} v_1^s\Big)$$
$$+ F^i_{q_1^j} \bar{q}_1^k \Big(h_{ks} v^s + f^k_{u_1^s}\big(v_1^s - f^s_{\bar{u}_1^r} v^r\big)\Big) = f^i_{u_1^j u^k} v^k + f^i_{u_1^j u_1^k} v_1^k + f^i_{u_1^j \bar{u}_1^k} \bar{v}_1^k.$$

Здесь h_{ks} — элементы матрицы H. Собираем коэффициенты при переменных v_2^k и $\bar{v}_1^k$:

$$F^i_{q_1^j q_1^k} = 0, \quad f^i_{u_1^j \bar{u}_1^k} = 0.$$

Отсюда уточняем функции f^i и F^i

$$F^i(q, q_1, \bar{q}_1) = \alpha^i_k(q, \bar{q}) q_1^k + \beta^i(q, \bar{q}_1), \tag{3.5}$$

$$f^i(u, u_1, \bar{u}_1) = \varphi^i(u, u_1) + \psi^i(u, \bar{u}_1). \tag{3.6}$$

Подставляя функции (3.5), (3.6) в третье соотношение (3.4) получаем, что

$$\beta^i_{q^j} + (\alpha^i_k)_{q^j} q_1^k = D\big(\varphi^i_{u_1^j}\big) - \big((\alpha^i_k)_{\bar{q}_1^s} q_1^k + (\beta^i)_{\bar{q}_1^s}\big)\alpha^s_j + h_{ij}. \tag{3.7}$$

Элементы матрицы H задаются следующими формулами:

$$h_{ij} = -\psi^i_{\bar{u}_1^j u^r} \bar{u}_1^r - \psi^i_{\bar{u}_1^j \bar{u}_1^r} \bar{u}_2^r + \varphi^i_{u_1^r} \psi^r_{\bar{u}_1^j} + \varphi^i_{u^j} + \psi^i_{u^j}.$$

Далее, подставляем h_{ij} в (3.7), дифференцируем левую и правую части полученного соотношения по параметру τ и собираем коэффициенты при независимых переменных $\bar{v}_2^r$:

$$\psi^i_{\bar{u}_1^j \bar{u}_1^r} \equiv 0, \quad i, j, r = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\psi^i(u, \bar{u}_1) = g^i_k(u) \bar{u}_1^k + r^i(u).$$

Функции f^i, заданные формулами (3.6), принимают форму

$$f^i(u, u_1, \bar{u_1}) = \varphi^i(u, u_1) + g^i_k(u) \bar{u}_1^k + r^i(u).$$

Обозначая $\varphi^i + r^i$ через φ^i, приводим последнюю функцию к виду

$$f^i(u, u_1, \bar{u_1}) = \varphi^i(u, u_1) + g^i_k(u) \bar{u}_1^k. \tag{3.8}$$

Далее заметим, что, если

$$q^i = u_1^i - \lambda^i(u), \tag{3.9}$$

где $\lambda^i_{u^k}(u) = g^i_k(u)$, то первая из формул (3.3) справедлива. Тогда первая искомая система (1.1), в силу формулы (3.8), принимает вид

$$u^i_{xy} = f^i = \varphi^i(u, u_1) + \lambda^i_{u^k}(u) \bar{u}_1^k \tag{3.10}$$

или в матричной форме

$$u_{xy} = \varphi(u, u_1) + \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \bar{u}_1.$$

Применим к левой и правой частям соотношения (3.9) оператор $\bar{D}$:

$$\bar{q}_1^i = \varphi^i(u, u_1).$$

В последней формуле заменим u_1 согласно (3.9)

$$\bar{q}_1^i = \varphi^i\big(u, q + \lambda(u)\big). \tag{3.11}$$

Отметим, что дифференцирование равенства (3.11) по параметру τ приводит к формуле, совпадающей со второй из формул (3.3). И, наконец, применяя к левой и правой частям соотношения (3.11) оператор D и выражая u_1^k из (3.9), получаем

$$\begin{aligned} q^i_{xy} = F^i = &\varphi^i_{u^k}\big(u, q+\lambda(u)\big)\big(q^k + \lambda^k(u)\big) \\ &+ \varphi^i_{u_1^k}\big(u, q+\lambda(u)\big)\Big(q_1^k + \lambda^k_{u^s}(u)\big(q^s + \lambda^s(u)\big)\Big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь вектор-функцию $u(q, \bar{q}_1) = \big(u^1(q, \bar{q}_1), \ldots, u^n(q, \bar{q}_1)\big)^T$ нужно понимать как решение системы (3.11). В векторной форме систему (3.12) можно записать так:

$$q_{xy} = \frac{\partial \varphi\big(U, q + \lambda(U)\big)}{\partial u_1}\, q_1 + \big(q + \lambda(U)\big)\left(\frac{\partial \varphi\big(U, q+\lambda(U)\big)}{\partial u} + \frac{\partial \varphi\big(U, q+\lambda(U)\big)}{\partial u_1}\,\lambda'(U)\right).$$

Здесь $U(q, \bar{q}_1) = \big(U^1(q, \bar{q}_1), \ldots, U^n(q, \bar{q}_1)\big)^T$ выражается из системы $\bar{q}_1 = \varphi(U, q + \lambda(U))$. Теорема доказана. □

4. Примеры нелинейных систем и преобразования Бэклунда, связывающие их решения

В данном параграфе приведем примеры нелинейных систем, линеаризации которых связаны преобразованием Лапласа первого порядка, и преобразования Бэклунда для каждой такой нелинейной пары.

Пример 4.1. Цепочка Тоды серии A_2

$$u_{xy} = -2e^u + e^v, \quad v_{xy} = e^u - 2e^v$$

и система

$$q_{xy} = \frac{2}{3}(p_y + 2q_y)q - \frac{1}{3}(q_y + 2p_y)p, \quad p_{xy} = -\frac{1}{3}(p_y + 2q_y)q + \frac{2}{3}(q_y + 2p_y)p$$

связаны преобразованием Бэклунда

$$\begin{aligned} &q = u_x, \quad p = v_x, \\ &q_y = -2e^u + e^v, \quad p_y = e^u - 2e^v. \end{aligned}$$

Пример 4.2. Рассмотрим систему

$$u^1_{xy} = e^{u^1 - u^2}, \quad u^2_{xy} = e^{-2u^1 + 2u^2}, \quad u^3_{xy} = 3u^3 e^{u^1 - u^2} \tag{4.1}$$

и систему

$$q^1_{xy} = q^1_y(q^1 - q^2), \quad q^2_{xy} = q^2_y(-2q^1 + 2q^2), \quad q^3_{xy} = 3q^3 q^1_y + q^3_y(q^1 - q^2).$$

Система (4.1) обладает солитонным решением [20]. Преобразование Бэклунда задается формулами:

$$\begin{aligned} &q^1 = u^1_x, \quad q^2 = u^2_x, \quad q^3 = u^3_x, \\ &q^1_y = e^{u^1 - u^2}, \quad q^2_y = e^{-2u^1 + 2u^2}, \quad q^3_y = 3u^3 e^{u^1 - u^2}. \end{aligned}$$

Пример 4.3. Известно, что следующая система обладает солитонным решением [20]

$$\begin{aligned} &u^1_{xy} = e^{u^1 - u^2}, \quad u^2_{xy} = e^{u^2 - u^1}, \\ &u^3_{xy} = (3u^3 - u^4)e^{u^1 - u^2}, \quad u^4_{xy} = (3u^4 - u^3)e^{u^2 - u^1}. \end{aligned}$$

Последняя система связана с системой

$$q^1_{xy} = q^1_y(q^1 - q^2), \quad q^2_{xy} = q^2_y(q^2 - q^1),$$
$$q^3_{xy} = (3q^3 - q^4)q^1_y + (q^1 - q^2)q^3_y, \quad q^4_{xy} = (3q^4 - q^3)q^2_y + (q^2 - q^1)q^4_y$$

преобразованием Бэклунда

$$q^1 = u^1_x, \quad q^2 = u^2_x, \quad q^3 = u^3_x, \quad q^4 = u^4_x,$$
$$q^1_y = e^{u^1 - u^2}, \quad q^2_y = e^{u^2 - u^1},$$
$$q^3_y = (3u^3 - u^4)e^{u^1 - u^2}, \quad q^4_y = (3u^4 - u^3)e^{u^2 - u^1}.$$

Пример 4.4. Также в качестве примера приведем систему

$$u^i_{xy} = u^i_x \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u^j.$$

Указанная система связана с системой

$$q^i_{xy} = \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q^j\Big)$$

преобразованием Бэклунда

$$\begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \ln u^1_x \\ \vdots \\ \ln u^n_x \end{pmatrix},$$
$$q^i_y = u^i, i = 1, \dots, n.$$

Здесь матрица $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P.S. Laplace. *Recherches sur le calcul integral aux differences partielles* // Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris. 1773/77, 341–402; reprinted in: P.S. Laplace's oevres completés, Vol. IX. Gauthier-Villars. Paris, 5–68 (1893).
2. E. Goursat. *Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre á deux variables indépendantes.* Paris: Hermann, Vols. I. II. 1896, 1898.
3. G. Darboux. *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **7**, 163 – 173 (1870).
4. E. Vessiot. *Sur les équations aux dérivées partielles du second order, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, integrable par la méthode de Darboux* // J. Math. pure appl. **18**, 1–61 (1939).
5. А.В. Жибер, В.В. Соколов. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. **56**:1, 63–106 (2001).
6. О.В. Капцов. *Методы интегрирования уравнений с частными производными* М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009.
7. I.M. Anderson , N. Kamran. *The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane* // Preprint. Montreal: Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal. 1994.
8. I.M. Anderson, N. Kamran. *The variational bicomplex for hiperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane* //Duke Math. J. **87**:2, 265–319 (1997).
9. А.В. Жибер, В.В. Соколов, С.Я. Старцев. *О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу* // Докл. РАН. **343**:6, 746–748 (1995).
10. С.Я. Старцев. *Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой* // ТМФ. **120**:2, 237–247 (1999).

11. С.Я. Старцев. *О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки* // ТМФ. **127**:1, 63–74 (2001).
12. С.Я. Старцев. *Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений* // Матем. заметки. **83**:1, 107–118 (2008).
13. Н.Х. Ибрагимов. *Группы преобразований в математической физике.* М.: Наука. 1983.
14. Дж.Л. Лэм. *Введение в теорию солитонов.* М.: Мир. 1983.
15. С.В. Хабиров. *Преобразования Беклунда эволюционных уравнений* // Препринт БФАН СССР. Уфа. 1984.
16. С.В. Хабиров. *Бесконечно параметрические семейства решений нелинейных дифференциальных уравнений* // Математический сборник. **183**:11, 45–54 (1992).
17. A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. *Hyperbolic equations with third-order symmetries* // Theor. Math. Phys. **166**:1, 43–57 (2011).
18. M.N. Kuznetsova, A. Pekcan, A.V. Zhiber. *The Klein–Gordon Equation and Differential Substitutions of the Form* $v = \varphi(u, u_x, u_y)$ // SIGMA **8** (2012), 090, 37 pages.
19. М.Н. Кузнецова. *Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения* // УМЖ. **1**:3, 87–96 (2009).
20. А.Н. Лезнов, В.Г. Смирнов, А.Б. Шабат. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // ТМФ. **51**:1, 10–21 (1982).

Мария Николаевна Кузнецова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: m.nik.kuznetsova@gmail.com