ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 3 (2023). С. 71-81.

УДК 517.5

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ВЫПОЛНЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе изучаются пространства $H(D)$ функций, аналитических в выпуклых областях комплексной плоскости. Также изучаются подпространства $W(\Lambda, D)$ таких пространств. Подпространство $W(\Lambda, D)$ является замыканием в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$, где Λ — это последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Данное подпространство является инвариантным относительно оператора дифференцирования. Основной задачей в теории инвариантных подпространств является представление всех его функций при помощи собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования — $z^n e^{\lambda_k z}$. В данной работе исследуется проблема фундаментального принципа для инвариантного подпространства $W(\Lambda, D)$, т.е. проблема представления всех его элементов при помощи ряда, построенного по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$. Получены простые геометрические условия, которые необходимы для наличия фундаментального принципа. Эти условия формулируются в терминах длины дуги выпуклой области и максимальной плотности последовательности показателей экспонент.

Ключевые слова: экспоненциальный моном, выпуклая область, фундаментальный принцип, длина дуги.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах из D. Символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Если система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, то $W(\Lambda, D)$ является нетривиальным ($\neq H(D)$, $\{0\}$) замкнутым подпространством в $H(D)$. Из определения вытекает, что оно инвариантно относительно оператора дифференцирования. При этом система $\mathcal{E}(\Lambda)$ — это набор собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в $W(\Lambda, D)$, а Λ — его кратный спектр.

Пусть $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — его кратный спектр. Он является

A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva, Necessary condition of the fundamental principle for invariant subspaces on unbounded convex domain.

Поступила 6 января 2023 г.

Исследование второго автора выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».

не более чем счетным множеством с единственной предельной точкой ∞ [1, гл. II, §7]. В случае, когда спектр W конечен, оно совпадает с пространством решений однородного линейного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами. Более общим примером инвариантного подпространства служит множество решений уравнения свертки $\mu(g(z+w)) \equiv 0$ (или системы таких уравнений), где μ — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D)$. Частными случаями уравнения свертки являются линейные дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами конечного и бесконечного порядков, а также некоторые виды интегральных уравнений.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является представление всех его функций при помощи собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования — $z^n e^{\lambda_k z}$. Если W — пространство решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами конечного порядка, то оно совпадает с линейной оболочкой системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Этот результат известен как фундаментальный принцип Л. Эйлера. В этой связи задача представления функций $g \in W$ посредством рядов по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, т.е. рядов

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{1.1}$$

называется проблемой фундаментального принципа для инвариантного подпространства. Первым шагом на пути к представлению (1.1) является решение проблемы спектрального синтеза, т.е. выяснение условий, при которых система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в подпространстве W (другими словами, когда $W = W(\Lambda, D)$). Проблему фундаментального принципа, естественно, имеет смысл рассматривать лишь для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, т.е. для подпространств вида $W(\Lambda, D)$.

Исследование проблемы фундаментального принципа имеет богатую историю. Частично она отражена в работе [2]. Полное решение проблемы фундаментального принципа в случае ограниченной выпуклой области D получено в работах [3]–[5]. Доказывается, что каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1) в области D тогда и только тогда, когда $S_\Lambda = 0$ и

$$\overline{n}_0(\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)) \leqslant \frac{\Upsilon_D(-\varphi_2, -\varphi_1)}{2\pi}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(\Lambda), \quad 0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi. \tag{1.2}$$

Здесь S_Λ — индекс конденсации последовательности Λ, введенный в работе [2], $\overline{n}_0(\Lambda)$ — максимальная плотность Λ, $\Phi(\Lambda)$ — некоторое не более чем счетное множество, (φ_1, φ_2) — последовательность, состоящая из всех пар λ_k, n_k таких, что λ_k лежит в угле

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \{z = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t > 0\},$$

$\Upsilon_D(\varphi_1, \varphi_2)$ — длина дуги области D. Она соединяет точки касания опорных прямых

$$L(-\varphi_2, D) = \{z : \mathrm{Re}(ze^{i\varphi_2}) = H(-\varphi_2, D)\}, \quad L(-\varphi_1, D) = \{z : \mathrm{Re}(ze^{i\varphi_1}) = H(-\varphi_1, D)\}$$

с границей ∂D, где $H(\varphi, D)$ — опорная функция области D.

В работе [6] получен критерий представления (1.1) в случае, когда $D = \mathbb{C}$. Для такого представления необходимо и достаточно неравенство $S_\Lambda < \infty$. Случай, когда область D является полуплоскостью, изучен в работах [7] и [8]. Критерий представления формулируется только при помощи индекса S_Λ. В работе [9] получено полное решение проблемы фундаментального принципа в случае, когда $\Theta(\Lambda)$ не содержит внутренних точек множества, где ограничена опорная функция области D. Здесь $\Theta(\Lambda)$ — совокупность пределов всех сходящихся последовательностей вида $\{\overline{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}_{j=1}^{\infty}$. Это решение также формулируется лишь при помощи индекса S_Λ.

В данной работе рассматриваются произвольные выпуклые области D. Доказывается, что неравенство (1.2) необходимо для представления (1.1) при любых $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(\Lambda)$ таких, что дуга $\{e^{i\varphi} : \varphi \in [-\varphi_2, -\varphi_1]\}$ лежит внутри множества, где ограничена функция $H(\varphi, D)$.

2. Построение специальной целой функции

Символами $B(z,r)$ и $S(z,r)$ обозначим соответственно открытый круг и окружность с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиуса $r > 0$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $n(r,\Lambda)$ обозначает число точек λ_k с учетом их кратностей n_k в круге $B(0,r)$ Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}, \qquad \overline{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r},$$

$$\overline{n}_0(\Lambda,\delta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}, \qquad \overline{n}_0(\Lambda) = \overline{\lim_{\delta\to 0}} \overline{n}_0(\Lambda,\delta).$$

Величины $\overline{n}(\Lambda)$ и $\overline{n}_0(\Lambda)$ называются соответственно верхней и максимальной плотностью последовательности Λ. Говорят, что Λ имеет плотность $n(\Lambda)$, если существует предел

$$n(\Lambda) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

По лемме 2.1 из работы [10] имеем:

$$\overline{n}(\Lambda) \leqslant \overline{n}_0(\Lambda,\delta) \leqslant \overline{n}_0(\Lambda), \quad \delta \in (0,1). \tag{2.1}$$

Если Λ имеет плотность, то

$$n(\Lambda) = \overline{n}(\Lambda) = \overline{n}_0(\Lambda,\delta) = \overline{n}_0(\Lambda), \quad \delta \in (0,1). \tag{2.2}$$

Пусть f — целая функция экспоненциального типа в комплексной плоскости, т.е.

$$\ln|f(z)| \leqslant A + B|z|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}, \quad \varphi \in [0,2\pi],$$

называется индикатором f. Отметим одно свойство индикатора [11, гл. I, §18, теорема 28]: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant (h_f(\varphi) + \varepsilon)r, \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad r \geq R(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Функция h_f совпадает с опорной функцией

$$H(\varphi,T) = \max_{z\in T} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})$$

некоторого выпуклого компакта $T \subset \mathbb{C}$, который называется индикаторной диаграммой функции f. Сопряженная диаграмма K функции f является компактом комплексно сопряженным к компакту T [1, гл. I, §5, теорема 5.4]. Таким образом,

$$h_f(\varphi) = H(-\varphi,K), \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

Отсюда следует, что функция h_f непрерывна (а значит, и равномерно непрерывна) на отрезке $[0,2\pi]$. Поэтому для каждого $\varepsilon_0 > 0$ найдется $\delta_0 \in (0,1)$ такое, что

$$\begin{gathered} |th_f(\psi) - h_f(\varphi)| = |tH(-\psi,K) - H(-\varphi,K)| \leqslant \varepsilon_0, \\ \varphi \in [0,2\pi], \quad te^{i\psi} \in B(e^{i\varphi},\delta_0). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Говорят [11, гл. III], что f имеет регулярный рост, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r\notin E, r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}, \quad \varphi \in [0,2\pi],$$

где $E \subset (0, +\infty)$ — множество нулевой относительной меры (E_0-множество), т.е.

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{mes}(E \cap (0,r))}{r} = 0$$

(символ mes обозначает лебегову меру множества). Классический результат Б.Я. Левина [11, гл. II, теорема 2, гл. III, теорема 4] утверждает, что f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее кратное нулевое множество $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является правильно распределенным. При этом выполнено равенство

$$2\pi n(\Lambda_f(\varphi_1,\varphi_2)) = h_f'(\varphi_2) - h_f'(\varphi_1) + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} h_f(\varphi)d\varphi, \quad \varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(\Lambda_f), \tag{2.5}$$

где $\Phi(\Lambda)$ — множество всех φ таких, что

$$\inf_{\alpha>0} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r, \Lambda(\varphi-\alpha, \varphi+\alpha))}{r}.$$

Отметим, что множество $\Phi(\Lambda_f)$ совпадает с множеством чисел φ, для которых производная $h_f'(\varphi)$ не существует. При этом всегда существуют односторонние производные функции h_f.

Говорят также, что f имеет регулярный рост на луче $L_\varphi = \{re^{i\varphi}, r > 0\}$, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r\notin E_\varphi, r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r},$$

где E_φ — E_0-множество. Если f имеет регулярный рост на каждом луче, то множество E_φ, вообще говоря, зависит от $\varphi \in [0, 2\pi]$. Оказывается, однако, что можно подобрать исключительное E_0-множество, которое подходит для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ [11, гл. III, §1, теорема 1]. Другими словами, функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда она имеет регулярный рост на каждом луче. Известно также другое эквивалентное определение функции регулярного роста [12, лемма 4.1]. Функция f имеет регулярный рост на луче L_φ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} |z_m| = \infty, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{z_m}{|z_m|} = e^{i\varphi}, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{|z_{m+1}|}{|z_m|} = 1, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\ln|f(z_m)|}{|z_m|} = h_f(\varphi). \tag{2.6}$$

Символом $\underline{h}_f$ обозначим нижний индикатор функции f [13]:

$$\underline{h}_f(\varphi) = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{B(te^{i\varphi},t)} \frac{\ln|f(z)|}{t} dxdy, \quad z = x + iy.$$

Отсюда с учетом (2.3) получаем:

$$\underline{h}_f(\varphi) \leqslant h_f(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{2.7}$$

Если $\underline{h}_f(\varphi) \geq c$, то по лемме 2.7 из работы [14] существует последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} |z_m| = \infty, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{z_m}{|z_m|} = e^{i\varphi}, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{|z_{m+1}|}{|z_m|} = 1, \quad \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln|f(z_m)|}{|z_m|} \geq c. \tag{2.8}$$

Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Символом $I(D, \Lambda)$ обозначим множество всех целых функций f экспоненциального типа таких, что

$$h_f(\varphi) < H(\varphi, D), \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

и для каждого $k \geq 1$ функция f обращается в нуль в точке λ_k с кратностью не меньшей чем n_k. Другими словами, f/f_Λ — целая функция, где

$$f_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)^{n_k} e^{\frac{n_k z}{\lambda_k}}.$$

Отметим, что функция f_Λ — целая функция первого порядка и возможно бесконечного типа, т.е., вообще говоря, она не является целой функцией экспоненциального типа. Она будет таковой тогда и только тогда, когда $\overline{n}(\Lambda) < \infty$ и

$$\varlimsup_{r\to\infty} \left| \sum_{|\lambda_k|<r} \frac{n_k}{\lambda_k} \right| < \infty.$$

Положим

$$J(D) = \{e^{i\varphi} \in S(0,1) : H(\varphi, D) = +\infty\}.$$

Отметим, что опорная функция $H(\varphi, D)$ всегда полунепрерывна снизу и является непрерывной внутри интервала, где она ограничена. В частности, если D — ограниченная область, то $H(\varphi, D)$ — непрерывная функция.

Если D ограничена, то $J(D) = \emptyset$. В случае неограниченной области D возможны следующие ситуации:

1) $J(D) = S(0,1)$, т.е. $D = \mathbb{C}$,

2) D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi} < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}\}$,

3) D — полоса $\{z \in \mathbb{C} : b < \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}, e^{i\varphi+\pi}\}$,

4) в остальных случаях $J(D)$ является дугой единичной окружности, которая опирается на угол раствора не меньше чем π.

Через $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ обозначим последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее, т.е. (символ int означает внутренность множества)

$$K_p \subset \mathrm{int} K_{p+1}, \quad p \geq 1, \quad D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p.$$

Пусть $M \subset \mathbb{C}$ и $\rho(z, M)$ обозначает расстояние от точки z до множества M. Положим

$$M^\delta = \bigcup_{z \in M} B(z, \delta|z|).$$

Сформулируем результат, который является частью результата, доказанного в теореме 5.1 из работы [2]. Он вытекает непосредственно из этой теоремы.

Лемма 2.1. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что $m(\Lambda) = 0$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ неполна в $H(D)$, и каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1) для всех $z \in D$. Тогда для каждого $p \geq 1$ и каждого компакта $\mathcal{F} \subset S(0,1) \setminus J(D)$ существует $f \in I(D, \Lambda)$ такая, что для любого $\delta > 0$ найдутся числа $\beta, T > 0$, удовлетворяющие условию: $\lambda_k \in (M_p)^\delta$, если $\rho(\overline{\lambda}_k/|\lambda_k|, \mathcal{F}) < \beta$ и $|\lambda_k| > T$, где*

$$M_p = \{z = re^{i\varphi} : \ln|f(z)| \geq rH(-\varphi, K_p)\}, \quad K_p \subset K(D),$$

и $\overline{\lambda}$ — число комплексно сопряженное с λ.

Используем этот результат для построения целой функции с нужными свойствами.

Лемма 2.2. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что $m(\Lambda) = 0$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ неполна в $H(D)$, и каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1) для всех $z \in D$. Тогда для любых φ_1 и φ_2 таких, что $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ и*

$$\{e^{i\varphi} : \varphi \in [-\varphi_2, -\varphi_1]\} \subset S(0,1) \setminus \overline{J(D)}, \tag{2.9}$$

существует функция $u \in I(\mathbb{C}, \Lambda(\varphi_1, \varphi_2))$ *такая, что*

$$\underline{h}_u(\varphi) = h_u(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad h_u(\varphi) = H(-\varphi, D), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]. \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу (2.10) существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\{e^{-i\varphi} : \varphi \in [\varphi_1 - 2\alpha, \varphi_2 + 2\alpha]\} \subset S(0,1) \setminus \overline{J(D)}. \tag{2.11}$$

Положим

$$D_1 = \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi, D), \varphi \in [-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha]\}.$$

Уменьшая при необходимости $\alpha > 0$, можно считать, что $\varphi_2 - \varphi_1 + 4\alpha < \pi$. Тогда D_1 — неограниченная выпуклая область, лежащая в угле, стороны которого находятся на опорных прямых $L(-\varphi_2 - 2\alpha, D)$ и $L(-\varphi_1 + 2\alpha, D)$. При этом

$$H(\varphi, D_1) = H(\varphi, D), \quad \varphi \in [-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha].$$

Пусть $z_1 \in \partial D_1 \cap L(-\varphi_1 + 2\alpha, D)$ и $z_2 \in \partial D_1 \cap L(-\varphi_2 - 2\alpha, D)$. Имеем:

$$\mathrm{Re}(z_1 e^{-i\varphi}) < H(\varphi, D_1), \quad \mathrm{Re}(z_2 e^{-i\varphi}) < H(\varphi, D_1), \quad \varphi \in (-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha).$$

$$\mathrm{Re}(z_1 e^{i(\varphi_1 - 2\alpha)}) = H(2\alpha - \varphi_1, D_1), \quad \mathrm{Re}(z_2 e^{i(\varphi_2 + 2\alpha)}) = H(-\varphi_2 - 2\alpha, D_1).$$

Пусть $D_2 = D_1 \cap \Pi$, где Π — полуплоскость, граничная прямая которой содержит отрезок $T = [z_1, z_2]$, такая, что D_2 — ограниченная область. Из предыдущих соотношений имеем:

$$H(\varphi, D_2) = H(\phi, D), \quad \varphi \in [-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha], \tag{2.12}$$

$$H(\varphi, D_2) > H(\varphi, T), \quad \varphi \in (-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha), \tag{2.13}$$

$$H(\varphi, D_2) = H(\varphi, T), \quad e^{i\varphi} \in S(0,1) \setminus \{e^{-i\vartheta} : \vartheta \in (-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha)\}. \tag{2.14}$$

Положим

$$\psi_0(z) = \varlimsup_{w \to z} \sup\{\psi(w) : \psi \in SH(\mathbb{C}), \psi(w) + \ln|f_\Lambda(w)| \leqslant rH(-\varphi, D_2), w \in \mathbb{C}\},$$

где $w = re^{i\varphi}$ и $SH(\mathbb{C})$ — пространство субгармонических в плоскости функций. Функция ψ_0 также принадлежит этому пространству и удовлетворяет оценке вида

$$\psi_0(z) \leqslant C_0 + a_0|z|^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда по теореме 5 из работы [15] существует целая функция u_0 такая, что

$$|\ln|u_0(z)| - \psi_0(z)| \leqslant B_0 \ln|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \tag{2.15}$$

где $B_0 > 0$, а исключительное множество E может быть покрыто кругами $B(\xi_j, r_j)$, $j \geq 1$, такими, что $\sum r_j = A < \infty$.

Пусть $u = u_0 f_\Lambda$. Тогда u — целая функция. Покажем, что она искомая. Прежде всего, заметим, что u обращается в ноль в точках $\lambda_k \in \Lambda(\varphi_1, \varphi_2)$ с кратностью не меньшей чем n_k. В силу (2.15)

$$|\ln|u(z)| - \psi_0(z) - \ln|f_\Lambda(z)|| \leqslant B_0 \ln|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E. \tag{2.16}$$

Поскольку

$$\ln|f_\Lambda(z)| = \varlimsup_{w \to z} \ln|f_\Lambda(w)|,$$

то из определения ψ_0 следует, что:

$$\psi(z) + \ln|f_\Lambda(z)| \leqslant rH(-\varphi, D_2), \quad z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}.$$

Тогда с учетом (2.16) получаем:

$$\ln|u(z)| \leqslant rH(-\varphi, D_2) + B_0 \ln r, \quad z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus E. \tag{2.17}$$

Пусть $|w| > 3A$. Поскольку сумма диаметров кругов $B(\xi_j, r_j)$, $j \geq 1$, равна $2A$, то в круге $B(w, 3A)$ найдется окружность, на которой выполнено (2.17). Тогда по принципу максимума модуля получаем:

$$\ln|u(w)| \leqslant \sup_{z \in B(w,3A)} (rH(-\varphi, D_2) + B_0 \ln r).$$

Отсюда и из (2.4) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $t(\varepsilon) \geq 3A$ такое, что

$$\ln|u(z)| \leqslant r(H(-\varphi, D_2) + \varepsilon), \quad |w| \geq t(\varepsilon).$$

Поэтому верно неравенство $h_u(\varphi) \leqslant H(-\varphi, D_2) + \varepsilon$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то

$$h_u(\varphi) \leqslant H(-\varphi, D_2), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{2.18}$$

Таким образом, $u \in I(\mathbb{C}, \Lambda(\varphi_1, \varphi_2))$.

Докажем теперь равенства (2.10). Предположим, что для некоторого числа $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ верно неравенство

$$\underline{h}_u(\varphi_0) < H(-\varphi_0, D_2) - 4\varepsilon.$$

Тогда в силу предложения 9.3 из работы [16] существует $\delta_0 \in (0, 1/3)$ и последовательность $\{t_m\}$ такие, что $t_m \to +\infty$, $m \to \infty$, и

$$\frac{\ln|u(t_m e^{i\varphi})|}{t_m} \leqslant H(-\varphi_0, D_2) - 3\varepsilon, \quad e^{i\varphi} \in B(e^{i\varphi_0}, 2\delta_0), \quad m \geq 1.$$

Уменьшая при необходимости $\delta_0 \in (0, 1/3)$, в силу (2.4) получаем:

$$\ln|u(re^{i\varphi})| \leqslant r(H(-\varphi, D_2) - 2\varepsilon), \quad re^{i\varphi} \in B(t_m e^{i\varphi_0}, 2\delta_0 t_m), \quad m \geq 1.$$

Тогда согласно (2.16) имеем:

$$\psi_0(z) + \ln|f_\Lambda(z)| \leqslant r(H(-\varphi, D_2) - 2\varepsilon), \quad re^{i\varphi} \in B(t_m e^{i\varphi_0}, 2\delta_0 t_m) \setminus E, \quad m \geq 1. \tag{2.19}$$

В силу (2.11) найдется компакт $K_l \in \mathcal{K}(D)$ такой, что

$$H(-\varphi, K_l) \geq H(-\varphi, D) - \varepsilon, \quad \varphi \in [-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha]. \tag{2.20}$$

Пусть $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon/20)$ удовлетворяет условию

$$H(-\varphi, K_l) \leqslant H(-\varphi, D) - 20\varepsilon_1, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{2.21}$$

Выберем компакт $K_p \in \mathcal{K}(D)$ такой, что

$$H(-\varphi, K_p) \geq H(-\varphi, D) - \varepsilon_1, \quad \varphi \in [-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha]. \tag{2.22}$$

Положим $\mathcal{F} = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [-\varphi_2, -\varphi_1]\}$, и пусть $f \in I(D, \Lambda)$ — функция из леммы 2.1. Согласно (2.11) найдется $\delta \in (0, \delta_0/36)$ такое, что

$$\begin{gathered} |tH(-\psi, D) - H(-\varphi, D)| + 19\varepsilon_1|1 - t| \leqslant \varepsilon_1, \\ \varphi \in [-\varphi_2 - 2\alpha, -\varphi_1 + 2\alpha], \quad te^{i\psi} \in B(e^{i\varphi}, 36\delta). \end{gathered} \tag{2.23}$$

В силу (2.3) можно считать, что

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant (h_f(\varphi) + \varepsilon_1)r, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \geq R(\varepsilon_1) \geq 1.$$

Так как $f \in I(D, \Lambda)$, то $h_f(\varphi) < H(\varphi, D)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Поэтому

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant (H(\varphi, D) + \varepsilon_1)r, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \geq R(\varepsilon_1) \geq 1. \tag{2.24}$$

Можно также считать, что $e^{i\varphi} \in \{e^{-i\vartheta} : \vartheta \in [\varphi_1 - \alpha, \varphi_2 + \alpha]\}$ для каждой точки $re^{i\varphi} \in B(z, 36\delta|z|)$ и каждого круга $B(z, \delta|z|)$, который содержит хотя бы одно $\lambda_k \in \Gamma(\varphi_1, \varphi_2)$.

Пусть $\lambda_k \in \Gamma(\varphi_1, \varphi_2)$ и $|\lambda_k| > \max\{T, 2R(\varepsilon_1)\}$. Согласно (2.22) и лемме 2.1 существует $w_k = te^{i\vartheta}$ такое, что

$$\ln|f(w_k)| \geq tH(-\vartheta, K_p) \geq t(H(-\vartheta, D) - \varepsilon_1) \tag{2.25}$$

и $\lambda_k \in B(w_k, \delta t)$. Можно считать, что $\delta t \geq A$. В силу (2.23) и (2.24) имеем:

$$\ln |f(z)| \leqslant t(H(-\vartheta, D) + 2\varepsilon_1), \quad z \in B(w_k, 36\delta t).$$

Отсюда и (2.25) получаем:

$$\ln |f_k(z)| \leqslant 3\varepsilon_1 t, \quad z \in B(w_k, 36\delta t), \quad f(z) = \frac{f(z)}{f(w_k)}.$$

Тогда по теореме об оценке снизу модуля аналитической функции [1, гл. I, теорема 4.2]

$$\ln |f_k(z)| \geq -18\varepsilon_1 t, \quad z \in B(w_k, 6\delta t) \setminus E_w,$$

где E_w — объединение кругов, сумма радиусов которых равна δt. Выберем окружность $S(w_k, \delta t(w_k))$, которая не пересекает $E_w \cup E$, такую, что $t(w_k) \in (t, 6t)$. В силу (2.25)

$$\ln |f(z)| \geq t(H(-\vartheta, D) - 19\varepsilon_1), \quad z \in S(w_k, \delta t(w_k)).$$

Учитывая еще (2.23) и (2.21), получаем:

$$\ln |rf(re^{i\varphi})| \geq r(H(-\varphi, D) - 20\varepsilon_1) \geq rH(-\varphi, K_l), \quad re^{i\varphi} \in S(w_k, \delta t(w_k)). \tag{2.26}$$

Пусть $\lambda_k \in \Gamma(\varphi_1, \varphi_2)$ и $|\lambda_k| \leqslant \max\{T, 2R(\varepsilon_1)\}$. Выберем круг $B(\lambda_k, \tau_k) \subset \Gamma(\varphi_1, \varphi_2)$, который не содержит других точек λ_j. Положим

$$b = \min_{\lambda_k} \min_{re^{i\varphi} \in S(\lambda_k, \tau_k)} \left(\ln |rf(re^{i\varphi})| - rH(-\varphi, K_l)\right),$$

где первый минимум берется по всем указанным λ_k. Рассмотрим множество

$$\{z = re^{i\varphi} : r \ln |f(z)| < rH(-\varphi, K_l) - |b|\}.$$

Пусть Ω — объединение всех его связных компонент, каждая из которых содержит хотя бы одну точку $\lambda_k \in \Gamma(\varphi_1, \varphi_2)$. Тогда множество Ω содержит все точки $\lambda_k \in \Gamma(\varphi_1, \varphi_2)$, а само содержится в объединении кругов $B(w_k, \delta t(w_k))$ и $B(\lambda_j, \tau_j)$. Из (2.26) и определения числа b следует, что $\overline{\Omega} \subset \Gamma(\varphi_1 - \alpha, \varphi_2 + \alpha)$.

Положим

$$\psi_1(z) = \ln |zf(z)|, \quad \psi_2(z) = \psi_1(re^{i\varphi}) = rH(-\varphi, K_l) - |b|, \quad \psi_3(z) = rH(-\varphi, T),$$

$$\psi_4(z) = \begin{cases} \psi_1(z) - \ln |f_\Lambda(z)|, & z \in \overline{\Omega}, \\ \max\limits_{j=1,2}(\psi_j(z) - \ln |f_\Lambda(z)|), & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Функции $\psi_2(z)$ и $\psi_3(z)$ являются выпуклыми во всей плоскости. Поэтому $\psi_2, \psi_3 \in SH(\mathbb{C})$. Поскольку функция $zf(z)/(f_\Lambda(z))$ — целая, а функция f_Λ не имеет нулей на множестве $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (в частности, $\ln |f_\Lambda(z)|$ — гармоническая функция), то непосредственно из определения функции ψ_4 вытекает, что она является субгармонической в $\mathbb{C} \setminus \partial\Omega$. Пусть $z \in \partial\Omega$. Тогда в силу полунепрерывности сверху функций $\psi_j(z) - \ln |f_\Lambda(z)|$, $j = 1, 2$, и определения множества Ω имеют место соотношения

$$\psi_4(z) = \psi_1(z) - \ln |f_\Lambda(z)| \geq \varlimsup_{w \to z}(\psi_1(w) - \ln |f_\Lambda(w)|) = \varlimsup_{w \to z} \psi_4(w),$$

т.е. $\psi(w)$ полунепрерывна сверху в точке z. Кроме того, при достаточно малом $\tau > 0$

$$\psi_4(z) = \ln \left|\frac{zf(z)}{f_\Lambda(z)}\right| \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{B(z,\tau)} (\ln |wf(w)| - \ln |f_\Lambda(w)|) dxdy \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{B(z,\tau)} \psi_4(w) dxdy.$$

Таким образом, $\psi_4 \in SH(\mathbb{C})$. Поскольку $f \in I(D, \Lambda)$, то с учетом (2.3) найдется компакт $K_s \subset \mathcal{K}(D)$, $s \geq l$, и число $b_1 > 0$ такие, что

$$\ln |f(re^{i\varphi})| - b_1 \leqslant rH(-\varphi, K_s), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C}.$$

Отсюда с учетом определения ψ_4 получаем:

$$\psi_4(z) - b_1 + \ln |f_\Lambda(z)| \leqslant rH(-\varphi, K_s), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C}. \tag{2.27}$$

Положим

$$\psi(z) = \begin{cases} \max\{\psi_4(z) - b_1, \psi_3(z) - \ln|f_\Lambda(z)|\}, & z \in \Gamma(\varphi_1 - 2\alpha, \varphi_2 + 2\alpha), \\ \psi_3(z) - \ln|f_\Lambda(z)|, & z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma(\varphi_1 - 2\alpha, \varphi_2 + 2\alpha). \end{cases}$$

Так как $K_s \subset \mathcal{K}(D)$, то в силу (2.12), (2.14) и (2.27)

$$\psi_3(z) - \ln|f_\Lambda(z)| \geq \psi_4(z) - b_1, \quad z \in \partial\Gamma(\varphi_1 - 2\alpha, \varphi_2 + 2\alpha).$$

Тогда, как и выше, имеем: $\psi \in SH(\mathbb{C})$. Кроме того, из (2.27), (2.12)–(2.14) и определения функции ψ следует неравенство

$$\psi(z) + \ln|f_\Lambda(z)| \leqslant rH(-\varphi, D_2), \quad z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}.$$

Отсюда с учетом (2.19) и определения функции ψ_0 получаем:

$$\psi(z) + \ln|f_\Lambda(z)| \leqslant r(H(-\varphi, D_2) - 2\varepsilon), \quad z = re^{i\varphi} \in B(t_m e^{i\varphi_0}, 2\delta_0 t_m) \setminus E, \quad m \geq 1. \quad (2.28)$$

Пусть круг $B(t_{m(j)}e^{i\varphi_0}, 3\delta_0 t_{m(j)}/2)$, $j \geq 1$, не содержит ни одну из точек w_k. Это означает, что

$$B(t_{m(j)}e^{i\varphi_0}, \delta_0 t_{m(j)}) \cap \Omega = \emptyset, \quad j \geq j_0. \quad (2.29)$$

Можно считать, что $\delta_0 t_{m(j)} > 2A$. Тогда найдется точка $\nu_j \in B(t_{m(j)}e^{i\varphi_0}, \delta_0 t_{m(j)})$ такая, что

$$\psi(\nu_j) + \ln|f_\Lambda(\nu_j)| \leqslant \rho_j(H(-\theta_j, D_2) - 2\varepsilon), \quad \nu_j = \rho_j e^{i\theta_j}, \quad j \geq j_0. \quad (2.30)$$

Из (2.29) и определения функции ψ следуют неравенства

$$\psi(\nu_j) + \ln|f_\Lambda(\nu_j)| \geq \rho_j H(-\theta_j, T), \quad \nu_j \in \mathbb{C} \setminus \Gamma(\varphi_1 - 2\alpha, \varphi_2 + 2\alpha),$$

$$\psi(\nu_j) + \ln|f_\Lambda(\nu_j)| \geq \rho_j H(-\theta_j, K_l) - |b| - b_1, \quad \nu_j \in \mathbb{C} \setminus \Gamma(\varphi_1 - 2\alpha, \varphi_2 + 2\alpha).$$

В силу (2.14), (2.12) и (2.20) последние два неравенства противоречат (2.30).

Предположим, теперь, что для всех $m \geq m_0$ круг $B(t_m e^{i\varphi_0}, 3\delta_0 t_m/2)$ содержит точку $w_{k(m)}$. Тогда

$$S(w_{k(m)}, \delta t(w_{k(m)})) \subset B(t_m e^{i\varphi_0}, 2\delta_0 t_m), \quad m \geq m_0.$$

Поскольку окружность $S(w_{k(m)}, \delta t(w_{k(m)}))$ не пересекает множество E, то в каждой ее точке выполнены одновременно неравенства (2.26) и (2.28). С учетом (2.12) и (2.20) получаем противоречие.

Таким образом,

$$\underline{h}_u(\varphi) \geq H(-\varphi, D_2), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Вместе с (2.7), (2.12) и (2.18) это дает нам (2.10). Лемма доказана. $\square$

3. Фундаментальный принцип

Пусть D — выпуклая область и z_1, z_2 — точки ее границы ∂D. Через $s(z_1, z_2, D)$ обозначим длину дуги $\gamma \subset \partial D$, соединяющей z_1 и z_2, движение по которой от z_1 к z_2 осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки). Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ такого, что $e^{i\varphi} \in S(0,1) \setminus \overline{J(D)}$ пересечение

$$L(\varphi) = \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) = H_K(e^{i\varphi})\} \cap \partial D$$

(опорной прямой и границы области) является либо точкой $z(\varphi)$ либо отрезком. Множество $\Phi(D)$ направлений φ, для которых $L(\varphi)$ — отрезок, не более чем счетное множество. Положим

$$S_D(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{z_1 \in L(\varphi_1), z_2 \in L(\varphi_2)} s(z_1, z_2, D).$$

Функция $S_D(\varphi_1, \varphi_2)$ является неубывающей по φ_2 и невозрастающей по φ_1, а множество ее точек разрыва по обеим переменным совпадает с $\Phi(D)$. Если $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$, то

$$S_D(\varphi_1, \varphi_2) = s(z(\varphi_1), z(\varphi_2), D).$$

Используя формулу (1.114) из книги [11], получаем:

$$S_D(\varphi_1,\varphi_2)=H'(\varphi_2,D)-H'(\varphi_1,D)+\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}H(\varphi,D)d\varphi,\quad \varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(D). \tag{3.1}$$

Отметим, что множество $\Phi(D)$ совпадает с множеством чисел φ, для которых производная $H'(\varphi,D)$ не существует. При этом всегда существуют односторонние производные функции $H(\varphi,D)$.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$. Символом $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество пределов всех сходящихся последовательностей вида $\left\{\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}|\right\}_{j=1}^{\infty}$. Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество окружности $S(0,1)$. Положим

$$m(\Lambda,\mu)=\sup\varlimsup_{k\to\infty}\frac{n_{k(j)}}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где супремум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ таким, что $\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}|\to\mu$. Если $\mu\notin\Theta(\Lambda)$, то полагаем $m(\Lambda,\mu)=0$. Нетрудно заметить, что $m(\Lambda)=0$ тогда и только тогда, когда $m(\Lambda,\mu)=0$, $\mu\in\Theta(\Lambda)$.

Теорема 3.1. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ неполна в $H(D)$, и каждая функция $g\in W(\Lambda,D)$ представляется рядом (1.1), который сходится равномерно на компактах в области D. Тогда для любых $\varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(\Lambda_f)$ таких, что $0<\varphi_2-\varphi_1<\pi$ и*

$$\{e^{i\varphi}:\varphi\in[-\varphi_2,-\varphi_1]\}\subset S(0,1)\setminus\overline{J(D)},$$

верно неравенство

$$\overline{n}_0(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2))\leqslant\frac{1}{2\pi}S_D(-\varphi_2,-\varphi_1). \tag{3.2}$$

Доказательство. Если выполнены условия данной теоремы, то по теореме 4.2 из работы [7] $m(\Lambda,\mu)=0$, $\mu\in\{e^{i\varphi}:\varphi\in[-\varphi_2,-\varphi_1]\}$. Отсюда следует, что $m(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2))=0$. По условию каждая функция $g\in W(\Lambda,D)$ представляется рядом (1.1) для всех $z\in D$. В частности, это относится ко всем функциям $g\in W(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2),D)$. Система $\mathcal{E}(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2))$ неполна в $H(D)$, т.к. этим свойством обладает система $\mathcal{E}(\Lambda)$. Таким образом, для последовательности $\Lambda=\Lambda(\varphi_1,\varphi_2)$ выполнены все условия леммы 2.2. Тогда согласно этой лемме существует функция $u\in I(\mathbb{C},\Lambda(\varphi_1,\varphi_2))$ такая, что верно (2.10).

Из первого равенства в (2.10) с учетом (2.6)–(2.8) находим, что u имеет регулярный рост. Тогда выполнено (2.5). Из этого равенства, (3.1) и второго равенства в (2.10) имеем:

$$n(\Lambda_u(\varphi_1,\varphi_2))=\frac{1}{2\pi}S_D(-\varphi_2,-\varphi_1).$$

Отсюда и (2.2) получаем:

$$\overline{n}_0(\Lambda_u(\varphi_1,\varphi_2))=\frac{1}{2\pi}S_D(-\varphi_2,-\varphi_1).$$

Так как $u\in I(\mathbb{C},\Lambda(\varphi_1,\varphi_2))$, то последнее равенство дает нам (3.2). Теорема доказана.

$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Леонтьев. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
2. А.С. Кривошеев. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. РАН. Сер. матем. **68**:2, 71–136 (2004).
3. О.А. Кривошеева, А.С. Кривошеев. *Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* // Функц. анализ и его прил. **46**:4, 14–30 (2012).

4. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве* // Матем. заметки. **99**:5, 684–697 (2016).
5. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. сб. **204**:12, 49–104 (2013).
6. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций* // Алгебра и анализ. **27**:2, 132–195 (2015).
7. О.А. Кривошеева, А.С. Кривошеев. *Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром* // Алгебра и анализ. **29**:4, 82–139 (2017).
8. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Инвариантные подпространства в полуплоскости* // Уфимск. матем. журн. **12**:3, 30–44 (2020).
9. A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva. *Invariant subspaces in unbounded domains* // Probl. Anal. Issues Anal. **10 (28)**:3, 91–107 (2021).
10. А.И. Абдулнагимов, А.С. Кривошеев. *Правильно распределенные подмножества в комплексной плоскости* // Алгебра и анализ. **28**:4, 1–46 (2016).
11. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
12. О.А. Кривошеева, А.С. Кривошеев, А.И. Рафиков. *Оценки снизу целых функций* // Уфимск. матем. журн. **11**:3, 46–62 (2019).
13. П. Лелон, Л. Груман. *Целые функции многих комплексных переменных.* М.: Мир. 1989.
14. А.С. Кривошеев. *Об индикаторах целых функций и продолжении решений однородного уравнения свертки* // Матем. сб. **184**:8, 81–108 (1993).
15. Р.С. Юлмухаметов. *Об Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica. **11**, 257–282 (1985).
16. А.С. Кривошеев, В.В. Напалков. *Комплексный анализ и операторы свертки* // УМН. **47**:6, 3–58 (1992).

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`

Олеся Александровна Кривошеева,
ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`