ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 3 (2023). С. 14-41.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М.Х. БЕШТОКОВ

Аннотация. Рассматриваются начально-краевые задачи для многомерного псевдопараболического уравнения с граничными условиями первого рода и специального вида. Для приближенного решения поставленных задач многомерное псевдопараболическое уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром. Показано, что при стремлении малого параметра к нулю решение соответствующей модифицированной задачи сходится к решению исходной задачи. Для каждой из задач построена локально-одномерная разностная схема А.А. Самарского, основная идея которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. С помощью принципа максимума получены априорные оценки, откуда следуют единственность, устойчивость и сходимость решения локально-одномерной разностной схемы в равномерной метрике. Построен алгоритм численного решения модифицированной задачи с условиями специального вида.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, уравнение влагопереноса, интегро-дифференциальное уравнение, начально-краевая задача, разностные схемы, локально-одномерная схема, априорные оценки, устойчивость и сходимость.

Mathematics Subject Classification: 35L35, 65N12

1. Введение

Хорошо известно, что краевые задачи для псевдопараболических уравнений возникают при изучении фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [1]-[3], движений почвенной влаги [4]-[6], при описании тепломассопереноса [7]-[10], волновых процессов и во многих других областях.

Краевые задачи для различных классов уравнений третьего порядка изучались в работах [11]-[16]. Широкий спектр результатов по исследованию начальных и начально-краевых задач для сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа, а также вопросов локальной разрешимости, условий разрушения решений и глобальной во времени разрешимости был получен в [17]. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка изучены в работе [18].

С точки зрения численной реализации переход от одномерного случая к многомерному вызывает существенные затруднения. Сложность заключается в значительном увеличении объема вычислений, возникающем при переходе от одномерных задач к многомерным. В этой связи актуальное значение приобретает задача построения экономичных разностных схем для численного решения многомерных задач.

M.Kh. Beshtokov, Numerical solution of initial-boundary value problems for a multidimensional pseudoparabolic equation.

Поступила 26 июля 2022 г.

В данной работе рассматриваются начально-краевые задачи для многомерного псевдопараболического уравнения с переменными коэффициентами. Целью работы является построение и исследование сходимости приближенного решения каждой из поставленных задач при аппроксимации по времени на основе локально-одномерных схем расщепления [19], [20]. Основная трудность состоит в необходимости расщепления не только первого оператора, но и оператора при производной по времени, поэтому построение схем расщепления достигается за счет перехода к нелокальной по времени задаче и ее параболической регуляризации. Исследование устойчивости и сходимости проводится по методике А.А. Самарского [21]. С помощью принципа максимума для решения соответствующей задачи получена априорная оценка в равномерной метрике, откуда следуют единственность и устойчивость решения, доказана сходимость. Построен алгоритм численного решения модифицированной задачи с граничными условиями специального вида с использованием рекуррентной формулы для быстрого счета в многомерном случае.

Настоящая работа является продолжением серии работ автора [22]-[26], посвященных исследованию локальных и нелокальных краевых задач для обобщенных псевдопараболических уравнений с переменными коэффициентами.

2. Постановка первой начально-краевой задачи

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0, T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед

$$\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leqslant x_k \leqslant l_k, \quad k = 1, 2, \dots, p\}$$

с границей Γ, $\overline{G} = G + \Gamma$, рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \alpha \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$u\Big|_{\Gamma} = \mu(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{2.3}$$

где

$$\begin{gathered} Lu = \sum_{k=1}^{p} L_k u, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + r_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} - q_k(x,t)u, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ u(x,t) \in C^{4,2}\left(\overline{Q}_T\right), \quad \Theta_k(x,t) \in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right), \quad r_k(x,t), q_k(x,t), f(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right), \\ 0 < c_0 \le \Theta_k(x,t), q_k(x,t) \le c_1, \quad |r_k| < c_2, \quad \left|\frac{\Theta_k}{\partial t}, \frac{q_k}{\partial t}, \frac{r_k}{\partial t}\right| \leqslant c_3, \quad c_0, c_1, c_2 = const > 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

$C^{m,n}$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и n по t, $Q_T = G \times (0, T]$, $\alpha > 0$.

Преобразуем уравнение (2.1), тогда умножив обе части (2.1) на $\frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha} t}$, затем заменив t на ξ и проинтегрировав полученное выражение по ξ от 0 до t, получим уравнение

$$\mathcal{B}u = Lu + \widetilde{f}(x,t), \tag{2.5}$$

где

$$\mathcal{B}u = \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)} u_\xi d\xi, \quad \widetilde{f}(x,t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)} f(x,\xi) d\xi - e^{-\frac{1}{\alpha}} Lu_0(x), \quad \alpha > 0.$$

В той же области вместо задачи (2.2), (2.3), (2.5) рассмотрим следующую задачу с малым параметром ε

$$\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}+\mathcal{B}u^\varepsilon=Lu^\varepsilon+\widetilde{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{2.6}$$

$$u^\varepsilon|_\Gamma=\mu(x,t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.7}$$

$$u^\varepsilon(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{2.8}$$

где $\varepsilon=const>0$.

Так как при $t=0$ начальные условия для уравнения (2.5) и (2.6) совпадают, то в окрестности $t=0$ у производной u_t^ε не возникает особенности типа пограничного слоя [27], [28].

Покажем, что $u^\varepsilon\to u$ в некоторой норме при $\varepsilon\to 0$. Обозначим через $\tilde z=u^\varepsilon-u$ и подставим $u^\varepsilon=\tilde z+u$ в задачу (2.6)-(2.8). Тогда получим

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde z}{\partial t}+\mathcal{B}\tilde z=L\tilde z+\overline{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{2.9}$$

$$\tilde z|_\Gamma=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.10}$$

$$\tilde z(x,0)=0,\quad x\in\overline{G},\quad \overline{G}=G+\Gamma, \tag{2.11}$$

где $\overline{f}(x,t)=-\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Лемма 2.1. *Для любой абсолютно непрерывной на [0,T] функции $v(t)$ справедливо неравенство*

$$v(t)\mathcal{B}v(t)\geqslant\frac{1}{2}\mathcal{B}v^2(t), \tag{2.12}$$

где $\mathcal{B}u=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}u_\xi d\xi$, $\alpha>0$.

Доказательство. Перепишем неравенство (2.12) в виде

$$\begin{aligned}
v(t)\mathcal{B}v-\frac{1}{2}\mathcal{B}v^2(t)=&v(t)\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau d\tau-\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}(v^2)_\tau d\tau\\
=&\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)\left(v(t)-v(\tau)\right)d\tau\\
=&\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)\left(\int_\tau^t v_\eta(\eta)d\eta\right)d\tau\\
=&\frac{1}{\alpha}\int_0^t v_\eta(\eta)d\eta\int\limits_0^\eta e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)d\tau\\
=&\frac{1}{\alpha}\int_0^t\frac{v_\eta(\eta)e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\eta)}}{e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\eta)}}d\eta\int\limits_0^\eta e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)d\tau\\
=&\frac{1}{2\alpha}\int_0^t e^{\frac{1}{\alpha}(t-\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\int\limits_0^\eta e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)d\tau\right]^2d\eta
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\left[\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)d\tau\right]^2$$
$$+\frac{1}{2\alpha^2}\int_0^t e^{\frac{1}{\alpha}(t-\eta)}\left[\int\limits_0^\eta e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)d\tau\right]^2 d\eta\geqslant 0.$$

Таким образом,

$$v(t)\mathcal{B}v(t)\geqslant\frac{1}{2}\mathcal{B}v^2(t).$$

□

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (2.9) скалярно на $\tilde{z}$:

$$\left(\varepsilon\frac{\partial\tilde{z}}{\partial t},\tilde{z}\right)+\left(\mathcal{B}\tilde{z},\tilde{z}\right)=\left(\sum_{k=1}^p\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k}\right),\tilde{z}\right)$$
$$+\left(\sum_{k=1}^p r_k(x,t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k},\tilde{z}\right)-\left(\sum_{k=1}^p q_k(x,t)\tilde{z},\tilde{z}\right)+\left(\overline{f}(x,t),\tilde{z}\right), \tag{2.13}$$

где скалярное произведение и норма имеют вид:

$$\left(w,v\right)=\int_G wvdx,\quad \|v(\cdot,t)\|_0^2=\|v\|_0^2=\int_G v^2dx,\quad \|v\|^2_{L_2(0,l_k)}=\int_0^{l_k}v^2(x,t)dx_k.$$

Далее через $M_i,\ i=1,2,\ldots$ обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Используя лемму 2.1, преобразуем интегралы, входящие в тождество (2.13):

$$\left(\varepsilon\frac{\partial\tilde{z}}{\partial t},\tilde{z}\right)=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2, \tag{2.14}$$

$$\left(\mathcal{B}\tilde{z},\tilde{z}\right)=\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^p\mathcal{B}\tilde{z},\tilde{z}\right)=\frac{1}{p}\int_G\sum_{k=1}^p\tilde{z}\mathcal{B}\tilde{z}dx=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^p\int_G\tilde{z}\mathcal{B}\tilde{z}dx$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^p\int_{G'}\left(\int_0^{l_k}\tilde{z}\mathcal{B}\tilde{z}dx_k\right)dx'\geqslant\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^p\int_{G'}\left(\int_0^{l_k}\mathcal{B}\tilde{z}^2dx_k\right)dx' \tag{2.15}$$
$$=\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^p\int_{G'}\mathcal{B}\|\tilde{z}\|^2_{L_2(0,l_k)}dx'=\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^p\mathcal{B}\|\tilde{z}\|_0^2=\frac{1}{2}\mathcal{B}\|\tilde{z}\|_0^2,$$

$$\left(\sum_{k=1}^p\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k}\right),\tilde{z}\right)=-\sum_{k=1}^p\int_G\Theta_k(x,t)\left(\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k}\right)^2dx\leqslant -c_0\left\|\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}\right\|_0^2, \tag{2.16}$$

где

$$G'=\{x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_p):0<x_k<l_k\},\quad dx'=dx_1dx_2\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_p.$$

Далее, для оценки слагаемых правой части применим ε-неравенство Коши

$$\left(\sum_{k=1}^p r_k(x,t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k},\tilde{z}\right)=\int_G\sum_{k=1}^p r_k(x,t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k}\tilde{z}dx=\sum_{k=1}^p\int_G r_k(x,t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k}\tilde{z}dx$$
$$\leqslant\varepsilon_0\sum_{k=1}^p\int_G\left(\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k}\right)^2dx+\frac{c_2^2}{4\varepsilon_0}\sum_{k=1}^p\int_G\tilde{z}^2dx, \tag{2.17}$$

$$\left(\overline{f}(x,t),\tilde{z}\right)\leqslant\frac{1}{4\varepsilon_1}\|\overline{f}\|_0^2+\varepsilon_1\|\tilde{z}\|_0^2. \tag{2.18}$$

Учитывая преобразования (2.14)-(2.18), из (2.13) получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2+\frac{1}{2}\mathcal{B}\|\tilde{z}\|_0^2+(c_0-\varepsilon_0)\left\|\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}\right\|_0^2+\left(c_0-\varepsilon_1-\frac{c_2^2}{4\varepsilon_0}\right)\|\tilde{z}\|_0^2\leqslant\frac{1}{4\varepsilon_1}\|\overline{f}\|_0^2. \tag{2.19}$$

Второе слагаемое в левой части (2.19) преобразуем следующим образом

$$\mathcal{B}\|\tilde{z}\|_0^2=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}\left(\|\tilde{z}\|_0^2\right)_\xi d\xi=\frac{1}{\alpha}\|\tilde{z}\|_0^2-\frac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}\|\tilde{z}\|_0^2d\xi. \tag{2.20}$$

Выбирая $\varepsilon_0=\varepsilon_1=\dfrac{c_0}{2}$ и $c_2<c_0$, из (2.19) с учетом (2.20) находим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2+\left\|\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}\right\|_0^2+\|\tilde{z}\|_0^2\leqslant M_1\int\limits_0^t\|\tilde{z}\|_0^2d\xi+M_2\|\overline{f}\|_0^2. \tag{2.21}$$

Проинтегрируем (2.21) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2+\int_0^t\left(\|\tilde{z}\|_0^2+\left\|\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}\right\|_0^2\right)d\tau\leqslant M_1\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau\|\tilde{z}\|_0^2d\xi+M_2\int_0^t\|\overline{f}\|_0^2d\tau. \tag{2.22}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (2.22). Тогда перепишем (2.22) в виде

$$Y\leqslant M_1\int_0^t Y d\tau+M_2F, \tag{2.23}$$

где $Y=\int_0^t\|\tilde{z}\|_0^2d\tau,\ F=\int_0^t\|\overline{f}\|_0^2d\tau$.

На основании леммы Гронуолла ([29, глава III, §1, лемма 1.1]) из (2.23) получаем оценку

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2+\int_0^t\left(\|\tilde{z}\|_0^2+\left\|\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}\right\|_0^2\right)d\tau\leqslant M_3\int_0^t\|\overline{f}\|_0^2d\tau=\varepsilon^2M_3\int_0^t\left\|\frac{\partial u}{\partial\tau}\right\|_0^2d\tau=O(\varepsilon^2), \tag{2.24}$$

где M — зависит только от входных данных задачи (2.1)-(2.3).

Из априорной оценки (2.24) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon\to 0$ в норме

$$\|\tilde{z}\|_1^2=\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2+\|\tilde{z}\|_{2,Q_t}^2+\left\|\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}\right\|_{2,Q_t}^2,$$

где $\|\tilde{z}\|_{2,Q_t}^2=\int\limits_0^t\|\tilde{z}\|_0^2d\tau$, если u_t — ограниченная, достаточно гладкая функция. Поэтому при малом ε решение задачи (2.6)-(2.8) будем принимать за приближенное решение первой начально-краевой задачи для многомерного псевдопараболического уравнения (2.1)-(2.3).

3. Локально-одномерная разностная схема

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k=\frac{l_k}{N_k}, k=1,2,\ldots,p:$

$$\bar{\omega}_{h_k}=\left\{x_k^{(i_k)}=i_kh_k:i_k=0,1,\ldots,N_k,\quad h_k=\frac{l_k}{N_k},\quad k=1,2,\ldots,p\right\},\quad\bar{\omega}=\prod_{k=1}^p\bar{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $[0,T]$ введем сетку

$$\bar{\omega}'_\tau = \left\{0, t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j+\frac{k}{p}\right)\tau, \quad \tau = \frac{T}{j_0}, \quad j = 0,1,\ldots,j_0-1, \quad k = 1,2,\ldots,p\right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{k}{p}}$, $k = 1,2,\ldots,p-1$. Будем обозначать через ω'_τ — множество узлов сетки $\bar{\omega}'_\tau$, для которых $t > 0$.

Уравнению (2.6) поставим в соответствие цепочку из p «одномерных» уравнений, для этого уравнение (2.6) перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^{p} \pounds_k u^\varepsilon = 0, \quad \pounds_k u^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{p}\mathcal{B}u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon - f_k,$$

где $f_k(x,t)$, $k = 1,2,\ldots,p$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$ и удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{p} f_k = f$.

На каждом полуинтервале $\Delta_k = \left(t_{j+\frac{k-1}{p}}, t_{j+\frac{k}{p}}\right]$, $k = 1,2,\ldots,p$ будем последовательно решать задачи

$$\begin{aligned} &\pounds_k \vartheta_{(k)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1,2,\ldots,p, \\ &\vartheta_{(k)} = \mu(x,t) \text{ при } x \in \Gamma_k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

полагая при этом

$$\begin{aligned} &\vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x,t_j) = \vartheta_{(p)}(x,t_j), \\ &\vartheta_{(k)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right) = \vartheta_{(k-1)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right), \quad k = 2,3,\ldots,p, \quad j = 0,1,\ldots,j_0-1, \end{aligned}$$

Γ_k — множество граничных точек по направлению x_k.

Будем называть решением этой задачи при $t = t_{j+1}$ функцию $\vartheta(t_{j+1}) = \vartheta_{(p)}(t_{j+1})$.

Найдем дискретный аналог $\mathcal{B}u$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{t_{j+\frac{k}{p}}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)} u_\xi d\xi =& \frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)} \dot{u}(x,\xi)d\xi \\ =& \frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)} \left(\dot{u}(x,\tilde{t}) + \ddot{u}(x,\bar{\xi})(\xi-\tilde{t})\right) d\xi \\ =& \sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} \\ &+ \frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)} \ddot{u}(x,\bar{\xi})(\xi-\tilde{t})d\xi, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \frac{u^{\frac{s}{p}} - u^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}, \quad \tilde{t} = t_{\frac{s}{p}-\frac{1}{2p}}, \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad t_{\frac{s-1}{p}} < \bar{\xi} < \xi.$$

Оценим второе слагаемое в правой части (3.2). Тогда получим

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)} \ddot{u}(x,\bar{\xi})(\xi-\tilde{t})d\xi \leqslant \frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}M\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)} d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{M\tau}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\\
&=\frac{M\tau}{p}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right)\leqslant\frac{M\tau}{p}=O\left(\frac{\tau}{p}\right),
\end{aligned}
$$

где $|\ddot{u}(x,\xi)|\leqslant M$.

Итак, имеем

$$
\frac{1}{\alpha}\int_0^{t_{j+\frac{k}{p}}}e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)}u_\xi d\xi=\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)u_{\bar t}^{\frac{s}{p}}+O\left(\frac{\tau}{p}\right). \tag{3.3}
$$

Аналогично [20, Глава VII, §1, п. 10] получим для уравнения (3.1) номера k монотонную схему второго порядка аппроксимации по h_k, для которой справедлив принцип максимума при любых τ и $h_k,\ k=1,2,\ldots,p$. Для этого рассмотрим уравнение (3.1) при фиксированном k с возмущенным оператором $\widetilde{L}_k$:

$$
\frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+\frac{1}{p}\mathcal{B}\vartheta_{(k)}=\widetilde{L}_k\vartheta_{(k)}+f_k,\quad t\in\Delta_k,\quad k=1,2,\ldots,p, \tag{3.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{L}_k\vartheta_{(k)}=\chi_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k}\right)+r_k(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k}-q_k(x,t)\vartheta_{(k)},\\
&\chi_k=\frac{1}{1+R_k},\ R_k=0.5h_k\frac{|r_k|}{\Theta_k}\ \text{– разностное число Рейнольдса.}
\end{aligned}
$$

Каждое из уравнений (3.4) с учетом (3.3) заменим схемой на Δ_k, $k=1,2,\ldots,p$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}\\
&\quad=\widetilde{\Lambda}_k\left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}}+(1-\sigma_k)y^{j+\frac{k-1}{p}}\right)+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\quad x\in\omega_h,\\
&y^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}}=\mu^{j+\frac{k}{p}},\quad j=0,1,\ldots,j_0-1,\\
&y(x,0)=u_0(x),
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

где σ_k — произвольные параметры, $\gamma_{h,k}$ — множество граничных по направлению x_k узлов,

$$
x\in\bar\omega_h=\left\{x_i=(i_1h_1,\ldots,i_ph_p)\in\overline{G},\quad i_k=0,1,\ldots,N_k,\quad h_k=\frac{l_k}{N_k}\right\},\quad y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\frac{y^{\frac{s}{p}}-y^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}},
$$

$$
\widetilde{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}}=\chi_k\left(a_k y_{\bar x}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}+b_k^+a_k^{(+1)}y_{x_k}^{j+\frac{k}{p}}+b_k^-a_k y_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}-d_k y^{j+\frac{k}{p}},\quad a_k=\Theta_k(x_{i-1/2},\bar t),
$$

$$
r_k^+=0.5(r_k+|r_k|)\geq 0,\quad r_k^-=0.5(r_k-|r_k|)\leq 0,\quad b_k^+=\frac{r_k^+}{\Theta_k},\quad b_k^-=\frac{r_k^-}{\Theta_k},\quad r_k=r_k^++r_k^-,
$$

$$
d_k=q_k\left(x,\bar t\right),\quad \varphi^{j+\frac{k}{p}}=f_k\left(x,\bar t\right),\quad \mu^{j+\frac{k}{p}}=\mu\left(x,\bar t\right),\quad \bar t=t^{j+1/2},\quad k=1,2,\ldots,p.
$$

4. Погрешность аппроксимации ЛОС

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое в отдельности уравнение (3.5) номера k не аппроксимирует уравнение (2.6), но сумма погрешностей аппроксимации $\psi=\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_p$ стремится к нулю при τ и $|h|$ стремящимся к нулю.

Будем считать $\sigma_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Пусть $u = u(x,t)$ — решение задачи (2.6), а $y^{j+\frac{k}{p}}$ — решение разностной схемы (3.5). Характеристикой точности локально-одномерной схемы является разность $y^{j+1} - u^{j+1} = z^{j+1}$. Промежуточные значения $y^{j+\frac{k}{p}}$ будем сравнивать с $u^{j+\frac{k}{p}} = u\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right)$, полагая $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$. Подставляя $y^{j+\frac{k}{p}} = z^{j+\frac{k}{p}} + u^{j+\frac{k}{p}}$ в разностное уравнение (3.5), получим

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} B_\tau z^{j+\frac{k}{p}} = \widetilde{\Lambda}_k z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{4.1}$$

$$z^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}} = 0, \quad z(x,0) = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \widetilde{\Lambda}_k u^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) u_{\bar t}^{\frac{s}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} u_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}},$$

$$B_\tau z^{j+\frac{k}{p}} = \sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) z_{\bar t}^{\frac{s}{p}}.$$

Вводя обозначение $\overset{\circ}{\psi}_k = \left(L_k u + f_k - \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{p}\mathcal{B}u\right)^{j+\frac{1}{2}}$ и замечая, что $\sum\limits_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_k = 0$, если $\sum\limits_{k=1}^{p} f_k = f$, представим $\psi_k = \psi_k^{j+\frac{k}{p}}$ в виде $\psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k$, где

$$\overset{*}{\psi}_k = \left(\widetilde{\Lambda}_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{p}B_\tau u^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\mathcal{B}u^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{p} u_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u^{j+\frac{1}{2}}}{\partial t}\right).$$

Ясно, что $\overset{*}{\psi}_k = O(h_k^2 + \tau)$, так как каждая из схем (3.5) номера κ аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (3.4). Таким образом, ЛОС (3.5) обладает суммарной аппроксимацией

$$\overset{*}{\psi}_k = O(h_k^2 + \tau), \quad \overset{\circ}{\psi}_k = O(1), \quad \sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_k = 0,$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} \psi_k = \sum_{k=1}^{p}\left(\overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \overset{*}{\psi}_k = O(|h|^2 + \tau).$$

5. Устойчивость ЛОС

Для решения разностной схемы (3.5) с помощью принципа максимума [20, Глава IV, §2, п. 1] получим априорную оценку в равномерной метрике, выражающую устойчивость локально-одномерной схемы по начальным данным и правой части. Для этого решение задачи (3.5) представим в виде суммы

$$y = \overline{y} + v,$$

где $\overline{y}$ — решение однородных уравнений (3.5) с неоднородными краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{p}\overline{y}_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\overline{y}_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \widetilde{\Lambda}_k \overline{y}^{j+\frac{k}{p}}, \\ &\overline{y}^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}}, \quad \overline{y}(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{5.1}$$

а v — решение неоднородных уравнений с однородными краевыми и начальными условиями:

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p} v_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}=\widetilde{\Lambda}_k v^{j+\frac{k}{p}}+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \\ v^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}}=0, \quad v(x,0)=0.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Получим оценку для $\bar{y}$. Для этого запишем уравнение (5.1) в канонической форме. В точке $P=P(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем

$$\begin{gathered}\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)+\frac{\chi_{i_k} a_{k,i_k+1}}{h_k^2}+\frac{\chi_{i_k} a_{k,i_k}}{h_k^2}+\frac{b_k^+ a_{k,i_k+1}}{h_k}-\frac{b_k^- a_{k,i_k}}{h_k}+d_k\right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} \\ =\frac{\chi_{i_k} a_{k,i_k+1}}{h_k^2} \bar{y}_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{\chi_{i_k} a_{k,i_k}}{h_k^2} \bar{y}_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{b_k^+ a_{k,i_k+1}}{h_k} \bar{y}_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}-\frac{b_k^- a_{k,i_k}}{h_k} \bar{y}_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} \\ +\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon+1-2e^{-\frac{1}{\alpha} t_{\frac{1}{p}}}+e^{-\frac{1}{\alpha} t_{\frac{2}{p}}}\right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha} t_{\frac{1}{p}}}-2e^{-\frac{1}{\alpha} t_{\frac{2}{p}}}+e^{-\frac{1}{\alpha} t_{\frac{3}{p}}}\right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \\ +\cdots+\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-2}{p}}}-2e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-1}{p}}}+e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k}{p}}}\right] \bar{y}_{i_k}^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-1}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k}{p}}}\right] \bar{y}_{i_k}^{0}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

В [20, Глава IV, §2, п. 1] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$\begin{gathered}A(P)y(P)=\sum_{Q\in\Upsilon'(P)} B(P,Q)y(Q)+F(P), \quad P\in\Omega, \\ y(P)=\mu(P) \quad \text{при} \quad P\in S,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где P, Q — узлы сетки $\Omega+S$, $\Upsilon'(P)$ — окрестность узла P, не содержащего самого узла P. Коэффициенты $A(P)$, $B(P,Q)$ (5.4) удовлетворяют условиям

$$A(P)>0, \quad B(P,Q)>0, \quad D(P)=A(P)-\sum_{Q\in\Upsilon'(P)} B(P,Q)\geqslant 0. \tag{5.5}$$

Обозначим через $P(x,t')$, где $x\in\omega_h$, $t'\in\omega'_\tau$ узел $(p+1)-$мерной сетки $\Omega=\omega_h\times\omega'_\tau$, через S — границу Ω, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x\in\overline{\omega}_h$ и узлов $P\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right)$ при $t_{j+\frac{k}{p}}\in\omega'_\tau$ и $x\in\gamma_{h,k}$ для всех $k=1,2,\ldots,p$, $j=0,1,\ldots,j_0$.

Видно, что коэффициенты уравнения (5.3) в точке $P=P\left(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}}\right)$ удовлетворяют условиям (5.5) и $D(P)=0$.

Из теоремы 3 [21, глава V, дополнение, §2, п. 2] следует, что для решения задачи (5.1) верна оценка

$$\|\overline{y}^j\|_C\leqslant\|u_0\|_C+\max_{0<t'\leqslant j\tau}\|\mu(x,t')\|_{C_\gamma}, \tag{5.6}$$

где $\|y\|_C=\max\limits_{x\in\overline{\omega}_h}|y|$, $\|y\|_{C_\gamma}=\max\limits_{x\in\gamma_h}|y|$.

Переходим к оценке функции v. Уравнение (5.2) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{p}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha} t_{\frac{1}{p}}}\right) v_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}=\widetilde{\Lambda}_k v^{j+\frac{k}{p}}+\widetilde{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}, \\ v^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}}=0, \quad v(x,0)=0,\end{gathered} \tag{5.7}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}=\varphi^{j+\frac{k}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k-1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}.$$

Уравнение (5.7) приведем к каноническому виду

$$\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}}\right)+\frac{\chi_{i_k}a_{k,i_k+1}}{h_k^2}+\frac{\chi_{i_k}a_{k,i_k}}{h_k^2}+\frac{b_k^+a_{k,i_k+1}}{h_k}-\frac{b_k^-a_{k,i_k}}{h_k}+d_k\right]v_{i_k}^{j+\frac{k}{p}}$$
$$=\frac{1}{h_k^2}\left[\chi_{i_k}a_{k,i_k+1}v_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\chi_{i_k}a_{k,i_k}v_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}}\right]+\frac{b_k^+a_{k,i_k+1}}{h_k}v_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}-\frac{b_k^-a_{k,i_k}}{h_k}v_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}}+\Phi(P_{j+\frac{k}{p}}),$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(P_{j+\frac{k}{p}})=&\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}},\\ \overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}=&\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\\ &-\frac{1}{\tau}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\left(v_{i_k}^{\frac{s}{p}}-v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\right).\end{aligned}$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 [21, глава V, дополнение, §2, п. 2]

$$\begin{aligned}D'(P_{(k)})=A(P_{(k)})-\sum_{Q\in\Upsilon_k'(P)}B(P_{(k)},Q)=&\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)+d_k\\ \geqslant&\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)>0,\end{aligned}\tag{5.8}$$

где

$$P_{(k)}=P(x,t_{j+\frac{k}{p}}),\quad A(P_{(k)})>0,\quad B(P_{(k)},Q)>0 \text{ для всех } Q\in\Upsilon''_{k-1},Q\in\Upsilon'_k.$$

Тогда получаем

$$\sum_{Q\in\Upsilon''_{k-1}}B(P_{(k)},Q)=\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right)>0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{(k)})}\sum_{Q\in\Upsilon''_{k-1}}B(P_{(k)},Q)=\frac{\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2}{\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)}\leqslant 1,$$

где $\Upsilon'_{\left(P\left(x,t_{j+\frac{k}{p}}\right)\right)}=\Upsilon'_k+\Upsilon'_{k-1}$, Υ'_k — множество узлов $Q=Q(\xi,t_k)\in\Upsilon'_{(P(x,t_k))}$, Υ'_{k-1} — множество узлов $Q=Q(\xi,t_{k-1})\in\Upsilon'_{(P(x,t_{k-1}))}$.

На основании теоремы 3 [21, глава V, дополнение, §2, п. 2], в силу (5.8) получаем

$$\|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C\leqslant\frac{\tau}{\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}}\|\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C+\frac{\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2}{\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}}\|v^{j+\frac{k-1}{p}}\|_C.\tag{5.9}$$

Оценим $\|\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C$, где

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} =&\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}}\right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \\
&- \frac{1}{\tau}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\left(v_{i_k}^{\frac{s}{p}} - v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\right) \\
=&\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right) v_{i_k}^{0} \\
&+ \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right) v_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \cdots \\
&+ \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{3}{p}}}\right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}.
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Так как выражения, стоящие в круглых скобках положительны, то из (5.10) получаем оценку

$$
\|\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C \leqslant \|\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C + \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}}\right) \max_{0\leqslant j'<j}\max_{0\leqslant s\leqslant k-2}\|v^{j'+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{5.11}
$$

С помощью (5.11) из (5.9) находим

$$
\max_{0\leqslant j'<j}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|v^{j'+\frac{s}{p}}\|_C \leqslant \max_{0\leqslant j'<j}\max_{0\leqslant s\leqslant k-1}\|v^{j'+\frac{s}{p}}\|_C + \frac{\tau}{\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}}\max_{0\leqslant j'<j}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\varphi_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{5.12}
$$

Просуммировав (5.12) сначала по $k = 1, 2, \ldots, p$, затем по $j' = 0, 1, \ldots, j$, получим оценку

$$
\|v^{j+1}\|_C \leqslant \|v^0\|_C + \sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\|_C, \tag{5.13}
$$

где $\gamma = \frac{1}{\alpha p}$.

Из оценок (5.6) и (5.13) следует окончательная оценка

$$
\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \max_{0<t'\leqslant t_{j+1}}\|\mu(x,t')\|_{C_\gamma} + \sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{5.14}
$$

Таким образом справедлива

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия (2.4), тогда локально-одномерная схема (3.5) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (3.5) справедлива оценка (5.14).*

6. Равномерная сходимость ЛОС

Чтобы использовать свойство $\sum\limits_{k=1}^{p}\mathring{\psi}_k = 0$, $\mathring{\psi}_k = O(1)$, представим, по аналогии с [20, Глава IX, §3, п. 8], решения задачи для погрешности (4.1)-(4.2) в виде суммы

$$
z_{(k)} = v_{(k)} + \eta_{(k)}, \quad z_{(k)} = z^{j+\frac{k}{p}},
$$

где $\eta_{(k)},\ k = 1, 2, \ldots, p$ определяется условиями

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{p}\eta_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \mathring{\psi}_k, \quad x \in \omega_h + \gamma_{h,k}, \\
&\eta(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

Функция $v_{(k)}$ определяется условиями

$$\frac{\varepsilon}{p}v_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}=\widetilde{\Lambda}_k v_{(k)}+\widetilde{\psi}_k,$$
$$v_{(k)}|_{\gamma_{h,k}}=-\eta_{(k)},\quad v(x,0)=0, \tag{6.2}$$

где $\widetilde{\psi}_k=\overset{*}{\psi}_k+\widetilde{\Lambda}_k\eta_{(k)}$, $\overset{*}{\psi}_k=0(h_k^2+\tau)$.

Покажем, что $\eta^{j+\frac{k}{p}}=O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right),\quad k=1,2,\ldots,p,\quad j=0,1,2,\ldots,j_0-1.$

Ради простоты рассмотрим двумерный случай ($p=2$). Сначала положим $j=0$, т.е. рассмотрим первый слой $(0,t_1]$. Тогда задача (6.1) примет вид

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{k}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{k-s+1}{p}}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}}=\overset{\circ}{\psi}_k,\quad k=1,2.$$

Пусть $k=1$, тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}}=\overset{\circ}{\psi}_1. \tag{6.3}$$

При $k=2$ получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{1}+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_1}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{2}}}\right)\eta_{\bar{t}}^{1}=\overset{\circ}{\psi}_2. \tag{6.4}$$

Складывая выражения (6.3) и (6.4), получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{1}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}-e^{-\frac{1}{\alpha}\tau}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\eta_{\bar{t}}^{1}=0.$$

Откуда следует

$$\eta^1=\frac{e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}-1\right)\eta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}=-\frac{e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\gamma\tau\eta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon+\gamma\tau}. \tag{6.5}$$

Из (6.3) находим

$$\eta^{\frac{1}{2}}=\frac{\tau}{\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\overset{\circ}{\psi}_1=\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\,\psi_1=-\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\,\psi_2\,. \tag{6.6}$$

Учитывая (6.6), из (6.5) находим $\eta^{\frac{1}{2}}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)$, $\eta^1=O\left(\frac{\tau^2}{(\varepsilon+\gamma\tau)^2}\right)$. Допустим, что при $j=n$ выполнено условие

$$\eta^{\frac{1}{2}},\eta^1,\eta^{1+\frac{1}{2}},\ldots,\eta^{n+1}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right). \tag{6.7}$$

Опираясь на допущение (6.7) покажем, что аналогичное условие выполнено и при $j=n+1$. Для чего запишем уравнение (6.1) при $j=n+1,\ p=2:$

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{n+1+\frac{k}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2(n+1)+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{k-s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{k-s+1}{2}}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}}=\overset{\circ}{\psi}_k,\quad k=1,2. \tag{6.8}$$

Полагая в (6.8) $k=1$, находим

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2(n+1)+1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{1-s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{2-s}{2}}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}}=\overset{\circ}{\psi}_1.$$

Преобразуем последнее следующим образом

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\left[\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}(n+\frac{1}{2})\tau}\eta^{\frac{1}{2}}+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}n\tau}\eta^{1}+\ldots\right.\\
\left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+1}-\left(1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+\frac{3}{2}}\right]=\mathring{\psi}_1.
\end{gathered}\tag{6.9}
$$

Рассмотрим отдельно содержимое квадратной скобки, тогда перепишем в виде:

$$
\left(1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)|\eta^{n+\frac{3}{2}}|\leqslant\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\max_{\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant n+1}|\eta^s|\sum_{s=0}^{n+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{\alpha}s\tau}
$$

и, следовательно,

$$
|\eta^{n+\frac{3}{2}}|\leqslant\frac{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}}{1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}}\max_{\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant n+1}|\eta^s|\leqslant\max_{\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant n+1}|\eta^s|=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right).\tag{6.10}
$$

Учитывая (6.7), (6.10), достаточную ограниченность коэффициентов при $\eta^{\frac{1}{2}},\eta^1\ ,\ldots,\ \eta^{n+\frac{3}{2}}$, находим $\eta^{n+\frac{3}{2}}=O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)$.

Положим теперь в (6.8) $k=2$,

$$
\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{n+2}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2n+4}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{2-s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{3-s}{2}}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{2}}=\mathring{\psi}_2,
$$

тогда

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\left[(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}})e^{-\frac{1}{\alpha}(n+1)\tau}\eta^{\frac{1}{2}}\right.\\
+(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}})e^{-\frac{1}{\alpha}(n+\frac{1}{2})\tau}\eta^1+\ldots+(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}})e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\eta^{n+1}\\
\left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+2}\right]=\mathring{\psi}_2.
\end{gathered}\tag{6.11}
$$

Складывая (6.9) и (6.11) с учетом равенства $\mathring{\psi}_1+\mathring{\psi}_2=0$, получим

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\left[\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\tau}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}(n+\frac{1}{2})\tau}\eta^{\frac{1}{2}}+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\tau}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}n\tau}\eta^1+\ldots\right.\\
\left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\tau}}\right)\eta^{n+1}-e^{\frac{1}{\alpha}\tau}\eta^{n+\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+2}\right]=0.
\end{gathered}\tag{6.12}
$$

Тогда из (6.12) получим

$$
\eta^{\frac{1}{2}},\eta^1,\eta^{n+1},\eta^{n+\frac{3}{2}},\eta^{n+2}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right).\tag{6.13}
$$

Итак, равенство (6.13) выполнено при любом значении j. Нетрудно заметить, что аналогично можно показать, что

$$
\eta^{j+\frac{k}{p}}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right),\quad k=1,2,\ldots,p,\quad j=0,1,\ldots,j_0-1.
$$

Для оценки решения задачи (6.2) воспользуемся теоремой 5.1:

$$\|v^{j+1}\|_C \leqslant \max_{0<j'+\frac{k}{p}\leqslant j+1} \|\eta^{j'+\frac{k}{p}}\|_{C_\gamma} + \sum_{j'=0}^{j} \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} \sum_{k=1}^{p} \max_{0\leqslant s\leqslant k} \|\widetilde{\psi}^{j'+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{6.14}$$

Если существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}$, $k \neq \nu$, то

$$\widetilde{\Lambda}_k \eta_{(k)} = -\frac{\tau}{\tau+\varepsilon} a_k \widetilde{\Lambda}_k (\mathring{\psi}_{k+1} + \ldots + \mathring{\psi}_p) = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right),$$

a_k — известные постоянные.

Тогда из оценки (6.14) находим, что

$$\begin{aligned}
\|v^{j+1}\|_C &= M\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} + \sum_{j'=0}^{j} \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} \sum_{k=1}^{p}\left(h_k^2 + \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)\right) \\
&= M\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} + \frac{pt_j}{\varepsilon+\gamma\tau}\left(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)\right) \\
&\leqslant M\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau)^2}\right), \quad h = \max_{1\leqslant k\leqslant p} h_k.
\end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant \|\eta^{j+1}\|_C + \|v^{j+1}\|_C = O\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau)^2}\right).$$

Итак, справедлива теорема

Теорема 6.1. *Пусть задача (2.6)-(2.8) имеет единственное непрерывное решение $u(x,t)$ в $\overline{Q}_T$ при всех значениях ε и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad 1 \leqslant k, \quad \nu \leqslant p, \quad k \neq \nu, \quad \alpha > 0,$$

и выполнены условия (2.4), тогда решение разностной схемы (3.5) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (2.6)-(2.8) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau)^2}\right), \quad h^2 = o(\varepsilon+\tau), \quad \tau = o\left((\varepsilon+\tau)^2\right),$$

где ε — малый параметр, $\alpha > 0$.

7. Постановка начально-краевой задачи с условиями специального вида

Вместо краевых условий (2.2) рассмотрим условия вида

$$\begin{cases}
\Theta_k u_{x_k} + \alpha \dfrac{\partial\left(\Theta_k u_{x_k}\right)}{\partial t} = \beta_{-k}(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu_{-k}(x,t), \quad x_k = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\
-\left(\Theta_k u_{x_k} + \alpha \dfrac{\partial\left(\Theta_k u_{x_k}\right)}{\partial t}\right) = \beta_{+k}(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu_{+k}(x,t), \quad x_k = l_k, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{cases} \tag{7.1}$$

где

$$0 < c_0 \leqslant \beta_{\pm k}(x) \leqslant c_1, \quad r_k(0,t) \geqslant 0, \quad r_k(l_k,t) \leqslant 0, \tag{7.2}$$

$\beta_{-k} = \beta(0,x')$, $\beta_{+k} = \beta(l_k,x')$, $\mu_{-k} = \mu(0,x',t)$, $\mu_{+k} = \mu(l_k,x',t)$ — непрерывные функции.

Подобные задачи для псевдопараболического уравнения возникают в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка [8, с. 233]. Если на поверхности поля имеется слой воды постоянной толщины h, то на верхней границе с учетом фрактальности почвенной среды следует задать условие $h\dfrac{\partial c}{\partial t} = D\dfrac{\partial c}{\partial x} + A\dfrac{\partial^2 c}{\partial t \partial x}$, где c — концентрация соли в почвенном растворе, D — коэффициент диффузивности, $A, h = const > 0$.

Преобразуем условия (7.1), тогда умножив обе части (7.1) на $\dfrac{1}{\alpha}e^{\frac{1}{\alpha}t}$, затем заменив t на ξ и проинтегрировав полученное выражение по ξ от 0 до t, получим

$$\begin{cases} \Theta_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \mathcal{B}_{-k}u - \widetilde{\mu}_{-k}(x,t), \quad x_k = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -\Theta_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \mathcal{B}_{+k}u - \widetilde{\mu}_{+k}(x,t), \quad x_k = l_k, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{7.3}$$

где

$$\mathcal{B}_{-k}u(0,x',\xi) = \frac{\beta_{-k}(0,x')}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}\frac{\partial u}{\partial t}(0,x',\xi)d\xi,$$

$$\mathcal{B}_{+k}u(l_k,x',\xi) = \frac{\beta_{+k}(l_k,x')}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}\frac{\partial u}{\partial t}(l_k,x',\xi)d\xi,$$

$$\widetilde{\mu}_{-k}(0,x',t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}\mu_{-\alpha}(0,x',\tau)d\xi + e^{-\frac{t}{\alpha}}\Theta_k(x,0)u_0'(0,x'),$$

$$\widetilde{\mu}_{+k}(1,x',t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}\mu_{+\alpha}(1,x',\xi)d\xi - e^{-\frac{t}{\alpha}}\Theta_k(x,0)u_0'(1,x').$$

В той же области вместо задачи (2.3), (2.5), (7.3) рассмотрим задачу с малым параметром ε (2.6), (2.8) с граничными условиями

$$\begin{cases} \Theta_k(x,t)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = \mathcal{B}_{-k}u^\varepsilon - \widetilde{\mu}_{-k}(x,t), \quad x_k = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -\Theta_k(x,t)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = \mathcal{B}_{+k}u^\varepsilon - \widetilde{\mu}_{+k}(x,t), \quad x_k = l_k, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{7.4}$$

где $\varepsilon = const > 0$.

Покажем, что $u^\varepsilon \to u$ в некоторой норме при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через $\tilde{z} = u^\varepsilon - u$ и подставим $u^\varepsilon = \tilde{z} + u$ в задачу (2.6), (2.8), (7.4). Тогда получим задачу (2.9), (2.11) с граничными условиями

$$\begin{cases} \Theta_k(x,t)\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k} = \mathcal{B}_{-k}\tilde{z}, \quad x_k = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -\Theta_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \mathcal{B}_{+k}\tilde{z}, \quad x_k = l_k, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{7.5}$$

С учетом

$$\sum_{k=1}^{p}\int_{G'}\Theta_k(x,t)\tilde z\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\bigg|_0^{l_k}dx' = \sum_{k=1}^{p}\int_{G'}\Big(\tilde z(l_k,x',t)\mathcal{B}_{+k}\tilde z(l_k,x',t)-\tilde z(0,x',t)\mathcal{B}_{-k}\tilde z(0,x',t)\Big)dx'$$
$$\leqslant -\sum_{k=1}^{p}\int_{G'}\left(\frac{\beta_{+k}(l_k,x')}{\alpha}\tilde z^2(l_k,x',t)+\frac{\beta_{-k}(0,x')}{\alpha}\tilde z^2(0,x',t)\right)dx'$$
$$+\varepsilon_2 M_1\left(\left\|\frac{\partial\tilde z}{\partial x}\right\|_0^2+\|\tilde z\|_0^2\right)+M_2^{\varepsilon_2}\int_0^t\left(\left\|\frac{\partial\tilde z}{\partial x}\right\|_0^2+\|\tilde z\|_0^2\right)d\tau,$$

повторяя рассуждения (2.13)-(2.24), из (2.13) для решения задачи (2.9), (2.11), (7.5) получаем оценку

$$\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+\int_0^t\left(\|\tilde z\|_0^2+\left\|\frac{\partial\tilde z}{\partial x}\right\|_0^2\right)d\tau\leqslant M_3\int_0^t\|\overline{f}\|_0^2 d\tau=\varepsilon^2M_3\int_0^t\left\|\frac{\partial u}{\partial\tau}\right\|_0^2 d\tau. \tag{7.6}$$

Из априорной оценки (7.6) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon\to 0$ в норме

$$\|\tilde z\|_1^2=\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z\|_{2,Q_t}^2+\left\|\frac{\partial\tilde z}{\partial x}\right\|_{2,Q_t}^2,$$

если u_t — ограниченная, достаточно гладкая функция. Поэтому при малом ε решение задачи (2.6), (2.8), (7.4) будем принимать за приближенное решение начально-краевой задачи для многомерного псевдопараболического уравнения (2.1), (7.1), (2.3) .

8. Построение локально-одномерной схемы

На каждом полуинтервале $\Delta_k=\left(t_{j+\frac{k-1}{p}},t_{j+\frac{k}{p}}\right]$, $k=1,2,\dots,p$ будем последовательно решать задачи

$$\pounds_k\vartheta_{(k)}=\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t+\frac{1}{p}\mathcal{B}\vartheta_{(k)}-\widetilde L_k\vartheta_{(k)}-f_k=0,\quad x\in G,\quad t\in\Delta_k,\quad k=1,2,\dots,p, \tag{8.1}$$

$$\begin{cases}\Theta_k(x,t)\dfrac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k}=\mathcal{B}_{-k}(x,t)\vartheta_{(k)}-\mu_{-k}(x,t),\quad x_k=0,\\[2mm] -\Theta_k(x,t)\dfrac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k}=\mathcal{B}_{+k}(x,t)\vartheta_{(k)}-\mu_{+k}(x,t),\quad x_k=l_k,\end{cases} \tag{8.2}$$

полагая при этом

$$\begin{aligned}&\vartheta_{(1)}(x,0)=u_0(x),\quad \vartheta_{(1)}(x,t_j)=\vartheta_{(p)}(x,t_j),\quad j=0,1,\dots,j_0-1,\\ &\vartheta_{(k)}(x,t_{j+\frac{k-1}{p}})=\vartheta_{(k-1)}(x,t_{j+\frac{k-1}{p}}),\quad k=2,3,\dots,p.\end{aligned} \tag{8.3}$$

Будем называть решением этой задачи при $t=t_{j+1}$ функцию $\vartheta(t_{j+1})=\vartheta_{(p)}(t_{j+1})$.

Заменим задачу (8.1)-(8.3) следующей разностной схемой на Δ_k :

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}\\ &=\widetilde\Lambda_k\left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}}+(1-\sigma_k)y^{j+\frac{k-1}{p}}\right)+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\quad x\in\omega_h,\quad k=1,2,\dots,p,\end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\begin{cases}a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}=B_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}}-\widetilde\mu_{-k},\quad x_k=0,\\ -a_k^{(N_k)}y_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}=B_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}-\widetilde\mu_{+k},\quad x_k=l_k,\end{cases} \tag{8.5}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad k=1,2,\dots,p, \tag{8.6}$$

где

$$B_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}} = \frac{\beta_{-k}(0,x')}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)y_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}},$$

$$B_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{\beta_{+k}(l_k,x')}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)y_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}},$$

$$\widetilde{\mu}_{\mp k}^{j+\frac{k}{p}} = \sum_{s=0}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\mu_{\mp k}\left(x, t_{\frac{s}{p}}\right) \mp e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{s}{p}}}\Theta_k^0 u_0'(x).$$

Условия (8.5) имеют порядок аппроксимации $O(h_k)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_k^2)$ на решениях уравнения (8.1) при каком-либо k.

Так как

$$\Theta_k\frac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = a_k^{(1_k)}\vartheta_{(k)x_k,0} - 0.5h_k\left(\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t + \frac{1}{p}B\vartheta_{(k)} - r_k(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k} + q_k(x,t)\vartheta_{(k)} - f_k\right)_0 + O(h_k^2),$$

то

$$\begin{aligned}&\left(a_k^{(1_k)} + 0.5h_k r_{k,0}\right)\vartheta_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}\\ &\quad - 0.5h_k\left(\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\vartheta_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} - 0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t + q_k(x,t)\vartheta^{j+\frac{k}{p}} - f_k\right)_0\\ &= B_{-k}\vartheta_0^{j+\frac{k}{p}} - \widetilde{\mu}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k\tau).\end{aligned} \tag{8.7}$$

В (8.7) отбросим величины порядка малости $O(h_k^2)$, $O(h_k\tau)$, тогда после замены $\vartheta_{(k)}$ на y получим

$$0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}y_{t,0} + \frac{0.5h_k}{p}B_\tau y_0^{j+\frac{k}{p}} = \bar{a}_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{d}_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}} - B_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\mu}_{-k}. \tag{8.8}$$

Аналогично при $x_k = l_k$ получаем:

$$0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}y_{t_N} + \frac{0.5h_k}{p}B_\tau y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = -\bar{a}_k^{(N_k)}y_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{d}_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} - B_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\mu}_{+k}, \tag{8.9}$$

где

$$\bar{a}_k^{(1_k)} = a_k^{(1_k)} + 0.5h_k r_{k,0}, \quad \bar{a}_k^{(N_k)} = a_k^{(N_k)} - 0.5h_k r_{k,N_k}, \quad \bar{d}_{-k} = 0.5h_k d_k^{(0)},$$
$$\bar{d}_{+k} = 0.5h_k d_k^{(N_k)}, \quad \bar{\mu}_{-k} = \widetilde{\mu}_{-k} + 0.5h_k f_{k,0}, \quad \bar{\mu}_{+k} = \widetilde{\mu}_{+k} + 0.5h_k f_{k,N_k}.$$

Итак, разностный аналог задачи (2.6), (2.8), (7.4) имеет вид:

$$\frac{\varepsilon}{p}y_t + \frac{1}{p}B_\tau y^{j+\frac{k}{p}} = \bar{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}} + \Phi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \tag{8.10}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{8.11}$$

где

$$\bar{\Lambda}_k y = \begin{cases}\widetilde{\Lambda}_k y = \chi_k\left(a_k y_{\bar{x}_k}\right)_{x_k} + b_k^+ a_k^{(+1)} y_{x_k} + b_k^- a_k y_{\bar{x}_k} - d_k y, & x_k \in \omega_{h_k},\\ \dfrac{1}{0.5h_k}\Lambda_k^- y = \dfrac{\bar{a}_k^{(1_k)}y_{x_k,0} - \bar{d}_{-k}y_0 - B_{-k}y_0}{0.5h_k}, & x_k = 0,\\ \dfrac{1}{0.5h_k}\Lambda_k^+ y = -\dfrac{\bar{a}_k^{(N_k)}y_{\bar{x}_k,N_k} + \bar{d}_{+k}y_{N_k} + B_{+k}y_{N_k}}{0.5h_k}, & x_k = l_k,\end{cases}$$

$$\Phi_{(k)} = \begin{cases} \varphi_k, \quad x_k \in \omega_{h_k}, \\ \dfrac{\bar{\mu}_{-k}}{0.5h_k}, \quad x_k = 0, \\ \dfrac{\bar{\mu}_{+k}}{0.5h_k}, \quad x_k = l_k. \end{cases}$$

9. Погрешность аппроксимации ЛОС

Рассмотрим погрешность краевых условий разностной схемы (8.8), (8.9), обозначив через $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$. Запишем граничное условие при $x_k = 0$ следующим образом

$$0.5h_k \frac{\varepsilon}{p} y_{t,0} + \frac{0.5h_k}{p} B_\tau y_0^{j+\frac{k}{p}} = \bar{a}_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{d}_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} - B_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} + 0.5h_k f_{k,0} + \mu_{-k}. \tag{9.1}$$

Тогда, подставляя $y^{j+\frac{k}{p}} = z^{j+\frac{k}{p}} + u^{j+\frac{k}{p}}$ в (9.1), получим

$$\begin{aligned} 0.5h_k \frac{\varepsilon}{p} z_{t,0} + \frac{0.5h_k}{p} B_\tau z_0^{j+\frac{k}{p}} =& \bar{a}_k^{(1_k)} z_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{d}_{-k} z_0^{j+\frac{k}{p}} - B_{-k} z_0^{j+\frac{k}{p}} - \bar{d}_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} - B_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} \\ & - 0.5h_k \frac{\varepsilon}{p} u_{t,0} - \frac{0.5h_k}{p} B_\tau u_0^{j+\frac{k}{p}} + \bar{a}_k^{(1_k)} u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} + 0.5h_k f_{k,0} + \mu_{-k}. \end{aligned}$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$0.5h_k \mathring{\psi}_{-k} = 0.5h_k \left(L_k u + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t - \frac{1}{p} \mathcal{B} u \right)_0^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{-k} =& 0.5h_k \left(f_{k,0} - \frac{\varepsilon}{p} u_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} B_\tau u_0^{j+\frac{k}{p}} \right) + \bar{a}_k^{(1_k)} u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{d}_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} \\ & - B_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} - 0.5h_k \left(L_k u + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t - \frac{1}{p} \mathcal{B} u \right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_k \mathring{\psi}_{-k} \\ =& \bar{a}_k^{(1_k)} u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{d}_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} - B_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} - 0.5h_k (L_k u)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_k \mathring{\psi}_{-k} + O(h_k \tau) \\ =& \Theta_k \frac{\partial u^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} + 0.5h_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Theta_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^{j+\frac{k}{p}} + 0.5h_k r_k^{(0)} u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - 0.5h_k d_{k,0} u_0^{j+\frac{k}{p}} - B_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} \\ & + \mu_{-k} - 0.5h_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Theta_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + r_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - q_k u \right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_k \mathring{\psi}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k \tau) \\ =& \left[\Theta_k \frac{\partial u^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} - B_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} \right] \Bigg|_{x_k=0} + 0.5h_k \mathring{\psi}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k \tau). \end{aligned}$$

В силу граничных условий (7.5) выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Поэтому

$$\psi_{-k} = 0.5h_k \mathring{\psi}_{-k} + \overset{*}{\psi}_{-k}, \qquad \overset{*}{\psi}_{-k} = O(h_k^2 + \tau) + O(h_k \tau).$$

Итак,

$$0.5h_k \frac{\varepsilon}{p} z_{t,0} + \frac{0.5h_k}{p} B_\tau z_0^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k^- z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_{-k}, \qquad \psi_{-k} = 0.5h_k \mathring{\psi}_{-k} + \overset{*}{\psi}_{-k}. \tag{9.2}$$

Аналогично при $x_\alpha = l_\alpha$ имеем

$$0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}z_{t,N_k} + \frac{0.5h_k}{p}B_\tau z_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k^+ z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_{+k}, \qquad \psi_{+k} = 0.5h_k\mathring{\psi}_{+k} + \overset{*}{\psi}_{+k},$$
$$\mathring{\psi}_{\pm k} = O(1), \qquad \sum_{k=1}^{p}\mathring{\psi}_{\pm k} = 0, \qquad \overset{*}{\psi}_{\pm k} = O(h_k^2+\tau) + O(h_k\tau). \tag{9.3}$$

Таким образом, для погрешности $z^{j+\frac{k}{p}}$ получаем задачу:

$$\frac{\varepsilon}{p}z_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}B_\tau z^{j+\frac{k}{p}} = \bar\Lambda_k z^{j+\frac{k}{p}} + \Psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{9.4}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{9.5}$$

где

$$\bar\Lambda_k = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \dfrac{1}{0.5h_k}\Lambda_k^-, & x_k = 0 \\ \dfrac{1}{0.5h_k}\Lambda_k^+, & x_k = l_k, \end{cases} \qquad \Psi_k = \begin{cases} \psi_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \psi_{-k}, & x_k = 0, \\ \psi_{+k}, & x_k = l_k, \end{cases}$$

$$\mathring{\psi}_k = O(1), \quad \sum_{k=1}^{p}\mathring{\psi}_k = 0, \quad \psi = \sum_{k=1}^{p}\psi_k = \sum_{k=1}^{p}\overset{*}{\psi}_k = O(|h|^2+\tau), \quad \overset{*}{\psi}_k = O\left(h_k^2+\tau\right),$$

$$\mathring{\psi}_{\pm k} = O(1), \quad \psi_{\pm k} = 0.5h_k\mathring{\psi}_{\pm k} + \overset{*}{\psi}_{\pm k}, \quad \psi_{\pm k} = O(h_k^2+\tau), \quad \sum_{k=1}^{p}\mathring{\psi}_{\pm k} = 0.$$

10. Устойчивость ЛОС

Для решения схемы (8.10), (8.11) получим априорную оценку в сеточной норме C, для чего (8.10), (8.11) перепишем в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}\\ &\quad=\chi_k\left(a_k y_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k} + b_k^+ a_k^{(+1)}y_{x_k}^{j+\frac{k}{p}} + b_k^- a_k y_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}} - d_k y^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad x_k \in \omega_{h_k},\end{aligned} \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{p}y_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)y_{t,0}^{\frac{s}{p}}\\ &\quad=\frac{\bar a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar d_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}} - B_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k} + \frac{\bar\mu_{-k}}{0.5h_k},\end{aligned} \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t,N}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)y_{\bar t,N_k}^{\frac{s}{p}}\\ &\quad=-\frac{\bar a_k^{(N_k)}y_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar d_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} + B_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k} + \frac{\bar\mu_{+k}}{0.5h_k},\end{aligned} \tag{10.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x). \tag{10.4}$$

Исследование устойчивости разностной схемы (10.1)-(10.4) будем проводить с помощью принципа максимума [21, глава V, дополнение, §2, п. 2]. Получим априорную оценку для (10.1)-(10.4), для этого решение задачи (10.1)-(10.4) представим в виде суммы $y = \overline{y} + v$, где $\overline{y}$ — решение однородных уравнений (10.1) с неоднородными краевыми условиями (10.2)-(10.3) и однородными начальными условиями (10.4):

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{p}\overline{y}_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\overline{y}_{\bar t}^{\frac{s}{p}}\\&=\chi_k\left(a_k\overline{y}_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}+b_k^+a_k^{(+1)}\overline{y}_{x_k}^{j+\frac{k}{p}}+b_k^-a_k\overline{y}_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}-d_k\overline{y}^{j+\frac{k}{p}},\quad x_k\in\omega_{h_k},\end{aligned}\tag{10.5}$$

а υ — решение неоднородных уравнений (10.1) с однородными краевыми (10.2)-(10.3) и неоднородными начальными условиями (10.4):

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{p}\upsilon_t^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\upsilon_{\bar t}^{\frac{s}{p}}\\&=\chi_k\left(a_k\upsilon_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}+b_k^+a_k^{(+1)}\upsilon_{x_k}^{j+\frac{k}{p}}+b_k^-a_k\upsilon_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}-d_k\upsilon^{j+\frac{k}{p}}+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\quad x_k\in\omega_{h_k}.\end{aligned}\tag{10.6}$$

Получим оценку для $\bar y$. Для этого граничные условия уравнения (10.5) приведем теперь к каноническому виду в точках $P=P(x_0,t_{j+\frac{k}{p}})$, $P=P(x_{N_k},t_{j+\frac{k}{p}})$ и проверим, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках, выполнимость условий теоремы 3 [21, глава V, дополнение, §2, п. 2].

В точке $P=P(x_{i_k},t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$\begin{aligned}A(P)&=\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)+\frac{\chi_{i_k}a_{k,i_k+1}}{h_k^2}+\frac{\chi_{i_k}a_{k,i_k}}{h_k^2}+\frac{b_{i_k}^+a_{k,i_k+1}}{h_k}-\frac{b_{i_k}^-a_{k,i_k}}{h_k}+d_k\right]>0,\\B(P,Q)&=\left\{\frac{\chi_{i_k}a_{k,i_k+1}}{h_k^2}+\frac{b_{i_k}^+a_{k,i_k+1}}{h_k};\frac{\chi_{i_k}a_{k,i_k}}{h_k^2}-\frac{b_{i_k}^-a_{k,i_k}}{h_k};\right.\\&\quad\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right];\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}}-2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}}+e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{3}{p}}}\right];\cdots;\\&\quad\left.\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}-2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}+e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right];\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right]\right\}>0,\\D(P)&=d_k\geqslant c_0>0,\end{aligned}$$

а в точке $P=P(x_0,t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$\begin{aligned}A(P)&=\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)+\frac{\bar a_k^{(1_k)}}{0.5h_k^2}+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)\frac{\beta_{-k}}{0.5h_k\tau}+d_k^{(0)}\right]>0,\\B(P,Q)&=\left\{\frac{\bar a_k^{(1_k)}}{0.5h_k^2};\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2+\frac{\beta_{-k}}{0.5h_k\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right];\right.\\&\quad\left[\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2+\frac{\beta_{-k}}{0.5h_k\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right];\cdots;\\&\quad\left[\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2+\frac{\beta_{-k}}{0.5h_k\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right];\\&\quad\left.\left[\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2+\frac{\beta_{-k}}{0.5h_k\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right]\right\}>0,\end{aligned}$$

$$D(P)=\frac{\beta_{-k}}{0.5h_k\alpha p}+d_k^{(0)}>\frac{\beta_{-k}}{0.5h_k\alpha p}\geqslant\frac{2c_0}{l_kp}>0;$$

в точке $P=P(x_{N_k},t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P)=\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)+\frac{\bar{a}_k^{(N_k)}}{0.5h_k^2}+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)\frac{\beta_{+k}}{0.5h_k\tau}+d_k^{(N_k)}\right]>0,$$

$$\begin{aligned}B(P,Q)=\Bigg\{&\frac{\bar{a}_k^{(N_k)}}{0.5h_k^2};\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2+\frac{\beta_{+k}}{0.5h_k\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right];\\ &\left[\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2+\frac{\beta_{+k}}{0.5h_k\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right];\cdots;\\ &\left[\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2+\frac{\beta_{+k}}{0.5h_k\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right];\\ &\left[\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2+\frac{\beta_{+k}}{0.5h_k\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right]\Bigg\}>0,\end{aligned}$$

$$D(P)=\frac{\beta_{+k}}{0.5h_k\alpha p}+d_k^{(N_k)}>\frac{\beta_{+k}}{0.5h_k\alpha p}\geqslant\frac{2c_0}{l_kp}>0.$$

Таким образом, на основании теоремы 3 [21, глава V, дополнение, §2, п. 2] для $\bar{y}$ получаем оценку:

$$\|\bar{y}^{j+1}\|_C\leqslant M\max_{0<t'\leqslant t_j}\left(\|\bar{\mu}_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma}+\|\bar{\mu}_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right),\tag{10.7}$$

где $M=const>0,\quad h=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant p}h_k,\quad \|y\|_C=\max\limits_{x\in\bar{\omega}_h}|y|,\quad \|y\|_{C_\gamma}=\max\limits_{x\in\gamma_h}|y|.$

Переходим к оценке функции v. Повторяя рассуждения (5.7)-(5.13), можно убедиться в том, что для v справедлива оценка (5.14).

Таким образом из оценок (5.14) и (10.7) следует окончательная оценка

$$\begin{aligned}\|y^{j+1}\|_C\leqslant&\|u^0\|_C+M\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(\|\bar{\mu}_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma}+\|\bar{\mu}_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right)\\&+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\varphi_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_C.\end{aligned}\tag{10.8}$$

Таким образом справедлива

Теорема 10.1. *Пусть выполнены условия (2.4), тогда локально-одномерная схема (8.10), (8.11) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (8.10), (8.11) справедлива оценка (10.8).*

11. Равномерная сходимость ЛОС

Представим решение задачи для погрешности (9.4), (9.5) в виде суммы

$$z_{(k)}=v_{(k)}+\eta_{(k)},\quad z_{(k)}=z^{j+\frac{k}{p}},\tag{11.1}$$

где $\eta_{(k)}$ определяется условиями (6.1), а функция $v_{(k)}$ определяется условиями

$$\frac{\varepsilon}{p}v_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}=\widetilde{\Lambda}_kv_{(k)}+\overset{*}{\Psi},\quad x_k\in\omega_{h_k},\tag{11.2}$$

$$\frac{0.5h_k\varepsilon}{p}v_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{0.5h_k}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}=\Lambda_k^-v_{(k)}+\widetilde{\Psi}_{-k},\quad x_k=0,\tag{11.3}$$

$$\frac{0.5h_k\varepsilon}{p}v_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{0.5h_k}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}=\Lambda_k^+v_{(k)}+\widetilde{\Psi}_{+k},\quad x_k=l_k, \tag{11.4}$$

$$v(x,0)=0, \tag{11.5}$$

где

$$\widetilde{\Psi}_{\pm k}=\Lambda_k^{\pm}\eta_{(k)}+\overset{*}{\Psi}_{\pm k},\quad \widetilde{\Psi}_k=\overset{*}{\Psi}+\widetilde{\Lambda}_k\eta_{(k)},\quad \overset{*}{\Psi}=O\left(h_k^2+\tau\right),\quad \overset{*}{\Psi}_{\pm k}=O\left(h_k^2+\tau\right).$$

Для оценки решения задачи (11.2)-(11.5) воспользуемся Теоремой 10.1 с учетом $\eta^{j+\frac{k}{p}}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right),\ k=1,2,\ldots,p,\ j=0,1,\ldots,j_0-1$:

$$\|v^{j+1}\|_C\leqslant M\max_{0<j'+\frac{k}{p}\leqslant j+1}\|\eta^{j'+\frac{k}{p}}\|_{C_\gamma}+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\widetilde{\Psi}^{j'+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{11.6}$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\bar{Q}_T$, производные

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^4u}{\partial x_k^2\partial x_\nu^2},\quad \frac{\partial^3u}{\partial x_k^2\partial t},\quad \frac{\partial^2f}{\partial x_k^2},\quad 1\leqslant k,\quad \nu\leqslant p,\quad k\neq\nu,$$

то

$$\widetilde{\Lambda}_k\eta_{(k)}=-\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}a_k\widetilde{\Lambda}_k\left(\mathring{\Psi}_{k+1}+\ldots+\mathring{\Psi}_p\right)=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right),\quad \Lambda_k^{\pm}\eta_{(k)}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right),$$

где a_k — известные постоянные.

Тогда из (11.6) получим $\|v^{j+1}\|_C\leqslant M\left(\dfrac{h}{\tau+\varepsilon}+\dfrac{\tau}{(\tau+\varepsilon)^2}\right),\ h=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant p}h_k$. Следовательно, $\|z^{j+1}\|_C\leqslant\|\eta^{j+1}\|_C+\|v^{j+1}\|_C=O\left(\dfrac{h}{\tau+\varepsilon}+\dfrac{\tau}{(\tau+\varepsilon)^2}\right)$.

Итак, справедлива

Теорема 11.1. *Пусть задача (2.6), (2.8), (7.4) имеет единственное непрерывное решение $u(x,t)$ в $\overline{Q}_T$ при всех значениях ε и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^4u}{\partial x_k^2\partial x_\nu^2},\quad \frac{\partial^3u}{\partial x_k^2\partial t},\quad \frac{\partial^2f}{\partial x_k^2},\quad 1\leqslant k,\quad \nu\leqslant p,\quad k\neq\nu,\quad \alpha>0,$$

и выполнены условия (2.4), (7.2), тогда решение схемы (8.10), (8.11) равномерно сходится к решению задачи (2.6), (2.8), (7.4) со скоростью

$$O\left(\frac{h}{\tau+\varepsilon}+\frac{\tau}{(\tau+\varepsilon)^2}\right),\quad h=o(\tau+\varepsilon),\quad \tau=o((\tau+\varepsilon)^2),$$

где ε — малый параметр, $\alpha>0$.

Следствие 11.1. *Если $\varepsilon=\tau^\delta$, тогда решение схем (4.1),(4.2) и (9.4), (9.5) при любых $\alpha>0$ с учетом (2.24), (7.6) равномерно сходится к решению соответствующей исходной задачи со скоростью $O\left(\frac{h^2}{\tau^\delta}+\tau^{1-2\delta}+\tau^\delta\right)$, где $0<\delta<\frac{1}{2}$.*

Замечание 11.1. *Полученные результаты справедливы и для случая, когда G представляет собой область сложной формы, удовлетворяющую 2-м условиям из* [20, глава IX, §3, п. 5]*, тогда оценки (5.14) и (10.8) соответственно будут принимать вид:*

$$\begin{aligned}\|y^{j+1}\|_C\leqslant&\|u_0\|_C+\max_{0<t'\leqslant t_j}\|\mu(x,t')\|_{C_\gamma}\\&+\max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\overset{*}{\varphi}\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau}+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\mathring{\varphi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_{\mathring{C}},\end{aligned} \tag{11.7}$$

$$
\begin{aligned}
\|y^{j+1}\|_C \leqslant & \|u_0\|_C + M \max_{0<t'\leqslant j\tau} \left(\|\bar{\mu}_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\bar{\mu}_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right) \\
& + \max_{0<t'\leqslant t_j} \frac{\tau\|\overset{*}{\varphi}\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau} + \sum_{j'=0}^{j} \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} \sum_{k=1}^{p} \max_{0\leqslant s\leqslant k} \|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_{\overset{\circ}{C}},
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

где $\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}$, $\overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}$ *определяются условиями*

$$
\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}} = \begin{cases} \varphi_k, \ x\in\overset{\circ}{\omega}_h, \\ 0, \ x\in\overset{*}{\omega}_h, \end{cases} \qquad \overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}} = \begin{cases} \varphi_k, \ x\in\overset{*}{\omega}_h, \\ 0, \ x\in\overset{\circ}{\omega}_h, \end{cases}
$$

так, что $\overset{\circ}{\varphi}_k + \overset{*}{\varphi}_k = \varphi_k$ *при* $x\in\omega_h$, *т.е.* $\overset{*}{\varphi}_k$ *отлична от нуля только в приграничных узлах,* $\overset{\circ}{\omega}$ *— некоторое связное подмножество множества* ω, *а* $\overset{*}{\omega}$ *— дополнение* $\overset{\circ}{\omega}$ *до* ω, *где*

$$
h=\max_{1\leqslant k\leqslant p} h_k, \quad \|y\|_C=\max_{x\in\omega_h}|y|, \quad \|y\|_{C_\gamma}=\max_{x\in\gamma_h}|y|, \quad \|\varphi\|_{\overset{*}{C}}=\max_{x\in\overset{*}{\omega}_h}|\varphi|, \quad \|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}}=\max_{x\in\overset{\circ}{\omega}_h}|\varphi|.
$$

Замечание 11.2. *Оператор* $\mathcal{B}u = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}\frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi$ *при* $\alpha=\frac{1-\gamma}{\gamma}$ *переходит в дробную производную Капуто-Фабриция* [30]*:*

$$
{}^{CF}\Delta_{0t}^{\gamma}u = \frac{\gamma}{1-\gamma}\int\limits_0^t e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}(t-\xi)}\frac{\partial u}{\partial\xi}d\xi, \quad 0<\gamma<1.
$$

12. Алгоритм численного решения

Для численного решения дифференциальной задачи (2.1), (7.1), (2.3) выпишем расчетные формулы ($0\le x_k\le l_k,\ k=1,2,\ p=2$), для чего перепишем задачу (2.1), (7.1), (2.3) при p=2:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} =& \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\Theta_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\Theta_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) \\
& + \alpha\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}\Big(\Theta_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \alpha\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_2}\Big(\Theta_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) + r_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1} \\
& + r_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q_1(x_1,x_2,t)u(x_1,x_2,t) - q_2(x_1,x_2,t)u(x_1,x_2,t) + f(x_1,x_2,t),
\end{aligned}
\tag{12.1}
$$

$$
\begin{cases}
\Theta_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha\dfrac{\partial\left(\Theta_1 u_{x_1}\right)}{\partial t} = \beta_{-1}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu_{-1}(x,t), \quad x_1=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\
-\left(\Theta_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha\dfrac{\partial\left(\Theta_1 u_{x_1}\right)}{\partial t}\right) = \beta_{+1}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu_{+1}(x,t), \quad x_1=l_1,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\
\Theta_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \alpha\dfrac{\partial\left(\Theta_2 u_{x_2}\right)}{\partial t} = \beta_{-2}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu_{-2}(x,t), \quad x_2=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\
-\left(\Theta_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \alpha\dfrac{\partial\left(\Theta_2 u_{x_2}\right)}{\partial t}\right) = \beta_{+2}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu_{+2}(x,t), \quad x_2=l_2,\ 0\leqslant t\leqslant T,
\end{cases}
\tag{12.2}
$$

$$
u(x_1,x_2,0)=u_0(x_1,x_2). \tag{12.3}
$$

Рассмотрим сетку

$$
x_k^{(i_k)} = i_k h_k, \quad k=1,2, \quad t_j=j\tau, \quad i_k=0,1,\ldots,N_k, \quad h_k=\frac{l_k}{N_k}, \quad j=0,1,\ldots,m, \quad \tau=\frac{T}{m}.
$$

Вводится один дробный шаг $t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + 0.5\tau$. Обозначим через $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{k}{p}}$ сеточную функцию.

$$y_{i_1,i_2}^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} = y(i_1h_1, i_2h_2, (j+0.5k)\tau), \quad k = 1, 2.$$

Напишем локально-одномерную схему

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s=1}^{2j+1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{1-s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{2-s}{2}}}\right)y_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \tilde{\Lambda}_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \varphi_1, \\ \varepsilon\dfrac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s=1}^{2j+2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{2-s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{3-s}{2}}}\right)y_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \tilde{\Lambda}_2 y^{j+1} + \varphi_2, \end{cases} \tag{12.4}$$

$$\begin{cases} y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}})y_{1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}), \\ y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}})y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}), \\ y_{i_1,0}^{j+1} = \varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}), \\ y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}), \end{cases} \tag{12.5}$$

$$y_{i_1,i_2}^0 = u_0(i_1h_1, i_2, h_2), \tag{12.6}$$

где

$$\tilde{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}} = \varkappa_k\left(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k} + b_k^+ a_k^{(+1)} y_{x_k}^{j+\frac{k}{p}} + b_k^- a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} - d_k y^{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2,$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2j+k-1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{2}}}\right)f^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{2}}}\left(y_{\bar{x}_1x_1}^{j+\frac{k-1}{2}} + y_{\bar{x}_2x_2}^{j+\frac{k-1}{2}}\right).$$

Приведем расчетные формулы для решения задачи (12.4)-(12.6).

На первом этапе находим решение $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$ решается следующая задача:

$$\begin{aligned} &A_{1(i_1,i_2)}y_{i_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} - C_{1(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + B_{1(i_1,i_2)}y_{i_1+1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = -F_{1(i_1,i_2)}^{j+\frac{1}{2}}, \quad 0 < i_1 < N_1, \\ &\begin{cases} y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}})y_{1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}), \\ y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}})y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}), \end{cases} \end{aligned} \tag{12.7}$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_1)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1^2} - \frac{(b_1^-)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1},$$

$$B_{1(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_1)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1^2} + \frac{(b_1^+)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1},$$

$$C_{1(i_1,i_2)} = A_{1(i_1,i_2)} + B_{1(i_1,i_2)} + \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right) + \frac{1}{2}d_{1(i_1,i_2)},$$

$$F_{1(i_1,i_2)}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{\tau}y_{i_1,i_2}^j + \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)y_{i_1,i_2}^j - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2j}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{1-s}{2}}}\right)y_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} + \varphi_{1(i_1,i_2)},$$

$$\varkappa_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})=\frac{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}}{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}+\frac{0.5h_1+\beta_{-1,i_2}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)+0.5h_1d^{j+\frac{1}{2}}_{-1,i_2}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$
$$\varkappa_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})=\frac{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}}{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}+\frac{0.5h_1+\beta_{+1,i_2}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)+0.5h_1d^{j+\frac{1}{2}}_{+1,i_2}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})=\frac{\widetilde{\mu}_{-1}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})+\frac{\beta_{-1,i_2}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)y^j_{0,i_2}}{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}+\frac{0.5h_1+\beta_{-1,i_2}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)+0.5h_1d^{j+\frac{1}{2}}_{-1,i_2}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}}$$
$$-\frac{\frac{\beta_{-1,i_2}}{2}\sum\limits_{s=1}^{2j}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{1-s}{2}}}\right)y^{\frac{s}{2}}_{\bar t,0}}{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}+\frac{0.5h_1+\beta_{-1,i_2}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)+0.5h_1d^{j+\frac{1}{2}}_{-1,i_2}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$
$$\mu_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})=\frac{\widetilde{\mu}_{+1}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}y^j_{N_1}+\frac{\beta_{+1,i_2}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)y^j_{N_1,i_2}}{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}+\frac{0.5h_1+\beta_{+1,i_2}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)+0.5h_1d^{j+\frac{1}{2}}_{+1,i_2}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}}$$
$$-\frac{\frac{\beta_{+1,i_2}}{2}\sum\limits_{s=1}^{2j}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{1-s}{2}}}\right)y^{\frac{s}{2}}_{\bar t,N_1}}{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}+\frac{0.5h_1+\beta_{+1,i_2}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)+0.5h_1d^{j+\frac{1}{2}}_{+1,i_2}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}}.$$

Для вычисления правых частей $F^{j+\frac{1}{2}}_{1(i_1,i_2)}$, $\mu^{j+\frac{1}{2}}_{11(i_2h_2)}$, $\mu^{j+\frac{1}{2}}_{12(i_2h_2)}$ на $j+\frac{1}{2}$−м слое необходимо учитывать значения искомой функции $y^j_{i_1,i_2}$ на всех предыдущих (нижних) слоях из-за слагаемого $\frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{2j}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{1-s}{2}}}\right)y^{\frac{s}{2}}_{\bar t}$, что значительно увеличивает объем вычислений, даже при малых разбиениях сетки. Во избежания этого, предлагается рекуррентная формула для быстрого счета, которая позволяет хранить на предыдущем слое значение указанной суммы, что по количеству операций не уступает двухслойной схеме.

Таким образом, при $p=2$ на $j+\frac{1}{2}$−м слое рекуррентная формула для быстрого счета, например, для вычисления $F^{j+\frac{1}{2}}_{1(i_1,i_2)}$ имеет вид:

$$S^{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)\left(y^{j+\frac{1}{2}}-y^j\right)+e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}S^j,$$

где

$$S^0=0,\quad S^{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\mathcal{B}_\tau y^{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{2j}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{1-s}{2}}}\right)y^{\frac{s}{p}}_{\bar t}.$$

На втором этапе находим решение $y^{j+1}_{i_1,i_2}$. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1=\overline{1,N_1-1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2-1}-C_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2}+B_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2+1}=-F^{j+1}_{2(i_1,i_2)},\quad 0<i_2<N_2,$$
$$\begin{cases}y^{j+1}_{i_1,0}=\varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y^{j+1}_{i_1,1}+\mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1}),\\ y^{j+1}_{i_1,N_2}=\varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y^{j+1}_{i_1,N_2-1}+\mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1}),\end{cases}\tag{12.8}$$

где

$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2} - \frac{(b_2^-)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2},$$

$$B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2} + \frac{(b_2^+)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2},$$

$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right) + \frac{1}{2}d_{2(i_1,i_2)},$$

$$F^{j+1}_{2(i_1,i_2)} = \frac{\varepsilon}{\tau}y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2} + \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2j+1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{1-s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{2-s}{2}}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{2}} + \varphi_{2(i_1,i_2)},$$

$$\varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2}}{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2} + \frac{0.5h_2+\beta_{-2,i_1}}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right) + 0.5h_2 d^{j+1}_{-2,i_1} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}},$$

$$\varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}}{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + \frac{0.5h_2+\beta_{+2,i_1}}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right) + 0.5h_2 d^{j+1}_{+2,i_1} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\widetilde{\mu}_{-2}(i_1h_1, t_{j+1}) + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}y^j_{i_1,0} + \frac{\beta_{-2,i_1}}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)y^j_{i_1,0}}{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2} + \frac{0.5h_2+\beta_{-2,i_1}}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right) + 0.5h_2 d^{j+1}_{-2,i_1} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}}$$
$$- \frac{\frac{\beta_{-2,i_1}}{2}\sum_{s=1}^{2j+1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{1-s}{2}}}\right)y^{\frac{s}{2}}_{\bar t,i_1,0}}{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2} + \frac{0.5h_2+\beta_{-2,i_1}}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right) + 0.5h_2 d^{j+1}_{-2,i_1} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\widetilde{\mu}_{+2}(i_1h_1, t_{j+1}) + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}y^j_{i_1,N_2} + \frac{\beta_{+2,i_1}}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)y^j_{i_1,N_2}}{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + \frac{0.5h_2+\beta_{+2,i_1}}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right) + 0.5h_2 d^{j+1}_{+2,i_1} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}}$$
$$- \frac{\frac{\beta_{+2,i_1}}{2}\sum_{s=1}^{2j+1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{1-s}{2}}}\right)y^{\frac{s}{2}}_{\bar t,i_1,N_2}}{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + \frac{0.5h_2+\beta_{+2,i_1}}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right) + 0.5h_2 d^{j+1}_{+2,i_1} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}}.$$

На $j+1-$м слое рекуррентная формула для быстрого счета имеет вид:

$$S^{j+1} = \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}\right)\left(y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}\right) + e^{-\frac{\tau}{2\alpha}}S^{j+\frac{1}{2}},$$

где

$$S^{j+1} = \frac{1}{2}\mathcal{B}_\tau y^{j+1} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{2j+1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j-\frac{1-s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{2-s}{2}}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}.$$

Каждая из задач (12.7), (12.8) решается методом прогонки [20, Глава I, §2, п.5].

13. Заключение

Настоящая работа посвящена исследованию начально-краевых задач для многомерного псевдопараболического уравнения с граничными условиями первого рода и специального вида. Для приближенного решения поставленных задач многомерное псевдопараболическое уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром. Показано, что при стремлении малого параметра к нулю решение соответствующей модифицированной задачи сходится к решению исходной задачи. Для каждой из задач построена локально-одномерная схема А.А. Самарского, основная идея которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. С помощью принципа максимума для каждой задачи получена априорная оценка решения локально-одномерной схемы в равномерной метрике, доказаны устойчивость и сходимость решения. Построен алгоритм численного решения модифицированной задачи с граничными условиями специального вида. В виду того, что для определения решения на каком-либо временном слое необходимо учитывать значения искомой функции на всех предыдущих (нижних) слоях (при этом значительно увеличивается объем вычислений), предлагается рекуррентная формула для быстрого счета в многомерном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.И. Баренблат, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина. *Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах* // ПММ. **24**:5, 852–864 (1960).
2. Н.Н. Кочина. *Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах* // ДАН СССР. **213**:1, 51–54 (1973).
3. Е.С. Дзекцер. *Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах* // ДАН СССР. **220**:3, 540–543 (1975).
4. M. Hallaire. *Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement* // L'Eau et la Production Vegetale. Paris: Institut National de la Recherche Agronomique. **9**, 27–62 (1964).
5. R.E. Showalter, T.W. Ting. *Pseudoparabolic partial differential equations* // SIAM J. Math. Anal. **1**:1, 1–26 (1970).
6. А.Ф. Чудновский. *Теплофизика почв.* М.: Наука. 1976.
7. P.J. Chen, M.E. Curtin. *On a theory of heat conduction involving two temperatures* // J. Angew. Math. Phys. **19**, 614–627 (1968).
8. С.В. Нерпин. *Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух.* Л.: Гидрометеоиздат. 1975.
9. В.З. Канчукоев. *Краевая задача для уравнения третьего порядка смешанного гиперболо-псевдопараболического типа* // Дифференц. уравнения. **16**:1, 177–178 (1980).
10. В.З. Канчукоев, М.Х. Шхануков. *Краевые задачи для уравнений тепломассаобмена и их аппроксимация устойчивыми разностными схемами* // В сб.: Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики. **2**, 143–150 (1979).
11. D.L. Colton. *Pseudoparabolic equations in one space variable* // J. Diff. equat. **12**, 559–565 (1972).
12. B.D. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel. *Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation* $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ *on a strip* // Arch. Rat. Mech. Anal. **19**, 100–116 (1965).
13. М.Х. Шхануков. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифференц. уравнения. **18**:4, 689–699 (1982).
14. T.W. Ting. *Certain non-steady flows of second-order fluids* // Arch. Ration Mech. Anal. **14**:1, 1–26 (1963).
15. В.А. Водахова. *Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса* // Дифференц. уравнения. **18**:2, 280–285 (1982).
16. М.Х. Бештоков. *Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка* // Вестник СамГТУ, Серия физ.-мат. науки. **4**:33, 1–10 (2013).
17. А.А. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* М.: Физматлит. 2007.
18. А.П. Солдатов, М.Х. Шхануков. *Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. **297**:3, 547–552 (1987).

19. А.А. Самарский. *Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области* // Журн. выч. матем. и матем. физ. **2**:5, 787–811 (1962).
20. А.А. Самарский. *Теория разностных схем.* М.: Наука. 1977.
21. А.А. Самарский, А.В. Гулин. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука. 1973.
22. М.Х. Бештоков. *Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка* // Дифференц. уравнения. **49**:9, 1170–1177 (2013).
23. М.Х. Бештоков. *О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения* // Дифференц. уравнения. **52**:10, 1393–1406 (2016).
24. М.Х. Бештоков. *The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. **158**:1, 12–19 (2016).
25. М.Х. Бештоков. *Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений Соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках* // Дифференц. уравнения. **54**:2, 249–266 (2018).
26. М.Х. Бештоков. *Численное исследование начально-краевых задач для уравнения Соболевского типа с дробной по времени производной* // Журн. выч. матем. и матем. физ. **59**:2, 185–202 (2019).
27. М.И. Вишик, Л.А. Люстерник. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи мат. наук. **12**:5, 3–122 (1967).
28. С.К. Годунов, В.С. Рябенький *Разностные схемы.* М.: Наука. 1973.
29. О.А. Ладыженская. *Краевые задачи математической физики.* М.:Наука. 1973.
30. M. Caputo, M. Fabrizio. *A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel* // Progr. Fract. Differ. Appl. **1**:2, 1–13 (2015).

Мурат Хамидбиевич Бештоков,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул.Шортанова, 89а,
360000, г. Нальчик, Россия
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`