ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 3 (2023). С. 3-13.

УДК 517.53+517.537.7

ПОВЕДЕНИЕ ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ ИЗ КЛАССА $\underline{D}(\Phi)$ НА КРИВЫХ ОГРАНИЧЕННОГО К–НАКЛОНА

Н.Н. АИТКУЖИНА, А.М. ГАЙСИН, Р.А. ГАЙСИН

Аннотация. Изучается асимптотическое поведение суммы целого ряда Дирихле $F(s) = \sum\limits_n a_n e^{\lambda_n s}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, на кривых ограниченного K-наклона, естественным образом уходящих в бесконечность. Для целых трансцендентных функций конечного порядка, имеющих вид $f(z) = \sum\limits_n a_n z^{p_n}$, $p_n \in \mathbb{N}$, Полиа показал, что если плотность последовательности $\{p_n\}$ равна нулю, то для любой кривой γ, уходящей в бесконечность, существует неограниченная последовательность $\{\xi_n\} \subset \gamma$, такая, что при $\xi_n \to \infty$ имеет место соотношение:

$$\ln M_f(|\xi_n|) \sim \ln |f(\xi_n)|$$

($M_f(r)$ — максимум модуля функции f). Позже эти результаты были полностью перенесены И.Д. Латыповым на целые ряды Дирихле конечного порядка и конечного нижнего порядка по Ритту. Дальнейшее обобщение было получено в работах Н.Н. Юсуповой–Аиткужиной на более общие классы $D(\Phi)$ и $\underline{D}(\Phi)$, определяемые выпуклой мажорантой Φ. В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия на показатели λ_n для того, чтобы логарифм модуля суммы любого ряда Дирихле из класса $\underline{D}(\Phi)$ на кривой γ ограниченного K–наклона был эквивалентен логарифму максимального члена, когда $\sigma = \mathrm{Re}s \to +\infty$ по некоторому асимптотическому множеству, верхняя плотность которого равна единице. Отметим, что для целых рядов Дирихле произвольного, сколь угодно быстрого роста соответствующий результат для случая $\gamma = \mathbb{R}_+$ был получен А.М. Гайсиным в 1998 году.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимальный член, кривая ограниченного наклона, асимптотическое множество.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Кратко остановимся на истории вопроса.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{p_n} \tag{1.1}$$

— целая трансцендентная функция, $P = \{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, имеющая плотность

$$\Delta = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n}.$$

N.N. Aitkuzhina, A.M. Gaisin, R.A. Gaisin, Behavior of entire Dirichlet series of class $\underline{D}(\Phi)$ on curves of bounded K-slope.

Поступила 31 января 2023 г.

Работа второго автора (Введение) выполнена при поддержке гранта РНФ 21-11-00168. Работа третьего автора (раздел 3) выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Полиа [1] показал, что если $\Delta = 0$, то в каждом угле $\{z : |\arg(z - \alpha)| \leqslant \delta\}$, $\delta > 0$, функция f имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. Соответствующий результат для рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{1.2}$$

абсолютно сходящихся во всей плоскости, доказан в [2]: если для последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ выполняются условия $\Delta = 0$ и $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$, $n \geqslant 1$, то R-порядок функции F на положительном луче $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ равен R-порядку ρ_R функции F во всей плоскости. Более общий результат доказан в [3], где, в частности, показано, что если $\Delta = 0$ и индекс конденсации δ последовательности Λ равен нулю, то $\rho_R = \rho_\gamma$, где

$$\rho_\gamma = \varlimsup_{s\in\gamma,\, s\to\infty} \frac{\ln\ln|F(s)|}{\sigma}, \quad \sigma = \operatorname{Re} s,$$

— порядок по Ритту на кривой γ, уходящей в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \to \infty$, то $\operatorname{Re} s \to +\infty$.

Наиболее общий, но результат несколько иного характера, установлен в статье [4]. Для того, чтобы сформулировать его, введем соответствующие обозначения и определения.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство всех кривых, уходящих в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \to \infty$, то $\operatorname{Re}\, s \to +\infty$.

Через $D(\Lambda)$ обозначим класс целых функций F, представимых во всей плоскости рядами Дирихле (1.2), а через $D(\Lambda, R)$ — подкласс $D(\Lambda)$, состоящий из функций F, имеющих конечный порядок $\rho_R(F)$ по Ритту:

$$\rho_R(F) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{\sigma}, \quad M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|.$$

Для $F \in D(\Lambda)$, $\gamma \in \Gamma$ положим

$$d(F;\gamma) \overset{def}{=} \varlimsup_{s\in\gamma,\, s\to\infty} \frac{\ln|F(s)|}{\ln M_F(\operatorname{Re} s)}, \quad d(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma).$$

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ положительных функций.

Последовательность $\{b_n\}$ ($b_n \neq 0$ при $n \geqslant N$) называется $\overline{W}$–нормальной[1], если найдется функция $\theta \in L$, такая, что [4]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt = 0, \qquad -\ln|b_n| \leqslant \theta(\lambda_n), \quad n \geqslant N.$$

Рассмотрим произведение Вейерштрасса

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty.$$

Известно, что Q — целая функция экспоненциального типа в том и только в том случае, когда последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность.

В [4] доказана

Теорема 1.1. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Предположим, что последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $\overline{W}$–нормальна. Для того, чтобы для*

[1] В настоящей статье будет применяться термин «$W(\ln)$–нормальная последовательность».

любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ выполнялось равенство $d(F) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n} = 0. \tag{1.3}$$

Пусть целая функция f конечного порядка имеет вид (1.1). Если последовательность P имеет плотность $\Delta = 0$, то $d(f) = 1$ ($d(f)$ — аналог величины $d(F)$, который определяется по всевозможным кривым, произвольным образом уходящим в бесконечность). Этот факт впервые был установлен Полиа в [1]. Заметим, что равенство $d(f) = 1$ вытекает и из более общей теоремы 1.1. Действительно, так как $\Delta = 0$, то, очевидно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{p_n \leqslant x} \frac{1}{p_n} = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, а $p_n \in \mathbb{N}$, то, как известно (см., например, [5]),

$$\delta = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} \ln \left| \frac{1}{Q'(p_n)} \right| = 0.$$

Это означает, что существует функция $\theta \in L$, $\theta(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, такая, что

$$-\ln |Q'(p_n)| \leqslant \theta(p_n), \quad n \geqslant 1.$$

Значит, последовательность $\{Q'(p_n)\}$ $\overline{W}$–нормальна ($W(\ln)$–нормальна).

Наконец, если f — целая функция конечного порядка, то полагая $z = e^s$, замечаем, что

$$F(s) = f(e^s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{p_n s}$$

— целая функция конечного R–порядка. Следовательно, $d(f) = d(F)$, и все следует из теоремы 1.1.

Однако из того, что $d(F) = 1$, вообще говоря, не следует выполнение равенства $\rho_R(F) = \rho_\gamma$ для порядков по Ритту функции F во всей плоскости и на кривой $\gamma \in \Gamma$. Оказывается, если в теореме 1.1 условие (1.3) заменить на более сильное требование

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n} = 0,$$

то $\rho_R(F) = \rho_\gamma$ для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ (см. [6]).

Как и в работе [6], здесь рассматривается более общая ситуация, а именно изучается класс рядов Дирихле (1.2), определяемый некоторой выпуклой мажорантой роста. Для кривых $\gamma \in \Gamma$, имеющих ограниченный наклон, доказана более сильная асимптотическая оценка, чем полученное в [6] равенство $d(F) = 1$ для функций из того же класса.

По определению, кривая $\gamma \in \Gamma$, заданная уравнением $y = g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, имеет ограниченный наклон, если

$$\sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 \neq x_2}} \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = K < \infty. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что тангенсы всех хорд кривой γ по модулю не превосходят K. В этом случае γ называется кривой ограниченного K–наклона.

В ряде статей была обнаружена тесная связь регулярности роста суммы ряда Дирихле (1.2) на $\gamma \in \Gamma$ с неполнотой системы экспонент $\left\{e^{\lambda_n z}\right\}$ на дугах $\gamma' \subset \gamma$, особенно — с усиленной неполнотой этой экспоненциальной системы в вертикальной полосе (см. [7]–[9]). Следует отметить, что результаты работ [8], [9] о неполноте системы $\left\{e^{\lambda_n z}\right\}$ на дугах могут быть применены к исследованию теорем единственности и асимптотических свойств целых рядов Дирихле (1.2) без никакого ограничения на рост $M_F(\sigma)$, т.е. в самом общем случае.

Цель настоящей статьи — при тех же условиях на Λ, что и в [6], показать, что если

$$\underline{\lim}_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln M_F(\sigma)}{\Phi(\sigma)}<\infty$$

(Φ — некоторая выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция), то для любой кривой $\gamma\in\Gamma$ ограниченного K–наклона при $s\in\gamma$, $\sigma=\mathrm{Re}s\to+\infty$ по некоторому асимптотическому множеству $A\subset\mathbb{R}_+$, верхняя плотность которого $DA=1$, имеет место асимптотическое равенство Полиа

$$\ln|F(s)|\sim\ln M_F(\sigma),\quad s\in\gamma.$$

Ясно, что это соотношение существенно лучше, чем равенство $d(F)=1$.

2. Вспомогательные утверждения. Основные результаты

Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность D. Тогда $Q(z)$ — целая функция экспоненциального типа не выше πD^*, где D^* — усредненная верхняя плотность последовательности Λ:

$$D^*=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{N(t)}{t},\quad N(t)=\int\limits_0^t\frac{n(x)}{x}\,dx,\quad n(t)=\sum_{\lambda_j\leqslant t}1.$$

Всегда $D^*\leqslant D\leqslant eD^*$ (см., н-р, [5], [10]).

Пусть L — класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ положительных функций, Φ — выпуклая функция из L,

$$D_m(\Phi)=\{F\in D(\Lambda):\ln M_F(\sigma)\leqslant\Phi(m\sigma)\},\quad m\geqslant1,$$

где $M_F(\sigma)=\sup\limits_{|t|<\infty}|F(\sigma+it)|$. Положим

$$D(\Phi)=\bigcup_{m=1}^{\infty}D_m(\Phi).$$

Предположим, что введенная выше функция Φ такова, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)}<\infty,\tag{2.1}$$

где φ — функция, обратная к Φ. Для наших целей потребуется следующий класс монотонных функций:

$$W(\varphi)=\left\{w\in L:\sqrt{x}\leqslant w(x),\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_1^x\frac{w(t)}{t^2}dt=0\right\}.$$

Отметим, что условие $\sqrt{x}\leqslant w(x)$ в данном определении не ограничивает общность рассуждений. Оно вводится для удобства. Пусть $\Gamma=\{\gamma\}$ — семейство кривых γ, введенное выше, и пусть для $F\in D(\Lambda)$

$$d(F;\gamma)\overset{def}{=}\overline{\lim_{s\in\gamma,\,s\to\infty}}\frac{\ln|F(s)|}{\ln M_F(\mathrm{Re}\,s)},\quad d(F)=\inf_{\gamma\in\Gamma}d(F;\gamma).\tag{2.2}$$

Через $\mu(\sigma)$ обозначим максимальный член ряда (1.2).

В работе [11] доказан критерий выполнения равенства $d(F) = 1$ для любой функции F из класса $D(\Phi)$, а в [6] — для класса $\underline{D}(\Phi)$, где

$$\underline{D}(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underline{D}_m(\Phi),$$

$$\underline{D}_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \exists\{\sigma_n\} : 0 < \{\sigma_n\} \uparrow \infty,\ \ln M_F(\sigma_n) \leqslant \Phi(m\sigma_n)\},\ m \geqslant 1.$$

Будем говорить, что последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$–нормальна, если существует $\theta \in L$, такая, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt = 0, \qquad -\ln\left|Q'(\lambda_n)\right| \leqslant \theta(\lambda_n), \quad n \geqslant 1. \tag{2.3}$$

В [6] доказана

Теорема 2.1. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Предположим, что последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$–нормальна.*

Для того, чтобы для любой функции $F \in \underline{D}(\Phi)$ выполнялось равенство $d(F) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n} = 0. \tag{2.4}$$

Отметим, что в определении класса $\underline{D}(\Phi)$ можно, например, рассматривать функцию

$$\Phi(\sigma) = \underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k}(\sigma), \quad k \geqslant 1.$$

Следовательно, из теоремы 2.1 вытекает соответствующий результат из [4], доказанный для случая $k = 1$.

Сформулируем основной результат.

Пусть Φ — функция, введенная выше, φ — функция, обратная к Φ.

Верна

Теорема 2.2. *Пусть верхняя плотность последовательности Λ конечна, а последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$–нормальна. Если выполняется условие (2.4), то для любой функции $F \in \underline{D}(\Phi)$, для всякой кривой $\gamma \in \Gamma$ ограниченного K–наклона при $s \in \gamma$, $\sigma = \mathrm{Re}s \to +\infty$ по некоторому асимптотическому множеству $A \subset \mathbb{R}_+$, верхняя плотность которого $DA = 1$, справедливо асимптотическое равенство*

$$\ln|F(s)| = (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma), \quad s \in \gamma. \tag{2.5}$$

Приведем формулировки лемм, которые будут использованы для доказательства теоремы 2.2.

Лемма 2.1. *Пусть $\Phi \in L$, и для функции φ, обратной к Φ, выполняется условие (2.1). Пусть, далее, $u(\sigma)$ — неубывающая, положительная и непрерывная на $[0, \infty)$ функция, причем $\lim\limits_{\sigma\to\infty} u(\sigma) = \infty$, а для некоторой последовательности $\{\tau_n\}$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка* [1]

$$u(\tau_n) \leqslant \ln \Phi(m\tau_n).$$

Предположим, что функция w принадлежит классу $W(\varphi)$. Если $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)},$$

[1] В [12] лемма 2.1 доказана при выполнении оценки $u(\tau_n) \leqslant C\Phi(\tau_n)$. То, что она верна и при $u(\tau_n) \leqslant \Phi(m\tau_n)$, очевидно.

то при $\sigma \to \infty$ *вне некоторого множества* $E \subset [0, \infty)$,

$$\mathrm{mes}(E \cap [0, \tau_n]) = o(\varphi(v(\tau_n))), \quad \tau_n \to \infty,$$

имеет место оценка

$$u\left(\sigma + \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) < u(\sigma) + o(1).$$

Лемма 2.1 доказана в [12].

Лемма 2.2. *Пусть функция* $g(z)$ *аналитична и ограничена в круге*

$$D(0, R) = \{z : \ |z| < R\}, \quad |g(0)| \geqslant 1.$$

Если $0 < r < 1 - N^{-1}$, $N > 1$, *то существует не более чем счетное множество кружков*

$$V_n = \{z : |z - z_n| \leqslant \rho_n\}, \quad \sum_n \rho_n \leqslant Rr^N(1 - r), \tag{2.6}$$

таких, что для всех z *из круга* $\{z : |z| \leqslant rR\}$, *но вне* $\bigcup\limits_n V_n$ *справедлива оценка*

$$\ln |g(z)| \geqslant \frac{R - |z|}{R + |z|} \ln |g(0)| - 5NL, \tag{2.7}$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left|g(Re^{i\theta})\right| d\theta - \ln |g(0)|.$$

Лемма доказана в [13].

3. Доказательство теоремы 2.2

Последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$–нормальна, а $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность. Следовательно,

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{N(x)}{x} < \infty, \quad -\ln |Q'(\lambda_n)| \leqslant \theta(\lambda_n), \quad n \geqslant 1, \quad \theta \in W(\varphi).$$

Так как (см. [6])

$$\sup_{x > 0} \left| \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n} - \int\limits_0^x \frac{N(t)}{t^2} \right| = a < \infty,$$

то с учетом (2.3), (2.4) отсюда получаем, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_0^x \frac{N(t)}{t^2} dt = 0.$$

Положим $w(t) = \max(\sqrt{t}, N(et) + \theta(t))$, где θ — функция из условия (2.3). Ясно, что $w \in W(\varphi)$. Тогда, очевидно, существует функция $w^* \in W(\varphi)$ такая, что $w^*(x) = \beta(x) w(x)$, $\beta \in L$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma). \tag{3.1}$$

Положим

$$h = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}, \quad h^{(1)} = \frac{w_1(v)}{v}, \quad h^* = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)},$$

где $w^*(v) = \sqrt{\beta(x)}w(x)$. Пусть

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j|\, e^{\lambda_j \sigma}, \quad v = v(\sigma).$$

Так как последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$. Следовательно, верна оценка (см., например, [7])

$$R_v \leqslant C\mu(\sigma + h^*) \exp\left[-(1 + o(1))w^*(v)\right]. \tag{3.2}$$

Рассмотрим функцию $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu(\sigma)$. Поскольку $F \in \underline{D}(\Phi)$, то найдется последовательность $\{\tau_j\}$, $0 < \tau_j \uparrow \infty$, такая, что

$$u(\sigma) \leqslant \ln \Phi(m\sigma), \quad \sigma = \tau_j, \quad m \geqslant 1.$$

Следовательно, с учетом (3.1) при $\sigma = \tau_j$, $j \geqslant 1$, имеем:

$$\ln w^*(v(\sigma)) = u(\sigma) \leqslant \ln \Phi(m\sigma), \;\; m \geqslant 1.$$

Значит,

$$\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{m}{\varphi(w^*(v(\sigma)))}, \quad \sigma = \tau_j, \quad m \geqslant 1. \tag{3.3}$$

Учитывая условие (2.1) и то , что $\sqrt{x} \leqslant w^*(x)$, имеем

$$\varphi(x) \leqslant C_1 \varphi(w^*(x)), \quad x \geqslant x_0, \quad 0 < C_1 < \infty. \tag{3.4}$$

В итоге из (3.3) и (3.4) получим оценки

$$\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{C_2}{\varphi(v(\sigma))}, \quad \sigma = \tau_j, \quad j \geqslant 1, \quad 0 < C_2 < \infty. \tag{3.5}$$

Далее, поскольку $w^* \in W(\varphi)$, а функция φ вогнутая то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w^*(x)}{x\varphi(x)} = 0, \tag{3.6}$$

что сразу вытекает из равенства

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{w^*(t)}{t^2}\, dt = 0. \tag{3.7}$$

Применяя лемму 2.1 для функций u и w^* и учитывая (3.5) при $\sigma \to \infty$, вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$,

$$\mathrm{mes}(E_1 \cap [0, \tau_j]) \leqslant o(\varphi(v(\tau_j))) = o(\tau_j), \quad \tau_j \to \infty, \tag{3.8}$$

получаем, что

$$\mu(\sigma + 3h^*(\sigma)) = \mu(\sigma)^{1+o(1)}. \tag{3.9}$$

Следовательно, из (3.2), (3.9) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне множества E_1, нижняя плотность которого $dE_1 = 0$,

$$R_v \leqslant C\mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp\left[-w^*(v)(1 + o(1))\right] = \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что $\lambda_{\nu(\sigma)} \leqslant v(\sigma)$ при $\sigma \geqslant \sigma_1$, $\sigma \notin E_1$, где $\lambda_{\nu(\sigma)}$ — центральный показатель ($\nu(\sigma)$ — центральный индекс) ряда (1.2).

Тем же способом, что и (3.10), показывается, что при $\sigma \to \infty$ вне того же множества E_1 (см. [7])

$$\sum_{\lambda_j > v(\sigma)} |a_j| e^{\lambda_j(\sigma + h^{(1)})} \leqslant \mu^{-2(1+o(1))}(\sigma). \tag{3.11}$$

Соотношение Бореля-Неванлинны (3.9) позволяет это сделать, так как $h^{(1)}(\sigma) = o(h^*(\sigma))$ при $\sigma \to \infty$ (свойства (3.6), (3.7) необходимы при доказательстве самой леммы 2.1).

Пусть

$$F_a(s) = \sum_{\lambda_n \leqslant a} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad s = \sigma + it.$$

Тогда для $\lambda_n \leqslant a$ имеем (см. [5]):

$$a_n = e^{-\alpha\lambda_n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \varphi_n(t) F_a(t+\alpha)dt, \tag{3.12}$$

где α — произвольный параметр,

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{Q_a'(\lambda_n)} \int\limits_0^\infty \frac{Q_a(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda, \qquad Q_a(\lambda) = \prod_{\lambda_n \leqslant a} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \tag{3.13}$$

а C — любой замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$ — сопряженную диаграмму $Q_a(\lambda)$. Но $Q_a(\lambda)$ — полином, следовательно, $\overline{D} = \{0\}$.

Положим $a = v(\sigma)$, $\alpha = \sigma + it$, где t такое, что $\alpha \in \gamma$. В качестве C возьмем контур $\{t : |t| = h^{(1)}\}$, где $h^{(1)} = h^{(1)}(\sigma) = \frac{h^*(\sigma)}{\sqrt{\beta(v(\sigma))}}$. Далее, по предположению,

$$-\ln |Q'(\lambda_n)| \leqslant \theta(\lambda_n) \leqslant w(\lambda_n), \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно, с учетом равенства (3.1) получаем, что для любого $\lambda_n \leqslant v(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$ будем иметь

$$\frac{1}{|Q_v'(\lambda_n)|} \leqslant \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \leq e^{\theta(\lambda_n)} \leq e^{w(v)} = e^{o(w^*(v))} = \mu(\sigma)^{o(1)}.$$

Но тогда из (3.12), (3.13) получаем, что для всех $\lambda_n \leqslant v(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$ вне множества E_1

$$|a_n| e^{\lambda_n \sigma} \leqslant \mu(\sigma)^{o(1)} h^{(1)} \left[\max_{|\xi - \alpha| \leqslant h^{(1)}} |F(\xi)| + \sum_{\lambda_j > v} |a_j| \; e^{\lambda_j(\sigma + h^{(1)})} \right] \int\limits_0^\infty \left| \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| |e^{-\lambda t}||d\lambda|, \tag{3.14}$$

где $\alpha = \sigma + it \in \gamma$.

Нетрудно показать, что (см. [14])

$$\max_{|\lambda| = r} \left| \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| \leqslant M(1) M_v(r), \tag{3.15}$$

где $M(1) = \max\limits_{|z|=1} |Q(z)|$, $M_v(r) = \max\limits_{|z|=r} |Q_v(z)|$.

Так как $\lambda_\nu(\sigma) \leqslant v(\sigma)$ вне E_1 при $\sigma \geqslant \sigma'$, учитывая (3.11), (3.15), из (3.14) при $\sigma \to \infty$ вне E_1 получаем:

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leqslant h^{(1)} \left[\max_{|\xi - \alpha| \leqslant h^{(1)}} |F(\xi)| + \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))} \right] \int\limits_0^\infty M_v(r) e^{-r h^{(1)}} dr. \tag{3.16}$$

Далее, учитывая определения величин $v = v(\sigma)$, $h^{(1)} = h^{(1)}(\sigma)$, а также неравенства $n(x) \leq N(ex)$, $\ln(1 + x^2) < x$, $x > 0$, имеем:

$$\ln M(r) = n(v) \ln \left(1 + \frac{r^2}{v^2}\right) + 2r^2 \int\limits_0^v \frac{n(t)}{t(t^2 + r^2)} dt \leq \frac{n(v)}{v} r + 2N(v) = o(1) h^{(1)} r + o(1) \ln \mu(\sigma).$$

Следовательно, из (3.16) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leqslant \max_{|\xi - \alpha| \leqslant h^{(1)}} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{3.17}$$

где $|\xi^* - \alpha| = h^{(1)}$, $\alpha = \sigma + it \in \gamma$. Учитывая оценку (3.15), при $\sigma \to \infty$ вне E_1 имеем также

$$\begin{aligned}\mu(\sigma) &\leqslant M_F(\sigma) \leqslant M_F(\sigma + 2h^*) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma+2h^*)} \\ &\leqslant \mu(\sigma + 3h^*)\left[n(v) + \sum_{\lambda_j > v(\sigma)} e^{-h^*\lambda_j}\right] < \mu(\sigma)^{1+o(1)}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Пусть $B = \mathbb{R}_+ \backslash E_1$, $h = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}$. Тогда имеется последовательность $\{\sigma_j\}$, $\sigma_j \in B$, $\sigma_j \uparrow 0$, $\sigma_j + h_j \le \sigma_{j+1}$, $j \ge 1$, такая, что (см. [13])

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [\sigma_j - h_j, \sigma_j + h_j],$$

где $h_j = \frac{w(v_j)}{v_j}$, $v_j = v(\sigma_j)$, $j \ge 1$.

Положим $g(z) = F(z + \xi^*)$. Из (3.17) видно, что $|g(0)| \ge 1$ при $\sigma \geqslant \sigma'' > \sigma'$ вне E_1. Применим лемму 2.1 к функции $g(z)$, полагая в (3.17) $\alpha_j = \sigma_j + it_j$, $h^{(1)} = h_j^{(1)} = \frac{w(v_j)}{v_j}\sqrt{\beta(v_j)}$, а в оценках (2.6), (2.7) $N = 4$, $r = \frac{1}{\sqrt{\beta(v_j)}}$, $R = h_j^*$, где $h_j^* = \frac{w^*(v_j)}{v_j}$, $j \ge j_1$. Тогда в круге $\{z : |z| \le h_j^{(1)}\}$, но вне исключительных кружков V_{nj} с общей суммой радиусов

$$\sum_n \rho_n \le \frac{h_j}{\beta_j}, \quad \beta_j = \beta(v(\sigma_j)), \quad j \ge j_1, \tag{3.19}$$

выполняется оценка (2.7).

Пусть γ_j — часть γ, соединяющая вертикальные прямые, проходящие через концы отрезка $\Delta_j = [\sigma_j - h_j,\, \sigma_j + h_j]$. Поскольку кривая γ имеет K-наклон, то γ_j лежит в некотором прямоугольнике $P_j = \Delta_j \times [c_j,\, d_j]$, $d_j - c_j \le 2Kh_j$, с центром в точке $\alpha_j = \sigma_j + it_j$ и соединяет его вертикальные стороны.

Поскольку прямоугольник P_j содержится в круге $\{z : |z| \le h_j^{(1)}\}$, то для всех $z \in P_j$, но вне кружков V_{nj} с общей суммой радиусов, удовлетворяющей оценке (3.19), при $j \to \infty$ получаем, что

$$\ln|g(z)| \ge \left[1 + o(1) - \frac{20L}{\ln|g(0)|}\right] \ln|g(0)|. \tag{3.20}$$

Учитывая (3.17), (3.18), а также то, что $|g(0)| \ge 1$, убеждаемся в том, что при $j \to \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$\frac{L}{\ln|g(0)|} = o(1),$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(Re^{i\theta})| d\theta - \ln|g(0)|,$$

$$g(0) = F(\xi^*), \quad |\mathrm{Re}\ \xi^* - \sigma_j| \le h^{(1)}, \quad \alpha_j = \sigma_j + it_j \in \gamma.$$

Следовательно, из (3.20) для всех z из прямоугольника P_j, но вне кружков V_{nj} при $j \to \infty$ имеем:

$$\ln|g(z)| \ge (1 + o(1)) \ln|g(0)|. \tag{3.21}$$

Но тогда, учитывая, что $g(z) = F(z + \xi^*)$, и используя оценки (3.17)–(3.21), получаем, что для всех z из P_j с центром в точке $\alpha_j = \sigma_j + it_j$, но вне исключительных кружков V_{nj}

с общей суммой радиусов не больше $\frac{h_j}{\beta_j}$,

$$\ln|F(z)| > (1+o(1))\ln\mu(\sigma_j), \quad j\to\infty. \tag{3.22}$$

Пусть E_2 — проекция всех исключительных кружков множества $\cup_j P_j$ на B, где $\alpha_j = \sigma_j + it_j$ — центр P_j, $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}[\sigma_j - h_j, \sigma_j + h_j]$, $\sigma_j \in B$, $\sigma_j + h_j \le \sigma_{j+1}$, $j \ge 1$. Покажем, что $DE_2 = 0$. Действительно, пусть $\sigma_j \le \sigma < \sigma_{j+1}$. Согласно (3.6),

$$h_j \le h_j^{(1)} < h_j^* = o(\sigma_j), \quad j\to\infty.$$

А так как $\beta_j \uparrow \infty$ при $j\to\infty$, то, очевидно,

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(E_2\cap[0,\sigma])}{\sigma} = 0.$$

Значит $DE_2 = 0$, а следовательно, $dE = 0$, где $E = E_1 \cup E_2$.

Оценка (3.22) имеет место в каждом P_j с центром $\alpha_j = \sigma_j + it_j \in \gamma$, но вне исключительных кружков V_{nj}, общая сумма радиусов которых удовлетворяет оценке (3.19).

Проекция p_j дуги γ_j на $\mathbb{R}_+$ есть отрезок $[\sigma_j - h_j, \sigma_j + h_j]$. Положим $A = P\backslash E$, где $P = \cup_{j=1}^{\infty} p_j$. На этом множестве выполняются асимптотические оценки (3.18), (3.22) (A называется асимптотическим множеством). Отсюда следует, что при $s \in \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to \infty$ по множеству A

$$\ln|F(s)| = (1+o(1))\ln\mu(\sigma) = (1+o(1))\ln M_F(\sigma).$$

Осталось оценить DA. Учитывая, что $B\subset P$, а $\operatorname{mes}(E\cap[0,\tau_j]) = \mathrm{o}(\tau_j)$, $\tau\to\infty$, имеем

$$DA = \overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}(A\cap[0,\sigma])}{\sigma} \geqslant \overline{\lim_{\tau_j\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}(P\cap[0,\tau_j])}{\tau_j} - \overline{\lim_{\tau_j\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}(E\cap[0,\tau_j])}{\tau_j} = 1.$$

Здесь $\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная выше. Значит, $DA = 1$.

Теорема 2.2 доказана.

Как показано в [6], условия теоремы 2.2 и необходимы для того, чтобы для любой функции $F \in \underline{D}(\Phi)$ на некотором множестве $A\subset\mathbb{R}_+$, имеющей положительную верхнюю плотность DA, выполнялось асимптотическое равенство (2.5). Следовательно, утверждение теоремы 2.2 носит необходимый и достаточный характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Pólya. *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen* // Math. Z. **29**, 549–640 (1929).
2. М.Н. Шеремета. *О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле* // Матем. заметки. **33**:2, 235–245 (1983).
3. А.М. Гайсин. *Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста* // Матем. заметки. **50**:4, 47–56 (1991).
4. А.М. Гайсин, И.Д. Латыпов. *Асимптотическое поведение суммы ряда Дирихле заданного роста на кривых* // Матем. заметки. **78**:1, 37-51 (2005).
5. А.Ф. Леонтьев. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980.
6. А.М. Гайсин, Н.Н. Юсупова. *Поведение суммы ряда Дирихле с заданной мажорантой роста на кривых* // Уфимск. матем. журн. **1**:2, 17–28 (2009).
7. А.М. Гайсин. *Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Матем. сб. **194**:8, 55–82 (2002).
8. А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. *Неполные системы экспонент на дугах и неквазианалитические классы Карлемана* // Алгебра и анализ. **27**:1, 49–73 (2015).
9. Р.А. Гайсин. *Интерполяционные последовательности и неполные системы экспонент на кривых* // Матем. сб. **212**:5, 58–79 (2021).
10. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.

11. Н.Н. Юсупова. *Асимптотика рядов Дирихле заданного роста.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2009.
12. A.M. Gaisin, N.N. Aitkuzhina. *Stability preserving perturbation of the maximal terms of Dirichlet series* // Probl. Anal. Issues Anal. **11(29)**:3, 30–44 (2022).
13. А.М. Гайсин. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН. Сер. матем. **58**:2, 73–92 (1994).
14. А.М. Гайсин. *Свойства рядов экспонент с последовательностью показателей, подчиненной условию Левинсона* // Матем. сб. **197**:6, 25–46 (2006).

Наркес Нурмухаметовна Аиткужина,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `YusupovaN@rambler.ru`

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `gaisinam@mail.ru`

Рашит Ахтярович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `rashit.gajsin@mail.ru`