

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ю.Г. ВОРОНОВА, А.В. ЖИБЕР

Аннотация. Рассматривается проблема Гурса, посвященная классификации нелинейных гиперболических уравнений второго порядка интегрируемых методом Дарбу. В работе исследуется класс гиперболических уравнений с y -интегралом второго порядка, сводящихся дифференциальной подстановкой к уравнениям с y -интегралом первого порядка. Следует отметить, что уравнения Лэне содержатся в классе рассматриваемых нами уравнений. В работе приведен y -интеграл второго порядка для второго уравнения Лэне и найдена дифференциальная подстановка, связывающая это уравнение с одним из уравнений Мутара.

Рассмотрен класс нелинейных гиперболических уравнений, обладающих y -интегралами первого порядка и x -интегралами третьего порядка. Получены три условия, при выполнении которых уравнения данного класса обладают интегралами первого и третьего порядка. Найден вид таких уравнений и получены формулы для x - и y -интегралов. Также в статье приведены дифференциальные подстановки, связывающие уравнения Лэне.

Ключевые слова: инварианты Лапласа, x - и y -интегралы, дифференциальные подстановки.

Mathematics Subject Classification: 35Q51, 37K60

1. ВВЕДЕНИЕ

Для полной классификации нелинейных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

необходимо провести классификацию уравнений специального класса, которые не были исследованы в работе [1], а именно следующих уравнений:

$$u_{xy} = \frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{\varphi_{u_y}} \sqrt{u_x}. \quad (1.1)$$

Здесь p, q — функции переменных x, y, u , а φ — переменных x, y, u, u_y .

Так, в 1926 г. Лэне построил два уравнения (см. [2]–[4])

$$u_{xy} = \left(\frac{u_y}{u-x} + \frac{u_y}{u-y} \right) u_x + \frac{u_y}{u-x} \sqrt{u_x}, \quad (1.2)$$

$$u_{xy} = 2 \left[(u+Y)^2 + u_y + (u+Y) \sqrt{(u+Y)^2 + u_y} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{u_x} + u_x}{u-x} - \frac{u_x}{\sqrt{(u+Y)^2 + u_y}} \right], \quad (1.3)$$

$Y = Y(y)$, обладающие y -интегралом второго порядка $\bar{w} = \bar{w}(x, y, u, u_y, u_{yy})$ и x -интегралом третьего порядка $w = w(x, y, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ ($D\bar{w} = 0, \bar{D}w = 0$). Здесь D (соответственно, \bar{D}) — оператор полного дифференцирования по x (соответственно, по y).

YU.G. VORONOVA, A.V. ZHIBER, ON A CLASS OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH THIRD-ORDER INTEGRALS.

© Воронова Ю.Г., Жибер А.В. 2023.

Поступила 13 сентября 2022 г.

Отметим, что уравнения (1.2) и (1.3) содержатся в классе уравнений (1.1). Действительно, при

$$q = \frac{1}{u-x}, \quad p = \frac{1}{u-x} + \frac{1}{u-y}, \quad \varphi = \ln u_y$$

уравнение (1.2) совпадает с уравнением (1.1), а при

$$p = q = \frac{1}{u-x}, \quad \varphi = \ln \left[(u+Y) + \sqrt{u_y + (u+Y)^2} \right]$$

уравнение (1.1) переходит в (1.3).

В работе [5] доказано следующее утверждение:

Лемма 1.1. *Если уравнение (1.1) обладает y -интегралом второго порядка, то функция φ не зависит от переменной x .*

Следовательно y -интеграл представим в виде

$$\bar{W} = \bar{D}r + \beta(x, y, r)$$

и поэтому дифференциальная подстановка

$$r = \varphi(y, u, u_y) - h(x, y, u), \quad p = h_u, \tag{1.4}$$

решения уравнения (1.1) переводит в решения уравнения

$$D\bar{D}r + D\beta = 0. \tag{1.5}$$

Приведем дифференциальные подстановки (1.4), уравнения (1.5) и интегралы для уравнений Лэне (см. [2]–[4]). Дифференциальная подстановка

$$r = \ln \frac{u_y}{(u-x)(u-y)} \tag{1.6}$$

связывает уравнение (1.2) с уравнением Мутара

$$r_{xy} + \frac{1}{2}(x-y)r_x e^r + \frac{1}{2}e^r = 0. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) обладает x -интегралом третьего порядка

$$w = \frac{r_{xxx} - 3r_x \cdot r_{xx} + r_x^3}{r_{xx} - r_x^2}. \tag{1.8}$$

Тогда уравнение (1.2) имеет x -интеграл вида

$$W = \frac{z_x}{z} + z, \tag{1.9}$$

где

$$z = \frac{u_{xx}}{2(u_x + \sqrt{u_x})} - \frac{u_x + \sqrt{u_x}}{u-x}.$$

Также уравнение (1.2) обладает y -интегралом второго порядка:

$$\bar{W} = \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_y}{2} \left(\frac{1}{u-x} + \frac{3}{u-y} \right) + \frac{1}{u-y}.$$

Дифференциальная подстановка

$$r = \ln \left[\frac{u + Y(y) + \sqrt{u_y + (u + Y(y))^2}}{u-x} \right] \tag{1.10}$$

решения уравнения (1.3) переводит в решения уравнения

$$r_{xy} - \frac{d}{dx} [e^r(x + Y(y))] = 0. \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) обладает x -интегралом третьего порядка (1.8), а уравнение (1.3) интегралом (1.9), т.е. совпадает с x -интегралом уравнения (1.2).

Также найден y -интеграл уравнения (1.3) в виде

$$\bar{W} = \frac{u_{yy}}{2u_y} \left(1 - \frac{u+Y}{\sqrt{u_y + (u+Y)^2}} \right) - \frac{u_y + (u+Y)^2 + (u+Y)\sqrt{u_y + (u+Y)^2}}{u-x} + u + \frac{(u+Y)^2 + 2u_y + Y'}{\sqrt{u_y + (u+Y)^2}}.$$

Целью данной работы является описание уравнений (1.5), обладающих y -интегралом первого порядка и x -интегралом третьего порядка.

2. x -ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ (1.5)

Исследуем уравнение (1.5), обладающее x -интегралами третьего порядка. Сделаем замену $r \rightarrow u$, $\beta \rightarrow -p$. Тогда уравнение (1.5) переписется в виде

$$D\bar{D}u = Dp, \quad p = p(x, y, u). \quad (2.1)$$

Для удобства изложения материала введем обозначения

$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \dots, \quad \bar{u}_1 = u_y, \quad \bar{u}_2 = u_{yy}, \quad \dots$$

Отметим, что y -интеграл уравнения (2.1) задается формулой

$$\bar{W} = \bar{u}_1 - p.$$

Пусть $W = W(x, y, u, u_1, u_2, u_3)$ — x -интеграл уравнения (2.1). Из выражения

$$\bar{D}W = W_y + W_u \cdot \bar{u}_1 + W_{u_1} \cdot Dp + W_{u_2} \cdot D^2p + W_{u_3} \cdot D^3p = 0, \quad (2.2)$$

ясно, что $W_u = 0$. Известно, что если существует интеграл порядка n , $n \geq 2$, то можно считать, что последний является линейным по старшей переменной. Положим

$$W = A(x, y, u_1, u_2) \cdot u_3 + B(x, y, u_1, u_2).$$

Выражение (2.2) переписется в виде

$$A(p_u \cdot u_3 + 3p_{uu} \cdot u_1u_2 + 3u_2 \cdot p_{ux} + u_1^3 \cdot p_{uuu} + 3u_1^2 \cdot p_{uux} + 3u_1 \cdot p_{xxu} + p_{xxx}) + \bar{D}B = 0$$

или

$$\bar{D}A + p_u A = 0, \quad (2.3)$$

$$A(3p_{uu}u_1u_2 + 3u_2p_{ux} + u_1^3p_{uuu} + 3u_1^2p_{uux} + 3u_1p_{xxu} + p_{xxx}) + \bar{D}B = 0. \quad (2.4)$$

Рассмотрим уравнение (2.3) и первый случай, когда $A = A(x, y)$. Тогда из выражения (2.3) находим, что

$$p = -\frac{A_y}{A} \cdot u + E(x, y).$$

С помощью замены $u = v + Q(x, y)$, где $-\frac{A_y}{A}Q + E - Q_y = 0$, мы получаем уравнение

$$D\bar{D}v = D(a(x, y) \cdot v), \quad (2.5)$$

в котором $a(x, y) = -\frac{A_y}{A}$.

Теперь перейдем к случаю, когда $A = A(x, y, u_1)$, $A_{u_1} \neq 0$. Из выражения (2.3) дифференцированием по переменной u_1 получаем, что

$$\bar{D}A_{u_1} + 2A_{u_1} \cdot p_u = 0$$

и учитывая, что $\bar{D}A + p_u A = 0$, будем иметь

$$p_u = -\frac{\bar{D}A}{A} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{D}A_{u_1}}{A_{u_1}},$$

т.е.

$$\bar{D} \ln \frac{A_{u_1}}{A^2} = 0.$$

Так как мы рассматриваем x -интеграл третьего порядка, то

$$\frac{A_{u_1}}{A^2} = a(x), \quad a(x) \neq 0.$$

Откуда получаем, что

$$A = \frac{\tilde{a}(x)}{u_1 + b(x, y)}.$$

Можно считать, что $\tilde{a}(x) = 1$, а замена $u \rightarrow u - \int b(x, y)dx$, позволяет представить A в виде

$$A = \frac{1}{u_1}.$$

Из равенства (2.3) находим, что $p_x = 0$, т.е. в данном случае имеем

$$A = \frac{1}{u_1}, \quad D\bar{D}u = Dp(y, u).$$

Осталось рассмотреть случай, когда $A = A(x, y, u_1, u_2)$, $A_{u_2} \neq 0$. Дифференцированием выражения (2.3) по переменной u_2 находим, что

$$\bar{D}A_{u_2} + 2p_u \cdot A_{u_2} = 0.$$

Откуда имеем

$$p_u = -\frac{\bar{D}A}{A} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{D}A_{u_2}}{A_{u_2}}.$$

Тогда

$$A = \frac{1}{u_2 + b(x, y, u_1)}. \quad (2.6)$$

Подставим найденное A в (2.3), получим

$$p_{uu} \cdot u_1^2 + 2u_1 \cdot p_{ux} + p_{xx} + b_y + b_{u_1} \cdot Dp - p_u \cdot b = 0. \quad (2.7)$$

Откуда, дифференцированием по переменной u_1 , находим

$$2p_{uu} \cdot u_1 + 2p_{ux} + \bar{D}b_{u_1} = 0.$$

Далее

$$\bar{D}b_{u_1 u_1 u_1} + 2p_u \cdot b_{u_1 u_1 u_1} = 0.$$

Если $b_{u_1 u_1 u_1} \neq 0$, то $p_u = -\frac{1}{2} \bar{D} \ln b_{u_1 u_1 u_1}$. А т.к. $p_u = -\bar{D} \ln A$, то

$$\bar{D} \left(\ln \frac{1}{u_2 + b} - \frac{1}{2} \ln b_{u_1 u_1 u_1} \right) = 0$$

и следовательно есть интеграл второго порядка, что противоречит предположению, что порядок x -интеграла равен три. Итак $b_{u_1 u_1 u_1} = 0$ и

$$b = \frac{\alpha}{2} \cdot u_1^2 + \gamma \cdot u_1 + \delta, \quad (2.8)$$

где α, γ, δ — функции переменных x и y . Подставим функцию (2.8) в уравнение (2.7). Получим равенства

$$p_{uu} + \frac{\alpha_y}{2} + \frac{\alpha}{2} \cdot p_u = 0, \quad (2.9)$$

$$2p_{ux} + \gamma_y + \alpha \cdot p_x = 0, \quad (2.10)$$

$$p_{xx} + \delta_y + \gamma \cdot p_x - \delta \cdot p_u = 0. \quad (2.11)$$

Решение уравнения (2.9) дается формулой

$$p = -\frac{2}{\alpha} C e^{-\frac{\alpha}{2} u} - \frac{\alpha_y}{\alpha} u + \kappa(y), \quad (2.12)$$

при $\alpha \neq 0$.

Если $\alpha = 0$, то $p_{uu} = 0$, $p_u = \mu(x, y)$ и

$$\bar{D} \left(\ln A + \int \mu dy \right) = 0,$$

т.е. существует x -интеграл второго порядка.

Таким образом, если функция $A = A(x, y, u_1, u_2)$, то верны формулы (2.6), (2.8), (2.9)–(2.12).

Для того чтобы упростить вид функции p в (2.12), в уравнении (2.1) сделаем замену

$$u = \beta(y) \cdot v + \mu(x, y).$$

После несложных преобразований, получим уравнение ($v \rightarrow u$)

$$D\bar{D}u = D(e^u + d(x, y)),$$

где $p = e^u + d(x, y)$. Тогда условия (2.9)–(2.11) примут вид

$$\alpha = -2, \quad \delta = 0, \quad \gamma_{xy} = -\gamma \cdot \gamma_y, \quad d_x = \frac{1}{2}\gamma_y.$$

Доказано следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть уравнение (2.1) имеет x -интеграл третьего порядка

$$W = A(x, y, u_1, u_2) \cdot u_3 + B(x, y, u_1, u_2).$$

Тогда выполнено одно из условий

$$A = A(x, y), \quad p = a(x, y) \cdot u, \quad a = -\frac{A_y}{A}, \quad (2.13)$$

$$A = \frac{1}{u_1}, \quad p = p(y, u), \quad (2.14)$$

$$A = \frac{1}{u_2 + b}, \quad b = -u_1^2 + \gamma u_1, \quad p = e^u + d(x, y), \quad (2.15)$$

$$\gamma_{xy} = -\gamma \cdot \gamma_y, \quad d_x = \frac{1}{2}\gamma_y.$$

При выполнении условий (2.13)–(2.15) выполнено равенство (2.3) и обратно, условие (2.3) сводится к одному из (2.13), (2.14), (2.15).

Далее рассмотрим уравнение (2.4) в случае (2.13):

$$A \cdot (3u_2 \cdot a_x + 3u_1 \cdot a_{xx} + a_{xxx} \cdot u) + \bar{D}B = 0. \quad (2.16)$$

Из (2.16) дифференцированием по переменной u_2 получаем

$$3a_x \cdot A + \bar{D}B_{u_2} + a \cdot B_{u_2} = 0,$$

$$\bar{D}B_{u_2 u_2} + 2a \cdot B_{u_2 u_2} = 0.$$

Отметим, что $a_x \neq 0$. Если $a_x = 0$, то $B = B(x)$ и существует x -интеграл первого порядка $W = A \cdot u_1$. Также $B_{u_2} \neq 0$, иначе $a_x = 0$.

Если $B_{u_2 u_2} = 0$, то

$$B = \alpha(x, y, u_1) \cdot u_2 + \beta(x, y, u_1). \quad (2.17)$$

После подстановки (2.17) в выражение (2.16) получим соотношения

$$3A \cdot a_x + \alpha \cdot a + \alpha_y + \alpha_{u_1}(a_x \cdot u + a \cdot u_1) = 0, \quad (2.18)$$

$$A \cdot a_{xxx} + \alpha \cdot a_{xx} + a_x \cdot \beta_{u_1} = 0, \quad (2.19)$$

$$3A \cdot a_{xx} \cdot u_1 + 2\alpha \cdot a_x \cdot u_1 + \beta_y + \beta_{u_1} \cdot a \cdot u_1 = 0. \quad (2.20)$$

Так как $a_x \neq 0$, то $\alpha_{u_1} = 0$, т.е. $\alpha = \alpha(x, y)$ и выражение (2.18) перепишется в виде

$$3A \cdot a_x + \alpha \cdot a + \alpha_y = 0. \quad (2.21)$$

Из (2.19) находим

$$\beta = -\frac{1}{a_x} (A \cdot a_{xxx} + \alpha \cdot a_{xx}) \cdot u_1 + \gamma(x, y). \quad (2.22)$$

Тогда выражение (2.20) примет вид

$$3A \cdot a_{xx} + 2\alpha \cdot a_x - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{a_x} (A a_{xxx} + \alpha a_{xx}) \right] - a \left[\frac{1}{a_x} (A a_{xxx} + \alpha a_{xx}) \right] = 0 \quad (2.23)$$

и $\gamma_y = 0$. Так как $W = Au_3 + \alpha u_2 + \beta$, то можно считать, что $\gamma \equiv 0$.

Из уравнения (2.23) находим α в виде

$$\alpha = -\frac{\left(6a_{xx} - \left(\frac{a_{xxx}}{a_x} \right)' \right) \cdot A}{2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x} \right)'}, \quad (2.24)$$

знаменатель $2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y \neq 0$, так как иначе существует x -интеграл второго порядка $W = A \left(u_2 - \frac{a_{xx}}{a_x} u_1\right)$.

Итак, из (2.21), (2.22) и (2.24) следует, что x -интеграл третьего порядка в случае, когда $B_{u_2 u_2} = 0$, можно представить в виде

$$W = e^{-b} \cdot \left(u_3 - \frac{E}{F a_x} (a_x u_2 - a_{xx} u_1) - \frac{a_{xxx}}{a_x} u_1 \right),$$

где $b_y = a$, $E = 6a_{xx} - \left(\frac{a_{xxx}}{a_x}\right)'_y$, $F = 2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y$ и выполняется условие

$$\frac{E}{F} - 3b_x + \kappa(x) = 0, \quad (2.25)$$

где $\kappa(x)$ — произвольная функция.

Теперь, пусть $B_{u_2 u_2} \neq 0$. Тогда

$$\bar{D} \ln B_{u_2 u_2} = -2a = 2 \frac{A_y}{A}$$

или

$$B_{u_2 u_2} = \gamma(x) \cdot A^2,$$

или

$$B = \frac{\gamma(x)}{2} A^2 u_2^2 + \varepsilon(x, y, u, u_1) u_2 + \mu(x, y, u, u_1),$$

$\gamma \neq 0$. Далее,

$$W = A u_3 + \frac{\gamma}{2} A^2 u_2^2 + \varepsilon u_2 + \mu$$

и используя замену $\gamma \cdot A \rightarrow A$, интеграл можно переписать в виде

$$W = A u_3 + \frac{1}{2} A^2 u_2^2 + \varepsilon u_2 + \mu,$$

где ε, μ — функции, переменных x, y, u, u_1 . Таким образом

$$B = \frac{A^2}{2} u_2^2 + \varepsilon u_2 + \mu. \quad (2.26)$$

Теперь запишем условие (2.16) для функции B (2.26). Получим соотношения

$$\varepsilon_u = 0, \quad \mu_u = 0, \quad (2.27)$$

$$A^2 a_{xx} + \varepsilon_{u_1} a_x = 0, \quad (2.27)$$

$$3A a_x + 2A^2 a_x u_1 + \varepsilon_y + \varepsilon_{u_1} a u_1 + \varepsilon a = 0, \quad (2.28)$$

$$A a_{xxx} + \varepsilon a_{xx} + \mu_{u_1} a_x = 0, \quad (2.29)$$

$$3A a_{xx} u_1 + 2\varepsilon a_x u_1 + \mu_y + \mu_{u_1} a u_1 = 0. \quad (2.30)$$

Отметим, что $a_x \neq 0$. Далее, из (2.27) находим

$$\varepsilon = -A^2 \cdot \frac{a_{xx}}{a_x} \cdot u_1 + \delta(x, y), \quad (2.31)$$

а из (2.29)

$$\mu = \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)^2 \frac{A^2}{2} u_1^2 - \left(A \frac{a_{xxx}}{a_x} + \frac{a_{xx}}{a_x} \delta\right) u_1 + \gamma(x, y). \quad (2.32)$$

В силу (2.31), (2.32) соотношения (2.28), (2.30) перепишутся в виде

$$3Aa_x + \delta_y + a\delta = 0, \quad (2.33)$$

$$2A^2a_x - \left(A^2 \frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y - 2aA^2 \frac{a_{xx}}{a_x} = 0, \quad (2.34)$$

$$3Aa_{xx} + 2a_x\delta - \left(A \frac{a_{xxx}}{a_x} + \frac{a_{xx}\delta}{a_x}\right)'_y - a \left(A \frac{a_{xxx}}{a_x} + \frac{a_{xx}\delta}{a_x}\right) = 0, \quad (2.35)$$

$$-2A^2a_{xx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a_{xx}}{a_x} A\right)^2 \right]'_y + a \left(\frac{a_{xx}}{a_x} A\right)^2 = 0, \quad (2.36)$$

$\gamma_y = 0$. Можно считать, что $\gamma(x) \equiv 0$. После несложных преобразований, соотношения (2.33)–(2.36) можно представить в виде

$$3Aa_x + \delta_y + a\delta = 0,$$

$$2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y = 0,$$

$$6a_{xx} - \left(\frac{a_{xxx}}{a_x}\right)'_y = 0.$$

Но, если $2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y = 0$, то исходное уравнение (2.1) имеет x -интеграл второго порядка $W = A \left(u_2 - \frac{a_{xx}}{a_x} u_1\right)$, $a = -\frac{A_y}{A}$. Так как мы ищем x -интеграл третьего порядка, то данный случай не реализуется.

Перейдем к рассмотрению случая (2.14). Уравнение (2.4) запишется в виде

$$3p_{uu}u_2 + u_1^2 p_{uuu} + B_y + B_{u_1}(p_u u_1) + B_{u_2}(p_u u_2 + p_{uu} u_1^2) = 0. \quad (2.37)$$

Откуда, дифференцированием по переменной u_2 , получим

$$3p_{uu} + \bar{D}B_{u_2} + p_u \cdot B_{u_2} = 0. \quad (2.38)$$

Если $B_{u_2} = 0$, тогда $p_{uu} = 0$, т.е. $p = \alpha(y)u + \beta(y)$. В этом случае существует x -интеграл первого порядка $W = \gamma(y) \cdot u_1$, где $\gamma' + \gamma \cdot \alpha = 0$.

Теперь, пусть $B_{u_2} \neq 0$, $B_{u_2 u_2} = 0$, т.е.

$$B = \alpha(x, y, u_1) \cdot u_2 + \beta(x, y, u_1).$$

Выражение (2.37) примет вид:

$$3p_{uu} + \alpha_y + \alpha_{u_1} p_u u_1 + \alpha p_u = 0, \quad (2.39)$$

$$u_1^2 p_{uuu} + \alpha p_{uu} u_1^2 + \bar{D}\beta = 0. \quad (2.40)$$

Из (2.39) дифференцированием по переменной u_1 , получим:

$$\bar{D}\alpha_{u_1} + 2p_u \cdot \alpha_{u_1} = 0.$$

Если $\alpha_{u_1} = 0$, то $\alpha = \alpha(x, y)$ и

$$3p_{uu} + \alpha_y + \alpha \cdot p_u = 0. \quad (2.41)$$

Решение уравнения (2.41) дается формулой

$$p = -\frac{\alpha_y}{\alpha} \cdot u - 3 \frac{\kappa(x, y)}{\alpha} \cdot e^{-\frac{1}{3}\alpha u} + \mu(x, y).$$

Далее, так как $p_x = 0$, то имеем либо

$$\begin{aligned} \kappa = 0, \quad \frac{\alpha_y}{\alpha} = \delta(y), \quad \mu = \mu(y), \\ p = -\delta(y) \cdot u + \mu(y), \end{aligned} \quad (2.42)$$

либо

$$\kappa = \kappa(y) \neq 0, \quad \frac{\alpha_y}{\alpha} = \delta(y), \quad \alpha = \alpha(y), \quad \mu = \mu(y),$$

$$p = -\delta(y) \cdot u - 3 \frac{\kappa(y)}{\alpha(y)} \cdot e^{-\frac{1}{3}\alpha u} + \mu(y). \quad (2.43)$$

В случае (2.39), (2.40), (2.42) существует x -интеграл первого порядка $W = \gamma(y) \cdot u_1$. А в случае (2.39), (2.40), (2.43) существует x -интеграл второго порядка $W = \frac{u_2}{u_1} + \frac{\alpha(y)}{3} \cdot u_1$. Таким образом, данные случаи не реализуются.

Если $\alpha_{u_1} \neq 0$, то

$$\bar{D} \ln \alpha_{u_1} + 2p_u = 0$$

или

$$\bar{D} \ln \alpha_{u_1} + 2\bar{D} \ln u_1 = 0.$$

Откуда

$$\alpha = -\frac{\varepsilon(x)}{u_1} + \gamma(x, y). \quad (2.44)$$

Теперь (2.39), с учетом (2.44), примет вид

$$3p_{uu} + \gamma_y + \gamma p_u = 0. \quad (2.45)$$

Так как $p_x = 0$, то $\gamma = \gamma(y)$. Уравнение (2.45) совпадает с (2.41) ($\alpha \rightarrow \gamma$). Значит данный случай также не реализуется.

И, наконец, рассмотрим случай, когда $B_{u_2 u_2} \neq 0$. Из уравнения (2.38), дифференцированием по переменной u_2 , получаем

$$\bar{D} B_{u_2 u_2} + 2p_u \cdot B_{u_2 u_2} = 0$$

или

$$\bar{D} \ln B_{u_2 u_2} + 2\bar{D} \ln u_1 = 0.$$

Откуда

$$B = \alpha(x) \cdot \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 + \beta(x, y, u_1) \cdot u_2 + \gamma(x, y, u_1). \quad (2.46)$$

После подстановки (2.46) в (2.37), имеем

$$(3 + 2\alpha) \cdot p_{uu} + (\beta + u_1 \beta_{u_1}) \cdot p_u + \beta_y = 0, \quad (2.47)$$

$$u_1^2 \cdot p_{uuu} + \gamma_y + p_u \cdot u_1 \cdot \gamma_{u_1} + p_{uu} \cdot u_1^2 \cdot \beta = 0. \quad (2.48)$$

Тогда $\frac{\partial}{\partial u_1} (\beta + u_1 \beta_{u_1}) = 0$, иначе $p_{uu} = 0$ и $B_{u_2} = 0$. Найдем

$$\beta = \varepsilon(x, y) + \frac{\delta(x, y)}{u_1}$$

и подставим выражение для β в (2.47), получим, что $\delta_y = 0$ и

$$(3 + 2\alpha(x)) \cdot p_{uu} + \varepsilon(x, y) \cdot p_u + \varepsilon_y = 0.$$

Если $3 + 2\alpha = 0$, то $\varepsilon = 0$ и $\beta = \frac{\delta(x)}{u_1}$. Теперь рассмотрим (2.48):

$$u_1^2 \cdot p_{uuu} + \gamma_y + \gamma_{u_1} \cdot u_1 \cdot p_u + p_{uu} \cdot u_1 \cdot \delta = 0.$$

При $\delta(x) \neq 0$ имеем

$$p_{uu} = c_1 p_u + c_2, \quad p_{uuu} = a_1 p_u + a_2, \quad c_i = c_i(y), \quad a_i = a_i(y), \quad i = 1, 2.$$

Так как $p_u \neq 0$, то $c_1^2 = a_1$, $c_1 c_2 = a_2$ и

$$p_{uu} = c_1 p_u + c_2, \quad p_{uuu} = c_1^2 p_u + c_1 c_2. \quad (2.49)$$

После подстановки (2.49) в равенство (2.48), получим следующие соотношения

$$\gamma_{u_1} = -c_1^2 u_1 - c_1 \delta, \quad \gamma_y = -c_1 c_2 u_1^2 - c_2 \delta u_1.$$

Откуда следует, что $c_1' = c_2$. Тогда

$$p_{uu} = c_1 p_u + c_1', \quad p_{uuu} = c_1^2 p_u + c_1 c_1'.$$

В этом случае уравнение (2.1) обладает x -интегралом второго порядка $W = \frac{u_2}{u_1} - c_1(y) \cdot u_1$. Т.е. данный случай нам не подходит.

Пусть $\delta(x) = 0$, тогда $\beta = 0$ и соотношение (2.48) примет вид

$$p_{uuu} + \frac{\gamma_y}{u_1^2} + \frac{\gamma_{u_1}}{u_1} \cdot p_u = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{u_1}}{u_1} &= \mu(x, y), & \frac{\gamma_y}{u_1^2} &= \kappa(x, y), \\ p_{uuu} + \kappa(x, y) + \mu(x, y) \cdot p_u &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Так как $p_x = 0$, то $\mu_x = 0$ и $\kappa_x = 0$. Из (2.50) следует, что $\mu' = 2\kappa$, $\gamma = \frac{\mu(y)}{2}u_1^2$ и

$$p_{uuu} + \mu(y) \cdot p_u + \frac{1}{2}\mu'(y) = 0.$$

В этом случае x -интеграл третьего порядка представим в виде

$$W = \frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 + \frac{\mu(y)}{2} \cdot u_1^2.$$

Далее, пусть $3 + 2\alpha \neq 0$. Тогда из уравнения (2.47) получим, что

$$\frac{\beta + u_1\beta_{u_1}}{3 + 2\alpha(x)} = \mu(y), \quad \frac{\beta_y}{3 + 2\alpha(x)} = \kappa(y), \quad (2.51)$$

$$p_{uu} + \mu(y) \cdot p_u + \kappa(y) = 0.$$

Из соотношений (2.51) находим $\mu'(y) = \kappa(y)$. Данный случай не реализуется так как уравнение (2.1) обладает x -интегралом $W = \frac{u_2}{u_1} - \mu(y) \cdot u_1$.

И, наконец, рассмотрим последний случай (2.15). Сделаем замену

$$B = A \cdot C,$$

тогда, в силу (2.3), $\bar{D}B = A \cdot (\bar{D}C - e^u \cdot C)$ и уравнение (2.4) примет вид

$$3e^u \cdot u_1 u_2 + u_1^3 \cdot e^u + d_{xxx} + \bar{D}C - e^u \cdot C = 0. \quad (2.52)$$

Откуда

$$\bar{D}C_{u_2 u_2} + e^u \cdot C_{u_2 u_2} = 0. \quad (2.53)$$

Если $C_{u_2 u_2} = 0$, то есть $C = \alpha(x, y, u_1) \cdot u_2 + \beta(x, y, u_1)$, из соотношения (2.52) получим равенства

$$3u_1 + u_1 \cdot \alpha_{u_1} = 0, \quad (2.54)$$

$$u_1^3 + \alpha \cdot u_1^2 + u_1 \cdot \beta_{u_1} - \beta = 0, \quad (2.55)$$

$$\alpha_y + \alpha_{u_1} \cdot d_x = 0, \quad (2.56)$$

$$d_{xxx} + \alpha \cdot d_{xx} + \beta_y + \beta_{u_1} \cdot d_x = 0. \quad (2.57)$$

Из (2.54), (2.56) находим α в виде

$$\alpha = -3u_1 + 3 \cdot \int d_x(x, y) dy.$$

А из уравнений (2.55), (2.57) нетрудно получить, что

$$\beta = u_1^3 - \varepsilon \cdot u_1^2 + \mu(x, y) \cdot u_1,$$

где

$$\mu = -\frac{d_{xxx}}{d_x} + 3 \frac{d_{xx}}{d_x} \cdot \int d_x(x, y) dy,$$

а также выполнено соотношение

$$\left(\frac{d_{xx}}{d_x}\right)'_y + 2d_x = 0.$$

Тогда x -интеграл третьего порядка примет вид

$$W = \frac{1}{u_2 - u_1^2 - \frac{d_{xx}}{d_x} u_1} \left(u_3 - 3u_1 u_2 + u_1^3 - \frac{d_{xxx}}{d_x} u_1 \right) + 3 \int d_x(x, y) dy,$$

при этом

$$d_{xy} + 2d \cdot d_x = \varepsilon(y) \cdot d_x.$$

Остался случай, когда $C_{u_2 u_2} \neq 0$. Из равенства (2.53) находим, что

$$C_{u_2 u_2} = \frac{\varphi(x)}{u_2 + b}, \quad \varphi(x) \neq 0.$$

Тогда

$$C = \varphi(x) \cdot ((u_2 + b) \cdot \ln(u_2 + b) - u_2) + \alpha(x, y, u_1)u_2 + \beta(x, y, u_1).$$

Подставим последнее выражение для C в уравнение (2.54), получим, что $\varphi(x) = 0$, противоречие. Таким образом, данный случай не реализуется. В итоге доказана следующая

Теорема 2.1. *Если уравнение (2.1) обладает x -интегралом третьего порядка и y -интегралом первого порядка $\bar{W} = \bar{u}_1 - p$, то реализуется один из следующих трех случаев:*

$$1) \quad p = a(x, y) \cdot u, \quad W = e^{-b} \cdot \left(u_3 - \frac{E}{F a_x} (a_x u_2 - a_{xx} u_1) - \frac{a_{xxx}}{a_x} u_1 \right),$$

$$\text{где } b_y = a, \quad E = 6a_{xx} - \left(\frac{a_{xxx}}{a_x} \right)'_y, \quad F = 2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x} \right)'_y \quad \text{и выполняется условие} \quad (2.25).$$

$$2) \quad p_{uuu} + \mu(y) \cdot p_u + \frac{1}{2} \mu'(y) = 0, \quad W = \frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 + \frac{\mu(y)}{2} \cdot u_1^2,$$

$$3) \quad p = e^u + d(x, y), \quad d_{xy} + 2d \cdot d_x = \varepsilon(y) \cdot d_x,$$

$$W = \frac{1}{u_2 - u_1^2 - \frac{d_{xx}}{d_x} u_1} \left(u_3 - 3u_1 u_2 + u_1^3 - \frac{d_{xxx}}{d_x} u_1 \right) + 3 \int d_x(x, y) dy,$$

где $\mu(y)$, $\varepsilon(y)$ — произвольные функции.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ УРАВНЕНИЙ ЛЭНЕ (1.2), (1.3)

В данном параграфе рассмотрим дифференциальные подстановки, связывающие уравнения (1.2), (1.3). Для этого в уравнении (1.2) заменим переменную y на z :

$$u_{xz} = \left(\frac{u_z}{u-x} + \frac{u_z}{u-z} \right) u_x + \frac{u_z}{u-x} \sqrt{u_x}. \quad (3.1)$$

Данное уравнение дифференциальной подстановкой

$$r = \ln \frac{u_z}{(u-x)(u-z)} \quad (3.2)$$

сводится к уравнению Мутара:

$$D\bar{D}r = \frac{1}{2} D [e^r (z-x)]. \quad (3.3)$$

А второе уравнение Лэне

$$v_{xy} = 2 \left[(v+Y)^2 + v_y + (v+Y) \sqrt{(v+Y)^2 + v_y} \right] \times \left[\frac{\sqrt{v_x + v_x}}{v-x} - \frac{v_x}{\sqrt{(v+Y)^2 + v_y}} \right] \quad (3.4)$$

дифференциальной подстановкой

$$s = \ln \left[\frac{v + Y(y) + \sqrt{v_y + (v + Y(y))^2}}{v - x} \right] \quad (3.5)$$

сводится к уравнению

$$D\bar{D}s = D [e^s (x + Y(y))]. \quad (3.6)$$

Покажем, что уравнения (3.6) и (3.3) связаны между собой. Положим

$$z = -Y(y),$$

тогда

$$s(x, y) = q(x, z).$$

Уравнение (3.6) перепишем в виде:

$$q_{xz} = D \left[(z - x) e^{q - \ln Y'(y)} \right].$$

Положим $\ln Y'(y) = a(z)$,

$$r = q - a(z) + \ln 2. \quad (3.7)$$

Тогда получаем уравнение (3.3)

$$r_{xz} = \frac{1}{2} D [e^r (z - x)].$$

Далее, подставим (3.2) в выражение (3.7)

$$\ln \frac{u_z}{(u - x)(u - z)} = q - \ln Y' + \ln 2,$$

заменяем $z = -Y(y)$, тогда

$$s = \frac{u_y}{2(x - u)(u + Y)}.$$

С учетом (3.5), получим

$$\frac{u_y}{2(x - u)(u + Y(y))} = \frac{v + Y(y) + \sqrt{v_y + (v + Y(y))^2}}{v - x}. \quad (3.8)$$

Продифференцируем выражение (3.8) по x и заменим u_{xz} и v_{xy} в силу уравнений (3.1) и (3.4). Получим соотношение

$$\frac{\sqrt{u_x} + 1}{u - x} = \frac{\sqrt{v_x} + 1}{v - x}. \quad (3.9)$$

Таким образом, получили что уравнения (3.1) и (3.4) связаны дифференциальной подстановкой (3.8), (3.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Жибер, В.В. Соколов. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лувиллевого типа* // УМН. **56**:1, 63–106 (2001).
2. О.В. Капцов. *Методы интегрирования уравнений с частными производными* // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009.
3. О.В. Капцов. *О проблеме классификации Гурса* // Программирование. **2**, 68–71 (2012).
4. М.Е. Laine. *Sur l'application de la méthode de Darboux aux équations $s = f(x, y, z, p, q)$* // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. **182**, 1127–1128 (1926).
5. А.В. Жибер, А.М. Юрьева. *Гиперболические уравнения лувиллевого типа специального класса* // Дифференциальные уравнения, Математ. физика. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. ВИНТИ РАН, Москва. **137**, 17–25 (2017).

Юлия Геннадьевна Воронова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: mihaylovaj@mail.ru

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.ru