

УДК 517.53

# О ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Е.Г. РОДИКОВА

**Аннотация.** Вопрос об описании линейных непрерывных функционалов на пространствах аналитических функций изучается с середины 20 вв. Исторически первой была найдена структура линейных непрерывных функционалов пространств Харди  $H^p$  при  $p \geq 1$  в работе А. Тейлора в 1951 г. В пространствах  $H^p$  ( $0 < p < 1$ ) эта задача была решена П. Дюреном, Б. Ромбергом и А. Шилдсом в 1969 г. Отметим, что при доказательстве использовалась оценка коэффициентных мультипликаторов в этих пространствах. В статье, развивая метод, предложенный в работе П. Дюрена и др., получено описание линейных непрерывных функционалов плоских классов Привалова и классов типа Неванлинны-Джрбашяна. Рассматриваемые классы обобщают хорошо известные в научной литературе плоские классы Неванлинны. Идея доказательства основного результата заключается в следующем: вопрос о нахождении общего вида линейного непрерывного функционала сводится к отысканию вида произвольного коэффициентного мультипликатора, действующего из исследуемого пространства в пространство ограниченных аналитических функций. Последняя задача в упрощенном виде может быть сформулирована так: на какие множители нужно домножить тейлоровские коэффициенты функций из исследуемого класса, чтобы они стали тейлоровскими коэффициентами некоторой ограниченной аналитической функции.

**Ключевые слова:** пространства Привалова, классы Неванлинны-Джрбашяна, линейные непрерывные функционалы, коэффициентные мультипликаторы.

**Mathematics Subject Classification:** Primary 30H99, Secondary 32C15, 46E10.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\mathbb{C}$  — комплексная плоскость,  $D$  — единичный круг на  $\mathbb{C}$ ,  $H(D)$  — множество всех функций, аналитических в  $D$ , для произвольной функции  $f \in H(D)$  обозначим  $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ ,  $0 < r < 1$ , через  $T(r, f)$  обозначим характеристику Р. Неванлинны функции  $f$  (см. [2]):

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad 0 < r < 1.$$

При всех значениях параметра  $0 < p < +\infty$  введем в рассмотрение классы Харди в круге:

$$H^p := \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi < +\infty \right\},$$

$H^\infty$  — класс ограниченных аналитических в  $D$  функций.

---

E.G. RODIKOVA, ON CONTINUOUS LINEAR FUNCTIONALS IN SOME SPACES OF FUNCTIONS ANALYTIC IN A DISK.

© Родикова Е.Г. 2023.

Поступила 18 июля 2022 г.

При всех  $0 < q < +\infty$  определим класс Привалова  $\Pi_q$ :

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta < +\infty, \right\}$$

где  $\ln^+ a = \max(\ln a, 0)$ ,  $a > 0$ .

Впервые классы  $\Pi_q$  были введены И.И. Приваловым в [3]. При  $q = 1$  класс Привалова совпадает с хорошо известным в научной литературе классом функций ограниченного вида или классом Р. Неванлинны  $N$  [2]. Справедлива цепочка включений:

$$H^\infty \subset H^p (p > 0) \subset \Pi_q (q > 1) \subset N \subset \Pi_q (0 < q < 1).$$

При всех  $0 < q < +\infty$  введем также в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова или классом И.И. Привалова по площади. Класс  $\tilde{\Pi}_q$  является обобщением хорошо известного плоского класса Р. Неванлинны и при  $q = 1$  совпадает с ним. Отметим, что пространства  $\tilde{\Pi}_q$  возникают естественным образом при исследовании вопросов дифференцирования в классах И.И. Привалова (см. [16]).

При всех  $\alpha > -1$ ,  $0 < q < +\infty$  рассмотрим также классы  $S_\alpha^q$ :

$$S_\alpha^q = \left\{ \int_0^1 (1-r)^\alpha T^q(r, f) dr < +\infty \right\}.$$

Классы  $S_\alpha^q$  были введены и исследованы в [11] Ф.А. Шамомяном, они обобщают широко известные классы Неванлинны-Джрбашяна (см. [2]).

Используя неравенство Гёльдера, нетрудно доказать, что

$$\tilde{\Pi}_q \subset S_0^q \text{ при } q > 1,$$

и

$$\tilde{\Pi}_q \supset S_0^q \text{ при } 0 < q < 1.$$

В данной работе исследуются линейные непрерывные функционалы пространств  $\tilde{\Pi}_q$  и  $S_\alpha^q$ . Понятие линейного непрерывного функционала (сокр. ЛНФ) играет большую роль в функциональном анализе. Вопрос об описании ЛНФ на пространствах аналитических функций изучается с середины 20 вв. Исторически первой была найдена структура ЛНФ пространств Харди  $H^p$  при  $p \geq 1$  в работе А. Тейлора в 1951 г. ([17]). В пространствах  $H^p$  ( $0 < p < 1$ ), которые, в отличие от случая  $p \geq 1$ , не являются банаховыми, они только  $F$ -пространства, ЛНФ были описаны П. Дюреном, Б. Ромбергом и А. Шилдсом в 1969 г. (см. [12]). Отметим, что при доказательстве использовалась оценка коэффициентных мультипликаторов в этих пространствах. В 1973 году, опираясь на работу [12], Н. Янагиара в [18] нашел общий вид ЛНФ в пространствах Смирнова. В 1999 г., развивая метод, предложенный Янагиара, Р. Мештрович и А.В. Субботин описали ЛНФ на пространствах Привалова при всех  $q > 1$  (см. [1]).

Мы распространили последний из упомянутых результатов на плоские классы Привалова и классы  $S_\alpha^q$ . Идея доказательства основного результата заключается в следующем: вопрос о нахождении общего вида ЛНФ на пространствах Привалова сводится к отысканию вида произвольного коэффициентного мультипликатора, действующего из исследуемого пространства в пространство ограниченных аналитических функций.

Для изложения результатов работы введем дополнительные определения и обозначения.

Пусть  $X$  и  $Y$  — некоторые классы аналитических в единичном круге  $D$  функций.

**Определение 1.1.** Последовательность комплексных чисел  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$  называется коэффициентным мультипликатором из класса  $X$  в класс  $Y$ , если для произвольной функции  $f \in X$ ,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \text{ функция } \Lambda(f)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in Y. \text{ Обозначается } CM(X, Y).$$

Статья организована следующим образом: в следующей части работы мы сформулируем и докажем вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основного результата, а в третьей части докажем основной результат.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

При доказательстве результатов работы используется аналог теоремы Мергеляна в исследуемых пространствах.

**Теорема 2.1** ([4]). *Если  $f \in S_\alpha^q$ , то*

$$\ln^+ M(r, f) = o\left(\frac{1}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{q}+1}}\right), \quad r \rightarrow 1-0, \quad (2.1)$$

причём оценка (2.1) неумлучшаема, т.е. для любой положительной функции  $\omega(r)$ ,  $0 < r < 1$ , такой что  $\omega(r) = o(1)$ ,  $r \rightarrow 1-0$ , существует функция  $f \in S_\alpha^q$ , такая что

$$\ln^+ M(r, f) \neq O\left(\frac{\omega(r)}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{q}+1}}\right), \quad r \rightarrow 1-0.$$

**Теорема 2.2** ([4]). *Если  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$  – ряд Тейлора функции  $f(z)$ ,  $f \in S_\alpha^q$ , то*

$$\ln^+ |a_k| = o\left(k^{\frac{\alpha+q+1}{\alpha+2q+1}}\right), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (2.2)$$

Оценка (2.2) неумлучшаема, т.е. для любой положительной последовательности  $\{\delta_k\}$ ,  $\delta_k = o(1)$ ,  $k \rightarrow +\infty$ , существует функция  $f \in S_\alpha^q$ , такая что

$$\ln^+ |a_k| \neq O\left(\delta_k k^{\frac{\alpha+q+1}{\alpha+2q+1}}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

**Теорема 2.3** ([9]). *Если  $f \in \tilde{\Pi}_q$ , то*

$$\ln^+ M(r, f) = o((1-r)^{-2/q}), \quad r \rightarrow 1-0. \quad (2.3)$$

Оценка (2.3) неумлучшаема, т.е. для любой положительной функции  $\omega(r)$ ,  $0 < r < 1$ , такой что  $\omega(r) = o(1)$ ,  $r \rightarrow 1-0$ , существует функция  $f \in \tilde{\Pi}_q$ , такая что

$$\ln^+ M(r, f) \neq O(\omega(r)(1-r)^{-2/q}), \quad r \rightarrow 1-0.$$

**Теорема 2.4** ([9]). *Если  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$  – ряд Тейлора функции  $f(z)$ ,  $f \in \tilde{\Pi}_q$ , то*

$$\ln^+ |a_k| = o\left(k^{\frac{2}{2+q}}\right), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (2.4)$$

Оценка (2.4) неумлучшаема, т.е. для любой положительной последовательности  $\{\delta_k\}$ ,  $\delta_k = o(1)$ ,  $k \rightarrow +\infty$ , существует функция  $f \in \tilde{\Pi}_q$ , такая что

$$\ln^+ |a_k| \neq O\left(\delta_k k^{\frac{2}{2+q}}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Введём в пространствах  $\tilde{\Pi}_q$  и  $S_\alpha^q$  при всех  $q > 0$  метрики:

$$\rho_{\tilde{\Pi}_q}(f, g) = \left( \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^q \left(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\right) d\theta dr \right)^{\alpha_q/q}, \quad f, g \in \tilde{\Pi}_q; \quad (2.5)$$

$$\rho_{S_\alpha^q}(f, g) = \left( \int_0^1 (1-r)^\alpha \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\right) d\theta \right)^q dr \right)^{\alpha_q/q}, \quad f, g \in S_\alpha^q, \quad (2.6)$$

где  $\alpha_q = \min(q, 1)$ .

Классы  $\tilde{\Pi}_q$  и  $S_\alpha^q$  являются линейными пространствами, покажем, что они образуют  $F$ -пространства относительно введенных метрик (см. [6], [9]).

Напомним, что метрическое пространство  $(X, \rho)$  является  $F$ -пространством, если [10]

- а)  $\rho(f, g) = \rho(f - g, 0)$  (инвариантность относительно сдвигов);
- б)  $(X, \rho)$  – полное метрическое пространство;
- в) Если  $f, f_n \in X$  и  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ , то  $\rho(\beta f_n, \beta f) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$  для любого  $\beta \in \mathbb{C}$  (непрерывность умножения на скаляр по векторному аргументу);
- г) Если  $\beta_n, \beta \in \mathbb{C}$  и  $\beta_n \rightarrow \beta, n \rightarrow +\infty$ , то  $\rho(\beta_n f, \beta f) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$  для любой функции  $f \in X$  (непрерывность умножения по скалярному аргументу).

Для доказательства вспомогательных утверждений нам понадобится следующая легко устанавливаемая, но полезная оценка:

**Лемма 2.1.** Для любых  $a \geq 0, b \geq 0$  справедливо неравенство  $(a+b)^q \leq (a^q + b^q)$  при  $0 < q \leq 1$  и  $(a+b)^q \leq 2^q(a^q + b^q)$  при  $q > 1$ .

**Лемма 2.2.** Относительно введенной метрики  $S_\alpha^q$  образует  $F$ -пространство, причем сходимость по метрике (2.6) этого пространства не слабее равномерной сходимости на компактных подмножествах  $D$ .

*Доказательство.* Проведем для случая  $0 < q \leq 1$ . Случай  $q > 1$  рассматривается аналогично.

а)  $\rho(f, g) = \rho(f - g, 0)$  – очевидно.

б) Докажем, что  $S_\alpha^q$  – полное метрическое пространство.

Пусть  $\{f_n(z)\}$  – произвольная фундаментальная последовательность из класса  $S_\alpha^q$ , то есть для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N(\varepsilon) > 0$ , такой что для всех  $n, m > N$  выполняется  $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$ . Покажем, что она сходится к некоторой функции  $f \in S_\alpha^q$ . Сначала докажем, что из фундаментальности последовательности  $\{f_n\}$  в  $S_\alpha^q$  следует ее равномерная сходимость внутри круга  $D$ . Ввиду субгармоничности функции  $u(z) = \ln(1 + |f_n(z) - f_m(z)|)$  в  $D$ , имеем:

$$\begin{aligned} & \ln(1 + |f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|) \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi) + r^2} \ln \left( 1 + |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| \right) d\theta \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R+r}{R-r} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left( 1 + |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| \right) d\theta, \quad 0 < r < R < 1, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Откуда получаем:

$$(R-r)^q (\ln(1 + |f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|))^q \leq \frac{1}{\pi^q} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left( 1 + |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| \right) d\theta \right)^q.$$

Далее умножим обе части неравенства на  $(1-R)^\alpha$  и, зафиксировав  $r \in [0, 1)$ , проинтегрируем по  $R \in [\frac{1+r}{2}, 1)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1+r}{2}}^1 (1-R)^\alpha (R-r)^q (\ln(1 + |f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|))^q dR \\ & \leq \frac{1}{\pi^q} \int_{\frac{1+r}{2}}^1 (1-R)^\alpha \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left( 1 + |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| \right) d\theta \right)^q dR. \end{aligned}$$

Учитывая, что подынтегральная функция – неотрицательная, получим, что правая часть неравенства мажорируется метрикой  $\rho(f_n, f_m)$ , поэтому:

$$(\ln(1 + |f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|))^q \int_{\frac{1+r}{2}}^1 (1-R)^\alpha (R-r)^q dR \leq \frac{1}{\pi^q} \rho(f_n, f_m),$$

откуда имеем:

$$\ln(1 + |f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|) \leq \frac{c_{\alpha,q}}{(1-r)^{(\alpha+1+q)/q}} (\rho(f_n, f_m))^{1/q},$$

при всех  $0 < r < 1$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ . И окончательно:

$$|f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow +\infty,$$

при всех  $0 < r < 1$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ .

Таким образом, последовательность  $\{f_n\}$  равномерно сходится внутри круга  $D$  к некоторой функции  $f \in H(D)$ . Очевидно, что  $\{f_n\}$  сходится к  $f$  и по метрике пространства  $S_\alpha^q$ . То есть имеем: для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N > 0$ , такой что для всех  $n > N$   $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ .

Докажем, что  $f \in S_\alpha^q$ .

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T^q(r, f) dr \leq \int_0^1 (1-r)^\alpha \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + |f(re^{i\theta})|) d\theta \right)^q dr = \rho(f, 0).$$

Но при всех  $n > N$   $\rho(f, 0) \leq \rho(f, f_n) + \rho(f_n, 0) < \varepsilon + c$ , поэтому

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T^q(r, f) dr \leq const.$$

Таким образом,  $f \in S_\alpha^q$ , и пространство  $S_\alpha^q$  является полным.

в) Пусть  $f, f_n \in S_\alpha^q$  и  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ . Покажем, что для любого  $\beta \in \mathbb{C}$   $\rho(\beta f_n, \beta f) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ ;

Пусть  $|\beta| < 1$ , тогда  $\ln(1 + |\beta|x) \leq \ln(1 + x)$  при всех  $x \geq 0$ , и свойство сразу следует из неравенства  $0 \leq \rho(\beta f_n, \beta f) \leq \rho(f_n, f)$ .

При всех  $|\beta| \geq 1$  и  $x \geq 0$  справедлива оценка  $(1 + |\beta|x) \leq (1 + x)^{|\beta|}$ , из которой сразу следует свойство в):

$$\begin{aligned} \rho(\beta f_n, \beta f) &= \int_0^1 (1-r)^\alpha \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + |\beta| \cdot |f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|) d\theta \right)^q dr \\ &\leq \int_0^1 (1-r)^\alpha \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + |f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|)^{|\beta|} d\theta \right)^q dr \\ &\leq |\beta|^q \int_0^1 (1-r)^\alpha \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + |f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|) d\theta \right)^q dr = |\beta|^q \rho(f_n, f). \end{aligned}$$

г) Пусть  $f \in S_\alpha^q$  и  $\beta_n \rightarrow \beta$ ,  $n \rightarrow +\infty$ . Покажем, что  $\rho(\beta_n f, \beta f) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$  для любой функции  $f \in S_\alpha^q$ ;

Оценим

$$\rho(\beta_n f, \beta f) = \int_0^1 (1-r)^\alpha \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + |f(re^{i\theta})| |\beta_n - \beta|) d\theta \right)^q dr = J.$$

Разобьём интеграл  $J$  на две части:

$$J = \int_0^{r_0} \dots + \int_{r_0}^1 \dots = J_1 + J_2.$$

Выберем  $0 < r_0 < 1$  так, чтобы  $J_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ , где  $\varepsilon > 0$  — произвольное достаточно маленькое число. Оценим  $J_1$ , используя оценку (2.1) из теоремы 2.1:

$$J_1 \leq (2\pi)^q \ln^q \left( 1 + |\beta_n - \beta| \exp \frac{\delta}{(1-r_0)^{\frac{\alpha+1}{q}+1}} \right) \cdot \frac{1 - (1-r_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

где  $\delta > 0$  — сколь угодно маленькое число.

Поскольку  $|\beta_n - \beta| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , то  $J_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$  при  $n > N(\varepsilon)$ . Таким образом,  $\gamma$  установлено. Лемма 2.2 доказана.  $\square$

**Лемма 2.3.** *Относительно введенной метрики  $\tilde{\Pi}_q$  образует  $F$ -пространство, причем сходимость по метрике (2.5) этого пространства не слабее равномерной сходимости на компактных подмножествах  $D$ .*

*Доказательство.* Пусть  $0 < q \leq 1$ , случай  $q > 1$  доказывается аналогично.

а)  $\rho(f, g) = \rho(f - g, 0)$  — очевидно.

б)  $\tilde{\Pi}_q$  — полное метрическое пространство.

Пусть  $\{f_n\}$  — произвольная фундаментальная последовательность из класса  $\tilde{\Pi}_q$ , то есть для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N(\varepsilon) > 0$ , такой что для всех  $n, m > N$  выполняется  $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$ . Покажем, что она сходится к некоторой функции  $f \in \tilde{\Pi}_q$ . Заметим, что функции  $\ln(1 + |f_n|)$  — субгармонические в  $D$ , поэтому справедлива оценка (см. [13, с. 144]):

$$\ln^q(1 + |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|) \leq \frac{c(q)}{(1-R)^2} \cdot \rho(f_n, f_m),$$

откуда

$$|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow +\infty,$$

при всех  $0 < R < 1$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Таким образом, фундаментальная последовательность  $\{f_n\} \in \tilde{\Pi}_q$  равномерно сходится внутри круга  $D$  к некоторой функции  $f \in H(D)$ . Очевидно, что  $\{f_n\}$  сходится к  $f$  и по метрике пространства  $\tilde{\Pi}_q$ .

Докажем, что  $f \in \tilde{\Pi}_q$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr &\leq \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln(1 + |f(re^{i\theta})|))^q d\theta dr \\ &\leq \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^q \left( 1 + |f(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})| + |f_n(re^{i\theta})| \right) d\theta dr. \end{aligned}$$

Ввиду леммы 2.1, из последней оценки имеем:

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta \leq \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \ln^q(1 + |f(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})|) + \ln^q(1 + |f_n(re^{i\theta})|) \right] d\theta dr \leq const.$$

Значит,  $\tilde{\Pi}_q$  полно.

Доказательство свойств в), г) проводится аналогично лемме 2.2. Лемма доказана.  $\square$

Отметим также, что  $F$ -пространства можно рассматривать как полные квазинормированные пространства.

**Лемма 2.4** ([19]). *Непрерывность линейного оператора квазинормированных пространств равносильна его ограниченности, то есть тому, что он ограниченные множества переводит в ограниченные.*

Обозначим  $f_\zeta(z) = f(\zeta z)$ ,  $\zeta \in D$ .

**Лемма 2.5.** *Пусть  $f \in X$ , где  $X = S_\alpha^q$  или  $X = \tilde{\Pi}_q$ . Тогда семейство функций  $\{f_\zeta(z)\}$  ограничено в  $X$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим  $\eta$ -окрестность 0, т.е.  $V = \{g \in X : \rho(g, 0) < \eta\}$ . Выберем  $\alpha'$ , такое что  $\rho(\alpha' f, 0) < \frac{\eta}{2}$ .

Обозначим  $f_r(z) = f(rz)$ ,  $0 < r < 1$ . Очевидно, что  $\rho(f, f_r) \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow 1 - 0$ . Выберем  $r_0 \leq r < 1$  настолько близким к 1, что  $\rho(f, f_r) < \frac{\eta}{2}$ .

Обозначим  $f_{(\theta)}(z) = f(e^{i\theta}z)$ ,  $f_{r(\theta)}(z) = f_r(e^{i\theta}z) = f(re^{i\theta}z)$ . Тогда

$$\rho(\alpha' f_{(\theta)}, 0) = \rho(\alpha' f, 0) < \frac{\eta}{2},$$

и

$$\rho(\alpha' f_{r(\theta)}, \alpha' f_{(\theta)}) = \rho(\alpha' f_r, \alpha' f) \leq \rho(f_r, f) < \frac{\eta}{2}.$$

Если  $\zeta = re^{i\theta}$ , то  $f_\zeta = f_{r(\theta)}$ . Для всех  $r \geq r_0$  мы получим:

$$\rho(\alpha' f_\zeta, 0) = \rho(\alpha' f_{r(\theta)}, 0) \leq \rho(\alpha' f_{r(\theta)}, \alpha' f_{(\theta)}) + \rho(\alpha' f_{(\theta)}, 0) = \rho(\alpha' f_r, \alpha' f) + \rho(\alpha' f, 0) < \eta.$$

Для всех  $0 \leq r \leq r_0$  мы можем выбрать  $\alpha''$  настолько маленьким, чтобы

$$\rho(\alpha'' f_\zeta, 0) \leq \rho(\alpha'' f_r, 0) < \eta.$$

Далее, полагая  $\alpha = \min(\alpha', \alpha'')$ , получим  $\{\alpha f_\zeta\} \subset V$ . □

При доказательстве основного результата используются описания коэффициентных мультипликаторов, действующих из исследуемых пространств в классы Харди.

**Теорема 2.5** ([5]). Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ . Для того чтобы  $\Lambda = CM(S_\alpha^q, X)$ , где  $X = H^p$  ( $0 < p \leq +\infty$ ), необходимо и достаточно, чтобы

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{\alpha+q+1}{\alpha+2q+1}}\right)\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

для некоторого  $c > 0$ .

**Теорема 2.6** ([9]). Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ . Для того чтобы  $\Lambda = CM(\tilde{\Pi}_q, X)$ , где  $X = H^p$  ( $0 < p \leq +\infty$ ), необходимо и достаточно, чтобы

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{2}{q+2}}\right)\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

для некоторого  $c > 0$ .

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Перейдем к формулировке основных результатов работы — дискретному описанию ЛНФ в пространствах  $S_\alpha^q$  и в классах Привалова по площади. Итак, справедливы следующие утверждения:

**Теорема 3.1.** Любой непрерывный линейный функционал  $\Phi$  над плоским классом Привалова  $\tilde{\Pi}_q$  ( $q > 0$ ) определяется формулой

$$\Phi(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \tag{3.1}$$

где  $\{a_k\}$  — коэффициенты Тейлора функции  $f \in \tilde{\Pi}_q$ , а числа  $\{b_k\}$  с условием

$$|b_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{2}{2+q}}\right)\right), \quad k \rightarrow +\infty, \quad c > 0. \tag{3.2}$$

являются коэффициентами Тейлора некоторой аналитической функции в  $D$ , при этом ряд в правой части (3.1) абсолютно сходится.

Обратно, каждая последовательность  $\{b_k\}$  с условием (3.2) определяет по формуле (3.1) линейный непрерывный функционал  $\Phi$  над  $\tilde{\Pi}_q$ .

**Теорема 3.2.** Любой непрерывный линейный функционал  $\Phi$  над пространством  $S_\alpha^q$  определяется формулой

$$\Phi(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \tag{3.3}$$

где числа  $\{b_k\}$  с условием

$$|b_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{\alpha+q+1}{\alpha+2q+1}}\right)\right), \quad c > 0, \quad k \rightarrow +\infty. \tag{3.4}$$

являются коэффициентами Тейлора некоторой аналитической функции в  $D$ ,  $\{a_k\}$  — коэффициенты Тейлора функции  $f \in S_\alpha^q$ . При этом ряд в правой части (3.3) абсолютно сходится.

Обратно, каждая последовательность  $\{b_k\}$  с условием (3.4) определяет по формуле (3.3) линейный непрерывный функционал  $\Phi$  над пространством  $S_\alpha^q$ .

*Доказательство.* Докажем теорему 3.1. Пусть  $\Phi$  — произвольный линейный непрерывный функционал над пространством  $\tilde{\Pi}_q$ . Каждой функции  $f \in \tilde{\Pi}_q$  соотнесем функцию  $F_\zeta = \Phi(f_\zeta)$ ,  $\zeta \in D$ . Ряд Тейлора функции  $f_\zeta(z) = f(\zeta z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \zeta^k$  сходится абсолютно и равномерно на замкнутом единичном круге  $\bar{D}$ , следовательно, он сходится по метрике пространства  $\tilde{\Pi}_q$ , и в силу непрерывности и линейности функционала  $\Phi$ , имеем:

$$F(\zeta) = \Phi(f_\zeta) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \Phi \left( \sum_{k=0}^N a_k z^k \zeta^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \zeta^k, \quad \zeta \in D, \quad (3.5)$$

где  $b_k = \Phi(z^k)$ , и ряд в правой части (3.5) — сходящийся. Таким образом,  $F \in H(D)$ . По лемме 2.5 семейство функций  $\{f_\zeta\}$  ограничено в  $\tilde{\Pi}_q$ , поэтому и функция  $F$  будет ограничена в  $D$  по лемме 2.4, то есть  $F \in H^\infty$ . Значит, по определению последовательность  $\{b_k\}$  является коэффициентным мультипликатором из  $\tilde{\Pi}_q$  в  $H^\infty$ , и по теореме 2.6 справедлива оценка (3.2). Далее, принимая во внимание оценку (2.4), получаем, что ряд  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \zeta^k$  сходится абсолютно и равномерно, в силу теоремы Вейерштрасса.

Используя теорему Абеля о степенных рядах, заключаем:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k = \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k r^k.$$

С другой стороны, так как  $\rho_{\tilde{\Pi}_q}(f, f_r) \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow 1-0$ , и в силу непрерывности функционала  $\Phi$ , заключаем:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k r^k = \lim_{r \rightarrow 1-0} \Phi(f_r) = \Phi(f).$$

Таким образом, (3.1) доказано, то есть необходимость установлена.

Докажем обратное утверждение. Пусть последовательность комплексных чисел  $\{b_k\}$  удовлетворяет условию (3.2). Принимая во внимание оценку (2.4), получаем, что ряд  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$  абсолютно сходится для каждой функции  $f = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k \in \tilde{\Pi}_q$ . Поэтому функционал  $\Phi$  корректно определен формулой (3.1). Он линеен, в силу линейности каждого тейлоровского коэффициента как функционала над пространством голоморфных в круге  $D$  функций. Для доказательства непрерывности представим функционал  $\Phi$  в виде:

$$\Phi_N = \sum_{k=1}^N a_k b_k.$$

Линейность и непрерывность этого функционала следует из линейности и непрерывности каждого тейлоровского коэффициента как функционала над пространством голоморфных в круге  $D$  функций с топологией равномерной сходимости на компактах, а также того факта, что топология сходимости по метрике пространства  $\tilde{\Pi}_q$  не слабее последней. Предел  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Phi_N$  существует и конечен, поэтому последовательность  $\{\Phi_N\}$  поточечно ограничена и, значит, равномерно непрерывна по общему принципу равномерной ограниченности для  $F$ -пространств, а значит, непрерывен и их поточечный предел — функционал  $\Phi$ . Достаточность установлена. Теорема доказана полностью.  $\square$

Аналогичным образом устанавливается теорема 3.2.

Ясно, что от дискретной формы записи функционала можно перейти к привычной интегральной форме, используя общую теорию рядов Фурье.

Отметим, что результаты работы были анонсированы в [8], [7], [15].



## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамоян за полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Гаврилов, А.В. Субботин, Д.А. Ефимов. *Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад)*. М.: Изд-во Московского унив-та. 2012.
2. Р. Невалинна. *Однозначные аналитические функции*. М.-Л.: ГИТТЛ. 1941.
3. И.И. Привалов. *Граничные свойства однозначных аналитических функций*. М.: Изд. МГУ. 1941.
4. Е.Г. Родикова. *Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций //* Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения». Петрозаводск: ПетрГУ. 64–69 (2012).
5. Е.Г. Родикова. *О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций //* Вестник Брянского гос. унив-та. 4:2, 61–69 (2012).
6. Е.Г. Родикова. *Факторизация, характеристика корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций*. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2014.
7. Е.Г. Родикова. *Линейные непрерывные функционалы пространств Привалова //* Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы. Саратов. 249–251 (2022).
8. Е.Г. Родикова. *О линейных непрерывных функционалах плоских классов И.И. Привалова //* Теоретические и прикладные аспекты естественнонаучного образования в эпоху цифровизации. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Брянск. 102–103 (2022).
9. Е.Г. Родикова. *О коэффициентных мультипликаторах плоских классов Привалова //* Уфимск. матем. журн. 13:4, 82–93 (2021).
10. У. Рудин. *Функциональный анализ*. М.: Мир. 1975.
11. Ф.А. Шамоян. *Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций //* Сиб. матем. журн. 40:6, 1422–1440 (1999).
12. P. Duren, B. Romberg, A. Shields. *Linear functionals on  $H^p$  spaces with  $0 < p < 1$  //* J. Reine Angew. Math. 238, 32–60 (1969).
13. M. Pavlovic. *Introduction to function spaces in a disk*. Matematički Institut SANU, Beograd. 2004.
14. E.G. Rodikova. *Coefficient multipliers for the Privalov class in a disk //* Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 11:6, 723–732 (2018).
15. E.G. Rodikova. *Continuous linear functionals on the Nevanlinna-Djrbashian type spaces //* Proc. of the Math. Center named after N.I. Lobachevsky. Int. Conf. «Complex Analysis and Related Topics». Abstracts. – Kazan: KFU. 63, 51–52 (2022).
16. E.G. Rodikova, F.A. Shamoian. *On the differentiation in the Privalov classes //* Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 13:5, 622–630 (2020).
17. A.E. Taylor. *Banach spaces of functions analytic in the unit circle //* II Studia Math. 12, 25–50 (1951).
18. N. Yanagihara. *Multipliers and linear functionals for the class  $N^+$  //* Transactions of the Amer. Math. Soc. 180, 449–461 (1973).
19. K. Yoshida. *Functional Analysis*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag. 1965.

Евгения Геннадьевна Родикова,  
Брянский государственный университет,  
ул. Бежицкая, 14,  
241050, Брянск, Россия  
E-mail: evheny@yandex.ru