ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 2 (2023). С. 74-84.

УДК 517.5

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ H_2 И ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

М.Ш. ШАБОЗОВ, З.Ш. МАЛАКБОЗОВ

Аннотация. В работе получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величиною наилучшего совместного полиномиального приближения аналитических в единичном круге функций и специальным обобщённым модулем непрерывности, который определён при помощи функции Стеклова.

При решении ряда задач теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 модификацию классического определения модуля непрерывности m-го порядка, порождённого функцией Стеклова, использовали С.Б. Вакарчук [19], М.Ш. Шабозов и А.А. Шабозова [20]. Здесь предложенная конструкция используется при построении модификации модуля непрерывности m-го порядка аналитических в единичном круге функций, порождённого функцией Стеклова в пространстве Харди H_2.

С использованием указанной характеристик гладкости решается задача отыскания точной константы в неравенстве типа Джексона–Стечкина для совместных приближений функций и их промежуточных производных.

Для классов функций, усреднённых с весом значений обобщённые модули непрерывности которых ограничены сверху заданной мажорантой, найдены точные значения различных n-поперечников. Также решена задача нахождения точных верхних граней наилучших совместных приближений указанных классов функций в пространстве Харди H_2.

Ключевые слова: точные неравенства типа Джексона–Стечкина, модуль непрерывности, функции Стеклова, n-поперечники, пространство Харди.

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30E10, 42A10.

1. Введение

Экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций изучались во многих работах (см., например, [1]–[18] и приведенную там литературу). Среди этих задач одной из наиболее важных является задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина в различных нормированных пространствах. Напомним, что под неравенствами типа Джексона–Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через некоторую характеристику гладкости самой функции или ее заданной производной.

M.Sh. Shabozov, Z.Sh. Malakbozov, Sharp Jackson–Stechkin type inequalities in the Hardy space H_2 and widths of functional classes.

Поступила 4 мая 2022 г.

В последнее время при решении ряда задач теории аппроксимации в качестве характеристики гладкости функции часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности. Так, например, в случае аппроксимации 2π-периодических функций вместо классического оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ в работах [19], [20] была использована функция (оператора) Стеклова $S_h(f)$. Данная статья продолжает указанную тематику и является обобщением и дальнейшим развитием идей, изложенных в работах [19]–[21].

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{C}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, комплексных чисел, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — (открытый) единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в U.

Говорят [17, с. 78], что аналитическая в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \le \rho < 1 \tag{1.1}$$

принадлежит пространству Харди H_2, если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{H_2} = \lim_{\rho \to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt \right)^{1/2} < \infty. \tag{1.2}$$

Хорошо известно (см., например, [17, с. 78]), что в (1.2) интеграл не убывает при возрастании ρ и почти всюду на окружности $|z| = 1$ существуют угловые граничные значения $f(e^{it}) := F(t)$. При этом $F \in L_2 := L_2[0, 2\pi]$ и

$$\|f\|_2 := \|F\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt \right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Производную r-го порядка функции $f \in A(U)$ определим как обычно:

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^{(r)} f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) c_k(f) z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

а угловое граничное значение производной обозначим через $f^{(r)}(e^{it})$. Ради краткости, введем обозначение

$$\alpha_{n,m} := n(n-1)\cdots(n-m+1) = n!/(n-m)!, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n \ge m.$$

При этом полагаем $\alpha_{n,0} \equiv 1$, $\alpha_{n,1} = n$, $n \in \mathbb{N}$. Равенство (1.4) теперь кратко запишем в виде

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}\, c_k(f) z^{k-r}. \tag{1.5}$$

Всюду далее, символом $H_2^{(r)}$($r \in \mathbb{Z}_+$, $H_2^{(0)} = H_2$) обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству Харди H_2, производная r-го порядка $f^{(r)}(z)$ которых также принадлежит H_2, то есть

$$H_2^{(r)} := \Big\{ f \in H_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty \Big\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_{n-1}$ — подпространство комплексных алгебраических полиномов степени не выше $n-1$. Поскольку для $f \in H_2^{(r)}$ наравне с функцией f ее последовательные производные $f^{(s)}$($s = 1, 2, \ldots, r-1$) также принадлежат пространству H_2 (см. [18]), то представляет несомненный интерес отыскание точных значений совместных приближений функций f и их производных $f^{(s)}$ $(s \geq 2,\ s = \overline{1, r-1})$

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 := \inf\left\{\|f^{(s)} - p^{(s)}_{n-1}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

на некотором подмножестве $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq H_2^{(r)}$ или на самом классе $H_2^{(r)}$. Таким образом требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-s-1}(\mathfrak{M})_2 := \sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 : f \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{1.6}$$

Поскольку в данной работе используются нормы только пространств H_2 и L_2, то с учетом соотношения (1.3) всюду далее нижние индексы у норм $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_{L_2}$ будем опускать. Аналогично будем поступать и с величинами, определяемые с помощью этих норм: так, вместо $E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2$, $\mathcal{E}^{(s)}_{n-s-1}(\mathfrak{M})_2$ будем писать $E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)$, $\mathcal{E}^{(s)}_{n-s-1}(\mathfrak{M})$.

2. Вспомогательные утверждения

Нам для дальнейшего понадобятся следующие известные утверждения.

Лемма 2.1 ([21]). *Пусть $f \in H_2^{(r)}$, $r, n \in \mathbb{N}$, $n > r$. Тогда при любых $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq r$ справедливо равенство*

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha^2_{k,s} |c_k(f)|^2\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.2 ([21]). *Для произвольной функции $f \in H_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, при любых $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию $n > r \geq s$, имеет место неравенство*

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big). \tag{2.2}$$

Существует функция $g \in H_2^{(r)}$, для которой неравенство (2.2) *обращается в равенство.*

Пусть далее

$$S_h f(e^{ix}) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(e^{it})dt, \quad h > 0 \tag{2.3}$$

— функция Стеклова граничного значения $f(\rho e^{it})$ функции $f \in H_2$. При этом полагаем $S_{h,k}(f) := S_h\left(S_{h,k-1}(f)\right)$, где $k \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$, $\mathbb{E}$ — единичный оператор в пространстве H_2. Следуя [20], определим разности первого и высших порядков соотношениями

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}^1_h f(e^{ix}) =& S_h f(e^{ix}) - f(e^{ix}) = (S_h - \mathbb{E}) f(e^{ix}),\\ \widetilde{\Delta}^m_h f(e^{ix}) =& \widetilde{\Delta}^1_h\big(\widetilde{\Delta}^{m-1}_h f(e^{ix})\big) = \big(S_h - \mathbb{E}\big)^m f(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} S_{h,k}(f(e^{ix})),\end{aligned}$$

где $m = 2, 3, \ldots$. Пользуясь введенными обозначениями, рассмотрим характеристику гладкости функции $f \in H_2$

$$\widetilde{\omega}_m(f, t) := \widetilde{\omega}_m(f, t)_2 = \sup\left\{\left\|\widetilde{\Delta}^m_h f\left(e^{i(\cdot)}\right)\right\| : 0 < h \leq t\right\}, \tag{2.4}$$

которую назовём обобщённым модулем непрерывности m-го порядка.

Всюду далее полагаем

$$\operatorname{sinc} t := \left\{\frac{\sin t}{t},\ \text{если } t \neq 0;\quad 1,\ \text{если } t = 0\right\}.$$

Так как с учетом равенств (2.3) и (1.1)

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,e^{ix}) = \frac{1}{2h}\int_0^h \left\{f(e^{i(x+t)}) + f(e^{i(x-t)}) - 2f(e^{ix})\right\}dt$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}\cdot\frac{1}{2h}\int_0^h \left\{e^{ikt}+e^{-ikt}-2\right\}dt$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}\cdot\frac{1}{h}\int_0^h (\cos kt - 1)dt = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}(1-\operatorname{sinc} kh)$$

и по индукции для любого $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f,e^{ix}) = (-1)^m\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}(1-\operatorname{sinc} kh)^m, \tag{2.5}$$

то, применяя равенство Парсеваля к (2.5), имеем

$$\left\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\right\| = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k(f)|^2(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m}$$

и в силу этого запишем явный вид величины (2.4)

$$\widetilde{\omega}_m(f,t) = \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(f)|^2(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m}\right)^{1/2} : 0<h\leq t\right\}. \tag{2.6}$$

Из равенств (1.5) и (1.1) следует, что коэффициенты $c_k(f^{(r)})$ ряда Маклорена производной $f^{(r)}$ и коэффициенты $c_k(f)$ ряда Маклорена самой функции f связаны равенством

$$c_k(f^{(r)}) := \alpha_{k,r}\, c_k(f). \tag{2.7}$$

Учитывая (2.7) и (2.6), для произвольной функции $f\in H_2^{(r)}$ имеем:

$$\widetilde{\omega}_m(f^{(r)},t) = \sup\left\{\left(\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k(f)|^2(1-\operatorname{sinc}(k-r)h)^{2m}\right)^{1/2} : 0<h\leq t\right\}. \tag{2.8}$$

Лемма 2.3. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$. Тогда для любого числа $t\in(0,3\pi/4(n-r)]$ справедливо неравенство*

$$\widetilde{\omega}_m(f^{(r)},t) \geq (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\cdot(1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^m\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)}). \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0\in H_2^{(r)}$, для которой (2.9) обращается в равенство.

Доказательство. Пользуясь тем, что при $0<nh\leq 3\pi/4$ [22, с. 435]

$$\max\{\operatorname{sinc} x : 0<|t|\leq n\tau\} = \operatorname{sinc} n\tau,$$

$$\min\{(1-\operatorname{sinc} u)^m : u\geq nt\} = (1-\max_{u\geq nt}\operatorname{sinc} u)^m = (1-\operatorname{sinc} n\tau)^m,$$

из (2.8) для произвольной функции $f \in H_2^{(r)}$ получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_m^2(f^{(r)},t) &\geq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 (1-\operatorname{sinc}(k-r)h)^{2m} \\
&\geq (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{2m} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \\
&= (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{2m} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\right)^2 \alpha_{k,s}^2 |c_k(f)|^2 \qquad (2.10)\\
&\geq (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{2m} \cdot \min_{k\geq n} \left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\right)^2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 |c_k(f)|^2 \\
&= (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{2m} \cdot \min_{k\geq n} \left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\right)^2 \cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)}).
\end{aligned}$$

В [22] доказано, что при $k \geq n > r \geq s$,

$$\min_{k\geq n} \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}} = \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}, \qquad (2.11)$$

а потому, учитывая (2.11), из (2.10) получаем (2.9). Для функции $f_0(z) = z^n \in H_2^{(r)}$, для которой в силу равенств (2.1) и (2.8) имеют места равенства

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)}) = \alpha_{n,s}, \quad \widetilde{\omega}_m(f_0^{(r)},t) = \alpha_{n,r}(1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^m, \qquad (2.12)$$

с учетом (2.12) получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_m(f_0^{(r)},t) &= \alpha_{n,r}(1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^m = (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^m \alpha_{n,s} \\
&= (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^m \cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)}),
\end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы 2.3. □

Условимся всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q, не эквивалентную нулю на этом же отрезке. Имеет место

Теорема 2.1. *Пусть* $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 3\pi/4(n-r)$, q *— весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\int_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right\}^{1/p}} = \left\{\int_0^h (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{mp} q(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (2.13)$$

Доказательство. Возведем обе части неравенства (2.9) в степень p $(0 < p \leq \infty)$, умножим на весовую функцию q и проинтегрируем от 0 до h, где $0 < h \leq 3\pi/4(n-r)$. Затем, извлекая корень степени $1/p$, от полученного равенства приходим к неравенству

$$\left(\int_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right)^{1/p} \geq (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)}) \left(\int_0^h (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Полученное неравенство верно для любой функции $f \in H_2^{(r)}$, а потому из него вытекает оценка сверху для величины, расположенной в левой части равенства (2.13)

$$\sup_{f\in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\displaystyle\int_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right\}^{1/p}} \le \left\{\int_0^h (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{mp}q(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.14}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in H_2^{(r)}$, которая была введена нами при доказательстве леммы 2.3 и для которой имеют место равенства (2.12). Пользуясь равенствами (2.12), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned}\sup_{f\in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\displaystyle\int_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right\}^{1/p}} &\ge \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)})}{\left\{\displaystyle\int_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f_0^{(r)},t)q(t)dt\right\}^{1/p}} \\ &= \left\{\int_0^h (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{mp}q(t)dt\right\}^{-1/p}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Требуемое равенство (2.13) получаем из сопоставления оценки сверху (2.14) с оценкой снизу (2.15), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1. □

Из теоремы 2.1 вытекают ряд следствий.

Следствие 2.1. *Если в условиях теоремы 2.1 полагать $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$, $p = 1/m$, $0 < h \le 3\pi/4(n-r)$, $q(t) \equiv 1$, то получаем*

$$\sup_{f\in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\displaystyle\int_0^h \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)dt\right)^m} = \left\{\frac{n-r}{(n-r)h - Si(n-r)h}\right\}^m,$$

где $Si(t) := \displaystyle\int_0^t \operatorname{sinc} u du$ *— интегральный синус.*

Если при этих же условиях $q(t) = t$, то из (2.15) имеем

$$\sup_{f\in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\displaystyle\int_0^h t\,\widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)dt\right)^m} = \frac{(n-r)^{2m}}{2^m}\left\{\left[\frac{(n-r)h}{2}\right]^2 - \sin^2\left[\frac{(n-r)h}{2}\right]\right\}^{-m}. \tag{2.16}$$

В частности, из (2.16) при $h = \pi/2(n-r)$ следует, что

$$\sup_{f\in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left((n-r)^2\displaystyle\int_0^{\pi/2(n-r)} t\,\widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)dt\right)^m} = \left(\frac{4}{\pi^2-8}\right)^m.$$

3. Поперечники некоторых классов функций

Для формулировки последующих результатов введем необходимые понятия и определения. Пусть $\mathcal{B}$ — единичный шар в пространстве H_2; $\mathcal{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из H_2, $\Lambda_n \subset H_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset H_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathcal{L} : H_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, проводящий элементы пространства H_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^{\perp} : H_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования H_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$\begin{aligned}
b_n(\mathcal{M}, H_2) &:= \sup\left\{\sup\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon\mathcal{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathcal{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset H_2\right\},\\
d_n(\mathcal{M}, H_2) &:= \inf\left\{\sup\{\inf\{\|f-g\|_2 : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathcal{M}\} : \Lambda_n \subset H_2\right\},\\
\delta_n(\mathcal{M}, H_2) &:= \inf\left\{\sup\{\inf\{\|f-\mathcal{L}(f)\|_2 : f \in \mathcal{M}\} : \mathcal{L}H_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset H_2\right\},\\
d^n(\mathcal{M}, H_2) &:= \inf\left\{\sup\{\|f\|_2 : f \in \mathcal{M} \cap \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset H_2\right\},\\
\Pi_n(\mathcal{M}, H_2) &:= \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\big\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}(f)\|_2 : f \in \mathcal{M}\big\} : \mathcal{L}^{\perp}H_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset H_2\Big\}
\end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками.* В гильбертовом пространстве H_2 справедливы следующие соотношения между перечисленными выше величинами (см., [23], [24]):

$$b_n(\mathcal{M}, H_2) \le d^n(\mathcal{M}, H_2) \le d_n(\mathcal{M}, H_2) = \delta_n(\mathcal{M}, H_2) = \Pi_n(\mathcal{M}, H_2). \tag{3.1}$$

Используя характеристику гладкости (2.4), определим следующие классы функций. Пусть $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ — непрерывная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)$, $0 < p \le \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, обозначим класс функций $f \in H_2^{(r)}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{t}\int_0^t \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, \tau)d\tau\right)^{1/p} \le \Phi(t).$$

Полагая при $t = 0$ значение функции $\operatorname{sinc} t$ равным 1, обозначим через t_* величину ее аргумента, при котором эта функция достигает на $\mathbb{R}_+$ своего наименьшего значения. При этом t_* $(4.49 < t_* < 4.51)$ есть наименьший положительный корень уравнения $t = \operatorname{tg} t$. Следуя [19], введем обозначение

$$(1-\operatorname{sinc} t)_* := \big\{1-\operatorname{sinc} t,\ \text{если}\ \ 0 \le t \le t_*;\ \ 1-\operatorname{sinc} t_*,\ \text{если}\ \ t_* \le t < \infty\big\}.$$

Положим также

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\Big\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций из H_2.

Теорема 3.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < p \le \infty$ и функция Φ при любых значениях $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/(n-r))}\right)^p \ge \frac{\pi}{2(n-r)t} \cdot \frac{\displaystyle\int_0^{(n-r)t}(1-\operatorname{sinc}\tau)_*^{mp}d\tau}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}d\tau}. \tag{3.2}$$

Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\lambda_n(W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi); H_2) &= E_{n-1}(W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi))\\
&= \left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sinc} t)^{mp}dt\right\}^{-1/p} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников. Множество мажорант Φ, удовлетворяющих условию (3.2), не пусто.

Доказательство. Пользуясь соотношением (2.13), в котором полагаем $s = 0$, $q(t) \equiv 1$, $h = \pi/(2(n-r))$, для произвольной функции $f \in H_2^{(r)}$ запишем оценку сверху величины $E_{n-1}(f)$:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &\le \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \big(1 - \operatorname{sinc}(n-r)t\big)^{mp} dt \right\}^{-1/p} \left\{ \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/p} \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sinc} \mathrm{t})^{mp} dt \right\}^{-1/p} \left\{ \frac{2(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/p}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Учитывая определения класса $W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m, \Phi)$, на основании соотношения (2.16) между n-поперечниками и неравенства (3.4), имеем

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m, \Phi), H_2) &\le E_{n-1}(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m, \Phi)) \\ &\le \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp} dt \right\}^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big). \end{aligned} \tag{3.5}$$

С целью получения оценок снизу перечисленных выше n-поперечников достаточно оценить снизу бернштейновский n-поперечник рассматриваемого класса. Для этого вводим в рассмотрение шар

$$\mathcal{B}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \le \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big) \right\}.$$

В силу формулы (2.8) для произвольной функции $f \in H_2^{(r)}$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\Delta}_h^m(p_n^{(r)}, \cdot)\|^2 &= \sum_{k=r}^n \alpha_{k,r}^2 |c_k(p_n)|^2 (1 - \operatorname{sinc}(k-r)h)^{2m} \\ &\le \alpha_{n,r}^2 \sum_{k=r}^n (1 - \operatorname{sinc}(k-r)h)^{2m} |c_k(p_n)|^2 \le \alpha_{n,r}^2 (1 - \operatorname{sinc}(n-r)h)_*^{2m} \cdot \|p_n\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\widetilde{\omega}_m^p(p_n^{(r)}, \tau) \le (\alpha_{n,r})^p (1 - \operatorname{sinc}(n-r)\tau)_*^{mp} \cdot \|p_n\|^p. \tag{3.6}$$

Используя неравенство (3.6) и ограничения (3.2), для произвольного полинома $p_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$ запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \widetilde{\omega}_m^p(p_n^{(r)}, \tau) d\tau \le& (\alpha_{n,r})^p \cdot \|p_n\|^p \cdot \frac{1}{t} \int\limits_0^t (1 - \operatorname{sinc}(n-r)\tau)_*^{mp} d\tau \\ &\le \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp} dt \right)^{-1} \frac{1}{(n-r)t} \int\limits_0^{(n-r)t} (1 - \operatorname{sinc} \tau)_*^{mp} d\tau \\ &\cdot \Phi^p\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big) \le \Phi^p(t). \end{aligned}$$

Следовательно, шар $\mathcal{B}_{n+1} \subset W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m, \Phi)$, а потому, пользуясь соотношениями (3.1) и определением бернштейновского n-поперечника, получаем

$$\lambda_n(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m, \Phi); H_2) \geq b_n(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m, \Phi), H_2) \geq b_n(\mathcal{B}_{n+1}, H_2)$$
$$\geq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sinc} t)^{mp}dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big). \tag{3.7}$$

Сопоставляя неравенства (3.5) и (3.7), получаем требуемое равенство (3.3). □

В [19] доказано, что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (3.2), не пусто и этому ограничению удовлетворяет, например, мажоранта $\Phi_*(t) := t^{m\alpha/2}$, где

$$\alpha := \frac{(\pi-2)^2}{2\pi\displaystyle\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sinc}\tau)^2 d\tau} - 1.$$

4. Решение экстремальной задачи (1.6) для класса функций $W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)$

Определенный интерес представляет изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(s)})$, где $s = 0, 1, \ldots, r$ на классе функций $W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m, \Phi)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$. Другими словами, требуется найти точное значение величины (1.6), когда $\mathfrak{M}^{(r)} = W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)$.

Теорема 4.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$. Если мажоранта Φ при любом $t \in (0, 2\pi]$ удовлетворяет ограничению (3.2), то при любом $s = 0, 1, 2 \ldots, r$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}^{(s)}\big(W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)\big) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sinc} t)^{mp}dt\right\}^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big). \tag{4.1}$$

Доказательство. Из неравенства (2.15) при $q(t) \equiv 1$ и $h = \pi/2(n-r)$ для произвольной функции $f \in H_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{\int\limits_0^{\pi/2(n-r)}(1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{mp}dt\right\}^{-1/p} \left\{\int\limits_0^{\pi/2(n-r)}\widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)dt\right\}^{1/p}$$
$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sinc} t)^{mp}dt\right\}^{-1/p} \left\{\frac{2(n-r)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2(n-r)}\widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)dt\right\}^{1/p}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)$, имеем

$$\mathcal{E}_{n-s-1}^{(s)}\big(W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)\big) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sinc} t)^{mp}dt\right\}^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big). \tag{4.2}$$

При доказательстве теоремы 3.1 было установлено, что множество алгебраических комплекснозначных полиномов $p_n \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих условию

$$\|p_n\| \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sinc} t)^{mp}dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big),$$

принадлежит классу $W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sinc} t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big) \cdot z^n.$$

Для этой функции при всех $s = 0, 1, \ldots, r$

$$\begin{aligned} g^{(s)}(z) &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sinc} t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big) \cdot z^{n-s}, \\ E_{n-s-1}(g^{(s)}) &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sinc} t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big) \end{aligned} \tag{4.3}$$

и так как

$$\|g\| = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sinc} t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big),$$

то функция $g \in W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)$, а потому в силу (4.3) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1}^{(s)}\big(W_p^{(r)}(\omega_m, \Phi)\big) &\geq E_{n-s-1}(g^{(s)}) \\ &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sinc} t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Сопоставляя соотношения (4.2) и (4.4), получаем требуемые равенства (4.1). Теорема 4.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К.И. Бабенко. *О наилучших приближениях одного класса аналитических функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **22**:5, 631–640 (1958).
2. Л.В. Тайков. *О наилучших линейных методах приближения классов $\mathcal{B}^r$ и $\mathcal{H}^r$* // Успехи матем. наук. **18**:4, 183–189 (1963).
3. Л.В. Тайков. *О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций* // Матем. заметки. **1**:2, 155–162 (1967).
4. Л.В. Тайков. *Поперечники некоторых классов аналитических функций* // Матем. заметки. **22**:2, 285–295 (1977).
5. М.З. Двейрин, И.В. Чебаненко. *О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций* // Теория отображений и приближение функций. Киев: ИМ АН УССР, 62–73 (1983).
6. Н. Айнуллоев, Л.В. Тайков. *Наилучшие приближения в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций* // Матем. заметки. **40**:3, 341–351 (1986).
7. Л.В. Тайков. *Некоторые точные неравенства в теории приближения функций* // Anal. Math. **2**:1, 77–85 (1976).
8. С.Б. Вакарчук. *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций I, II* // Укр. матем. журнал. **42**:7, 873–881 (1990); **42**:8, 1019–1026 (1990).
9. С.Б. Вакарчук. *Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций* // Матем. заметки. **57**:1, 30–39 (1995).
10. С.Б. Вакарчук. *О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций* // Матем. заметки. **65**:2, 186–193 (1999).
11. С.Б. Вакарчук. *Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения* // Матем. заметки. **72**:5, 665–669 (2002).

12. С.Б. Вакарчук, В.И. Забутная. *О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди* $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. **85**:3, 323–329 (2009).
13. М.Ш. Шабозов, О.Ш. Шабозов. *Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди* H_2 // Матем. заметки. **68**:5, 796–800 (2000).
14. М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов. *Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций* // ДАН России. **382**:6, 747–749 (2002).
15. М.Ш. Шабозов, Х.Х. Пиров. *Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из* H_p, $1 \leq p \leq 2$ // ДАН России. **394**:4, 19–24 (2004).
16. М.Ш. Шабозов, М.Р. Лангаршоев. *О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций* // Сиб. матем. журнал. **60**:6, 1414–1423 (2019).
17. И.И. Привалов. *Граничные свойства аналитических функций.* М.-Л.: ГИТТЛ. 1950.
18. С.Б. Вакарчук, М.Б. Вакарчук. *Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации* // Укр. матем. журнал. **63**:12, 1579–1601 (2011).
19. С.Б. Вакарчук. *Обобщённые характеристики гладкости в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций в* L_2 // Матем. заметки. **98**:4, 511–529 (2015).
20. М.Ш. Шабозов, А.А. Шабозова. *Некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в* L_2 // Труды ИММ УрО РАН. **25**:4, 255–264 (2019).
21. М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов, Дж.Дж. Заргаров. *О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди* // Труды ИММ УрО РАН. **27**:4, 240–256 (2021).
22. Л.В. Тайков. *Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из* L_2 // Матем. заметки. **20**:3, 433–438 (1976).
23. В.М. Тихомиров. *Некоторые вопросы теории приближений.* М.: МГУ. 1976.
24. A. Pinkus. *n-Widths in Approximation Theory.* Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag. 1985.

Мирганд Шабозович Шабозов,
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, 17,
734025, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: shabozov@mail.ru

Зокир Шерозович Малакбозов
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, 17,
734025, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: malakbozov1994@mail.ru