УДК 517.53

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В КЛАССЕ КАРЛЕМАНА

Р.А. ГАЙСИН

Аннотация. Исследуются вопросы, связанные с теоремами типа Левинсона-Шёберга-Волфа в комплексном анализе, в частности, обсуждается известный вопрос, поставленный в 70-е годы Е.М. Дынькиным об эффективной оценке мажоранты роста аналитической функции вблизи множества особых точек и другая близкая проблема о скорости стремления к нулю экстремальной функции в неквазианалитическом классе Карлемана в окрестности точки, где все производные функций из этого класса обращаются в нуль. Точные асимптотические оценки наилучшей мажоранты роста вблизи особенностей были найдены В. Мацаевым и М. Содиным в 2002 году.

Некоторые оценки (как сверху, так и снизу) для экстремальной функции в классе Карлемана в 2018 году были получены А.М. Гайсиным, но они оказались не очень близкими к истинной величине этой функции. В настоящей статье получены точные двусторонние оценки для экстремальной функции.

Ключевые слова: неквазианалитический класс Карлемана, теоремы типа Левинсона-Шёберга, экстремальная функция, регулярная последовательность, ассоциированный вес.

Mathematical Subject Classification: 26E10, 28A10.

1. Введение

В 1938 г. Н. Левинсон доказал теорему (см. [1]), представляющую собой глубокое обобщение принципа максимума модуля для аналитических функций (см. [2]). Этот результат сыграл важную роль в теории квазианалитических функций (см. [3]–[7]).

Теорема 1.1 (Н. Левинсон)**.** *Пусть $M(y)$ положительная, монотонно убывающая в полуинтервале $(0,b]$ функция, $M(y)\uparrow\infty$ при $y\downarrow 0$, $M(b)=e$. Пусть, далее, F_M — семейство функций, аналитических в прямоугольнике*

$$P=\{z=x+iy:|x|<a,\ |y|<b\},$$

удовлетворяющих в P оценке $|F(z)|\leqslant M(|y|)$. Если

$$\int_0^b \ln\ln M(y)dy<\infty, \tag{1.1}$$

то для любого $\delta>0$ существует постоянная C, зависящая только от δ и $M(y)$, такая, что для всех функций $f\in F_M$ в прямоугольнике

$$P_\delta=\{z=x+iy:|x|<a-\delta,\ |y|<b\}$$

справедлива оценка $|F(z)|\leqslant C$.

R.A. Gaisin, On rate of decreasing of extremal function in Carleman class.

Поступила 12 декабря 2022 г.

Отметим, что независимо от Н. Левинсона, видимо, одновременно с ним, эту теорему в несколько иной форме доказал Н. Шёберг (см. [8]). Однако гораздо раньше Т. Карлеманом была получена (см. [9])

Теорема 1.2 (Т. Карлеман)**.** *Предположим, что $M(\varphi)$ положительная на интервале $(0, 2\pi)$ функция, такая, что $\ln M(\varphi) > 1$ и интеграл*

$$\int_0^{2\pi} \ln\ln M(\varphi) d\varphi$$

сходится. Тогда всякая целая функция $f(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z)| \leqslant M(\varphi), \quad \varphi = \arg z, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

есть постоянная: $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

Именно этот результат Т. Карлемана в дальнейшем был развит Н. Левинсоном и Н. Щёбергом, которые распространили его на самый общий случай. Однако отметим, что теорема Т. Карлемана верна без каких-либо дополнительных ограничений на мажоранту $M(\varphi)$. Позже Ф. Вольф перенес теорему Левинсона-Шёберга на более широкий класс функций (см. [10]). В [2] предложено иное, более простое доказательство теоремы 1.1.

Приведем одну из версий данной теоремы (см. [11], [12]).

Теорема 1.3 (Я. Домар)**.** *Пусть $D = \{z = x + iy : -a < x < a,\ 0 < y < b\}$, $M(y)$ — измеримая по Лебегу функция, $M(y) \geqslant e$ при $0 < y < b$. Если сходится интеграл (1.1), то существует убывающая функция $m(\delta)$, зависящая только от $M(y)$ и конечная для $\delta > 0$, такая, что если $f(z)$ аналитична в D и*

$$|f(z)| \leqslant M(\operatorname{Im} z), \tag{1.2}$$

то

$$|f(z)| \leqslant m(\operatorname{dist}(z, \partial D)), \quad z \in D.$$

Следствие 1.1. *Пусть $J = \{f\}$ — семейство аналитических в D функций, удовлетворяющих условию (1.2). Если интеграл (1.1) сходится, то семейство функций J является нормальным (т.е. относительно компактным).*

Как показано П. Кусисом, условие (1.1) для справедливости теоремы Н. Левинсона является и необходимым (см. [11]): если интеграл (1.1) расходится, то существует последовательность полиномов $P_n(z)$, таких, что:

1) $|P_n(z)| \leqslant KM(|y|)$, $K = \mathrm{const}$, $n \geqslant 1$, для всех z из прямоугольника

$$P = \{z = x + iy : |x| < a,\ |y| < b\};$$

2) при $n \to \infty$

$$P_n(z) \to F(z) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad z \in P \cap \mathbb{C}_+; \\ -1, & \text{если} \quad z \in P \cap \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Здесь $\mathbb{C}_+ = \{z = x + iy : y > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z = x + iy : y < 0\}$.

Отметим, что при некоторых дополнительных ограничениях на поведение функции $M(y)$ аналогичное утверждение доказано Н. Левинсоном в [1]. А в [12] показано, что в теореме Н. Левинсона условие монотонности функции $M(y)$ можно заменить на измеримость этой функции по Лебегу.

В [7] получено обощение теоремы Н. Левинсона на случай, когда вместо вещественного отрезка $[-a, a]$ берется некоторая спрямляемая дуга γ, а именно — дуга ограниченного наклона.

Пусть E — компакт в $\mathbb{R}$, M — мажоранта из теоремы Н. Левинсона, для которой выполняется билогарифмическое условие (1.1). В [4] вводится совокупность $F_E^0(M)$ функций f, определенных и аналитических вне E, таких, что

$$|f(z)| \leqslant M(|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E.$$

В данной оценке M — любая убывающая на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ функция, совпадающая с мажорантой из теоремы 1.1 на $(0, b]$. В дальнейшем будем считать, что $M(y) \downarrow 0$ при $y \to +\infty$.

Согласно теореме 1.1, множество $F_E^0(M)$ нормально, т.е. для всякого $\delta > 0$

$$M^*(\delta) = \sup \left\{ |f(z)| : f \in F_E^0(M), \quad \rho(z, E) \geqslant \delta \right\} < \infty.$$

Здесь $\rho(z, E) = \inf\limits_{\xi \in E} |z - \xi|$, $z \in \mathbb{C}$.

Таким образом, M^* — наименьшая функция, для которой

$$|f(z)| \leqslant M^*(\rho(z, E)), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E,$$

для всех $f \in F_E^0(M)$. Можно считать, для определенности, что E — отрезок $I = [0, 1]$.

В [4] поставлена задача (проблема 1) получить «эффективную оценку для мажоранты M^*».

Предположим, что функция M логарифмически выпукла, т.е. $\ln M(e^{-\sigma})$ — выпуклая функция от σ. Положим

$$M_n = \sup_{\delta > 0} \frac{n!}{M(\delta)\delta^{n+1}}, \quad n \geqslant 0.$$

Тогда, как известно, класс Карлемана на отрезке I

$$C_I(M_n) = \left\{ f : \left\| f^{(n)} \right\| \leqslant c K_f^n M_n, \quad n \geqslant 0 \right\},$$

$\|f\| = \max\limits_I |f(x)|$, квазианалитичен тогда и только тогда, когда расходится интеграл (1.1) (см. [4]). Через $C_I^N(M_n)$ далее будем обозначать нормированный класс — $C_I(M_n)$ с постоянными $c = 1$, $K_f = 1$. Следуя работе [4], введем также обозначение

$$P(\delta) = \sup \left\{ |f(\delta)| : f \in C_I^N(M_n), \quad f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0, \quad n \geqslant 0 \right\}, \quad 0 < \delta \leqslant 1.$$

Как утверждается в работе [6] (см. замечание к теореме 3), задача об эффективной оценке мажоранты «в форме $M^* \simeq P^{-1}$ с неизвестной величиной P была установлена в [4]». Здесь и далее запись $M^* \simeq P^{-1}$ означает, что

$$A P^{-1}(a\delta) \leqslant M^*(\delta) \leqslant B P^{-1}(b\delta) \tag{1.3}$$

($0 < a < b$, $0 < A < B$ — некоторые постоянные). Отметим, что оценки (1.3) в [4] не выписаны, а доказана только нижняя оценка. Доказательство верхней оценки в тех же неравенствах в [4] не приведено. В [13] показано, что оценки типа (1.3) на самом деле имеют место не для функции M^*, а для так называемого ассоциированного веса.

Как и в работе [4], здесь рассматриваются только регулярные последовательности $\{M_n\}$, т.е. такие, что числа $m_n = \frac{M_n}{n!}$ удовлетворяют условиям:

$$1)\ m_n^{\frac{1}{n}} \to \infty, \quad n \to \infty; \qquad 2)\ \sup_{n \geqslant 0} \left(\frac{m_{n+1}}{m_n} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty;$$

$$3)\ m_n^2 \leqslant m_{n-1} m_{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Класс Карлемана $C_I\left((n!)^{1+\alpha}\right)$ ($\alpha > 0$) называется, как известно, классом Жевре. Этот класс будет регулярным, ибо числа $M_n = (n!)^{1+\alpha}$ удовлетворяют всем условиям 1)–3).

Ассоциированным весом называется функция $H^*(r) = \left[h^*(r)\right]^{-1}$ (см. [4]),

$$h^*(r) = \inf_{n \geqslant 0} (m_n r^n).$$

Ясно, что $h^*(r)\uparrow\infty$ при $r\to\infty$, $h^*(0+)=0$. Из свойства 2) определения регулярных последовательностей видно, что $h^*(r)\leqslant rh^*(qr)$ при некотором $q>1$. Имеем также

$$\frac{1}{h^*(r)}=\sup_{n\geqslant 0}\frac{1}{m_n r^n}=\sup_{n\geqslant 0}\frac{n!}{M_n r^n}\overset{def}{\equiv}H^*(r).$$

Как известно (см. [4]),

$$M_n=\sup_{r>0}\frac{n!}{H^*(r)r^n},\quad n\geqslant 0.$$

Класс $C_I(M_n)$ является квазианалитическим тогда и только тогда, когда выполняется любое из эквивалентных условий (см. [4]):

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_n}{M_{n+1}}=\infty;\qquad 2)\ \int_0^1\ln^+\ln H^*(t)dt=\infty.$$

Используя двойственность, В. Мацаев показал, что теорема Левинсона-Шёберга эквивалентна теореме Данжуа-Карлемана о квазианалитичности класса $C_I(M_n)$ (см. [3]). Позже этот факт был переоткрыт Е. М. Дынькиным в [5], а в работе [6] в терминах величины

$$J_M(s)=\sup\left\{|g(s)|:\sup_I|g^{(n)}(t)|\leqslant M_n,\quad g^{(n)}(0)=0,\quad n\geqslant 0\right\}$$

была сформулирована другая задача, двойственная к проблеме 1, а именно соотношение $M^*\simeq J_M$. В той же работе были получены двусторонние оценки для M^*, но они, как оказалось, не только не точны, но и не верны (более подробно обзор результатов и дискуссию см. в [14], [15]). Точные оценки для мажоранты M^* иным способом были получены в [14]. Сформулируем этот результат, дающий ответ на проблему 1 из [4].

Пусть

$$P_\varphi(s)=\sup_{y>0}\left[\frac{2y}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varphi(t)dt}{t^2+y^2}-ys\right], \tag{1.4}$$

где весовая функция (логарифмический вес) удовлетворяет условиям:
1) $\varphi(t)\geqslant 0$, $t\in\mathbb{R}_+$;
2) $\varphi(t)\uparrow\infty$ при $t\to+\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{\ln t}=\infty$;
3) $\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(t)}{t^2+1}dt<\infty$;
4) $\varphi(e^x)$ выпукла по x на $\mathbb{R}_+$.

Иногда на функцию φ накладывается дополнительное условие
5) $\varphi(t)$ вогнута на $\mathbb{R}_+$, причем

$$\lim_{t\to\infty}t\varphi'(t+0)=\infty.$$

Для логарифма мажоранты M из проблемы 1 (она подчинена условию (1.1)) рассмотрим *нижнее преобразование Лежандра*

$$\varphi(r)=\inf_{s>0}\left(\ln M(s)+rs\right).$$

Предположим, что для любого $n>0$

$$\lim_{s\to 0}s^nM(s)=\infty. \tag{1.5}$$

Тогда весовая функция φ автоматически удовлетворяет условиям 1)–3), а также 5) (см. [14]). Если же функции $\ln M(e^{-s})$ и $\ln M(t)$ выпуклы, то и функция $\varphi(e^x)$ выпукла по $x\in\mathbb{R}_+$ (т.е. выполняется 4)) (см. [14]).

В [14] доказана

Теорема 1.4. *Пусть мажоранта M из теоремы 1.1 удовлетворяет условиям (1.1), (1.5), а функции $\ln M(e^{-s})$ и $\ln M(t)$ выпуклы. Тогда при $s \to 0$*

$$\ln M^*(s) = (1 + o(1)) \ln P_\varphi(s),$$

где P_φ — функция, заданная формулой (1.4), φ — нижнее преобразование Лежандра функции $\ln M(t)$[1].

Цель настоящей статьи — найти точные двусторонние оценки для $J_M(s)$ на I.

2. Вторая проблема Е.М. Дынькина об оценке функции $J_M(s)$

История вопроса восходит к работе Т. Банга [16].

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная положительная последовательность, $M_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ (она необязательно регулярна). Тогда существует наибольшая логарифмически выпуклая миноранта $\{M_n^c\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. такая, что: $M_n^c \leqslant M_n$, $n \geqslant 0$; $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, $n \geqslant 1$. Последовательность $\{M_n^c\}$ называется *выпуклой регуляризацией* $\{M_n\}$ *посредством логарифмов* (см. [17]).

Пусть $P = \{n_i\}$ — последовательность основных индексов, т.е. $M_{n_i} = M_{n_i}^c$, $i \geqslant 1$. В [16] для каждой функции $f \in C^\infty(I)$ рассматривается величина

$$B_f(x) = \inf_{p \in P} \left[\max \left(e^{-p}, \max_{0 \leqslant n \leqslant p} \frac{|f^{(n)}(x)|}{e^n M_n^c} \right) \right]. \tag{2.1}$$

Она непрерывна по x на I.

Основной в [16] является следующая теорема Т. Банга.

Теорема 2.1. *Если $f \in C^\infty(I)$ и $\left\| f^{(n)} \right\| \leqslant M_n$, $n \geqslant 0$, то из оценки*

$$B_f(x) \geqslant e^{-q}$$

при некотором $q \in \mathbb{N}$ следует, что

$$B_f(x + h) \leqslant B_f(x) \exp\left(e|h| \frac{M_q^c}{M_{q-1}^c} \right). \tag{2.2}$$

Отметим, что в этой теореме q необязательно принадлежит множеству основных индексов P. Параметр h выбирается так, чтобы сдвиг $x + h$ принадлежал I.

Замечание 2.1. *Если обозначить $L(x) = \ln B_f(x)$, то в условиях теоремы Т. Банга справедливы оценки (см.* [16]*):*

1) для всех x, $x + h \in I$

$$|L(x + h) - L(x)| \leqslant e \frac{M_q^c}{M_{q-1}^c} |h|;$$

2) в точках, где существует производная $L'(x)$, верна оценка

$$\left| L'(x) \right| \leqslant e \frac{M_q^c}{M_{q-1}^c}.$$

В качестве q можно брать индекс $p \in P$, в котором достигается инфинум в (2.1).

Теорема 2.1 была использована Т. Бангом для доказательства критерия квазианалитичности класса $C_I(M_n)$. Нас будет интересовать только достаточная часть, поскольку из ее доказательства вытекает одна простая оценка для каждой функции f из класса $C_I^0(M_n) = \{f : f \in C_I^N(M_n),\quad f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0,\quad n \geqslant 0\}$ в окрестности точки $x = 0$, которую в ряде работ некорректно переносят и на экстремальную функцию $J_M(M_n)$ (см. [6], [14]).

[1] В [14] теорема доказана для случая $E = \{0\}$. Но она верна и для отрезка I.

Приведем краткое доказательство Т. Банга утверждения: *если класс $C_I(M_n)$ неквазианалитичен, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} < \infty.$$

По условию, существует функция f из класса $C_I^0(M_n)$, $f(x) \not\equiv 0$. Значит, и $B_f(x) \not\equiv 0$. Следовательно, существует $p_1 \in P$, существует $x_1 \in I$, такие, что $B_f(x_1) = e^{-p_1}$. Далее по индукции строится последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: $x_n \downarrow 0$, $B_f(x_j) = e^{-p_j}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$, $p_j \in P$. Если положить $x = x_j$, $x + h = x_{j-1}$ то $h > 0$. По теореме 2.1, согласно (2.2),

$$B_f(x_{j-1}) \leqslant B_f(x_j) \exp\left[e|x_j - x_{j-1}| \frac{M_{p_j}^c}{M_{p_j-1}^c}\right].$$

Отсюда

$$p_j - p_{j-1} \leqslant e|x_j - x_{j-1}| \frac{M_{p_j}^c}{M_{p_j-1}^c},$$

или

$$(p_j - p_{j-1}) \frac{M_{p_j-1}^c}{M_{p_j}^c} \leqslant e|x_j - x_{j-1}|. \tag{2.3}$$

Но левая часть последней оценки равна

$$\sum_{n=p_{j-1}}^{p_j-1} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c},$$

все слагаемые которой равны между собой (их количество есть $p_j - p_{j-1}$). Это легко усматривается из геометрического смысла регуляризации последовательности $\{M_n\}$ посредством логарифмов (см. [17]). Так как

$$\sum_{j=2}^{\infty} |x_j - x_{j-1}| \leqslant x_1,$$

то из (2.3) получаем, что

$$\sum_{n=p_1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} \leqslant e x_1 < \infty. \tag{2.4}$$

Утверждение доказано, но для нас представляет интерес само неравенство (2.4), поскольку из него Т. Банг получил важную оценку для функции f, а именно: если $x \in I$, причем

$$x < \frac{1}{e} \sum_{n=p_1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c},$$

то

$$|f(x)| < M_0^c e^{-p_1}. \tag{2.5}$$

Следует заметить, что число p_1 зависит от конкретной функции f: чем меньше $\|f\|$, тем больше число $p_1 = p_1(f)$.

3. Основной результат

Пусть

$$C_I^0(M_n) = \left\{ f : f \in C_I^N(M_n), \quad f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0, \quad n \geqslant 0 \right\}.$$

Пользуясь формулой Тейлора, для любой функции $f \in C_I^0(M_n)$ Т. Банг получил простое неравенство (см. [16]), из которого легко следует оценка

$$J_M(x) \leqslant \inf_{n\geqslant 0} \frac{M_n x^n}{n!}, \quad x \in I. \tag{3.1}$$

Чтобы понять, насколько точна эта оценка, рассмотрим пример.

Возьмем последовательность чисел M_n, чисел

$$M_n = n![\ln(n+e)]^{(1+\beta)n}, \quad \beta > 0, \ n \geqslant 0.$$

Пусть f — любая функция из класса (очевидно, неквазианалитического) $C_I^0(M_n)$, $f(x) \not\equiv 0$. Тогда из формулы Тейлора получим

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\sup\limits_{n\geqslant 0} \frac{n!}{M_n x^n}} = \frac{1}{H_1(x)}, \tag{3.2}$$

где

$$H_1(x) \asymp \exp\exp\left[c_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} \right], \quad 0 < x \leqslant 1,$$

c_1 — положительная постоянная, не зависящая от f (пишем $H_1 \asymp H_2$, если имеются $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, такие, что $a_1 H_1(x) \leqslant H_2(x) \leqslant a_2 H_1(x)$).

Учитывая быстрый рост функции $H_1(x)$ при $x \to 0$, оценку (3.2) перепишем в виде

$$\ln\ln\frac{1}{|f(x)|} \geqslant c_2 \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}, \tag{3.3}$$

где $0 < c_2 < c_1$, c_2 от f также не зависит (c_2 зависит только от последовательности $\{M_n\}$).

Неквазианалитичность класса $C_I^N(M_n)$ легко следует из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

а также из того, что

$$\int\limits_0^1 \ln^+ \ln H_1(x) dx < \infty. \tag{3.4}$$

Но при $\beta = 0$ интеграл (3.4), как и ряд, расходится, и класс $C_I^N(M_n)$ становится квазианалитическим, что и следовало ожидать. Это наводит на мысль о том, что оценка (3.1) достаточно точна.

Однако, если воспользоваться оценкой (2.5) Т. Банга, можно получить еще более точную оценку, но для фиксированной функции f (см. [16]): существует $x_0 = x_0(f)$, такое, что при всех x, $0 < x < x_0(f)$, и некотором $c = c(f) > 0$

$$\ln\ln\frac{1}{|f(x)|} \geqslant c \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{3.5}$$

Возникает естественный вопрос: какая из оценок, (3.3) или (3.5), реально отражает поведение экстремальной функции $J_M(x)$?

В [6] была сделана неудачная попытка дать ответ на этот вопрос (по этому поводу см. [13]).

Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, а H_0 — подправленный ассоциированный вес, т.е.

$$H_0(y) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{n!}{M_n y^{n+1}}.$$

Тогда, как известно,

$$M_n = \sup_{y > 0} \frac{n!}{H_0(y) y^{n+1}}.$$

Введем также функцию

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{M_n y^{n+1}}. \tag{3.6}$$

Тогда критерий неквазианалитичности класса $C_I^N(M_n)$ можно записать в виде:

$$\int_0^d \ln h(t) dt < \infty, \tag{3.7}$$

где $h(t) = \ln H(t)$, а $d > 0$ такое, что $h(d) = 1$. Этот критерий равносилен сходимости интеграла Лебега-Стилтьеса (см. [13])

$$-\int_0^d t\psi'(t)dt, \quad \psi(t) = \ln h(t).$$

Как и в работе [13], через $\theta = \theta(y)$ обозначим функцию, обратную к

$$y = -\int_0^\theta t\psi'(t)dt.$$

В [6] получен следующий результат, а именно

Теорема 3.1. *Пусть $t|\psi'(t)| \to \infty$ при $t \to 0$. Тогда верны утверждения:*
1) если интеграл (3.7) расходится, то $J_M(x) \equiv 0$.
2) если интеграл (3.7) сходится, то найдется функция $f \in C_I^0(M_n)$, для которой

$$H_0\left(q_1\theta(x)\right) \leqslant f(x) \leqslant H_0\left(q_2\theta(x)\right),$$

где $0 < q_1 < q_2 < \infty$.

Для последовательности $M_n = n![\ln(n+e)]^{(1+\beta)n}$, $\beta > 0$, $n \geqslant 0$, как легко видеть,

$$h(y) \asymp y^{-\frac{1}{1+\beta}}, \qquad \theta(y) \asymp y^{\frac{1+\beta}{\beta}}.$$

Значит, если применить теорему 3.1, найдется функция $f \in C_I^0(M_n)$, такая, что

$$c_f x^{-\frac{1}{\beta}} \leqslant \ln\ln \frac{1}{|f(x)|} \leqslant C_f x^{-\frac{1}{\beta}}, \quad 0 < x \leqslant 1.$$

В [6] приводится соответствующая оценка, где вместо $\frac{1}{|f(x)|}$ фигурирует величина $\delta_{\{M_n\}}(s) = \sup\{|g(s)|,\ g \in C_I^0(M_n)\}$, что неверно (см. [13]).

Таким образом, асимптотическая оценка (3.5) Т. Банга для каждой такой фиксированной функции f лучше оценки (3.3). Но, как показано в [13], она не отражает истинное поведение величины $J_M(x)$.

В [13] доказана

Теорема 3.2. *Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность. Если функция H, заданная формулой (3.6), удовлетворяет билогарифмическому условию (3.7), то экстремальная функция $J_M(x)$ удовлетворяет оценкам*

$$\frac{1}{q_1 H\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant J_M(x) \leqslant \frac{1}{H\left(2q_2 x\right)}, \quad 0 < x \leqslant 1, \tag{3.8}$$

где q_1 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от функции H (т.е. от чисел M_n), а

$$q_2 = \sup_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{\frac{m_n}{m_{n-1}}} < \infty, \quad m_n = \frac{M_n}{n!}.$$

Сформулируем теперь основной результат, который существенно уточняет оценки (3.2). Верна

Теорема 3.3. *Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, H_0 — ассоциированный вес, понимаемый в следующем смысле:*

$$H_0(t) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{n!}{M_n t^{n+1}}, \quad t > 0.$$

Если для этого веса сходится билогарифмический интеграл, что равносильно условию (3.7), то экстремальная функция $J_M(x)$ удовлетворяет оценкам

$$\frac{1}{KH_0(x)} \leqslant J_M(x) \leqslant \frac{1}{xH_0(x)},$$

где $K = (1+L)C$, C $(0 < C < \infty)$ — постоянная, не зависящая от x[1], *а*

$$L = \sup_{n\geqslant 1} \frac{nM_{n-1}}{M_n}.$$

Таким образом, при $x \to 0$

$$\ln J_M(x) = -\ln H_0(x) + O\left(\ln \frac{1}{x}\right) = -(1 + O(1)) \ln H_0(x).$$

4. Доказательство теоремы 3.3

Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, H_0 — ассоциированный вес, введенный выше.

Если сходится интеграл (3.7), то сходится и интеграл

$$\int\limits_0^{d_0} \ln\ln H_0(t)dt < \infty, \quad H_0(d_0) = e, \tag{4.1}$$

и потому найдется функция $f \in C_I^0(M_n)$, $f(x) \not\equiv 0$. Тогда, пользуясь формулой Тейлора, получим

$$|f(x)| \leqslant \inf_{n\geqslant 0} \frac{M_n x^n}{n!} = \frac{1}{\sup\limits_{n\geqslant 0} \frac{n!}{M_n x^n}} = \frac{1}{xH_0(x)}, \quad x \in I.$$

Отсюда

$$J_M(x) \leqslant \frac{1}{xH_0(x)}, \quad x \in I.$$

[1] C — экстремальная (наилучшая) постоянная, однозначно определяемая по семейству функций $F^0_{\{0\}}(H_0)$ (см. доказательство теоремы 3.3).

Оценка сверху для $J_M(x)$ получена. Чтобы оценить $J_M(x)$ снизу, рассмотрим нормированное пространство $F_I(H_0)$ аналитических вне отрезка $I=[0,1]$ функций, удовлетворяющих оценке
$$|f(z)|\leqslant C_f H_0(\operatorname{dist}(z,I)),\quad z\in\mathbb{C}\setminus I,$$
с нормой
$$\|f\|_0=\sup_{\operatorname{Im}z\neq 0}\frac{|f(z)|}{H_0(|\operatorname{Im}z|)}.$$
Через $F_I^0(H_0)$ обозначим единичный шар в $F_I(H_0)$.

Вместо I можно рассматривать любое замкнутое множество $E\subset\mathbb{R}$ (см. [4]). Поэтому, полагая $E=\{0\}$, рассмотрим в пространстве $F_{\{0\}}(H_0)$ линейный функционал $\langle G,f\rangle=f(\delta)$, $\delta\in(0,1]$. Тогда, очевидно, имеем: $|\langle G,f\rangle|\leqslant C_f H_0(\delta)$. Так как интеграл (4.1) сходится, то по теореме Н. Левинсона, множество функций $F^0_{\{0\}}$ является нормальным. Это означает, что если $C_f^0=\inf C_f$, то $\sup\limits_{f\in F^0_{\{0\}}(H_0)} C_f^0=C<\infty$. Значит, $\|G\|\leqslant CH_0(\delta)$ (положительная постоянная C от δ не зависит). Далее, поскольку $F_{\{0\}}(H_0)\subset F_I(H_0)$, то по теореме Хана-Банаха, функционал G с сохранением нормы допускает продолжение на все пространство $F_I(H_0)$. Обозначая этот функционал по-прежнему через G, рассмотрим функцию
$$\eta(t)=\left\langle G,\frac{1}{z-t}\right\rangle,\quad t\in I.$$
Тогда $\eta\in C^\infty(I)$, причем
$$\begin{aligned}\left|\eta^{(n)}(t)\right|&=\left|\left\langle G,\frac{n!}{(z-t)^{n+1}}\right\rangle\right|\\&\leqslant CH_0(\delta)\left\|n!(z-t)^{-n-1}\right\|=CH_0(\delta)M_n,\quad n\geqslant 0,\end{aligned}$$
где
$$M_n=\sup_{y>0}\frac{n!}{H_0(y)y^{n+1}}.$$
Заметим также, что
$$\eta^{(n)}(0)=\left\langle G,\frac{n!}{z^{n+1}}\right\rangle=\frac{n!}{\delta^{n+1}},\quad n\geqslant 0.$$

Введем теперь функцию g, полагая $g(t)=1+\eta(t)(t-\delta)$. Поскольку
$$g^{(n)}(t)=\eta^{(n)}(t)(t-\delta)+n\eta^{n-1}(t),\quad n\geqslant 1,$$
то получаем: $g^{(n)}(0)=0$, $n\geqslant 0$; $\left|g^{(n)}(t)\right|\leqslant CH_0(\delta)\left(M_n+nM_{n-1}\right)$, $n\geqslant 1$. Но последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла, т.е. $M_n^2\leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, $n\geqslant 1$. Значит, последовательность $\left\{\frac{M_{n-1}}{M_n}\right\}$ — невозрастающая. Тогда из сходимости ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_{n-1}}{M_n}$$
следует, что $nM_{n-1}=o(M_n)$ при $n\to\infty$. Так что
$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{nM_{n-1}}{M_n}=L<\infty.$$
Следовательно,
$$\sup_I\left|g^{(n)}(t)\right|\leqslant C(1+L)M_nH_0(\delta),\quad \delta\in(0,1],\quad n\geqslant 0.$$
Таким образом, окончательно получаем, что:

1) $g^{(n)}(0)=0$, $n\geqslant 0$;

2) $\left\|g^{(n)}\right\| \leqslant KH_0(\delta)M_n$, $n \geqslant 0$, $K = (1+L)C$;
3) $g(\delta) = 1$.

Значит, функция

$$\psi(t) = \frac{g(t)}{KH_0(\delta)}$$

принадлежит классу $C_I^0(M_n)$. Осталось заметить, что

$$J_M(\delta) \geqslant \frac{1}{KH_0(\delta)}, \quad \delta \in (0,1], \quad K = (1+L)C.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Levinson. *Gap and density theorems.* New-York: Amer. Math. Soc. 1940.
2. В.П. Гурарий. *К теореме Н. Левинсона о нормальном семействе аналитических функций* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. Исследования по линейным операторам и теории функций. I. **19**, 215–220 (1970).
3. В. Мацаев. *Теоремы единственности, полноты и компактности, связанные с классической квазианалитичностью.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1964.
4. Е.М. Дынькин. *О росте аналитической функции вблизи множества ее особых точек* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. Исследования по линейным операторами теории функций. III. **30**, 158–160 (1972).
5. Е.М. Дынькин. *Функции с заданной оценкой* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ *и теорема Н. Левинсона* // Матем. сб. **89**:2. 1972. С. 182-190.
6. E.M. Dyn'kin. *The pseudoanalytic extension* // J. Anal. Math. **60**, 45–70 (1993).
7. А.М. Гайсин, И.Г. Кинзябулатов. *Теорема типа Левинсона-Щёберга. Применения* // Матем. сб. **199**:7, 41–62 (2008).
8. N. Sjoberg. *Sur les minorantes subharmoniques d'une function donee* // Comp. rendus IX Congres des Math. Scandinaves, Helsingfors. 309–319 (1939).
9. T. Carleman. *Extension d'un theoreme de Liouville* // Acta Math. **48**:3-4, 363–366 (1926).
10. F. Wolf. *On majorants of subharmonic and analytic functions* // Bull. Amer. Math. Soc. **48**, 925–932 (1942).
11. P. Koosis. *The logarithmic integral. I.* Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1988.
12. Y. Domar. *On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function* // Ark. Mat. **3**:5, 429–440 (1958).
13. А.М. Гайсин. *Экстремальные задачи в неквазианалитических классах Карлемана* // Матем. сб. **209**:7, 44–78 (2018).
14. V. Matsaev, M. Sodin. *Asymptotics of Fourier and Laplace transforms in weighted spaces of analytic functions* // Алгебра и анализ. **14**:4, 107–140 (2002).
15. N. Nikol'skii. *Yngve Domar's forty years in harmonic analysis.* Uppsala: Uppsala Univ. 1995. P. 45–78.
16. T. Bang. *The theory of metric spaces applied to infinitely differentiable functions* // Math. Scand. **1**, 137–152 (1953).
17. С. Мандельбройт. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* М.: ИЛ. 1955.

Рашит Ахтярович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru