ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 2 (2023). С. 42-54.

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ОДНОЙ ИЗ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Р. ДАНИЛИН

Аннотация. Рассматривается задача оптимального распределенного управления в плоской строго выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при одной из старших производных эллиптического оператора. На границе области в этой задаче задано нулевое условие Дирихле, а управление аддитивно входит в неоднородность. В качестве множества допустимых управлений используется единичный шар в соответствующем пространстве функций, суммируемых с квадратом. Решение получающихся краевых задач рассматриваются в обобщенном смысле как элементы некоторого гильбертова пространства. В качестве критерия оптимальности выступает сумма квадрата нормы отклонения состояния от заданного и квадрата нормы управления с некоторым коэффициентом. Такая структура критерия оптимальности позволяет, при необходимости, усилить роль либо первого, либо второго слагаемого в этом критерии. В первом случае более важным является достижение заданного состояния, а во втором случае — минимизация ресурсных затрат. Подробно изучена асимптотика задачи, порожденная дифференциальным оператором второго порядка с малым коэффициентом при одной из старших производных, к которому прибавлен дифференциальный оператор нулевого порядка.

Ключевые слова: малый параметр, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

Mathematical Subject Classification: 35C20, 35B25, 76M45, 93C70.

1. Введение

Статья посвящена исследованию асимптотики решения задачи оптимального распределенного управления [1] в плоской строго выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при одной из старших производных эллиптического оператора. Такие операторы характерны для установившихся процессов теплопроводности и диффузии в слоистых средах, когда распростронение тепла (диффузии) имеют существенно различные коэффициенты по перпендикулярным направлениям (в слое и при переходе в новый слой) [2, Гл. III, § 1, п. 3].

Асимптотика решения задачи Дирихле для подобных эллиптических уравнений в подобных областях была исследована в [3], [4].

Исследование задач оптимального управления, определяемых уравнениями в частных производных, не теряет своей актуальности (см., например, [5]–[7] и библиографию в них).

Асимптотика распределенного управления для оператора с малым коэффициентом при операторе Лапласа и в существенно другой области, рассматривалась в [8], [9], а в аналогичной области — в [10].

A.R. Danilin, Asymptotics for solutions to problem on optimally distributed control in convex domain with small parameter at one of higher derivatives.

© Данилин А.Р. 2023.

Поступила 20 июля 2022 г.

2. Общая постановка задачи и условия оптимальности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная строго выпуклая область с гладкой границей $\Gamma := \Gamma$ (Ω — многообразие класса C^∞ с краем).

Рассматривается следующая задача распределенного управления [1, Гл. 2, § 2, соотношения (2.8)–(2.9)]

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial y^2} + a(x,y) z_\varepsilon = f(x,y) - u_\varepsilon(x,y), \tag{2.1}$$

$$(x,y) \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega),$$

$$J(u) := \|z_\varepsilon - z_d\|^2 + \beta^{-1}\|u\| \longrightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(1), \quad \text{где} \quad \mathcal{U}(r) := \{u \in L_2(\Omega) : \|u\| \leqslant r\}. \tag{2.3}$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $H_0^1(\Omega)$ — соболевское пространство дифференцируемых функций, равных нулю на границе $\partial\Omega$ (см., например, [11]), $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$,

$$f, z_d, a \in C^\infty(\overline{\Omega_\delta}), \quad a(x,y) \geqslant \alpha^2 > 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \overline{\Omega_\delta}, \tag{2.4}$$

где $\delta > 0$, а Ω_δ — δ-окрестность области Ω.

Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ будем обозначать $(\cdot,\cdot)$.

Решение уравнения (2.1) понимается в слабом смысле: для любого $v \in H_0^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) + (a(x,y)z, v) = (f + u, v).$$

В силу (2.4) при всех малых $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\varepsilon v, v) =& \varepsilon^2 \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2 + (a(x,y)v, v) \\ \geqslant& \varepsilon^2 \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2 + \alpha^2\|v\|^2 \geqslant \varepsilon^2 \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

В этом случае единственное оптимальное управление $u_\varepsilon(\cdot)$ и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ в задаче (2.1)–(2.3) характеризуются следующим образом: существует $p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ такое, что (см. [1, Гл. 2, § 2, соотношения (2.10)])

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x,y) + u_\varepsilon,\ \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x,y), & (x,y) \in \Omega,\ z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ z_\varepsilon = 0, \quad p_\varepsilon = 0, & (x,y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$$\forall \widetilde{v} \in \mathcal{U} \qquad \big(p + \beta^{-1} u_{opt}, (\widetilde{v} - u_{opt})\big) \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Как показано в [12, лемма 1] в этом случае условие (2.6) эквивалентно следующему

$$\big(u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon\big) \wedge \big(\lambda_\varepsilon \in (0;\beta]\big) \wedge \Big(\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| \leqslant 1\Big) \wedge \Big((\beta - \lambda_\varepsilon)\cdot\big(1 - \lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\|\big) = 0\Big). \tag{2.7}$$

Таким образом, исходная задача свелась к системе уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x,y), & z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ z_\varepsilon = 0, \quad p_\varepsilon = 0, & (x,y) \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.8}$$

зависящей от скалярного параметра λ_ε с дополнительным условием (2.7).

Цель работы — изучить поведение z_ε, p_ε и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ и найти полные асимптотические разложения указанных величин при $\varepsilon \to 0$.

В дальнейшем положительные константы, которые зависят только от области Ω и функции $a(x,y)$, часто будем обозначать одной и той же буквой K (возможно с индексами).

3. Априорные оценки

Из первой части неравенства (2.5) следует справедливость следующей леммы:

Лемма 3.1. *Пусть функция $a(\cdot)$ удовлетворяет условию из (2.4). Если $f \in L_2(\Omega)$ и $\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f$, то справедливо неравенство*

$$\{\alpha^2\|z_\varepsilon\|, \alpha\varepsilon\|z'_x\|, \alpha\|z'_y\|\} \leqslant \|f\|. \tag{3.1}$$

Здесь $z'_x := \frac{\partial z}{\partial x}$, а $z'_y := \frac{\partial z}{\partial y}$.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия (2.4). Если λ_ε, z_ε и p_ε удовлетворяют (2.8), (2.7), то существует такая $\lambda_* > 0$, что при всех малых $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства $\lambda_\varepsilon \geqslant \lambda_*$ и*

$$\|z_\varepsilon\| \leqslant \alpha^{-2}(\|f\| + 1), \quad \|p_\varepsilon\| \leqslant \alpha^{-2}\|z_d\| + \alpha^{-4}(\|f\| + 1).$$

Доказательство. Два последних неравенства следуют из (3.1), а первое — из ограниченности $\|p_\varepsilon\|$ и (2.7). □

Наряду с (2.7) рассмотрим также систему вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,\lambda} + \lambda p_{\varepsilon,\lambda} = f_{\varepsilon,1}(x,y), & \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,\lambda} - z_{\varepsilon,\lambda} = f_{\varepsilon,2}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ z = 0, & p = 0, \quad (x,y) \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Задача (3.2) разрешима единственным образом при любых $f_{\varepsilon,i} \in L_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ $(i = 1,\ 2)$, ее решение $z,\ p \in H^2(\Omega)$. При этом, если $f_{\varepsilon,i} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то $z_{\varepsilon,\lambda}$, $p_{\varepsilon,\lambda} \in C^\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично теореме 1 из [13]. □

При $f_{\varepsilon,1} = f$ и $f_{\varepsilon,2} = -z_d$ решение системы (3.2) будем обозначать: $z_{\varepsilon,\lambda,d}$, $p_{\varepsilon,\lambda,d}$.

Замечание 3.1. *Отметим, что если $\beta\|p_{\varepsilon,\beta,d}\| \leqslant 1$, то $z_{\varepsilon,\beta,d} = z_\varepsilon$ и $p_{\varepsilon,\beta,d} = p_\varepsilon$, а ограничения на управление не по существу.*

Пусть $z_{\varepsilon,\lambda}, p_{\varepsilon,\lambda} \in H_0^1(\Omega)$ — решения системы (3.2), тогда для любых $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $(\mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,\lambda}, p_{\varepsilon,\lambda}) = (z_{\varepsilon,\lambda}, \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,\lambda})$. Тем самым из (3.2) получим, что

$$\|z_{\varepsilon,\lambda}\|^2 + \lambda\|p_{\varepsilon,\lambda}\|^2 = (f_{\varepsilon,1}, p_{\varepsilon,\lambda}) - (f_{\varepsilon,2}, z_{\varepsilon,\lambda}). \tag{3.3}$$

В силу (3.3) $\|z_{\varepsilon,\lambda}\|$ и $\|p_{\varepsilon,\lambda}\|$ удовлетворяют квадратичному неравенству

$$\|z_{\varepsilon,\lambda}\|^2 + \lambda\|p_{\varepsilon,\lambda}\|^2 \leqslant \|f_{\varepsilon,1}\| \cdot \|p_{\varepsilon,\lambda}\| + \|f_{\varepsilon,2}\| \cdot \|z_{\varepsilon,\lambda}\|,$$

из которого следует, что

$$\|z_{\varepsilon,\lambda}\| \leqslant \|f_{\varepsilon,2}\| + \frac{\|f_{\varepsilon,1}\|}{2\sqrt{\lambda}}, \qquad \|p_{\varepsilon,\lambda}\| \leqslant \frac{\|f_{\varepsilon,1}\|}{\lambda} + \frac{\|f_{\varepsilon,2}\|}{2\sqrt{\lambda}}, \tag{3.4}$$

Из (3.4) с учетом (2.5) получаются и априорные оценки производных

$$\varepsilon^2\left\|\frac{\partial}{\partial x}z_{\varepsilon,\lambda}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial y}z_{\varepsilon,\lambda}\right\|^2 \leqslant \|z_{\varepsilon,\lambda}\|(\|f_{\varepsilon,1}\| + \lambda\|p_{\varepsilon,\lambda}\|),$$
$$\varepsilon^2\left\|\frac{\partial}{\partial x}p_{\varepsilon,\lambda}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial y}p_{\varepsilon,\lambda}\right\|^2 \leqslant \|p_{\varepsilon,\lambda}\|(\|f_{\varepsilon,2}\| + \|z_{\varepsilon,\lambda}\|).$$

Таким образом, если $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*] \subset (0, +\infty)$, то существует $K > 0$ такое, что для любого малого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x} z_{\varepsilon,\lambda} \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial y} z_{\varepsilon,\lambda} \right\| + \|z_{\varepsilon,\lambda}\| \leqslant K(\|f_{\varepsilon,1}\| + \|f_{\varepsilon,2}\|), \\ \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x} p_{\varepsilon,\lambda} \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial y} p_{\varepsilon,\lambda} \right\| + \|p_{\varepsilon,\lambda}\| \leqslant K(\|f_{\varepsilon,1}\| + \|f_{\varepsilon,2}\|). \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Предельные соотношения

Рассмотрим «предельную» для (3.2) задачу

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 z_{0,\lambda} + \lambda p_{0,\lambda} = f_{0,1}(x,y), \\ \mathcal{L}_0 p_{0,\lambda} - z_{0,\lambda} = f_{0,2}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ z = 0, \quad p = 0, \quad (x,y) \in \Gamma, \ \lambda \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где оператор $\mathcal{L}_0$ получается из $\mathcal{L}_\varepsilon$ если положить формально $\varepsilon = 0$:

$$\mathcal{L}_0 v := -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(x,y)v, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Поскольку область Ω *строго выпукла*, то существуют точки $M_i = (x_i, y_i) \in \Gamma$, $i = 1, 2$, в которых уравнение касательной к Γ имеет вид $x = x_i$, соответственно. Точки M_i разбивают границу Γ на две части Γ_j — нижнюю ($j = 1$) и верхнюю ($j = 2$). Обе эти части являются графиками функций $\varphi_j(x)$, $x \in [x_1; x_2]$. При этом

$$\varphi_j(x) \in C([x_1; x_2]) \cap C^\infty(x_1; x_2), \qquad \varphi_j(x_i) = y_i, \qquad \varphi_j'(x_i - (-1)^i 0) = \infty. \tag{4.2}$$

В окрестностях точек M_i существует еще одна параметризация границы Γ: $x = \psi_i(y)$, соответственно. Отметим, что ψ_1 — выпуклая ($\psi_1'' \geqslant 0$), а ψ_2 — вогнутая ($\psi_1'' \leqslant 0$) функции и $\psi_i'(y_i) = 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$x_1 = y_1 = 0, \qquad \psi_1''(y_1) > 0, \qquad \psi_2''(y_2) < 0. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (2.4), (4.2) *и* $f_{0,1}, f_{0,1} \in C^\infty(\overline{\Omega_\delta})$. *Тогда задача* (4.1) *разрешима единственным образом и ее решения бесконечно дифференцируемы в* $\overline{\Omega} \setminus \{M_1, M_2\}$. *При этом для любого отрезка* $[\lambda_*, \lambda^*] \subset (0, +\infty)$ *существует* $K > 0$ *такое, что при всех* $(x,y) \in \Omega$ *и любых непрерывных в* Ω *функций* $f_{0,1}$, $f_{0,2}$ *справедливо априорное неравенство*

$$\begin{aligned} |z_{0,\lambda}(x,y)| + \left| \frac{\partial}{\partial y} z_{0,\lambda}(x,y) \right| + |p_{0,\lambda}(x,y)| + \left| \frac{\partial}{\partial y} p_{0,\lambda}(x,y) \right| \\ \leqslant K \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (|f_{0,1}(x,y)| + |f_{0,2}(x,y)|)\, dy. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Доказательство. Если $\lambda = 0$, то из первого уравнения системы (4.1) получим

$$(f_{0,1}, z_{0,0}) = (\mathcal{L}_0 z_{0,0}, z_{0,0}) = \left\| \frac{\partial}{\partial y} z_{0,0} \right\|^2 + (a(x,y) z_{0,0}, z_{0,)}) \geqslant \alpha^2 \|z_{0,\lambda}\|^2,$$

откуда следует, что

$$\alpha^2 \|z_{0,0}\| \leqslant \|f_{0,1}\|, \qquad \alpha^2 \|p_{0,0}\| \leqslant \|f_{0,2}\| + \alpha^{-2} \|f_{0,1}\|. \tag{4.5}$$

Аналогично (3.3) показывается, что если $z_{0,\lambda}, p_{0,\lambda}$ — решение системы (4.1), то справедливо равенство

$$\|z_{0,\lambda}\|^2 + \lambda \|p_{0,\lambda}\|^2 = (f_{0,1}, p_{0,\lambda}) - (f_{0,2}, z_{0,\lambda}),$$

и, тем самым при $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*] \subset (0, +\infty)$ существует $K > 0$ такое, что

$$\|z_{0,\lambda}\| + \|p_{0,\lambda}\| \leqslant K(\|f_{0,1}\| + \|f_{0,2}\|). \tag{4.6}$$

Система из (4.1) есть система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (относительно y), гладко зависящих от параметра x. Поскольку эта система фредгольмова, то рассмотрим ее решение, когда $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. Из (4.6) при этих условиях получаем, что $z_{0,\lambda} = 0$ и $p_{0,\lambda} = 0$. Таким образом задача (4.1) разрешима при любом $x \in (x_1; x_2)$, а в силу теоремы о решениях, зависящих от парамтера, получится гладкость $z_{0,\lambda}$ и $p_{0,\lambda}$ в Ω.

Применяя к системе (4.1) теорему 3.1 из [14, Гл. XII, §3] с учетом непрерывности в Ω_δ фундаментальной матрицы линейной системы, соответствующей системе (4.1), получим априорные оценки (4.4). □

При $f_{0,1} = f$ и $f_{0,2} = -z_d$ решение системы (4.1) будем обозначать: $z_{0,\lambda,d}$, $p_{0,\lambda,d}$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (4.2). *Тогда*

$$\|z_{\varepsilon,\lambda,d} - z_{0,\lambda,d}\| \to 0, \quad \|p_{\varepsilon,\lambda,d} - p_{0,\lambda,d}\| \to 0, \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функции $\widetilde{z}_r := \chi_r(x) z_{0,\lambda,d}$ и $\widetilde{p}_r := \chi_r(x) p_{0,\lambda,d}$, где r — вспомогательный малый положительный параметр, а $\chi_r(x)$ — срезающая функция, т.е.

$$\chi_r(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\ |\chi_r(x)| \leqslant 1,$$

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; r/2) \cup (x_2 - r/2; +\infty), \\ 1, & x \in [r; x_2 - r]. \end{cases}$$

Функции $\widetilde{z}_r$, $\widetilde{p}_r$ бесконечно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$, равны нулю на Γ и удовлетворяют равенствам $\mathcal{L}_0 \widetilde{z}_r + \lambda \widetilde{p}_r = \chi_r(x) f$ и $\mathcal{L}_0 \widetilde{p}_r - \widetilde{z}_r = -\chi_r(x) z_d$. Поэтому

$$\mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{z}_r + \lambda \widetilde{p}_r = \chi_r(x) f + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \widetilde{z}_r, \quad \mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{p}_r - \widetilde{z}_r = -\chi_r(x) z_d + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \widetilde{p}_r$$

Так как $\widetilde{z}_r$, $\widetilde{p}_r \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то существует $K_r > 0$ такая, что

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \widetilde{z}_r \right\| \leqslant K_r, \qquad \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \widetilde{p}_r \right\| \leqslant K_r.$$

Обозначим $\widetilde{z}_{\varepsilon,r} := z_{\varepsilon,\lambda,d} - \widetilde{z}_r$, $\widetilde{p}_{\varepsilon,r} := p_{\varepsilon,\lambda,d} - \widetilde{p}_r$. Тогда

$$\mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{z}_{\varepsilon,r} + \lambda \widetilde{p}_{\varepsilon,r} = (1 - \chi_r(x)) f + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \widetilde{z}_r, \quad \mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{p}_{\varepsilon,r} - \widetilde{z}_{\varepsilon,r} = -(1 - \chi_r(x)) z_d + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \widetilde{p}_r.$$

В силу (3.5) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\widetilde{z}_{\varepsilon,r}\| &\leqslant K \|1 - \chi_r\| (\|f\| + \|z_d\|) + 2\varepsilon^2 K_r, \\ \|\widetilde{p}_{\varepsilon,r}\| &\leqslant K \|1 - \chi_r\| (\|f\| + \|z_d\|) + 2\varepsilon^2 K_r. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Поскольку

$$z_{\varepsilon,\lambda,d} - z_{0,\lambda,d} = \widetilde{z}_{\varepsilon,r} + (1 - \chi_r(x)) z_{0,\lambda,d}, \quad p_{\varepsilon,\lambda,d} - p_{0,\lambda,d} = \widetilde{p}_{\varepsilon,r} + (1 - \chi_r(x)) p_{0,\lambda,d},$$

то в силу (4.7)

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \liminf_{\varepsilon \to +0} \|z_{\varepsilon,\lambda,d} - z_{0,\lambda,d}\| &\leqslant \limsup_{\varepsilon \to +0} \|z_{\varepsilon,\lambda,d} - z_{0,\lambda,d}\| \\ &\leqslant K \|1 - \chi_r\| (\|f\| + \|z_d\|) + \|1 - \chi_r\| \cdot \|z_{0,\lambda,d}\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \liminf_{\varepsilon \to +0} \|p_{\varepsilon,\lambda,d} - p_{0,\lambda,d}\| &\leqslant \limsup_{\varepsilon \to +0} \|p_{\varepsilon,\lambda,d} - p_{0,\lambda,d}\| \\ &\leqslant K \|1 - \chi_r\| (\|f\| + \|z_d\|) + \|1 - \chi_r\| \cdot \|p_{0,\lambda,d}\|. \end{aligned}$$

Но $\|1-\chi_r\| \longrightarrow 0$ при $r \to +0$, поэтому

$$\lim_{r\to+0}\Big(K\|1-\chi_r\|(\|f\|+\|z_d\|)+\|1-\chi_r\|\cdot\|p_{0,\lambda,d}\|\Big)=0,$$

и, тем самым, $\|z_{\varepsilon,\lambda,d}-z_{0,\lambda,d}\| \to 0$ и $\|p_{\varepsilon,\lambda,d}-p_{0,\lambda,d}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. □

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (4.2). *Тогда*

1. *Если*

$$\beta\|p_{0,\beta,d}\| < 1, \tag{4.8}$$

то $\lambda_\varepsilon = \beta$ *при всех малых* $\varepsilon > 0$, *т.е. ограничения на управление в задаче* (2.1)–(2.3) *не по существу и* $\|z_\varepsilon - z_{0,\beta,d}\| \to 0$, $\|p_\varepsilon - p_{0,\beta,d}\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

2. *Если* $\beta\|p_{0,\beta,d}\| > 1$, *то при всех малых* $\varepsilon > 0$ *ограничения на управление в задаче* (2.1)–(2.3) *по существу и* $\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| = 1$ *при всех таких* ε.

Доказательство. Если $\beta\|p_{0,\beta,d}\| < 1$, то при всех малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\beta\|p_{\varepsilon,\beta,d}\| < 1$ и, в силу замечания к теореме 3.1, справедливы равенства $z_{\varepsilon,\beta,d} = z_\varepsilon$ и $p_{\varepsilon,\beta,d} = p_\varepsilon$. □

Лемма 4.1. *Пусть*

$$\mathcal{L}_0 z_d \neq f \quad \text{и} \quad \beta\|p_{0,\beta,d}\| > 1. \tag{4.9}$$

Тогда существует единственное $\lambda_0 \in (0,\beta)$ *такое, что*

$$\lambda_0\|p_{0,\lambda_0,d}\| = 1. \tag{4.10}$$

Доказательство. Перейдем в (4.1) от функций $z_{0,\lambda,d}$ и $p_{0,\lambda,d}$ к функциям $Z_\lambda := z_{0,\lambda,d}$ и $P_\lambda := \lambda p_{0,\lambda,d}$. Тогда $\{Z_\lambda, P_\lambda\}$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 Z_\lambda + P_\lambda = f(x,y), \quad \mathcal{L}_0 P_\lambda - \lambda Z_\lambda = -\lambda z_d(x,y), \\ Z_\lambda|_\Gamma = 0 = P_\lambda|_\Gamma. \end{cases} \tag{4.11}$$

Рассмотрим функцию $\mathcal{F}(\lambda) := \|P_\lambda\|^2$. Тогда $\mathcal{F}'(\lambda) = 2(P_\lambda, \frac{\partial}{\partial\lambda}P_\lambda)$.

Пусть $\widetilde{Z}_\lambda := \frac{\partial}{\partial\lambda}Z_\lambda$, а $\widetilde{P}_\lambda := \frac{\partial}{\partial\lambda}P_\lambda$. Тогда в силу теоремы о дифференцируемости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру $\{\widetilde{Z}_\lambda, \widetilde{P}_\lambda\}$ есть решение системы

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \widetilde{Z}_\lambda + \widetilde{P}_\lambda = 0, \quad \mathcal{L}_0 \widetilde{P}_\lambda - \lambda \widetilde{Z}_\lambda = \lambda(\widetilde{Z}_\lambda - z_d(x,y)), \\ \widetilde{Z}_\lambda|_\Gamma = 0 = \widetilde{P}_\lambda|_\Gamma. \end{cases} \tag{4.12}$$

Покажем, что $\widetilde{P}_\lambda \neq 0$ при всех $\lambda > 0$. В противном случае из (4.12) получим, что $\widetilde{Z}_\lambda = 0$ и $z_\lambda := \widetilde{Z}_\lambda = z_d$. Но в этом случае из (4.1) следует, что $\mathcal{L}_0 p_{0,\lambda,d} = 0$ и, тем самым, $p_{0,\lambda,d} = 0$ и $\mathcal{L}_0 z_{0,\lambda,d} = \mathcal{L}_0 z_d = f$, что противоречит условию (4.9).

В силу (4.11) и (4.12) имеем:

$$\begin{aligned}(P_\lambda, \widetilde{P}_\lambda) &= -(\mathcal{L}_0\widetilde{Z}_\lambda, P_\lambda) = -(\widetilde{Z}_\lambda, \mathcal{L}_0^* P_\lambda) = -(\widetilde{Z}_\lambda, \lambda(z_\lambda - z_d(x,y)) \\ &= -(\widetilde{Z}_\lambda, \mathcal{L}_0^*\widetilde{P}_\lambda - \lambda\widetilde{Z}_\lambda) = \lambda\|\widetilde{Z}_\lambda\|^2 + \|\widetilde{P}_\lambda\|^2 > 0.\end{aligned}$$

Поэтому $\mathcal{F}'(\lambda) > 0$ и, тем самым, функция $\mathcal{F}(\lambda)$ строго возрастает, непрерывна на $[0,\beta]$ и, при этом, $\mathcal{F}(0) = 0$, а $\mathcal{F}(\beta) > 1$. Поэтому существует единственное $\lambda_0 \in (0,\beta)$ такое, что $1 = \mathcal{F}(\lambda_0) = \lambda_0\|p_{0,\lambda_0,d}\|$. □

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* (4.9). *Тогда при* $\varepsilon \to +0$

$$\lambda_\varepsilon \longrightarrow \lambda_0, \quad \|z_\varepsilon - z_{0,\lambda_0,d}\| \to 0, \quad \|p_\varepsilon - p_{0,\lambda_0,d}\| \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

где λ_0 *удовлетворяет* (4.10).

Доказательство. Прежде всего в силу условий теоремы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо равенство
$$\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| = 1. \tag{4.13}$$

Пусть $\lambda_0 \in [0, \beta]$ — частичный предел $\{\lambda_\varepsilon\}$, т.е. $\lambda_{\varepsilon_k} \longrightarrow \lambda_0$ для некоторой $\{\lambda_{\varepsilon_k}\}$ такой, что $\varepsilon_k \longrightarrow +0$. В дальнейшей части доказательства, чтоб не загромождать запись, индекс k у ε_k будем опускать.

Рассмотрим функции $Z_\varepsilon := z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\lambda_0,d}$ и $P_\varepsilon := p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\lambda_0,d}$. Поскольку
$$\mathcal{L}_\varepsilon Z_\varepsilon + \lambda_0 P_\varepsilon = (\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) p_\varepsilon, \quad \mathcal{L}_\varepsilon P_\varepsilon - Z_\varepsilon = 0,$$
то в силу (3.5)
$$\|Z_\varepsilon\| \leqslant K|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \cdot \|p_\varepsilon\|, \quad \|P_\varepsilon\| \leqslant K|\lambda_0 - \lambda_\varepsilon| \cdot \|p_\varepsilon\|,$$
что с использованием следствия 3.1 дает $\|Z_\varepsilon\| \longrightarrow 0$ и $\|P_\varepsilon\| \longrightarrow 0$. Применение теоремы 4.2 дает: $\|z_\varepsilon - z_{0,\lambda_0,d}\| \to 0$ и $\|p_\varepsilon - p_{0,\lambda_0,d}\| \to 0$. Теперь, перейдя к пределу в (4.13), получим, что λ_0 удовлетворяет уравнению (4.10). Это в силу единственности решения уравнения (4.10) показывает: λ_0 — единственный частичный предел λ_ε, и, тем самым, $\lambda_\varepsilon \longrightarrow \lambda_0$. $\square$

5. Аппроксимационные теоремы

Для обоснования асимптотических разложений решений задачи (2.8), (2.7) нужны теоремы об оценке уклонения точного решения $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ этой задачи от решений аппроксимационной задачи
$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma} + \widetilde{\lambda}_{\varepsilon,\gamma} \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma} = f(x,y) + f_{1,\gamma}, & (x,y) \in \Omega, \\ \mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma} - \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma} = f_{2,\gamma} - z_d(x,y), & \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma},\, \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma} \in H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma} = 0, \quad \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma} = 0, & (x,y) \in \Gamma, \end{cases} \tag{5.1}$$
в случае, когда при $\varepsilon \to 0$
$$f_{j,\gamma} \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \|f_{j,\gamma}\| = O\big(\varepsilon^\gamma\big), \quad j = 1, 2, \tag{5.2}$$
и аппроксимации условия (2.7).

Если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ограничения на управление в исходной задаче не по существу, то $\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,\gamma} = \beta$.

В противном случае дополнительное условие аппроксимации имеет вид
$$\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,\gamma} \|\widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma}\| = 1 + O\big(\varepsilon^\gamma\big). \tag{5.3}$$

Если $\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,\gamma} = \beta$, то (3.5) дают необходимые оценки погрешности аппроксимаций.

Теорема 5.1. *Пусть $\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,\gamma} = \beta$. Тогда*
$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x}(z_\varepsilon - \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma}) \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial y}(z_\varepsilon - \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma}) \right\| + \|(z_\varepsilon - \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma})\| = O(\varepsilon^\gamma),$$
$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x}(p_\varepsilon - \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma}) \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial y}(p_\varepsilon - \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma}) \right\| + \|(p_\varepsilon - \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma})\| = O(\varepsilon^\gamma)$$
при $\varepsilon \to 0$, где $\widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma}$ и $\widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma}$ есть решение задачи (5.1), (5.2).

В случае, когда ограничения на управление по существу, т.е. выполнено условие аппроксимации (5.3) для получения аппроксимационной теоремы требуется вспомогательное утверждение о зависимости от r оптимального $u_{\varepsilon,r}$ в задаче (2.1)–(2.2) при условии: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ и $\|u_{\varepsilon,r}\| = r$.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* (2.4), *а* $u_{\varepsilon,r}$ — *решение задачи* (2.1), (2.2) *с* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ *и* $]|u_{\varepsilon,r}\| = r$ *при всех* $r \in [r_*; r^*]$. *Тогда при некоторых* $K > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$

$$\forall\, r, r' \in [r_*; r^*], \quad \forall\, \varepsilon \in (0; \varepsilon_0], \quad \|u_r - u_{r'}\| \leqslant K|r - r'|. \tag{5.4}$$

Доказательство. Пусть $z_{\varepsilon,0}$ — решение задачи (2.1) с $u = 0$, а оператор $A_\varepsilon : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ ставит в соответствие функции u_ε решения задачи (2.1) с $f = 0$. Тогда $z_\varepsilon = z_{\varepsilon,0} + A_\varepsilon u_\varepsilon$ и функционал качества примет вид

$$J(u_\varepsilon) = \|A_\varepsilon u_\varepsilon + v_0\|^2 + \beta^{-1}\|u_\varepsilon\|^2,$$

где $v_0 := z_{\varepsilon,0} - z_d$. По теореме 3 из [15]

$$\|u_r - u_{r'}\| \leqslant K_1 \cdot |r - r'| \cdot \|A_\varepsilon\|^2 \cdot \big(\|A_\varepsilon\| + \|v_0\|\big)^4.$$

По определению $\|A_\varepsilon\|$ в силу оценок (3.1) получим $\|A\| \leqslant K_2$. При этом и $\|v_0\| \leqslant K_3$, где K_2 и K_3 — константы, определяемые (3.1).

Тем самым $\|u_r - u_{r'}\| \leqslant K|r - r'|$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. □

Теорема 5.3. *Пусть при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *справедливо равенство* (4.13). *Тогда*

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x}(z_\varepsilon - \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma})\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial y}(z_\varepsilon - \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma})\right\| + \|(z_\varepsilon - \widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma})\| = O(\varepsilon^\gamma),$$

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x}(p_\varepsilon - \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma})\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial y}(p_\varepsilon - \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma})\right\| + \|(p_\varepsilon - \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma})\| = O(\varepsilon^\gamma),$$

$$|\lambda_\varepsilon - \widetilde{\lambda}_{\varepsilon,\gamma}| = O(\varepsilon^\gamma),$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $\widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma}$, $\widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma}$ *и* $\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,\gamma}$ *есть решение задачи* (5.1) – (5.3).

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично теореме 4 из [15] с учетом (3.1) и (5.4). □

Теоремы аппроксимации показывают, что построение асимптотического разложения решения задачи (2.8), (2.7) сводится к построению ее формального асимптотического решения (ФАР) [16, Гл. I, § 1].

6. Внешнее асимптотическое разложение

В отличии от [10], поскольку при $\varepsilon = 0$ система (2.8) остается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, гладко зависящей от параметра x, то с помощью внешнего разложения удается удовлетворить граничным условиям без экспоненциально убывающего пограничного слоя.

Внешнее разложение для z_ε и p_ε и разложение для λ_ε ищем в виде

$$z_{out} := \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x, y), \quad p_{out} := \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x, y), \quad \lambda := \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{2k} \lambda_k. \tag{6.1}$$

Подставим ряды (6.1) в систему (2.8) и приравняем слагаемые одинакового порядка малости. В результате для определения функций z_k, p_k и λ_k получим уравнения

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 z_0 + \lambda_0 p_0 = f(x, y), & \mathcal{L}_0 p_0 - z_0 = -z_d(x, y), \\ \mathcal{L}_0 z_k + \lambda_0 p_k + \lambda_k p_0 = F_{1,k}, & \mathcal{L}_0 p_k - z_k = F_{2,k}, \quad k \geqslant 1, \\ z_k|_\Gamma = 0 = p_k|_\Gamma, & k \geqslant 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

где оператор $\mathcal{L}_0$ получается из $\mathcal{L}_\varepsilon$ если положить формально $\varepsilon = 0$:

$$\mathcal{L}_0 := -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a(x,y), \quad F_{1,k} = \frac{\partial^2 z_{k-1}}{\partial x^2} - \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_l p_{k-l}, \quad F_{2,k} = \frac{\partial^2 p_{k-1}}{\partial x^2}. \tag{6.3}$$

В силу теоремы 4.1 система (6.2), (6.3) имеет единственное решение при заданном наборе $\{\lambda_k\}$.

Итак, внешнее разложение (при заданном наборе $\{\lambda_k\}$) построено. Оно по построению является формальным асимптотическим решением (ФАР) задачи (2.8) в тех подобластях области Ω, где ряды (6.1) не теряют своей асимптотичности.

Покажем, что эти ряды пригодны во всей области Ω. Для этого рассмотрим асимптотику функций z_k и p_k при $(x,y) \to M_i$, $i = 1,2$. В силу одинаковости рассмотрения окрестностей этих точек, мы подробно рассмотрим лишь окрестность точки $M_1 = (0,0)$.

Пусть

$$\psi_1(y) \overset{as}{=} c^{-2} y^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k y^k\right), \quad y \to 0.$$

Тогда функции φ_j, определяющие Γ_j, имеют при $x \to +0$ асимптотические разложения

$$\varphi_1(x) \overset{as}{=} -cx^{1/2} + \sum_{s=2}^{+\infty} c_s(-x^{1/2})^s, \quad \varphi_2(x) \overset{as}{=} cx^{1/2} + \sum_{s=2}^{+\infty} c_s(-x^{1/2})^s. \tag{6.4}$$

Через $\sigma(x)$ (возможно с индексами) мы будем обозначать гладкие в $(0;x_1)$ функции, имеющие степенное асимптотическое разложение при $x \to +0$, которое можно дифференцировать сколько угодно раз. Через $\sigma(x,y)$ (возможно с индексами) мы будем обозначать гладкие в Ω функции, имеющие степенное асимптотическое разложение при $\Omega \ni (x,y) \to (0,0)$, которое можно дифференцировать сколько угодно раз.

Слагаемые в асимптотическом представлении функций $\sigma(x,y)$ будем группировать в полиномы однородные $(2,1)$-степени, где $deg_{(2,1)}(x^s y^r) := 2s + r$. Однородные $(2,1)$-степени n полиномы будем обозначать P_n. Такой полином имеет вид

$$P_n(x,y) = \sum_{s: n \geqslant 2s \geqslant 0} \gamma_s x^s y^{n-2s}.$$

Тем самым при $\Omega \ni (x,y) \to (0,0)$

$$\sigma(x,y) \overset{as}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x,y).$$

Как и для обычных однородных степени n полиномов

$$P_n(x,y) P_m(x,y) = P_{n+m}(x,y).$$

Отметим, что $P_n(x,y) = x^{n/2} Q(y/\sqrt{x})$, где $Q(\eta)$ — некоторый полином от η.

Если $\sigma(x,y) \overset{as}{=} \sum\limits_{n=k}^{+\infty} P_n(x,y)$ при $\Omega \ni (x,y) \to (0,0)$, то при необходимости подчеркивания этого факта будем использовать обозначение $\sigma(x,y;k)$.

В силу (6.4) функции φ_1 и φ_2 можно представить в виде

$$\varphi_1(x) = -x^{1/2}\sigma_1(x) + x\sigma_2(x), \quad \varphi_2(x) = x^{1/2}\sigma_1(x) + x\sigma_2(x), \quad \sigma_1(0) = c. \tag{6.5}$$

Из (6.5) следует, что справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\begin{gathered} \left| \frac{\varphi_i(x)}{\sqrt{x}} \right| = c + O(x) \quad \text{при} \quad x \to +0, \quad i = 1,2, \\ \sigma(x,y;n) = O\Big(x^{n/2}\Big) \quad \text{при} \quad \Omega \ni (x,y) \to (0;0) \quad \text{равномерно по} \ \ y. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Лемма 6.1. *Если $w_k(x,y)$ — решение задачи*

$$\mathcal{L}_{0,0}w_k := \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = y^k, \quad (x,y)\in\Omega, \quad w_k\Big|_\Gamma = 0,$$

то

$$w_k(x,y) = \gamma_k y^{k+2} + yx^{[(k+1)/2]}\sigma_3(x,y) + x^{[(k+2)/2]}\sigma_4(x,y). \tag{6.7}$$

Здесь $[b]$ — целая часть числа b, а $\gamma_k = 1/((k+1)(k+2))$.

Доказательство. В силу явной формулы решения рассматриваемого уравнения $w_k(x,y)$ имеет вид

$$\frac{w_k(x,y)}{\gamma_k} = y^{k+2} - y\frac{\varphi_2(x)^{k+2} - \varphi_1(x)^{k+2}}{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)} + \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\big(\varphi_2(x)^{k+1} - \varphi_1(x)^{k+1}\big)}{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)}.$$

Поскольку в силу (6.5)

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = 2\sqrt{x}\sigma_1(x), \quad \varphi_2(x)\varphi_1(x) = x^2\sigma_2(x)^2 - x\sigma_1(x)^2,$$

а для натурального числа m

$$\varphi_2(x)^m - \varphi_1(x)^m = 2\sqrt{x}\sum_{s=0}^{2s\leqslant m} C_m^{2s+1}x^{m-s-1}\sigma_1(x)^{2s+1}\sigma_2(x)^{m-2s-1},$$

то в силу действий со степенными асимптотическими рядами получаем требуемую формулу (6.7). □

Следствие 6.1. *Если $w_k(x,y)$ — решение задачи*

$$\mathcal{L}_{0,0}w_k = P_k(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \quad w_k\Big|_\Gamma = 0,$$

то

$$w_k(x,y) = \sigma(x,y;k+1).$$

Доказательство. В силу линейности рассматриваемой задачи, достаточно проверить этот факт для монома, т.е. для $P_k(x,y) = x^s y^{k-2s}$. По формуле (6.7) в этом случае получим

$$w_k(x,y) = \gamma_k x^s y^{k+2} + yx^{[(k+1+2s)/2]}\sigma_3(x,y) + x^{[(k+2+2s)/2]}\sigma_4(x,y).$$

Рассматривая четные и нечетные k убеждаемся в справедливости соотношения

$$w_k(x,y) = \sigma(x,y;k+1).$$

□

Лемма 6.2. *Если $v(x,y)$, $w(x,y)$ — решение задачи* (4.1) *с $f_{0,i}(x,y) = \sigma_i(x,y;k)$, $i=1,2$, то*

$$v(x,y) = \sigma_1(x,y;k+1), \quad w(x,y) = \sigma_2(x,y;k+1).$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $a(x,y) = \sigma(x,y;0)$.

Пусть

$$f_{0,i}(x,y) \overset{as}{=} \sum_{n=k}^{+\infty} P_{n,i,1}(x,y), \quad l = 1,2,$$

где $P_{n,i,1}(x,y)$ — однородные $(2,1)$-степени n полиномы, а $v_1(x,y)$ и $w_1(x,y)$ — решение задачи

$$\mathcal{L}_{0,0}v_1 = P_{k,1,1}(x,y) \quad \mathcal{L}_{0,0}w_1 = P_{k,2,1}(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \quad v_1\Big|_\Gamma = 0 = w_1\Big|_\Gamma.$$

Тогда $v_1=\sigma_{v,1}(x,y;k+1)$, $w_1=\sigma_{w,1}(x,y;k+1)$ в силу следствия 6.1, а функции $V_1:=v-v_1$ и $W_1:=w-w_1$ удовлетворяют системе

$$\mathcal{L}_0V_1+\lambda W_1=f_{0,1}-v_1-a(x,y)v_1-\lambda w_1=\sigma_{1,1}(x,y;k+1)\overset{as}{=}\sum_{n=k+1}^{+\infty}P_{n,1,2}(x,y),$$

$$\mathcal{L}_0W_1-V_1=f_{0,2}-w_1-a(x,y)w_1+v_1=\sigma_{2,1}(x,y;k+1)\overset{as}{=}\sum_{n=k+1}^{+\infty}P_{n,2,2}(x,y),$$

$$V_1\Big|_\Gamma=0=W_1\Big|_\Gamma.$$

Теперь рассмотрим $v_2(x,y)$ и $w_2(x,y)$ — решение задачи

$$\mathcal{L}_{0,0}v_2=P_{k+1,1,2}(x,y)\quad \mathcal{L}_{0,0}w_2=P_{k+1,2,2}(x,y),\quad (x,y)\in\Omega,\quad v_1\Big|_\Gamma=0=w_1\Big|_\Gamma.$$

Тогда функции $V_1:=v-v_1-v_2$ и $W_1:=w-w_1-w_2$ удовлетворяют системе

$$\mathcal{L}_0V_2+\lambda W_2=\sigma_{1,2}(x,y;k+2),\quad \mathcal{L}_0W_1-V_1=\sigma_{2,2}(x,y;k+1),\quad V_1\Big|_\Gamma=0=W_1\Big|_\Gamma.$$

Продолжая этот процесс дальше, получим асимптотические ряды $V:=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ и $W:=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$ — ФАР задачи (4.1). В силу оценок (4.4) и (6.6) построенные ряды есть асимптотические разложения решения задачи (4.1). □

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (4.3). *Тогда для любого набора* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}\subset[\lambda_*;\lambda^*]\subset(0;+\infty)$ *решение системы* (6.2), (6.3) *имеет вид* $z_k=\sigma_{z,k}(x,y)$, $p_k=\sigma_{p,k}(x,y)$.

Доказательство. В силу леммы 6.2 имеем: $z_0=\sigma_{z,0}(x,y)$ и $p_0=\sigma_{p,0}(x,y)$. Поскольку по определению функция вида $\sigma(x,y)$ $(\partial/\partial x)\sigma(x,y)$ есть снова функция вида $\sigma(x,y)$, то

$$\mathcal{L}_0z_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}z_0-\lambda_1p_0=\sigma_{z,0,1}(x,y),\qquad \mathcal{L}_0p_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}p_0=\sigma_{p,0,1}(x,y),$$

и, тем самым, $z_1=\sigma_{z,1}(x,y)$ и $p_1=\sigma_{p,1}(x,y)$. Далее применяем метод математической индукции. □

Таким образом, внешнее разложение пригодно всюду в Ω и, в силу следствия 3.1 дает асимптотическое разложение решения задачи (2.8) при любом заданном λ_ε, имеющим асимптотическое разложение вида $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^{2k}\lambda_k$.

Отметим, что для одного уравнения и $\psi_1(y)=y^2$ аналогичный результат получен в [3, Теорема 2]. При этом, если $\psi_1(y)=y^4$, то внешнее разложение уже имеет нарастающие особенности при $\Omega\ni(x,y)\to(0;0)$ (см. [3, п. 1.2]).

7. Полная асимптотика решения

1. Пусть выполнено условие (4.8). В этом случае справедливо равенство $\lambda_\varepsilon=\beta$ и, тем самым $\lambda_0=\beta$, $\lambda_k=0$ при $k>0$. Поэтому в силу теоремы 5.1 получим справедливость следующей теоремы:

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* (2.4), (4.3) *и* (4.8). *Тогда внешнее разложение* (6.1) *с* $\lambda_0=\beta$, $\lambda_k=0$ *при* $k>0$ *есть асимптотическое разложение решения задачи* (2.8) *с* $\lambda_\varepsilon=\beta$ *при* $\varepsilon\to+0$.

2. Пусть выполнено условие (4.9). В этом случае условия для определения $\{\lambda_k\}$ получаются из асимптотического равенства $\Lambda^2\|p_{out}\|^2 \stackrel{as}{=} 1$ при $\varepsilon \to +0$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε получим, равенства

$$\lambda_0\|p_0\| = 1, \quad 2\lambda_0\lambda_k\|p_0\|^2 + 2\lambda_0^2(p_0, p_k) = h_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7.1}$$

где h_k полностью определяются предыдущими z_l, p_l и λ_l, $0 \leqslant l < k$. Таким образом, за λ_0 надо взять единственное решение уравнения $\lambda\|p_{0,\lambda,d}\| = 1$, гарантированное леммой 4.1.

Как и в [10], удобно при $k > 0$ представить z_k и p_k в виде $z_k = \widetilde{z}_k + \lambda_k\widetilde{z}$, $p_k = \widetilde{p}_k + \lambda_k\widetilde{p}$, где $\widetilde{z}_k$, $\widetilde{p}_k$ — решение задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0\widetilde{z}_k + \lambda_0\widetilde{p}_k = F_{1,k}, \quad \mathcal{L}_0\widetilde{p}_k - \widetilde{z}_k = F_{2,k}, & k \geqslant 1, \\ \widetilde{z}_k|_\Gamma = 0 = \widetilde{p}_k|_\Gamma, & k \geqslant 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

а $\widetilde{z}$, $\widetilde{p}$ — решение задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0\widetilde{z} + \lambda_0\widetilde{p} + p_0 = 0, \quad \mathcal{L}_0\widetilde{p} - \widetilde{z} = 0, \\ \widetilde{z}|_\Gamma = 0 = \widetilde{p}|_\Gamma. \end{cases} \tag{7.3}$$

Отметим, что функции $\widetilde{z}_k$, $\widetilde{p}_k$ полностью определяются предыдущими z_l, p_l и λ_l, $0 \leqslant l < k$. При таком представлении уравнения (7.1) для нахождения λ_k принимают вид

$$\lambda_0\|p_0\| = 1, \quad 2\lambda_k\Big(\lambda_0\|p_0\|^2 + \lambda_0^2(p_0, \widetilde{p})\Big) = \widetilde{h}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7.4}$$

Лемма 7.1. *Если выполнено условие* (4.9), *то*

$$\lambda_0\|p_0\|^2 + \lambda_0^2(p_0, \widetilde{p}) > 0.$$

Доказательство. Заметим, что $\widetilde{z} = \frac{\partial}{\partial\lambda}z_{0,\lambda,d}\Big|_{\lambda=\lambda_0}$, $\widetilde{p} = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{0,\lambda,d}\Big|_{\lambda=\lambda_0}$. Поэтому в силу леммы 4.1

$$0 < \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\lambda^2\|p_{0,\lambda,d}\|^2\Big)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 2\lambda_0\|p_0\|^2 + 2\lambda_0^2(p_0, \widetilde{p}).$$

□

Таким образом задачи (6.2)–(6.3), (7.2)–(7.4) однозначно разрешимы и внешнее разложение (6.1) есть ФАР задачи (2.8), (2.7). Тем самым и в этом случае справедлива итоговая теорема

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия* (2.4), (4.3) *и* (4.9. *Тогда внешнее разложение* (6.1) *с коэффициентами, определяемыми задачами* (6.2)–(6.3), (7.2)–(7.4), *есть асимптотическое при* $\varepsilon \to +0$ *разложение решения задачи* (2.8) *с дополнительным условием* $\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| = 1$.

Заключение

Отметим, что при выполнении уловия (4.3) рассматриваемая задача (2.1)–(2.3) оказалась регулярной, и асимптотическое разложение ее решения совпадает с внешним разложением. Однако при условии $\psi(y) = y^4$, внешнее разложение уже не будет пригодным всюду в Ω и для построения асиптотического разложения решения рассматриваемой задачи в этом случае придется использовать метод согласования асимптотических разложений [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ж.-Л. Лионс. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* М.: Мир. 1972. 414 с.
2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики.* М: Наука. 1972. 736 с.
3. Е.Ф. Леликова. *Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных* // Тр. ИММ УрО РАН. **9**:1, 107–120 (2003).
4. А.М. Ильин, Е.Ф. Леликова. *Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром* // Алгебра и анализ. **22**:6, 109–126 (2010).
5. C. Eduardo. *A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations* // SeMA J. **74**, 319–344 (2017).
6. H. Lou, J. Yong. *Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls* // Math. Control Relat. Fields. **8**:1, 57–88 (2018).
7. M. Betz Livia. *Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations* // SIAM J. Control Optim. **57**:6, 4033–4062 (2019).
8. А.Р. Данилин. *Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления* // Матем. сб. **191**:10, 3–12 (2000).
9. А.Р. Данилин. *Асимптотика решений системы сингулярных эллиптических уравнений в прямоугольнике* // Матем. сб. **194**:1, 31–60 (2003).
10. А.Р. Данилин. *Асимптотика решения сингулярной задачи оптимального распределённого управления с существенными ограничениями в выпуклой области* // Дифференц. уравн. **56**:2, 256–268 (2020).
11. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир. 1971. 371 с.
12. А.Р. Данилин, А.П. Зорин. *Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления* // Труды ИММ УрО РАН. **15**:4, 95–107 (2009).
13. А.Р. Данилин. *Оптимальное граничное управление в области с малой полостью* // Уфимск. матем. журн. **4**:2, 87–100 (2012).
14. Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М: Мир. 1970. 720 с.
15. А.Р. Данилин. *Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления потоком через часть границы* // Труды Института математики и механики. **20**:4, 116–127 (2014).
16. А.М. Ильин. *Согласование асимтотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989. 336 с.

Алексей Руфимович Данилин,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской 16
620108, г. Екатеринбург, Россия
E-mail: `dar@imm.uran.ru`