ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 2 (2023). С. 9-19.

УДК 517.956.32

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ НА СОПРЯЖЕНИЕ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ж.А. БАЛКИЗОВ

Аннотация. В работе исследованы две нелокальные задачи со смещением на сопряжение двух уравнений гиперболического типа второго порядка, состоящего из волнового уравнения в одной части области и вырождающегося гиперболического уравнения первого рода в другой части. В качестве нелокального граничного условия в исследуемых задачах задана линейная комбинация с переменными коэффициентами значений производной первого порядка и производных дробного (в смысле Римана-Лиувилля) порядков от искомой функции на одной из характеристик и на линии изменения типа. С использованием метода интегральных уравнений вопрос разрешимости первой задачи эквивалентным образом редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью, а вопрос разрешимости второй задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью. По первой задаче доказана равномерная сходимость резольвенты ядра получающегося интегрального уравнения Вольтерра второго рода и принадлежность его решения требуемому классу. По второй задаче найдены достаточные условия на заданные функции, обеспечивающие существование единственного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью из требуемого класса. В некоторых частных случаях решения задач выписаны в явном виде.

Ключевые слова: волновое уравнение, вырождающееся гиперболическое уравнение первого рода, интегральное уравнение Вольтерра, интегральное уравнение Фредгольма, метод Трикоми, метод интегральных уравнений, методы теории дробного исчисления.

Mathematics Subject Classification: 35L53, 35L80

1. Введение. Постановка задачи

На евклидовой плоскости точек $(x,\, y)$ рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f, & y > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где m, λ — заданные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \le \frac{m}{2}$; $f = f\,(x, y)$ — заданная функция; $u = u\,(x, y)$ — искомая функция.

Уравнение (1.1) при $y < 0$ совпадает с уравнением

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0, \tag{1.2}$$

а при $y > 0$ уравнение (1.1) является неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} + f(x, y) = 0. \tag{1.3}$$

Zh.A. Balkizov, Nonlocal problems with shift for matching two second order hyperbolic equations.

Поступила 9 января 2023 г.

Уравнение (1.2) относится к классу вырождающихся гиперболических уравнений первого рода [1, с. 21]. Важным свойством уравнения (1.2) является тот факт, что при $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$ для него корректна задача Коши в обычной постановке с данными на линии параболического вырождения $y = 0$, несмотря на то, что нарушено условие Проттера [2]. При $m = 2$ уравнение (1.2) переходит в уравнение Бицадзе-Лыкова [3, с. 37], [4], [5, с. 234], а при $\lambda = 0$ из уравнения (1.2) приходим к уравнению Геллерстедта, которое, как показано в монографии [6, с. 234], находит применение в задаче определения формы прорези плотины. Частным случаем уравнения (1.2) также является уравнение Трикоми, который находит свои применения в теории околозвуковой газовой динамики и аэродинамики [7, с. 38], [8, с. 280], [9, с. 373].

Уравнение (1.1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1 — это область, ограниченная характеристиками

$$\sigma_1 = AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 = CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$$

уравнения (1.2), выходящими из точки $C = (r/2, y_C)$, $y_C = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$, проходящими через точки $A = (0,0)$ и $B = (r,0)$, соответственно, и отрезком $I = AB$ прямой $y = 0$; Ω_2 — область, ограниченная характеристиками $\sigma_3 = AD : \ x - y = 0$, $\sigma_4 = BD : \ x + y = r$ уравнения (1.3), выходящими из точек A и B, пересекающимися в точке $D = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ и отрезком $I = AB$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{m - 2\lambda}{2(m+2)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{m + 2\lambda}{2(m+2)}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{m}{m+2},$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon_2)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(1-\varepsilon_1)};$$

$$a(x) = \frac{\beta(x) + \gamma_1\alpha(x)}{\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x)}, \quad b(x) = \frac{1}{a(x)} = \frac{\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x)}{\beta(x) + \gamma_1\alpha(x)},$$

$$\theta_{00}(x) = \left(\frac{x}{2}, -(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}x^{1-\varepsilon}\right), \quad \theta_{01}(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right), \quad \theta_{r1}(x) = \left(\frac{r+x}{2}, \frac{r-x}{2}\right)$$

— аффиксы точек пересечения характеристик, выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристикой AC уравнения (1.2) и характеристиками AD и BD уравнения (1.3), соответственно;

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad \Gamma(x) = \int\limits_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}dt, \quad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

— есть интегралы Эйлера первого и второго родов и их связь;

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + n\rho^{-1}\right)}$$

— функция типа Миттаг-Леффлера [10, с. 117], а при $\mu = 1$ совпадает с функцией Миттаг-Леффлера $E_\rho(z,1) = E_{1/\rho}(z)$;

$$D_{cx}^{\alpha}\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_c^x \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1+\alpha}}, & \alpha < 0, \\ \operatorname{sgn}^{[\alpha]+1}(x-c)\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} D_{cx}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(t), & \alpha > 0, \end{cases}$$

— оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$, где $[\alpha]$ — есть целая часть числа α [5, с. 28], [11].

Регулярным в области Ω решением уравнения (1.1) назовем функцию $u = u\,(x,\,y)$ из класса $u\,(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\,(\Omega) \cap C^2\,(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, при подстановке которой уравнение (1.1) обращается в тождество.

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям*

$$u\left[\theta_{01}\,(x)\right] = \psi_1(x), \qquad 0 \le x \le r, \tag{1.4}$$

$$\alpha(x)x^{\varepsilon_1} D_{0x}^{1-\varepsilon_2} u\left[\theta_{00}(t)\right] + \beta(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} u(t,0) + \gamma(x) u_y(x,0) = \psi_2(x), \qquad 0 < x < r, \tag{1.5}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные на отрезке $[0,r]$ функции, причем $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,r]$.

Задача 2. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1.1) из класса $u_x(x,0)$, $D_{0x}^{1-\varepsilon} u(t,0) \in L_1\,(0,r)$, удовлетворяющее нелокальному условию (1.5), а также граничному условию*

$$u\left[\theta_{r1}\,(x)\right] = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{1.6}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные на отрезке $[0,r]$ функции, причем, как и в задаче 1, $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,r]$.

Задача Гурса для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения ранее исследована в работах [12], [13]. В работе [12] исследован критерий непрерывности решения задачи Гурса для уравнения вида (1.2), а в [13] решение задачи Гурса для вырождающегося внутри области модельного уравнения выписано в явном виде. В работе [14] рассмотрена первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. Краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений в характеристическом четырехугольнике с данными на противоположных характеристиках исследованы в работах [15]–[17]. Задачи со смещением для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений были изучены в работах [18]–[21]. Задачи со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода вида (1.2), как обобщения первой и второй задач Дарбу исследованы в работе [22]. В рамках данной работы для уравнения (1.1) изучены две нелокальные *задачи 1 и 2*, которые относятся к классу краевых задач со смещением Жегалова-Нахушева [23]–[26] и являются обобщениями задачи Гурса и задач с данными на противоположных характеристиках для уравнения вида (1.1). Найдены достаточные условия на заданные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $f(x,y)$, при котором существует единственное регулярное в рассматриваемой области решение *задач 1 и 2*. В частном случае, когда отношение $a(x) = \frac{\beta(x)+\gamma_1\alpha(x)}{\gamma(x)-\gamma_2\alpha(x)} = a = const$ решения *задач 1 и 2* выписаны в явном виде.

2. Исследование задачи 1

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть заданные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f(x,y)$ таковы, что*

$$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in C^1[0,r] \cap C^2(0,r), \tag{2.1}$$

$$\psi_1(x), \psi_2(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r), \tag{2.2}$$

$$f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega_2}), \tag{2.3}$$

и выполнено одно из условий: либо

$$\gamma(x) - \gamma_2 \alpha(x) \neq 0 \quad \forall\ x \in [0,r]; \tag{2.4}$$

либо же

$$\gamma(x) - \gamma_2 \alpha(x) \equiv 0, \quad \beta(x) + \gamma_1 \alpha(x) \neq 0 \quad \forall\ x \in [0,r]. \tag{2.5}$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи 1.

Доказательство. Доказательство теоремы 2.1 проводится с использованием метода интегральных уравнений. Введем обозначения

$$u\,(x,0)=\tau\,(x)\,,\quad 0\le x\le r\quad \text{и}\quad u_y\,(x,\,0)=\nu\,(x)\,,\quad 0<x<r. \tag{2.6}$$

Найдем фундаментальные соотношения между искомыми функциями $\tau\,(x)$ и $\nu\,(x)$, принесенные из соответствующих частей Ω_1 и Ω_2 области Ω на линию $y=0$. Рассмотрим сначала случай, когда $|\lambda|<\frac{m}{2}$. Регулярное в области Ω_1 решение задачи (2.6) для уравнения (1.2) в этом случае выписывается по формуле [27, с. 14]:

$$\begin{aligned} u\,(x,y)=&\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma\,(\varepsilon_1)\;\Gamma\,(\varepsilon_2)}\int\limits_0^1\tau\left[x+(1-\varepsilon)\,(-y)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\,(2t-1)\right]\,t^{\varepsilon_2-1}\,(1-t)^{\varepsilon_1-1}\,dt\\ &+\frac{\Gamma\,(2-\varepsilon)\;y}{\Gamma\,(1-\varepsilon_1)\;\Gamma\,(1-\varepsilon_2)}\int\limits_0^1\nu\left[x+(1-\varepsilon)\,(-y)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\,(2t-1)\right]\,t^{-\varepsilon_1}\;(1-t)^{-\varepsilon_2}\,dt, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\tau(x)\in C[0,r]\cap C^2(0,r)$, $\nu(x)\in C^1(0,r)\cap L_1(0,r)$.

Из (2.7) находим

$$\begin{aligned} u[\theta_{00}(x)]=&u\left(\frac{x}{2},-(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}x^{1-\varepsilon}\right)=\frac{1}{B(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\int\limits_0^1\tau(xt)\,t^{\varepsilon_2-1}\;(1-t)^{\varepsilon_1-1}\,dt\\ &-\frac{(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}x^{1-\varepsilon}}{B(1-\varepsilon_1,1-\varepsilon_2)}\int\limits_0^1\nu(xt)\,t^{-\varepsilon_1}\;(1-t)^{-\varepsilon_2}\,dt. \end{aligned}$$

Вводя новую переменную интегрирования $z=xt$, последнее равенство перепишется в виде

$$\begin{aligned} u\,[\theta_{00}\,(x)]=&\frac{\Gamma\,(\varepsilon)}{\Gamma\,(\varepsilon_1)\;\Gamma\,(\varepsilon_2)}x^{1-\varepsilon}\int\limits_0^x\frac{\tau\,(z)\,z^{\varepsilon_2-1}}{(x-z)^{1-\varepsilon_1}}dz\\ &-\frac{\Gamma\,(2-\varepsilon)}{\Gamma\,(1-\varepsilon_1)\,\Gamma\,(1-\varepsilon_2)}\,(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}\int\limits_0^x\frac{z^{-\varepsilon_1}\nu\,(z)}{(x-z)^{\varepsilon_2}}dz. \end{aligned}$$

В терминах оператора $D^{\alpha}_{cx}\varphi(t)$ дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования последнее равенство перепишется в виде:

$$\begin{aligned} u\,[\theta_{00}\,(x)]=&\frac{\Gamma\,(\varepsilon)\,x^{1-\varepsilon}}{\Gamma\,(\varepsilon_2)}\,D^{-\varepsilon_1}_{0x}\left[t^{\varepsilon_2-1}\tau(t)\right]\\ &-\frac{(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}\,\Gamma\,(1-\varepsilon)}{\Gamma\,(1-\varepsilon_1)}\,D^{\varepsilon_2-1}_{0x}\left[t^{-\varepsilon_1}\nu(t)\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Воспользовавшись следующим законом композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования [6, с. 18], [11]

$$D^{\alpha}_{0x}\,t^{\alpha+\beta}\,D^{\beta}_{0t}\,g\,(s)=x^{\beta}\,D^{\alpha+\beta}_{0x}\,t^{\alpha}g\,(t)\,,\quad 0<\alpha\le 1,\quad \beta<0,$$

из (2.8) находим

$$x^{\varepsilon_1}D^{1-\varepsilon_2}_{0x}u\,[\theta_{00}\,(t)]=\gamma_1 D^{1-\varepsilon}_{0x}\tau(t)-\gamma_2\nu(x). \tag{2.9}$$

С учетом (2.9) условие (1.5) перепишется в следующем виде

$$[\gamma(x)-\gamma_2\alpha(x)]\,\nu(x)+[\beta(x)+\gamma_1\alpha(x)]\,D^{1-\varepsilon}_{0x}\tau(t)=\psi_2(x). \tag{2.10}$$

Полученное соотношение (2.10) и есть основное фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на прямую $y=0$.

Далее найдем фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на прямую $y=0$. Для этого воспользуемся представлением регулярного в области Ω_1 решения задачи (2.6) для уравнения (1.3), которое выписывается с помощью формулы Даламбера [28, с. 59]:

$$u\left(x,\,y\right)=\frac{\tau\left(x+y\right)+\tau\left(x-y\right)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu\left(t\right)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{x-y+t}^{x+y-t}f\left(s,t\right)dsdt,\tag{2.11}$$

где $\tau(x)\in C[0,r]\cap C^2(0,r)$, $\nu(x)\in C^1(0,r)\cap L_1(0,r)$.

Удовлетворяя (2.11) условию (1.4), будем иметь

$$u\left[\theta_{01}\left(x\right)\right]=u\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right)=\frac{\tau\left(x\right)+\tau\left(0\right)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\nu\left(t\right)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}\int\limits_{t}^{x-t}f\left(s,t\right)dsdt=\psi_1(x).$$

Путем дифференцирования из последнего равенства приходим к соотношению

$$\nu(x)=2\psi_1'(x)-\tau'(x)-\int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}f\left(x-t,t\right)dt.\tag{2.12}$$

Соотношение (2.12) есть фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на прямую $y=0$.

Исключая из (2.10) и (2.12) искомую функцию $\nu\left(x\right)$, с учетом условия согласования $\tau(0)=\psi_1(0)$ и условия (2.4) теоремы 2.1, относительно функции $\tau\left(x\right)$ приходим к следующей задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, содержащего производную дробного порядка в младших членах

$$\tau'(x)-a(x)\,D_{0x}^{1-\varepsilon}\tau(t)=2\psi_1'(x)-\frac{\psi_2(x)}{\gamma(x)-\gamma_2\alpha(x)}-\int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}f\left(x-t,t\right)dt,\quad 0<x<r,\tag{2.13}$$

$$\tau(0)=\psi_1(0).\tag{2.14}$$

Путем интегрирования уравнения (2.13) по x в пределах от 0 до x, приходим к соответствующему задаче (2.13)–(2.14) интегральному уравнению вида

$$\tau(x)-\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int\limits_{0}^{x}K(x,t)\tau(t)dt=F_1(x),\tag{2.15}$$

где

$$K(x,t)=\frac{a(x)}{(x-t)^{1-\varepsilon}}-\int\limits_{t}^{x}\frac{a'(s)}{(s-t)^{1-\varepsilon}}ds,$$

$$F_1(x)=2\psi_1(x)-\psi_1(0)-\int\limits_{0}^{x}\frac{\psi_2(t)}{\gamma(t)-\gamma_2\alpha(t)}dt-\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{\frac{t}{2}}f\left(t-s,s\right)ds\,dt.$$

Из (2.1), (2.2), (2.3) следует, что уравнение (2.15) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром $K(x,t)\in L_1\left([0,r]\times[0,r]\right)$, имеющим слабую особенность при $x=t$ и правой частью $F_1(x)\in C[0,r]\cap C^2(0,r)$. Согласно общей теории интегральных уравнений Вольтерра, решение уравнения (2.15) существует, единственно и выписывается по формуле

$$\tau(x) = F_1(x) + \int\limits_0^x R(x,t)F_1(t)dt, \tag{2.16}$$

где $R(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x,t)}{\Gamma^{n+1}(\varepsilon)}$ — резольвента ядра $K(x,t)$;

$$K_0(x,t) = K(x,t), \quad K_{n+1}(x,t) = \int\limits_t^x K(x,s)K_n(s,t)ds.$$

Покажем, что резольвента $R(x,t)$ так же как и ядро $K(x,t)$ уравнения (2.15) принадлежит классу $R(x,t) \in L_1([0,r]\times[0,r])$ и имеет слабую особенность при $x = t$, а решение $\tau(x)$ этого уравнения также как и его правая часть $F_1(x)$ будет принадлежать классу $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r)$.

Действительно, с учетом того, что $a(x) \in C^1[0,r] \cap C^2(0,r)$, найдем оценку итерированных ядер $\frac{K_n(x,t)}{\Gamma^{n+1}(\varepsilon)}$. Пусть $|a(x)| \le M_1$, а $|a'(x)| \le M_2$ $\forall x \in [0,r]$. Тогда для первого итерированного ядра $\frac{K_0(x,t)}{\Gamma(\varepsilon)}$ имеем оценку

$$\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}|K_0(x,t)| = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}|K(x,t)| = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\left|\frac{a(x)}{(x-t)^{1-\varepsilon}} - \int\limits_t^x \frac{a'(s)}{(s-t)^{1-\varepsilon}}ds\right|$$
$$\le \frac{M_1(x-t)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)} + \frac{M_2(x-t)^{\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon+1)}.$$

Далее

$$\frac{1}{\Gamma^2(\varepsilon)}|K_1(x,t)| = \frac{1}{\Gamma^2(\varepsilon)}\left|\int\limits_t^x K(x,s)K_0(s,t)ds\right| \le \int\limits_t^x \left[\frac{M_1}{\Gamma(\varepsilon)(x-s)^{1-\varepsilon}} + \frac{M_2(x-s)^{\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon+1)}\right]$$
$$\cdot\left[\frac{M_1}{\Gamma(\varepsilon)(s-t)^{1-\varepsilon}} + \frac{M_2(s-t)^{\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon+1)}\right]ds = \frac{M_1^2}{\Gamma^2(\varepsilon)}(x-t)^{2\varepsilon-1}\int\limits_0^1 y^{\varepsilon-1}(1-y)^{\varepsilon-1}dy$$
$$+ \frac{M_1M_2}{\varepsilon\Gamma^2(\varepsilon)}(x-t)^{2\varepsilon}\int\limits_0^1 y^{\varepsilon}(1-y)^{\varepsilon-1}dy + \frac{M_1M_2}{\varepsilon\Gamma^2(\varepsilon)}(x-t)^{2\varepsilon}\int\limits_0^1 y^{\varepsilon-1}(1-y)^{\varepsilon}dy$$
$$+ \frac{M_2^2}{\Gamma^2(\varepsilon+1)}(x-t)^{2\varepsilon+1}\int\limits_0^1 y^{\varepsilon}(1-y)^{\varepsilon}dy = \frac{M_1^2(x-t)^{2\varepsilon-1}}{\Gamma(2\varepsilon)}$$
$$+ \frac{2M_1M_2(x-t)^{2\varepsilon}}{\Gamma(2\varepsilon+1)} + \frac{M_2^2(x-t)^{2\varepsilon+1}}{\Gamma(2\varepsilon+2)}.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{\Gamma^3(\varepsilon)}|K_2(x,t)| = \frac{1}{\Gamma^3(\varepsilon)}\left|\int\limits_t^x K(x,s)K_1(s,t)ds\right| \le \frac{M_1^3(x-t)^{3\varepsilon-1}}{\Gamma(3\varepsilon)} + \frac{3M_1^2M_2(x-t)^{3\varepsilon}}{\Gamma(3\varepsilon+1)}$$
$$+ \frac{3M_1M_2^2(x-t)^{3\varepsilon+1}}{\Gamma(3\varepsilon+2)} + \frac{M_2^3(x-t)^{3\varepsilon+2}}{\Gamma(3\varepsilon+3)}.$$

Ясно, что

$$\frac{1}{\Gamma^n(\varepsilon)}|K_{n-1}(x,t)| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k\, M_1^{n-k}\, M_2^k\,(x-t)^{n\varepsilon+k-1}}{\Gamma(n\varepsilon+k)}, \qquad (2.17)$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

Замечая, что $\Gamma(n\varepsilon+k) > \Gamma(n\varepsilon)$ из (2.17) приходим к оценке

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma^n(\varepsilon)}|K_{n-1}(x,t)| &< \frac{1}{\Gamma(n\varepsilon)} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, M_1^{n-k}\, M_2^k\,(x-t)^{n\varepsilon+k-1}\\ &= \frac{1}{\Gamma(n\varepsilon)}\,(M_1+M_2(x-t))^n\,(x-t)^{n\varepsilon-1}.\end{aligned} \qquad (2.18)$$

Для достаточно больших n показатель $n\varepsilon-1$ при $(x-t)$ в формуле (2.18) будет положительным. И при этом разность $(x-t)$ можно будет заменить большей числовой величиной r. Таким образом, для резольвенты $R(x,t)$ ядра $K(x,t)$ имеем оценку:

$$|R(x,t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{n-1}(x,t)}{\Gamma^n(\varepsilon)}\right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M_1+M_2r)^n\, r^{n\varepsilon-1}}{\Gamma(n\varepsilon)}. \qquad (2.19)$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга для гамма-функции

$$\Gamma(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} n^n e^{-n+\frac{\eta}{12n}}, \quad 0<\eta<1,$$

и признаком Коши сходимости числовых рядов, легко убедиться в том что ряд, стоящий справа в неравенстве (2.19) сходится. Таким образом, ряд для резольвенты $R(x,t)$ ядра $K(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно, откуда можно заключить непрерывность резольвенты ядра при любом $0<\varepsilon<1$ и любом $x \ne t \in [0,r]$, обладая слабой особенностью при $x=t$.

Из представления (2.18) и оценки (2.19) при непрерывной правой части $F_1(x) \in C[0,r]$ следует следующая оценка решения

$$|\tau(x)| = \left|F_1(x) + \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x R(x,t)F_1(t)dt\right| < M_3\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M_1+M_2r)^n\, r^{n\varepsilon}}{\Gamma(n\varepsilon)}\right], \qquad (2.20)$$

где $M_3 = \max\limits_{x\in[0,r]} |F_1(x)|$.

Из сходимости мажорирующего числового ряда (правой части неравенства (2.20)) следует абсолютная и равномерная сходимость решения по признаку Вейерштрасса. Откуда заключаем непрерывность предельной функции $\tau(x) \in C[0,r]$.

Пусть теперь $F_1(x) \in C^2(0,r)$. В этом случае путем двойного интегрирования по частям интеграла в правой части представления (2.16) легко убеждаемся в том, что и $\tau(x) \in C^2(0,r)$, то есть решение $\tau(x)$ интегрального уравнения (2.15) также как и его правая часть $F_1(x)$ будет принадлежать классу $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r)$.

При $a(x) = a = const$, решение уравнения (2.15) выписывается в явном виде

$$\tau(x) = F_1(x) + a\int_0^x (x-t)^{\varepsilon-1} E_{1/\varepsilon}[a(x-t)^{\varepsilon};\varepsilon]F_1(t)dt. \qquad (2.21)$$

Если же выполнено условие (2.5), то из системы (2.10) и (2.12) сразу находим:

$$\tau(x) = D_{0x}^{\varepsilon-1}\left[\frac{\psi_2(t)}{[\beta(t)+\gamma_1\alpha(t)]}\right],$$

$$\nu(x) = -D_{0x}^{\varepsilon}\left[\frac{\psi_2(t)}{[\beta(t)+\gamma_1\alpha(t)]}\right] + 2\psi_1'(x) - \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f\,(x-t,t)\,dt.$$

При $\lambda = \pm\frac{m}{2}$ искомая функция $\tau(x)$ вновь находится по одной из формул (2.16) или (2.21), но $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{m}{m+2}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{(2-2\varepsilon)^{\varepsilon}}{2}$ при $\lambda = -\frac{m}{2}$ и $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{m}{m+2}$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = (2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}\Gamma(2-\varepsilon)$ при $\lambda = \frac{m}{2}$.

После того, как функция $\tau(x)$ найдена, вторая искомая функция $\nu(x)$ находится по одной из формул (2.10) или (2.12). Тогда регулярное в области Ω_1 решение исследуемой задачи 1 выписывается по формуле (2.7), или же по одной из следующих формул [27, с. 15]:

$$\begin{aligned} u\,(x,y) =& \frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x - \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\,(2t-1)\right](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}\,dt \\ &+ \tau\left(x - \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right), \qquad \lambda = -\frac{m}{2}; \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} u\,(x,y) =& \frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\,(2t-1)\right](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}\,dt \\ &+ \tau\left(x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right), \qquad \lambda = \frac{m}{2}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

а в области Ω_2 решение задачи Коши для уравнения (1.3) находится по формуле (2.11). Теорема 2.1 доказана. □

3. Исследование задачи 2

Перейдем к исследованию *задачи 2.* Удовлетворяя (2.11) условию (1.6) будем иметь

$$u\left[\theta_{r1}\,(x)\right] = u\left(\frac{r+x}{2},\frac{r-x}{2}\right) = \frac{\tau\,(x)+\tau\,(r)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_x^r \nu\,(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{r-x}{2}}\int\limits_{x+t}^{r-t} f\,(s,t)\,dsdt = \psi_1(x).$$

Путем дифференцирования из последнего равенства приходим к соотношению

$$\nu(x) = \tau'(x) - 2\psi_1'(x) - \int\limits_0^{\frac{r-x}{2}} f\,(x+t,t)\,dt. \tag{3.1}$$

Соотношение (3.1) есть фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на прямую $y = 0$ в случае *задачи 2.*

Таким образом, относительно искомых функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ приходим к системе уравнений, выраженных соотношениями (2.10) и (3.1). Исключая из (2.10) и (3.1) функцию $\nu(x)$, с учетом условия согласования $\tau(r) = \psi_1(r)$, относительно $\tau(x)$, как и при исследовании *задачи 1*, приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, содержащего производную дробного порядка в младших членах

$$\tau'(x) + a(x)\, D_{0x}^{1-\varepsilon}\tau(t) = 2\psi_1'(x) + \frac{\psi_2(x)}{\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x)} + \int\limits_0^{\frac{r-x}{2}} f\,(x+t,t)\,dt, \quad 0 < x < r, \tag{3.2}$$

$$\tau(r) = \psi_1(r). \tag{3.3}$$

Интегрируя уравнение (3.2) по x от 0 до x, с учетом условия (3.3), приходим к соответствующему задаче (3.2), (3.3) интегральному уравнению вида

$$\tau(x) - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int\limits_0^r L(x,t)\tau(t)dt = F_2(x), \tag{3.4}$$

где

$$L(x,t) = \begin{cases} K(r,t), & 0 \le x < t, \\ K(r,t) - K(x,t), & t < x \le r, \end{cases}$$

$$F_2(x) = 2\psi_1(x) - \psi_1(r) - \int\limits_x^r \frac{\psi_2(t)}{\gamma(t) - \gamma_2\alpha(t)}dt - \int\limits_x^r\int\limits_0^{\frac{r-t}{2}} f\,(t+s,\, s)ds\,dt.$$

Если заданные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f(x,y)$ обладают свойствами (2.1), (2.2), (2.3), перечисленными в *теореме 2.1*, то уравнение (3.4) будет являться интегральным уравнением Фредгольма второго рода с ядром $L(x,t) \in L_1\left([0,r]\times[0,r]\right)$ и правой частью $F_2(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r)$.

Найдем достаточные условия на заданные функции, обеспечивающие однозначную разрешимость уравнения (3.4). С этой целью рассмотрим однородную задачу, соответствующую *задаче 2*, положив $\psi_1(x) = \psi_2(x) \equiv 0\,\forall\, x \in [0,r]$, $f(x,y) \equiv 0\,\forall\,(x,y) \in \overline{\Omega}_2$. При этом задача (3.2), (3.3) переходит в соответствующую однородную задачу

$$b(x)\tau'(x) + D_{0x}^{1-\varepsilon}\tau(t) = 0, \quad 0 < x < r, \tag{3.5}$$

$$\tau(r) = 0. \tag{3.6}$$

Умножая уравнение (3.5) на функцию $\tau(x)$, и, интегрируя полученное равенство по x от 0 до r, с учетом условия (3.6), будем иметь

$$\int\limits_0^r b(x)\tau(x)\tau'(x)dx + \int\limits_0^r \tau(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}\tau(t)dx$$

$$= -\frac{b(0)\tau^2(0)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^r b'(x)\tau^2(x)dx + \int\limits_0^r \tau(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}\tau(t)dx = 0.$$

Известно [5, с. 46], что $\int\limits_0^r \tau(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}\tau(t)dx \ge 0$, причем $\int\limits_0^r \tau(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}\tau(t)dx = 0$ тогда и только тогда, когда $\tau(x) \equiv 0\,\forall\, x \in [0,r]$. Значит, если функция $b(x)$ является убывающей отрицательной функцией, то последнее равенство может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x) \equiv 0\,\forall\, x \in [0,r]$. Стало быть, при перечисленных условиях на заданные функции, уравнение (3.4) будет обладать единственным решением из класса $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r)$.

Таким образом доказана следующая теорема 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть заданные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f(x,y)$ обладают перечисленными в теореме 2.1 свойствами (2.1), (2.2), (2.3) и пусть*

$$[\beta(x)+\gamma_1\alpha(x)]\,[\gamma(x)-\gamma_2\alpha(x)]\neq 0 \quad \forall\, x\in[0,r],$$

$$b'(x)\leq 0, \quad b(0)<0 \quad \forall\, x\in[0,r].$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи 2.

В случае, когда $a(x)=a=const$ решение задачи (3.2), (3.3) выписывается в явном виде по формуле:

$$\begin{aligned}\tau(x)=&\frac{E_\varepsilon\left[-ax^\varepsilon\right]}{E_\varepsilon\left[-ar^\varepsilon\right]}\Bigg[\psi_1(r)+F_2(x)-F_2(r)\\ &+a\int\limits_0^r (r-t)^{\varepsilon-1}E_{1/\varepsilon}\left[-a(r-t)^\varepsilon;\varepsilon\right]F_2(t)dt\\ &-a\int\limits_0^x (x-t)^{\varepsilon-1}E_{1/\varepsilon}\left[-a(x-t)^\varepsilon;\varepsilon\right]F_2(t)dt\Bigg],\end{aligned}$$

причем

$$E_\varepsilon\left[-ar^\varepsilon\right]\neq 0. \tag{3.7}$$

Как следует из *теоремы 3.1*, неравенство (3.7) будет выполнено, например, для всех $a<0$.

Благодарности

Хотелось бы выразить благодарность директору ИПМА КБНЦ РАН Псху Арсену Владимировичу и заведующему отделом УСТ ИПМА КБНЦ РАН Аттаеву Анатолию Хусеевичу за ценные замечания и советы при подготовке данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.М. Смирнов. *Уравнения смешанного типа.* М.: Наука. 1970. 296 с.
2. M.H. Protter. *The Cauchy problem for a hyperbolic second-order equation with data on the parabolic line* // Canad. J. Math. **6**:4, 542–553 (1954).
3. А.В. Бицадзе. *Уравнения смешанного типа.* М.: Изд-во АН СССР. 1959. 164 с.
4. А.В. Лыков. *Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена* // Инженерно-физический журнал. **9**:3, 287–304 (1955).
5. А.М. Нахушев. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк. 1995. 301 с.
6. А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит. 2003. 272 с.
7. Л. Берс. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* М.: Иностр. лит-ра. 1961. 208 с.
8. Ф.И. Франкль. *Избранные труды по газовой динамике.* М.: Наука. 1973. 771 с.
9. Ф. Трикоми. *Лекции по уравнениям в частных производных.* М.: Иностранная литература. 1957. 444 с.
10. М.М. Джрбашян. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости.* М.: Наука. 1966. 672 с.
11. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* . Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
12. Т.Ш. Кальменов. *Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения* // Дифференц. уравн. **7**:1, 178–181 (1971).
13. Ж.А. Балкизов. *Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1(189), 5–10 (2016).

14. Ж.А. Балкизов. *Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения* // Владикавказский матем. журнал. **18**:2, 19–30 (2016).
15. С.К. Кумыкова, Ф.Б. Нахушева. *Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области* // Дифференц. уравн. **14**:1, 50–65 (1978).
16. Ж.А. Балкизов. *Краевые задачи с данными на противоположных характеристиках для смешанно-гиперболического уравнения второго порядка* // Доклады АМАН. **20**:3, 6–13 (2020).
17. Ж.А. Балкизов. *Краевые задачи для смешанно-гиперболического уравнения* // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. **36**:1, 7–14 (2021).
18. М.С. Салахитдинов, М. Мирсабуров. *О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области* // Дифференц. уравн. **17**:1, 129–136 (1981).
19. М.С. Салахитдинов, М. Мирсабуров. *О двух нелокальных краевых задачах для вырождающегося гиперболического уравнения* // Дифференц. уравн. **17**:1, 116–127 (1982).
20. С.В. Ефимова, О.А. Репин. *Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса* // Дифференц. уравн. **40**:1, 116–127 (2004).
21. О.А. Репин. *О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-матем. науки. **10**:43, 10–14 (2006).
22. Ж.А. Балкизов. *Задача со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-матем. науки. **25**:1, 21–34 (2021).
23. В.И. Жегалов. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках с разрывами на переходной линии* // Ученые записки Казанского гос. университета им. В.И. Ленина. **122**:3, 3–16 (1962).
24. А.М. Нахушев. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравн. **5**:1, 44–59 (1969).
25. А.М. Нахушев. *Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения* // Доклады АН СССР. **187**:4, 736–739 (1969).
26. А.М. Нахушев. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука. 2006. 287 с.
27. М.М. Смирнов. *Вырождающиеся гиперболические уравнения.* Минск: Вышэйшая школа. 1977. 160 с.
28. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1977. 736 с.

Жираслан Анатольевич Балкизов,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул. Шортанова, 89-а,
360005, г. Нальчик, Россия
E-mail: `Giraslan@yandex.ru`