ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 2 (2023). С. 85-100.

УДК 517.938

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.Г. ЮМАГУЛОВ, С.В. АКМАНОВА

Аннотация. Основное внимание в работе уделяется обсуждению вопросов о достаточных признаках устойчивости по Ляпунову точек равновесия нелинейных гибридных (непрерывно-дискретных) систем, т.е. систем, процессы в которых имеют несколько уровней разнородного описания, а состояния содержат как непрерывные, так и дискретные компоненты. Хорошо известно, что переключениями неустойчивых режимов непрерывной динамической системы можно добиться их устойчивости и, наоборот, даже когда все режимы непрерывной системы устойчивы, при их переключении у системы могут возникать неустойчивые режимы. Поэтому важными представляются исследования, позволяющие провести детальный анализ вопросов устойчивости при переходе от непрерывной к гибридной системе.

В настоящей статье предлагаются новые признаки устойчивости по Ляпунову стационарных режимов нелинейных гибридных систем с постоянным шагом $h > 0$ дискретизации. Эти признаки основаны на методах исследования устойчивости по первому приближению и формулах теории возмущений, позволяющих провести анализ устойчивости точек равновесия и циклов динамических систем, зависящих от малого параметра. Предлагаемые подходы основаны на переходе от исходной гибридной системы к равносильной (в естественном смысле) динамической системе с дискретным временем. Обсуждается взаимосвязь между динамическими характеристиками гибридной и дискретной систем. При изучении основной задачи об устойчивости по Ляпунову точки равновесия гибридной системы рассматриваются две постановки: устойчивость при малых $h > 0$ и устойчивость при произвольных фиксированных $h = h_0 > 0$. Кроме этого, обсуждаются некоторые вопросы о сценариях бифуркационного поведения гибридной системы при потере устойчивости точки равновесия. Приводится пример, иллюстрирующий эффективность полученных результатов в задаче исследования устойчивости точек равновесия гибридных систем.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, гибридная система, точка равновесия, периодические решения, устойчивость, бифуркации.

Mathematics Subject Classification: 37N35, 34D20, 34C23.

1. Введение и постановка задачи

Многие теоретические и практические проблемы приводят к необходимости изучения гибридных (непрерывно-дискретных) систем, т.е. систем, процессы в которых имеют несколько уровней разнородного описания, а состояния содержат как непрерывные, так и дискретные компоненты. Системы этого вида широко встречаются в прикладных проблемах управления механическими и технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях и во многих других областях (см., например, [1]–[5]).

M.G. Yumagulov, S.V. Akmanova, On the stability of equilibrium points of nonlinear continuous-discrete dynamical systems.

Поступила 5 сентября 2022 г.

Одной из основных задач, приводящих к гибридным системам, является задача о стабилизации основных режимов системы. Существует большой класс систем, которые не могут быть стабилизированы только непрерывным законом управления с обратной связью по состоянию и, с другой стороны, могут быть стабилизированы соответствующими переключениями в определенные моменты времени. Другими словами, переключениями неустойчивых режимов можно добиться их устойчивости и, наоборот, даже когда все режимы непрерывной системы устойчивы, при их переключении у системы могут возникать неустойчивые режимы [6]–[8]. Этим объясняется все возрастающий за последние годы интерес специалистов разного профиля к исследованию вопросов устойчивости гибридных систем (см., например, [9]–[16]). Отметим, что большая часть работ направлена на развитие метода функций Ляпунова и соответствующих приложений в задаче анализа устойчивости линейных и нелинейных гибридных систем (детальный обзор работ по этой тематике приведен в [5]).

В настоящей статье предлагаются новые признаки устойчивости по Ляпунову стационарных режимов нелинейных гибридных систем. Эти признаки основаны на методах исследования устойчивости по первому приближению и полученных в [17] формулах теории возмущений, позволяющих провести анализ устойчивости точек равновесия и циклов динамических систем, зависящих от малого параметра. Полученные в настоящей работе результаты являются существенным развитием результатов авторов, анонсированных в [18].

Рассматривается нелинейная гибридная система, описываемая (см., например, [19]) уравнениями:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$ — векторы, характеризующие поведение соответственно непрерывной и дискретной частей гибридной системы; моменты времени t_k задают на R равномерную сетку с шагом $h > 0$:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_1 + h < \ldots < t_{k+1} = t_k + h < \ldots, \tag{1.2}$$

функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ в системе (1.1) являются непрерывно дифференцируемыми и порождают операторы $f: R^n \times R^m \to R^n$, $g: R^n \times R^m \to R^m$.

Функционирование системы (1.1) осуществляется по стандартной схеме:

1) задаются начальные условия $u_0 = (x_0, y_0)$;
2) по решению $x = \varphi_0(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_0)$, $x(t_0) = x_0$, находятся векторы $x_1 = \varphi_0(t_1)$ и $y_1 = g(x_1, y_0)$;
3) по решению $x = \varphi_1(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_1)$, $x(t_1) = x_1$, находятся векторы $x_2 = \varphi_1(t_2)$ и $y_2 = g(x_2, y_1)$;

и т.д.

Таким образом, решением $u(t) = (x(t), y(t))$ гибридной системы (1.1), стартующим из точки $u_0 = (x_0, y_0)$, является функция

$$u(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (\varphi_0(t), y_0), \quad t_0 \leqslant t < t_1, \\ (\varphi_1(t), y_1), \quad t_1 \leqslant t < t_2, \\ (\varphi_2(t), y_2), \quad t_2 \leqslant t < t_3, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{1.3}$$

Первая компонента $x(t)$ решения $u(t) = (x(t), y(t))$ является непрерывной при всех $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемой на каждом интервале $t_j < t < t_{j+1}$, но не обязательно дифференцируемой в моменты переключений $t = t_j$. Что касается второй компоненты, т.е. функции $y(t)$, то она является кусочно-постоянной, меняя свои значения в моменты $t = t_j$.

Предполагается, что система (1.1) имеет нулевую точку равновесия $x = 0$, $y = 0$, т.е.

$$f(0,0) = 0, \quad g(0,0) = 0. \tag{1.4}$$

Основной задачей в настоящей статье является изучение вопроса о достаточных условиях устойчивости по Ляпунову точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1.1). Обсуждается также вопрос о бифуркациях в системе (1.1) при потере устойчивости точки равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Понятие устойчивости точек равновесия системы (1.1) рассматривается в классическом смысле. А именно, точку равновесия $x = 0$, $y = 0$ гибридной системы (1.1) будем называть *устойчивой по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\|u_0\| < \delta$ решение $u(t) = (x(t), y(t))$ системы (1.1), стартующее из точки $u_0 = (x_0, y_0)$, удовлетворяет неравенству $\|u(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$. Точку равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1.1) будем называть *асимптотически устойчивой*, если она устойчива по Ляпунову и при этом существует такое $\delta_0 > 0$, что при $\|u_0\| < \delta_0$ решение $u(t) = (x(t), y(t))$ системы (1.1), стартующее из точки $u_0 = (x_0, y_0)$, удовлетворяет соотношению $\|u(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Наконец, точку равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1.1) будем называть *неустойчивой*, если она не является устойчивой по Ляпунову. Здесь и ниже через $\|\cdot\|$ обозначаются евклидовы нормы векторов в пространствах R^N.

2. Переход от гибридной к дискретной системе

Основные построения настоящей работы базируются на переходе от гибридной системы (1.1) к вспомогательной дискретной системе. Конструирование этой дискретной системы и изучение ее свойств представляет самостоятельный интерес. В этом пункте приведем основные положения указанного перехода.

2.1. Оператор сдвига и дискретная система. Обозначим через $U(h)$ оператор сдвига (см., например, [20]) по траекториям системы $x' = f(x, y)$ за время от $t = 0$ до $t = h$. Оператор $U(h)$ переводит вектор $(x_0, y_0) \in R^n \times R^m$ в вектор $x_1 = x(h) \in R^n$; здесь $x(t)$ – решение задачи Коши $x' = f(x, y_0)$, $x(0) = x_0$. Таким образом, $U(h)(x_0, y_0) = x_1$.

Рассмотрим дискретную систему

$$\begin{cases} x_{k+1} = U(h)(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = g(U(h)(x_k, y_k), y_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.1}$$

в которой $x_k \in R^n$, $y_k \in R^m$.

Дискретная система (2.1) равносильна исходной гибридной системе (1.1) в следующем смысле. Система (2.1) фиксирует значения решений гибридной системы (1.1) в моменты времени $t = 0$, $t = h$, $t = 2h$ и т.д. Другими словами, по построению верна

Лемма 2.1. *Каждое решение (1.3) гибридной системы (1.1) порождает решение*

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_k, y_k), \quad \ldots, \tag{2.2}$$

дискретной системы (2.1), в котором $x_0 = \varphi_0(0)$, $x_1 = \varphi_1(h)$, $x_2 = \varphi_2(2h)$, $\ldots$. *При этом других решений дискретная система (2.1) не имеет.*

Конечно, при переходе к дискретной системе (2.1) теряется информация о поведении решений гибридной системы (1.1) в промежутках $0 < t < h$, $h < t < 2h$ и т.д., однако большинство важных вопросов, касающихся качественных характеристик точек равновесия или циклов исходной гибридной системы (1.1), можно анализировать.

Укажем взаимосвязь точек равновесия и периодических решений систем (1.1) и (2.1).

Теорема 2.1. *Каждая точка равновесия (x^*, y^*) системы (1.1) является и точкой равновесия системы (2.1). Каждой точке равновесия (x^*, y^*) системы (2.1) соответствует h-периодическое решение $(\varphi_0(t), y^*)$ системы (1.1) так, что $\varphi_0(0) = \varphi_0(h) = x^*$. При этом характер устойчивости указанных решений систем (1.1) и (2.1) одинаков.*

Доказательство этой теоремы и других основных утверждений статьи вынесено в п. 7.

Отметим, что указанная в теореме 2.1 периодическая функция $x = \varphi_0(t)$ является непрерывно дифференцируемой при всех t. Отметим также, что если первое уравнение системы (1.1) является скалярным, то функция $x = \varphi_0(t)$ является постоянной. Другими словами, верна

Лемма 2.2. *Пусть $n = 1$. Тогда каждая точка равновесия (x^*, y^*) системы (2.1) является и точкой равновесия системы (1.1) и наоборот.*

Вопрос о взаимосвязи циклов систем (1.1) и (2.1) освещает следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Каждое qh-периодическое решение $(x(t), y(t))$ системы (1.1) образует q-цикл*

$$(x_0^*, y_0^*),\ (x_1^*, y_1^*),\ \ldots,\ (x_{q-1}^*, y_{q-1}^*), \quad (x_0^*, y_0^*),\ (x_1^*, y_1^*),\ \ldots,\ (x_{q-1}^*, y_{q-1}^*),\ \ldots. \tag{2.3}$$

системы (2.1) так, что

$$x(0) = x_0^*, \quad y(0) = y_0^*, \qquad x(h) = x_1^*, \quad y(h) = y_1^*, \quad \ldots,$$
$$x((q-1)h) = x_{q-1}^*, \quad y((q-1)h) = y_{q-1}^*, \qquad x(qh) = x_0^*, \quad y(qh) = y_0^*. \tag{2.4}$$

Каждому q-циклу (2.3) системы (2.1) соответствует qh-периодическое решение $(x(t), y(t))$ системы (1.1) так, что выполняются равенства (2.4).

2.2. Преобразование дискретной системы. Переход к дискретной системе (2.1) будет более эффективным, если указать формулы, позволяющие конструктивно строить оператор сдвига $U(h)$.

С этой целью отметим, что в силу равенств (1.4) функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ представимы в виде

$$f(x, y) = A_1 x + B_1 y + a(x, y), \quad g(x, y) = A_2 x + B_2 y + b(x, y), \quad (x \in R^n,\ y \in R^m), \tag{2.5}$$

где $A_1 = f'_x(0, 0)$, $B_1 = f'_y(0, 0)$, $A_2 = g'_x(0, 0)$, $B_2 = g'_y(0, 0)$, а гладкие нелинейности $a(x, y)$ и $b(x, y)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(x, y) = o(\|x\| + \|y\|), \quad b(x, y) = o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| \to 0. \tag{2.6}$$

Матрицы A_1, B_1, A_2, B_2 порождают линейные операторы

$$A_1 : R^n \to R^n, \quad B_1 : R^m \to R^n, \quad A_2 : R^n \to R^m, \quad B_2 : R^m \to R^m.$$

Имеет место следующая

Лемма 2.4. *Пусть $\det A_1 \neq 0$. Тогда оператор сдвига $U(h)$ представим в виде*

$$U(h)(x_0, y_0) = e^{A_1 h} x_0 + A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 y_0 + \varepsilon(x_0, y_0; h), \tag{2.7}$$

в котором

$$\varepsilon(x_0, y_0; h) = e^{hA_1} \int_0^h e^{-sA_1} a(x(s, x_0, y_0), y_0)\, ds; \tag{2.8}$$

здесь $x = x(t, x_0, y_0)$ — решение задачи Коши

$$x' = A_1 x + B_1 y_0 + a(x, y_0), \quad x(0) = x_0. \tag{2.9}$$

Из этой леммы следует, что дискретная система (2.1) представима в виде

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1 h}x_k + A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 y_k + \varepsilon(x_k, y_k; h), \\ y_{k+1} = A_2 e^{A_1 h}x_k + (A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2)y_k + c(x_k, y_k; h); \end{cases} \tag{2.10}$$

здесь нелинейность $c(x_k, y_k; h)$ определяется равенством

$$c(x_k, y_k; h) = A_2\varepsilon(x_k, y_k; h) + b(U(h)(x_k, y_k), y_k).$$

Систему (2.10) представим в более компактном виде

$$u_{k+1} = A(h)u_k + \xi(u_k, h), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.11}$$

в котором

$$u_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad \xi(u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ c(x_k, y_k; h) \end{bmatrix},$$

а $A(h)$ — это квадратная (порядка $n+m$) матрица

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Лемма 2.5. *Функция $\xi(u, h)$ удовлетворяет соотношению:*

$$\xi(u, h) = o(\|u\|) \quad \textit{при} \quad \|u\| \to 0. \tag{2.13}$$

3. Устойчивость нулевой точки равновесия системы (1.1)

Вернемся к основной задаче — изучению вопроса об условиях устойчивости по Ляпунову нулевой точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ гибридной системы (1.1). Ниже для краткости формулировок используются следующие обозначения:

- $A < 0 \Leftrightarrow$ все собственные значения квадратной матрицы A имеют отрицательные действительные части;
- $|A| < 1 \Leftrightarrow$ все собственные значения λ квадратной матрицы A удовлетворяют неравенству $|\lambda| < 1$.

Аналогичный смысл будут иметь и обозначения: $A \leqslant 0$ и $|A| \leqslant 1$.

3.1. Устойчивость при фиксированном $h > 0$. Обсудим сначала вопрос об устойчивости точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ гибридной системы (1.1) при фиксированном $h = h_0 > 0$.

Сначала отметим следующее утверждение (в нем A_1, B_1, A_2, B_2 — матрицы из равенств (2.5)), анонсированное в [18].

Теорема 3.1. *Пусть $A_1 < 0$ и $|B_2| < 1$. Тогда для $h = h_0 > 0$ найдется $\delta = \delta(h_0) > 0$ такое, что если $\|A_2\| < \delta$ и $\|B_1\| < \delta$, то точка равновесия $x = 0$, $y = 0$ гибридной системы (1.1) при $h = h_0$ будет асимптотически устойчивой.*

Другими словами, если $A_1 < 0$ и $|B_2| < 1$, то точка равновесия $x = 0$, $y = 0$ гибридной системы (1.1) будет асимптотически устойчивой, лишь бы соответственно малы были величины $\|A_2\|$ и $\|B_1\|$.

Отметим, что теорема 3.1 констатирует следующий простой факт. При $A_2 = 0$ и $B_1 = 0$ соответствующая (1.1) линеаризованная (в окрестности точки равновесия $x = 0$, $y = 0$) система распадается на два несвязанных между собой линейных уравнения:

$$x'(t) = A_1 x(t) \tag{3.1}$$

и

$$y(t_{k+1}) = B_2 y(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Условия $A_1 < 0$ и $|B_2| < 1$ означают, что каждое из этих линейных уравнений является асимптотически устойчивым. Поэтому естественно ожидать, что нулевое решение системы (1.1) при данном $h = h_0 > 0$ будет асимптотически устойчивым, если величины норм $\|A_2\|$ и $\|B_1\|$ достаточно малы.

Приведем теперь другое условие устойчивости точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1.1), также анонсированное в [18].

Теорема 3.2. *Пусть матрица A_1 обратима, т.е.*

$$\det A_1 \neq 0. \tag{3.3}$$

Пусть при $h = h_0 > 0$ матрица (2.12) удовлетворяет условию $|A(h_0)| < 1$. Тогда точка равновесия $x = 0$, $y = 0$ гибридной системы (1.1) при $h = h_0$ асимптотически устойчива. Если хотя бы одно собственное значение матрицы $A(h_0)$ по модулю больше 1, то точка равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1.1) при $h = h_0$ является неустойчивой.

Ниже условие (3.3) будем считать выполненным.

С практической точки зрения важным является следующий вопрос. Пусть матрица A_1 имеет хотя бы одно собственное значение с положительной вещественной частью; тогда линейная система (3.1) неустойчива. Возможно ли при данном $h = h_0 > 0$ выбрать матрицы A_2, B_1 и B_2 таким образом, чтобы матрица (2.12) удовлетворяла условию $|A(h_0)| < 1$? Ответ положительный: это иллюстрируют соответствующие формулы в п. 4.

3.2. Устойчивость при малых $h > 0$. Будем говорить, что точка равновесия $x = 0$, $y = 0$ гибридной системы (1.1) является *устойчивой по Ляпунову (асимптотически устойчивой, неустойчивой) при малых* $h > 0$, если существует $h_0 > 0$ такое, что при каждом $h \in (0, h_0)$ точка равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1.1) является устойчивой по Ляпунову (асимптотически устойчивой, неустойчивой).

С целью обсуждения вопроса об устойчивости точки равновесия $x = 0$ и $y = 0$ системы (1.1) при малых $h > 0$ по матрице (2.12) определим новые матрицы:

$$A_0 = A(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

и

$$A' = A'(0) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 A_1 & A_2 B_1 \end{bmatrix}; \tag{3.5}$$

Матрица (3.5) — это производная матрицы (2.12) при $h = 0$.

Очевидна

Лемма 3.1. *Матрица A_0 имеет собственное значение $\lambda_0 = 1$, кратность которого не меньше n. Это собственное значение будет полупростым кратности n, если матрица B_2 не имеет собственного значения 1. Остальные собственные значения матрицы A_0 совпадают с собственными значениями матрицы B_2.*

В частности, если $|B_2| < 1$, то матрица A_0 и соответствующая ей транспонированная матрица A_0^* имеют полупростое собственное значение $\lambda_0 = 1$ кратности n.

Следующее утверждение дает необходимое условие устойчивости нулевого решения гибридной системы (1.1) при малых $h > 0$.

Теорема 3.3. *Пусть нулевое решение системы (1.1) устойчиво при малых $h > 0$. Тогда $|B_2| \leqslant 1$.*

Отметим, что условие $|B_2| \leqslant 1$ является необходимым и для устойчивости линейной дискретной системы (3.2). Отметим также, что условие $A_1 \leqslant 0$, которое является необходимым для устойчивости линейной непрерывной системы (3.1), не является необходимым для устойчивости системы (1.1) при малых $h > 0$. Этот вопрос также обсуждается ниже.

Далее будем считать, что $|B_2| < 1$. Так как матрица A_0 имеет полупростое собственное значение $\lambda_0 = 1$ кратности n, то существует линейно независимая система из собственных векторов e_i: $A_0 e_i = e_i$, $i = \overline{1,n}$. Транспонированная матрица A_0^* также имеет полупростое собственное значение 1 кратности n, которому отвечают собственные векторы e_i^*: $A_0^* e_i^* = e_i^*$, $i = \overline{1,n}$. Векторы e_i и e_j^* можно выбрать из соотношений

$$(e_i, e_i^*) = 1, \quad (e_i, e_j^*) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}). \tag{3.6}$$

Определим матрицу

$$D = \begin{bmatrix} (A'e_1, e_1^*) & (A'e_2, e_1^*) & \cdots & (A'e_n, e_1^*) \\ (A'e_1, e_2^*) & (A'e_2, e_2^*) & \cdots & (A'e_n, e_2^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A'e_1, e_n^*) & (A'e_2, e_n^*) & \cdots & (A'e_n, e_n^*) \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Теорема 3.4. *Пусть $|B_2| < 1$ и $D < 0$. Тогда нулевое решение гибридной системы (1.1) асимптотически устойчиво при всех малых $h > 0$.*

4. Устойчивость нулевой точки равновесия системы (1.1) для случая $n = m = 1$

Рассмотрим важный частный случай системы (1.1), когда $n = m = 1$. В этом случае равенства (2.5) и (2.6) принимают вид:

$$f(x,y) = a_1 x + b_1 y + a(x,y), \quad g(x,y) = a_2 x + b_2 y + b(x,y), \quad (x \in R^1, \quad y \in R^1), \tag{4.1}$$

где числа a_1, b_1, a_2, b_2 определяются равенствами: $a_1 = f'_x(0,0)$, $b_1 = f'_y(0,0)$, $a_2 = g'_x(0,0)$, $b_2 = g'_y(0,0)$, а нелинейности $a(x,y)$ и $b(x,y)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(x,y) = o(|x| + |y|), \quad b(x,y) = o(|x| + |y|) \quad \text{при} \quad |x| + |y| \to 0. \tag{4.2}$$

Соответственно, система (1.1) принимает вид:

$$\begin{cases} x'(t) = a_1 x(t) + b_1 y(t_k) + a(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = a_2 x(t_{k+1}) + b_2 y(t_k) + b(x(t_{k+1}), y(t_k)). \end{cases} \tag{4.3}$$

Приведем сначала аналог теоремы 3.2.

Теорема 4.1. *Пусть $a_1 \neq 0$. Пусть при $h = h_0 > 0$ выполнены неравенства*

$$|b_2 e^{a_1 h_0}| < 1, \quad \left| \frac{a_2 b_1}{a_1}(e^{a_1 h_0} - 1) + b_2 + e^{a_1 h_0} \right| < b_2 e^{a_1 h_0} + 1. \tag{4.4}$$

Тогда нулевое решение гибридной системы (4.3) при $h = h_0$ асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно из неравенств (4.4) выполнено в противоположную сторону, то нулевое решение гибридной системы (4.3) при $h = h_0$ является неустойчивым.

Несложный анализ неравенств (4.4) дает положительный ответ на сформулированный выше вопрос: если $a_1 > 0$, то возможно ли при данном $h = h_0 > 0$ выбрать числа a_2, b_1 и b_2 таким образом, чтобы обеспечить выполнение неравенств (4.4)?

Приведем теперь аналог теоремы 3.4. Положим

$$\gamma = a_1(1 - b_2) + a_2 b_1. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Пусть $|b_2| < 1$. Пусть $\gamma < 0$ ($\gamma > 0$). Тогда нулевое решение гибридной системы (4.3) асимптотически устойчиво (неустойчиво) при всех малых $h > 0$.*

Из этого утверждения следует ряд важных следствий.

1. Если $a_1 < 0$ и $|b_2| < 1$, а величина $|a_2 b_1|$ достаточно мала, то нулевое решение гибридной системы (4.3) асимптотически устойчиво при всех малых $h > 0$.

2. В то же время, условия $a_1 < 0$ и $|b_2| < 1$ (т.е. когда линейные системы $x' = a_1 x$ и $y_{k+1} = b_2 y_k$ устойчивы) не гарантируют устойчивость нулевого решения гибридной системы (4.3) при малых $h > 0$.
3. И напротив, если $a_1 > 0$ (т.е. когда линейная система $x' = a_1 x$ неустойчива), то тем не менее нулевое решение гибридной системы (4.3) может оказаться устойчивым при малых $h > 0$.

Аналогичные следствия имеют место для системы (1.1) и в общей постановке.

5. Бифуркации точек равновесия

Функционирование гибридной системы (1.1) зависит от величины h, которую можно рассматривать как параметр системы. В частности, при изменении h нулевое решение этой системы может изменять характер устойчивости, что приводит к различным сценариям бифуркаций. В соответствии с теоремой 3.2 характер устойчивости этого решения может измениться при переходе h через значение h_0 такое, что матрица (2.12) удовлетворяет условию $|A(h_0)| = 1$.

Следуя классической теории бифуркаций (см., например, [21]) значение $h = h_0$ будем называть *точкой бифуркации* системы (1.1), если матрица $A(h_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение μ_0 такое, что $|\mu_0| = 1$.

Представляет интерес вопрос о том, какие возможны сценарии бифуркаций в окрестности нулевого решения гибридной системы (1.1) при переходе параметра h через точку бифуркации h_0. Обсудим вопрос об этих сценариях в случаях, когда матрица $A(h_0)$ имеет простое собственное значение 1 или -1.

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы $A_0 = A(h_0)$ и сопряженной матрицы $A_0^* = A^*(h_0)$, соответствующие простому собственному значению 1 (собственному значению -1).

Теорема 5.1. *Пусть матрица $A_0 = A(h_0)$ имеет простое собственное значение 1 (простое собственное значение -1), а остальные ее собственные значения имеют модуль, меньше единицы. Пусть $(A'(h_0)e, g) \neq 0$; здесь $A'(h)$ — матрица производных элементов матрицы $A(h)$. Тогда при переходе параметра h через h_0 качественная перестройка поведения системы (1.1) в окрестности точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ состоит в возникновении у нее ненулевых периодических решений: существуют $h_k \to h_0$ такие, что система (1.1) при $h = h_k$ имеет ненулевое h_k-периодическое ($2h_k$-периодическое) решение $(x_k(t), y_k)$ так, что $(x_k(t), y_k) \to (0,0)$ при $k \to \infty$.*

Отметим, что участвующая в этой теореме (для случая собственного значения 1) h_k-периодическая функция $x_k(t)$ является непрерывно дифференцируемой при всех t. Следовательно, при $n = 1$ указанная функция является константой. Другими словами, в указанном случае в системе (1.1) имеет место бифуркация кратного равновесия: при переходе параметра h через h_0 в окрестности нулевой точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ возникают ненулевые точки равновесия.

Обсуждение некоторых направлений развития результатов теоремы 5.1 приводится ниже при ее доказательстве.

6. Примеры

6.1. Задача о стабилизации неустойчивого равновесия динамической системы. В качестве первой иллюстрации полученных результатов рассмотрим задачу об устойчивости нулевой точки равновесия $\varphi = 0$, $y = 0$ гибридной системы, описываемой уравнениями

$$\begin{cases} \varphi''(t) = \sin\varphi(t) + y(t_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = \alpha\varphi(t_{k+1}) + \beta\varphi'(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{6.1}$$

где α и β — вещественные параметры, а моменты времени t_k задают на R равномерную сетку (1.2) с шагом $h > 0$. Ограничимся обсуждением вопроса об устойчивости точки равновесия $\varphi = 0$, $y = 0$ при малых $h > 0$.

Указанный вопрос может интерпретироваться как вопрос о стабилизации нулевого решения $\varphi = 0$ непрерывной динамической системы $\varphi'' = \sin\varphi$ путем соответствующих быстрых переключений в моменты времени $t = t_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Вопросы такого типа возникают, например, в задаче о стабилизации верхнего неустойчивого положения маятника, исследованию которой посвящена обширная литература (см., например, [22]).

Полагая $x_1 = \varphi$, $x_2 = \varphi'$, перейдем от (6.1) к системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = \sin x_1 + y(t_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = \alpha x_1(t_{k+1}) + \beta x_2(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{6.2}$$

Эта система является системой вида (1.1) при $n = 2$, $m = 1$ и

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}, \quad B_2 = 0.$$

Матрицы (3.4) и (3.5) здесь имеют, соответственно, вид:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \beta & \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Участвующие в формулах (3.6) векторы можно выбрать так:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad e_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица (3.7) имеет вид: $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1+\alpha & \beta \end{bmatrix}$. Эта матрица удовлетворяет условию $D < 0$, если $\alpha < -1$ и $\beta < 0$.

Отсюда и из теоремы 3.4 следует, что нулевое решение гибридной системы (6.1) асимптотически устойчиво при всех малых $h > 0$, если $\alpha < -1$ и $\beta < 0$. Если же хотя бы одно из этих неравенств выполнено в противоположную сторону, то указанное решение является неустойчивым при всех малых $h > 0$.

6.2. Бифуркация удвоения периода. В качестве второй иллюстрации рассмотрим задачу о бифуркациях в гибридных системах при изменении характера устойчивости точки равновесия. А именно, рассмотрим гибридную систему (4.3) вида

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t_k) + a(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = 2x(t_{k+1}) - 2y(t_k) + b(x(t_{k+1}), y(t_k)), \end{cases} \tag{6.3}$$

в которой моменты переключения t_k задают на R равномерную сетку (1.2) с шагом $h > 0$.

Матрица (2.12) для системы (6.3) имеет вид

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{-h} & 1 - e^{-h} \\ 2e^{-h} & -2e^{-h} \end{bmatrix}.$$

При $h = h_0 = \ln 3$ эта матрица равна $A_0 = A(h_0) = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Матрица A_0 имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2/3$. В качестве собственных векторов e и g матриц A_0 и A_0^*, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = -1$, можно взять векторы $e = g = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Тогда имеем $(A'(h_0)e, g) = 3 \neq 0$.

Таким образом, все условия теоремы 5.1 для системы (6.3) выполнены и, следовательно, при переходе параметра h через значение $h_0 = \ln 3$ в окрестности точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ этой системы возникают ненулевые периодические решения с периодом T так, что $T \approx 2\ln 3$. Направленность бифуркации, т.е. при каких значениях h (меньших или больших, чем h_0) возникают периодические решения, а также характер устойчивости периодических решений зависят от свойств нелинейностей $a(x, y)$ и $b(x, y)$, входящих в правые части системы (6.3). Соответствующее исследование может быть проведено на основе работ [23] и [24].

7. Доказательства основных утверждений

7.1. Доказательство теоремы 2.1. Для доказательства теоремы 2.1 понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Рассмотрим зависящую от параметра $y \in R^m$ автономную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad x \in R^n, \tag{7.1}$$

в которой $f(x, y)$ — гладкая по совокупности переменных функция такая, что $f(0, 0) = 0$, т.е. система (7.1) при $y = 0$ имеет нулевую точку равновесия $x = 0$. Предполагается, что при любых x_0 и y_0 решение $x = x(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_0)$, $x(0) = x_0$, определено при всех $t \geqslant 0$.

Лемма 7.1. *Для любых $\rho > 0$ и $h > 0$ найдется r, $0 < r < \rho$, такое, что если $\|u_0\| < r$ (здесь $u_0 = (x_0, y_0)$), то решение $x(t)$ задачи Коши*

$$\begin{cases} x' = f(x, y_0), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{7.2}$$

при всех $t \in [0, h]$ удовлетворяет неравенству $\|x(t)\| \leqslant \rho$.

Докажем эту лемму. Предположим противное, т.е. пусть найдутся числа $\rho_0 > 0$ и $h_0 > 0$, а также последовательность векторов $u_n = (x_n, y_n) \to (0, 0)$ такие, что решение $x_n(t)$ задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(x, y_n), \\ x(0) = x_n, \end{cases} \tag{7.3}$$

при некотором $t = t_n \in [0, h_0]$ удовлетворяет неравенству $\|x_n(t_n)\| > \rho_0$. Так как $(x_n, y_n) \to (0, 0)$, то по теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных решение $x_n(t)$ задачи Коши (7.3) равномерно по $t \in [0, h_0]$ стремится к решению задачи Коши $x' = f(x, 0)$, $x(0) = 0$, т.е. к функции $x(t) \equiv 0$. Другими словами, $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant h_0} \|x_n(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Это противоречит неравенству $\|x_n(t_n)\| > \rho_0 > 0$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1. Первое утверждение этой теоремы следует из леммы 2.1. Покажем справедливость второго утверждения. Пусть система (2.1) имеет точку равновесия (x^*, y^*), т.е.

$$\begin{cases} x^* = U(h)(x^*, y^*), \\ y^* = g(U(h)(x^*, y^*), y^*). \end{cases} \tag{7.4}$$

Первое из этих равенств означает, что решение $x = \varphi_0(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y^*)$, $x(0) = x^*$, обладает свойством: $\varphi_0(0) = \varphi_0(h) = x^*$, т.е. оно является h-периодическим.

Второе из равенств в (7.4) имеет вид $y^* = g(x^*, y^*)$, которое означает, что (x^*, y^*) является постоянным решением второго уравнения в исходной гибридной системе (1.1). В совокупности получаем, что гибридная система (1.1) имеет h-периодическое решение $(\varphi_0(t), y^*)$.

Остается установить справедливость третьего утверждения леммы. Ограничимся доказательством того факта, что если (x^*, y^*) является точкой равновесия каждой из систем (1.1) и (2.1) и при этом она устойчива по Ляпунову для одной из этих систем, то она будет устойчива и для другой системы. Можно считать, что точка равновесия (x^*, y^*) является нулевой, т.е. $x^* = 0, y^* = 0$. Положим $u = (x, y)$ и $u^* = (x^*, y^*) = (0, 0)$. Через $\|u\|$ будем обозначать норму вектора u.

Пусть сначала u^* является нулевой точкой равновесия каждой из систем (1.1) и (2.1) и пусть она устойчива по Ляпунову для гибридной системы (1.1). Покажем, что тогда она также устойчива по Ляпунову и для дискретной системы (2.1).

Действительно, так как решение u^* гибридной системы (1.1) является устойчивым, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что если $\|u_0\| < \delta$, то решение $u(t) = (x(t), y(t))$ гибридной системы (1.1) (см. формулу (1.3)), стартующее из точки $u_0 = (x_0, y_0)$, удовлетворяет неравенству $\|u(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$. Тогда в силу леммы 2.1 указанное свойство решения u^* гибридной системы (1.1) имеет место и для решения u^* дискретной системы (2.1), т.е. оно является также устойчивым.

Пусть теперь гибридная система (1.1) имеет нулевую точку равновесия u^*; тогда дискретная система (2.1) также имеет ту же точку равновесия. Пусть точка равновесия u^* дискретной системы (2.1) является устойчивой по Ляпунову. Покажем, что тогда точка равновесия u^* гибридной системы (1.1) также является устойчивой по Ляпунову.

Предположим противное, т.е. существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $u_n \to 0$ такие, что решение $u_n(t)$ гибридной системы (1.1), стартующее из точки u_n, удовлетворяет неравенству $\|u_n(\tau_n)\| \geqslant \varepsilon_0$ при некотором $t = \tau_n > 0$. Положим $\rho_0 = \varepsilon_0/2$. В силу леммы 7.1 для заданных $\rho_0 > 0$ и $h > 0$ найдется r, $0 < r < \rho_0$, такое, что если $\|u_0\| < r$ (здесь $u_0 = (x_0, y_0)$), то решение $x(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_0)$, $x(0) = x_0$, при всех $t \in [0, h]$ удовлетворяет неравенству $\|x(t)\| \leqslant \rho_0$.

В силу леммы 2.1 каждое решение $u_n(t)$ гибридной системы (1.1) порождает соответствующее решение $u_{k,n} = (x_{k,n}, y_{k,n})$ дискретной системы (2.1) так, что в моменты времени $t = 0$, $t = h$, $t = 2h$ и т.д эти решения совпадают. Каждая точка τ_n располагается в некотором интервале $t_{k(n)} < t < t_{k(n)+1}$ (см. сетку (1.2)). В силу этого первая компонента $x_n(t)$ решения $u_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$ гибридной системы (1.1) при $t_{k(n)} \leqslant t < t_{k(n)+1}$ будет решением задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(x, y_{k(n),n}), \\ x(t_{k(n)}) = x_{k(n),n}. \end{cases} \tag{7.5}$$

Так как нулевое решение u^* дискретной системы (2.1) является устойчивым, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что если $\|u_0\| < \delta$, то решение $u_k = (x_k, y_k)$ гибридной системы (2.1), стартующее из точки $u_0 = (x_0, y_0)$, удовлетворяет неравенству $\|u_k\| < \varepsilon$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Далее в качестве $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon = r$.

Так как $u_n \to 0$, то можно считать, что $\|u_n\| < \delta$ для всех n. Тогда решение $u_{k,n} = (x_{k,n}, y_{k,n})$ дискретной системы (2.1) удовлетворяет неравенству $\|u_{k,n}\| < r$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ и всех n. Отсюда и из леммы 7.1 следует, что решение $x_n(t)$ задачи Коши (7.5) при всех $t \in [t_{k(n)}, t_{k(n)+1}]$ удовлетворяет неравенству $\|x_n(t)\| \leqslant \rho_0$. Это противоречит указанному выше неравенству $\|u_n(\tau_n)\| \geqslant \varepsilon_0$, так как из него следует неравенство $\|x_n(\tau_n)\| > \rho_0$. Это завершает доказательство теоремы 2.1

7.2. Доказательство леммы 2.4. В силу первого из равенств (2.5) оператор $U(h)$ переводит вектор (x_0, y_0) в вектор $x_1 = x(h)$, где $x(t)$ — решение задачи Коши (2.9) или (что то же самое) — решение интегрального уравнения

$$x(t) = e^{tA_1}x_0 + e^{tA_1}\int\limits_0^t e^{-sA_1}[B_1y_0 + a(x(s),y_0)]\,ds.$$

Так как $\det A_1 \neq 0$, то существует A_1^{-1}. Поэтому $\displaystyle\int_0^t e^{-sA_1}ds = A_1^{-1}(I - e^{-A_1t})$. Отсюда и следует равенство (2.7).

7.3. Доказательство леммы 2.5. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением случая $n = m = 1$. При этом ограничимся доказательством соотношения (2.13) только для первой компоненты вектора $\xi(u,h)$, т.е. покажем, что

$$\varepsilon(x,y;h) = o(\|u\|), \quad \|u\| \to 0\,; \tag{7.6}$$

здесь $u = (x,y)$ и $\|u\| = |x| + |y|$. Для второй компоненты вектора $\xi(u,h)$ доказательство аналогично.

Таким образом, будем рассматривать систему (4.3). Для нее функция (2.8) имеет вид

$$\varepsilon(x_0,y_0;h) = e^{ha_1}\int\limits_0^h e^{-sa_1}a(x(s),y_0)\,ds\,; \tag{7.7}$$

здесь $x = x(t)$ — решение задачи Коши

$$x' = a_1x + b_1y_0 + a(x,y_0), \quad x(0) = x_0. \tag{7.8}$$

Соотношение (7.6) будет доказано, если показать, что для любого $\delta > 0$ существует $r > 0$ такое, что если $|x_0| + |y_0| < r$, то

$$|\varepsilon(x_0,y_0;h)| < \delta\cdot(|x_0| + |y_0|). \tag{7.9}$$

Зададимся произвольным $\delta > 0$ и по нему определим другое число δ_1 исходя из двух условий: первым является неравенство $0 < \delta_1 < \delta$, а второе укажем немного позже.

В силу первого из соотношений (2.6) для δ_1 найдется $r_1 > 0$ такое, что если $|x_0|+|y_0| < r_1$, то

$$|a(x_0,y_0)| < \delta_1\cdot(|x_0| + |y_0|). \tag{7.10}$$

Далее, в силу теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных и параметров существует $\rho_1 > 0$ такое, что если

$$|x_0| + |y_0| < \rho_1, \tag{7.11}$$

то решение $x = x(t)$ задачи Коши (7.8) удовлетворяет неравенству $|x(t)| < \dfrac{r_1}{2}$ при всех $t \in [0,h]$. Можно считать, что $\rho_1 < \dfrac{r_1}{2}$. Тогда если выполнено неравенство (7.11), то $|x(t)| + |y_0| < r_1$ и, следовательно, в силу (7.10) получим

$$|a(x(t),y_0)| < \delta_1\cdot(|x(t)| + |y_0|) \tag{7.12}$$

при всех $t \in [0,h]$.

Решение $x = x(t)$ задачи Коши (7.8) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = e^{ta_1}x_0 + e^{ta_1}\int\limits_0^t e^{-sa_1}[b_1y_0 + a(x(s),y_0)]\,ds.$$

Положим $M_1 = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant h} e^{ta_1}$. Тогда

$$|x(t)| \leqslant M_1 \left[|x_0| + |b_1 y_0| h + \int\limits_0^t |a(x(s), y_0)| ds \right].$$

При выполнении неравенства (7.11) и, следовательно, неравенства (7.12) получим

$$|x(t)| \leqslant M_1 \left[|x_0| + |b_1 y_0| h + \delta_1 |y_0| h + \delta_1 \int_0^t |x(s)| ds \right].$$

Отсюда и из неравенства Гронуэлла (см., например, [25, гл. 3, стр. 41]) получим

$$|x(t)| \leqslant k \exp\left(\int_0^t |M_1 \delta_1| ds \right) \leqslant k e^{M_1 \delta_1 h},$$

где $k = M_1 [|x_0| + |b_1 y_0| h + \delta_1 |y_0| h]$. Положим $M_0 = \max\{M_1,\, M_1 h(|b_1| + \delta_1)\}$. Тогда $k \leqslant M_0(|x_0| + |y_0|)$. Поэтому при выполнении неравенства (7.11) получим

$$|x(t)| \leqslant M_0 e^{M_1 \delta_1 h}(|x_0| + |y_0|) \tag{7.13}$$

при всех $t \in [0, h]$.

Вернемся к функции (7.7). При выполнении неравенства (7.11) в силу (7.12) и (7.13) получим

$$|\varepsilon(x_0, y_0; h)| \leqslant M_1 \int\limits_0^h |a(x(s), y_0)| ds \leqslant M_1 h (M_0 e^{M_1 \delta_1 h} + 1)(|x_0| + |y_0|)\delta_1.$$

Напомним, что на число δ_1 мы должны указать второе условие (первым является неравенство $0 < \delta_1 < \delta$). Этим вторым условием потребуем выполнение неравенства

$$\delta_1 M_1 h (M_0 e^{M_1 \delta_1 h} + 1) < \delta.$$

Тогда при выполнении неравенства (7.11) получим требуемую оценку (7.9). Лемма 2.5 доказана.

Перейдем теперь к доказательствам теорем 3.1–4.2. В силу теоремы 2.1 эти теоремы для гибридных систем (1.1) и (4.3) будут доказаны, если доказать их аналоги для соответствующей дискретной системы (2.11).

7.4. Доказательство теоремы 3.1. Пусть $A_1 < 0$ и $|B_2| < 1$ и пусть $h > 0$ — фиксировано. Достаточно показать, что если величины $\|A_2\|$ и $\|B_1\|$ малы, то нулевая точка равновесия системы (2.11) будет асимптотически устойчивой. Для этого, в свою очередь, в силу леммы 2.5 достаточно показать, что если $\|A_2\|$ и $\|B_1\|$ малы, то матрица (2.12) будет удовлетворять условию $|A(h)| < 1$.

При малых $\|A_2\|$ и $\|B_1\|$ матрицу $A(h)$ можно рассматривать как возмущение матрицы

$$A_0(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Так как $A_1 < 0$, $|B_2| < 1$ и $h > 0$, то $|A_0(h)| < 1$. Отсюда и из теории возмущений линейных операторов (см., например, [26]) следует, что при достаточно малых $\|A_2\|$ и $\|B_1\|$ получим $|A(h)| < 1$, что и требовалось доказать.

7.5. Доказательство теоремы 3.2. Достаточно заметить, что в силу леммы 2.5 справедлив аналог теоремы 3.2 для нулевой точки равновесия системы (2.11).

7.6. Доказательство теоремы 3.3. Достаточно показать, что если нулевое решение системы (2.11) устойчиво при малых $h > 0$, то $|B_2| \leqslant 1$.

Допустим противное, т.е. нулевое решение системы (2.11) устойчиво при малых $h > 0$, но матрица B_2 имеет хотя бы одно собственное значение μ_0 такое, что $|\mu_0| > 1$. Тогда и матрица (3.4) имеет собственное значение μ_0. При $h = 0$ матрица (2.12) совпадает с матрицей (3.4). Поэтому при малых $h > 0$ матрица (3.4) имеет собственное значение $\mu(h)$ такое, что $|\mu(h)| > 1$. Тогда нулевое решение системы (2.11) неустойчиво при малых $h > 0$. Получили противоречие.

7.7. Доказательство теоремы 3.4. Достаточно показать, что нулевое решение системы (2.11) при малых $h > 0$ асимптотически устойчиво.

Так как $|B_2| < 1$, то в силу леммы 3.1 матрица (3.4) имеет полупростое собственное значение $\lambda_0 = 1$ кратности n. Поэтому характер устойчивости нулевого решения дискретной системы (2.11) при малых $h > 0$ определяется поведением той части спектра матрицы (2.12), которая получается как возмущение собственного значения $\lambda_0 = 1$ матрицы (3.4).

В соответствии с теорией возмущений линейных операторов (см., например, [26, глава II, §5, теорема 5.4]), при малых $|h|$ матрица (2.12) имеет n собственных значений $\lambda^{(j)}(h)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ так, что функции $\lambda^{(j)}(h)$ являются дифференцируемыми в точке $h = 0$, причем $\lambda^{(j)}(0) = 1$. Указанные функции представимы в виде $\lambda^{(j)}(h) = 1 + h\lambda_1^{(j)} + o(h)$, в котором коэффициенты $\lambda_1^{(j)}$ являются собственными значениями матрицы D (см. [17, теорема 3.5]).

Тогда при $D < 0$ получим, что $|\lambda^{(j)}(h)| < 1$ при всех малых $h > 0$. Следовательно, при малых $h > 0$ матрица (2.12) удовлетворяет условию $|A(h)| < 1$, т.е. нулевое решение системы (2.11) при малых $h > 0$ асимптотически устойчиво, что и требовалось доказать.

7.8. Доказательство теоремы 4.1. Достаточно доказать утверждение теоремы 4.1 для нулевой точки равновесия дискретной системы (2.11) при $n = m = 1$.

Матрица (2.12) здесь имеет вид:

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{a_1 h} & \frac{b_1}{a_1}(e^{a_1 h} - 1) \\ a_2 e^{a_1 h} & \frac{a_2 b_1}{a_1}(e^{a_1 h} - 1) + b_2 \end{bmatrix}. \tag{7.14}$$

Этой матрице соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{7.15}$$

где

$$a = \frac{a_2 b_1}{a_1}(1 - e^{a_1 h}) - b_2 - e^{a_1 h}, \quad b = b_2 e^{a_1 h}.$$

Известно (см., например, [21, п. 10.1]), что оба корня λ_1 и λ_2 квадратного уравнения (7.15) удовлетворяют неравенствам $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| < 1$ тогда и только тогда, когда $|b| < 1$ и $|a| < b + 1$. Из этого утверждения и теоремы 3.2 и следует справедливость теоремы 4.1.

7.9. Доказательство теоремы 4.2. В условиях этой теоремы матрица (3.7) является числом $\lambda_1 = (A'(0)e, g)$; здесь $A'(0)$ — производная определенной равенством (7.14) матрицы $A(h)$ при $h = 0$, e, g — ненулевые векторы такие, что выполнены равенства: $A(0)e = e$, $(A(0))^* g = g$, $(e, g) = 1$. Несложные вычисления показывают, что имеет место равенство $\lambda_1 = \dfrac{\gamma}{1 - b_2}$. Отсюда и из теоремы 3.4 получим справедливость теоремы 4.2.

7.10. Доказательство теоремы 5.1. В силу теоремы 2.1 и лемм 2.2 и 2.3 достаточно доказать аналоги утверждений теоремы 5.1 для дискретной системы (2.11). В свою очередь, справедливость этих аналогов следует из полученных в [23, п. 2.2] и [24, пп. 3.2 и 3.3] достаточных признаков бифуркации кратного равновесия (случай собственного значения 1) и бифуркации удвоения периода (случай собственного значения -1) для дискретных систем вида (2.11).

Отметим в этой связи, что результаты работ [23], [24] могут быть также использованы для детального исследования основных сценариев бифуркаций гибридной системы (1.1), включая проведение анализа устойчивости возникающих решений, определения формы бифуркаций (мягкая или жесткая), вычисления ляпуновских величин и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.П. Максимов. *Непрерывно-дискретные динамические модели* // Уфимск. матем. журн. **13**:3, 97–106 (2021).
2. В.П. Максимов, А.Л. Чадов. *Гибридные модели в задачах экономической динамики* // Вестн. Пермского унив-та. **2**:9, 13–23 (2011).
3. К.Ю. Котов, О.Я. Шпилевая. *Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор)* // Автометрия. **44**:5, 71–87 (2008).
4. О.С. Логунова, Е.Б. Агапитов, И.И. Баранкова, С.М. Андреев, Г.Н. Чусавитина. *Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами* // Электротехнические системы и комплексы. **2**:43, 25–34 (2019).
5. С.Н. Васильев, А.И. Маликов. *О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем* // Сборник статей «Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Фолиант. **1**, 23–81 (2011).
6. M.S. Branicky. *Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. **43**:4, 475–482 (1998).
7. R.A. Decarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson, B. Lennartson. *Perspectives and results on the stability and Stabilizeability of hybrid systems* // Proceedings of the IEEE: Special issue on hybrid systems. **88**, 1069–1082 (2000).
8. D. Liberzon. *Switching in systems and control.* Boston: Birkhauser. 2003.
9. П.А. Лакрисенко. *Об устойчивости положений равновесия нелинейных гибридных механических систем* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. **10**. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. **3**, 116–125 (2015).
10. А.В. Платонов. *Анализ устойчивости нестационарных систем с переключениями* // Изв. вузов. Матем. **2**, 63–73 (2020).
11. А.Ю. Александров, А.В. Платонов. *Об асимптотической устойчивости решений гибридных многосвязных систем* // Автомат. и телемех. **5**, 18–30 (2014).
12. R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, C. King. *Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems. SIAM Review* // SIAM. **49**:4, 545–592 (2007).
13. L. Hou, A. Michel. *Unifying theory for stability of continuous, discontinuous, and discrete-time dynamical systems* // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. **1**:2, 154–172 (2007).
14. I.L.D. Santos, G.N. Silva. *Some Results in Stability Analysis of Hybrid Dynamical Systems* // Tend. Mat. Apl. Comput. **8**:3, 453–462 (2007).
15. В.М. Марченко, Ж.Ж. Луазо. *Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем* // Дифференц. уравн. **45**:5, 728–740 (2009).
16. П.М. Симонов. *Устойчивость и асимптотически периодические решения гибридных систем с последействием* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **168**, 91–98 (2019).
17. М.Г. Юмагулов, Л.С. Ибрагимова, А.С. Белова. *Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **163**, 113–126 (2019).

18. М.Г. Юмагулов, С.В. Акманова. *Устойчивость и бифуркации непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации* // Вестник БашГУ. **26**:4, 862–865 (2021).
19. А.С. Бортаковский. *Достаточные условия оптимальности управления переключаемыми системами* // Известия РАН. Теория и системы управления. **4**, 86–103 (2017).
20. М.А. Красносельский. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1966.
21. Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2.* М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2009.
22. Б.С. Бардин, А.П. Маркеев. *Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса* // Прикладная математика и механика. **59**:6, 922–929 (1995).
23. А.А. Вышинский, Л.С. Ибрагимова, С.А. Муртазина, М.Г. Юмагулов. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфимск. матем. журн. **2**:4, 3–26 (2010).
24. Н.И. Гусарова, С.А. Муртазина, М.Ф. Фазлытдинов, М.Г. Юмагулов. *Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем* // Уфимск. матем. журн. **10**:1, 25–49 (2018).
25. М. Розо. *Нелинейные колебания и теория устойчивости.* М.: Наука. 1971.
26. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1975.

Марат Гаязович Юмагулов,
Башкирский государственный университет,
ул. З.Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `yum_mg@mail.ru`

Светлана Владимировна Акманова,
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова
пр. Ленина, 38,
450000,Челябинская область, г. Магнитогорск, Россия
E-mail: `svet.akm_74@mail.ru`