ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 2 (2023). С. 3-8.

УДК 517.957

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В $\mathbb{R}^n$

В.Е. АДМАСУ, Е.И. ГАЛАХОВ

Аннотация. В настоящей статье мы исследуем теоремы типа Лиувилля для эллиптических неравенств высокого порядка с сингулярными коэффициентами и градиентными слагаемыми в $\mathbb{R}^n$. Наш подход основан на методе нелинейной емкости С.И. Похожаева, который широко использовался при изучении различных типов нелинейных эллиптических неравенств. Мы получаем априорные оценки для решений эллиптического неравенства, используя метод пробных функций. Оптимальный выбор пробной функции приводит к нелинейной задаче минимакса, которая порождает нелинейную ёмкость, индуцированную соответствующей нелинейной задачей. Нахождение нулевого предела соответствующей априорной оценки гарантирует отсутствие нетривиального решения задачи. В целом наши результаты позволяют по-новому взглянуть на поведение решений эллиптических неравенств высокого порядка с сингулярными коэффициентами и градиентными слагаемыми, и наш подход может быть полезным также для изучения других типов нелинейных эллиптических неравенств.

Ключевые слова: теоремы типа Лиувилля, априорная оценка, нелинейная емкость, сингулярные коэффициенты, градиентные слагаемые.

Mathematics Subject Classification: 35J30, 35J62.

1. Введение

В последние десятилетия отсутствие решений для различных нелинейных дифференциальных неравенств и систем, в частности, для эллиптических неравенств и систем в частных производных с сингулярными коэффициентами и градиентными слагаемыми (или, что эквивалентно, отсутствие стационарных состояний для соответствующих параболических неравенств и систем) изучалось многими математиками (см. [1]–[25]). В этой связи можно отметить результат Б. Гидаса и Дж. Спрака [13] об отсутствии положительных решений уравнения

$$-\Delta u = u^q \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

при $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$. Впоследствии одним из основных методов исследования этой проблемы стал метод сравнения, позволивший получить достаточные условия отсутствия решений в терминах критического показателя нелинейности для многих уравнений второго порядка, таких как

$$-\Delta u = |x|^{-2} u^q \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

$$-\Delta_p u = u^q - |\nabla u|^s \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

W.E. Admasu, E.I. Galakhov, Conditions for absence of solutions to some higher order elliptic inequalities with singular coefficients in $\mathbb{R}^n$.

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

Поступила 28 февраля 2022 г.

где $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, и подобных, так же как для соответствующих неравенств (см., например, [2]–[3], [14]–[16] и ссылки там). Однако в общем случае принципы сравнения не имеют места для операторов высокого порядка.

Э. Митидиери и С.И. Похожаев (см. [17]) разработали новый эффективный подход к этим вопросам, названный методом нелинейной емкости. Он основан на специальном выборе параметрического семейства пробных функций, который позволяет получать априорные оценки, применяя соответствующие алгебраические неравенства к интегральной форме рассматриваемого эллиптического неравенства, и затем переходить к результатам об отсутствии решений, устремляя параметр к 0 или к бесконечности. Этот подход дает простые и точные результаты. В частности, в [23] было показано, что неравенство

$$-\Delta_p u \geq |x|^{-\alpha} u^q \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

с $p > 1$, $\alpha < p$ и $p - 1 < q \leq \frac{(n-\alpha)(p-1)}{n-p}$ не имеет положительных решений. Этот метод успешно применялся к неравенствам с более общими операторами, такими как оператор средней кривизны (см. [1], [9]) и широкий класс анизотропных квазилинейных операторов (см. [5], [6], [8], [11], [12], [14]–[19], [21]–[24]), а также для систем неравенств (см. [7]–[12], [20]). Позднее, используя изощренную технику, Филиппуччи, Пуччи и Риголи (см. [2]–[7]) получили весьма значительные результаты о существовании и отсутствии решений для коэрцитивных неравенств (с противоположным знаком при Δ_p), включая неравенства с градиентными слагаемыми вида $|\nabla u|^s$.

В настоящей статье мы доказываем теорему типа Лиувилля для некоторых эллиптических неравенств высокого порядка с сингулярными коэффициентами и градиентными слагаемыми в $\mathbb{R}^n$, не исследованных ранее.

Оставшаяся часть статьи состоит из разделов 2 и 3. В разделе 2 мы формулируем результат об отсутствии непостоянных решений эллиптического неравенства, а в разделе 3 доказываем это утверждение. На протяжении статьи буква c обозначает положительные константы, которые могут зависеть от параметров рассматриваемых неравенств.

2. Формулировка результата

Мы устанавливаем отсутствие непостоянных целых решений для неравенства вида

$$\pm\Delta^k u(x) \geqslant (1+|x|)^{-\alpha}\,|\nabla u(x)|^q - (1+|x|)^{-\beta}|\nabla u(x)|^s, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

где $k \in \mathbb{N}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ и

$$s > 0,\ \ q > \max(1, s). \tag{2.2}$$

Определение 2.1. *Будем называть слабым решением неравенства* (2.1) *функцию* $u \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *такую, что* $(1+|x|)^{-\alpha}\,|\nabla u|^q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $(1+|x|)^{-\beta}|\nabla u|^s \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\alpha}\,|\nabla u(x)|^q\,\varphi(x)dx \leqslant \pm\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta^k\varphi(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\beta}\,|\nabla u(x)|^s\,\varphi(x)dx \tag{2.3}$$

выполняется для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C^{2k}_0(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено* (2.2). *Предположим, что* $\theta_1 \leqslant 0$ *и* $\theta_2 < 0$, *где*

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{n(q-1)-(2k-1)q+\alpha}{q-1}, \\ \theta_2 &= \frac{n(q-s)-\beta q+\alpha s}{q-s}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Тогда любое слабое решение неравенства (2.1) *тождественно равно константе п.в. в* $\mathbb{R}^n$.

3. Доказательство результата

Воспользуемся определением (2.3) слабого решения неравенства (2.1) и проинтегрируем первое слагаемое в правой части по частям:

$$\pm\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta^k\varphi(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla u(x)\cdot\nabla(\Delta^{k-1}\varphi(x))dx.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\alpha}\left|\nabla u(x)\right|^q\varphi(x)dx \leqslant &\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla u(x)\right|\cdot\left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi(x))\right|dx\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\beta}\left|\nabla u(x)\right|^s\varphi(x)dx.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Теперь оценим слагаемые в правой части (3.1). Применяя неравенство Юнга с показателями $q>1$ и $q'=\frac{q}{q-1}>1$ к первому слагаемому в правой части (3.1), мы получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla u(x)\right|\cdot\left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi(x))\right| \leqslant &\frac{1}{3}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\alpha}\left|\nabla u(x)\right|^q\varphi(x)dx\\ &+c\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi}(1+|x|)^{\alpha\frac{q'}{q}}\left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi(x))\right|^{q'}\varphi^{-\frac{q'}{q}}(x)dx.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Аналогично оценим второе слагаемое в правой части (3.1). Применяя неравенство Юнга с показателями

$$r=\frac{q}{s}>1,\quad r'=\frac{q}{q-s}>1,$$

мы получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\beta}\left|\nabla u(x)\right|^s\varphi(x)dx \leqslant &\frac{1}{3}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\alpha}\left|\nabla u(x)\right|^q\varphi(x)dx\\ &+c\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{(-\beta+\frac{\alpha}{r})r'}\varphi(x)dx.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Комбинируя (3.1)–(3.3), мы приходим к

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\alpha}\left|\nabla u(x)\right|^q\varphi(x)dx \leqslant &c\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi}(1+|x|)^{\alpha\frac{q'}{q}}\left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi(x))\right|^{q'}\varphi^{-\frac{q'}{q}}(x)dx\\ &+c\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{(-\beta+\frac{\alpha}{r})r'}\varphi(x)dx.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Теперь выберем пробную функцию φ вида

$$\varphi(x)=\varphi_R(x)=\psi^\lambda\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right),\tag{3.5}$$

где $\lambda>2kq'$ и неотрицательная функция $\psi\in C_0^{2k}\left(\overline{\mathbb{R}_+}\right)$ такова, что

$$\psi(s)=\begin{cases}1, & 0\leqslant s\leqslant 1,\\ 0, & s\geqslant 4.\end{cases}\tag{3.6}$$

Далее сделаем замену переменных

$$x \to \xi, \text{ где } x = R\xi. \tag{3.7}$$

Рассматривая правые части неравенств (3.4) и (3.7) при $R \geq 1$, получим

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{\alpha\frac{q'}{q}} \left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi_R(x))\right|^{q'} \varphi_R^{-\frac{q'}{q}}(x)dx \\ &\quad\leq R^{\theta_1} \int_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2} (1+|\xi|)^{\alpha\frac{q'}{q}} \left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi_1(\xi))\right|^{q'} \varphi_1^{-\frac{q'}{q}}(\xi)d\xi,\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\theta_1 = n-(2k-1)q' + \alpha\frac{q'}{q} \leq 0$, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{(-\beta+\frac{\alpha}{r})r'} \varphi_R(x)dx \leq R^{\theta_2} \int_{|\xi|\leqslant 2} (1+|\xi|)^{(-\beta+\frac{\alpha}{r})r'} \varphi_1(\xi)d\xi, \tag{3.9}$$

где $\theta_2 = n + (-\beta+\frac{\alpha}{r})r' < 0$. Теперь в силу выбора пробной функции $\varphi_1(\xi){=}\psi^\lambda(|\xi|)$ с $\lambda > 2kq'$, имеем

$$\int_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2} (1+|\xi|)^{\alpha\frac{q'}{q}} \left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi_1(\xi))\right|^{q'} \varphi_1^{-\frac{q'}{q}}(\xi)d\xi < \infty$$

и

$$\int_{|\xi|\leqslant 2} (1+|\xi|)^{(-\beta+\frac{\alpha}{r})r'} \varphi_1(\xi)d\xi < \infty,$$

так что интеграл в правой части (3.4) конечен. Тогда из (3.4) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-\alpha} \left|\nabla u(x)\right|^q \varphi_R(x)dx \leqslant cR^\theta, \tag{3.10}$$

где $\theta = \max(\theta_1, \theta_2)$. Теперь рассмотрим следующие два случая с различными значениями θ_1.

Случай 1: если $\theta_1 < 0$, переходя к пределу при $R \to \infty$ в (3.10), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-\alpha} \left|\nabla u(x)\right|^q \varphi_R(x)dx \to 0. \tag{3.11}$$

Таким образом, u – константа п.в. в $\mathbb{R}^n$.

Случай 2: $\theta_1 = 0$.
В этом случае из соотношения (3.8) следует, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{\alpha\frac{q'}{q}} \left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi_R(x))\right|^{q'} \varphi_R^{-\frac{q'}{q}}(x)dx \\ &\quad\leqslant \int_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2} (1+|\xi|)^{\alpha\frac{q'}{q}} \left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi_1(\xi))\right|^{q'} \varphi_1^{-\frac{q'}{q}}(\xi)d\xi := c\end{aligned} \tag{3.12}$$

и (так как $\theta_2 < 0$)

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{(-\beta+\frac{\alpha}{r})r'} \varphi_R(x)dx = \lim_{R\to\infty} cR^{\theta_2} \int_{|\xi|\leqslant 2} (1+|\xi|)^{(-\beta+\frac{\alpha}{r})r'} \varphi_1(\xi)d\xi = 0. \tag{3.13}$$

Поэтому из (3.4) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-\alpha} \left|\nabla u(x)\right|^q \varphi_R(x)dx \leqslant c.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-\alpha} \, |\nabla u(x)|^q \, dx \leqslant c. \tag{3.14}$$

Теперь вернемся к неравенству (3.1). Отметим, что

$$supp\,\{\nabla(\Delta^{k-1}\varphi_R)\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid R \leqslant |x| \leqslant 2R\}.$$

Тогда в силу неравенства Гельдера с соответствующими показателями из соотношения (3.1) следует

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-\alpha} \, |\nabla u(x)|^q \varphi_R(x) dx \leqslant & \left(\int_{R\leqslant|x|\leqslant 2R} (1+|x|)^{-\alpha} \, |\nabla u(x)|^q \, \varphi_R(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \cdot \left(\int_{R\leqslant|x|\leqslant 2R} (1+|x|)^{\alpha\frac{q'}{q}} \left|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi_R(x))\right|^{q'} \varphi_R^{-\frac{q'}{q}}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} \\ & + \left(\int_{R\leqslant|x|\leqslant 2R} (1+|x|)^{-\alpha} \, |\nabla u(x)|^q \, \varphi_R(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \cdot \left(\int_{R\leqslant|x|\leqslant 2R} (1+|x|)^{(-\beta+\frac{\alpha}{r})r'} \varphi_R(x) d\xi \right)^{\frac{1}{r'}}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Однако из (3.14) и абсолютной сходимости интеграла в этом соотношении имеем

$$\int_{R\leqslant|x|\leqslant 2R} (1+|x|)^{-\alpha} \, |\nabla u(x)|^q \, dx \to 0$$

при $R \to \infty$. Переходя к пределу при $R \to \infty$ в (3.15) и учитывая (3.12) и (3.13), снова получим (3.11). Таким образом, функция u постоянна в $\mathbb{R}^n$ и в этом случае. Это завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. F. Bidaut-Véron, S. Pohozaev. *Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems* // J. Anal. Math. **84**, 1–49 (2001).
2. R. Filippucci. *Nonexistence of positive weak solutions of elliptic inequalities* // Nonlinear Anal. **70**:8, 2903–2916 (2009).
3. R. Filippucci. *Nonexistence of nonnegative solutions of elliptic systems of divergence type* // J. Diff. Equ. 250, 572–595 (2011).
4. R. Filippucci, P. Pucci, M. Rigoli. *Non-existence of entire solutions of degenerate elliptic inequalities with weights* // Arch. Ration. Mech. Anal. **188**, 155–179 (2008).
5. R. Filippucci, P. Pucci, M. Rigoli. *On weak solutions of nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities* // Nonlinear Anal. **70**:8, 3008–3019 (2009).
6. R. Filippucci, P. Pucci, M. Rigoli. *On entire solutions of degenerate elliptic differential inequalities with nonlinear gradient terms* // J. Math. Anal. Appl. **356**:2, 689–697 (2009).
7. R. Filippucci, P. Pucci, M. Rigoli. *Nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities with gradient terms* // Commun. Contemp. Math. **12**:3, 501–535 (2010).
8. E. Galakhov. *Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems* // J. Math. Anal. Appl. **252**:1, 256–277 (2000).
9. E. Galakhov. *Some nonexistence results for quasilinear PDEs* // Commun. Pure Appl. Anal. **6**:1, 141–161 (2007).
10. E. Galakhov, O. Salieva. *On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets* // J. Math. Anal. Appl. **408**:1, 102–113 (2013).
11. Е.И. Галахов, О.А. Салиева. *Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах* // Матем. заметки. **98**:2, 222–229 (2015).

12. E. Galakhov. *Blow-up for nonlinear inequalities with gradient terms and singularities on unbounded sets* // Conference Publications. **2015**(special), 489–494 (2015).
13. B. Gidas, J. Spruck. *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations* // Commun. Pure Appl. Math. **34**:4, 525–598 (1981).
14. X. Li, F. Li. *A priori estimates for nonlinear differential inequalities and applications* // J. Math. Anal. Appl. **378**:2, 723–733 (2011).
15. X. Li, F. Li, *Nonexistence of solutions for nonlinear differential inequalities with gradient nonlinearities* // Commun. Pure Appl. Anal. **11**:3, 935–943 (2012).
16. X. Li, F. Li. *Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity* // Nonlinear Anal. **75**:5, 2812–2822 (2012).
17. Э. Митидиери, С.И. Похожаев. *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств с частными производными* // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. **234**, 1–383 (2001).
18. Э. Митидиери, С.И. Похожаев. *Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств* // Докл. РАН. **359**:4, 456-460 (1998).
19. Э. Митидиери, С.И. Похожаев. *Отсутствие положительных решений систем квазилинейных эллиптических уравнений и неравенств в* $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. **366**:1, 11–17 (1999).
20. Э. Митидиери, С.И. Похожаев. *Отсутствие положительных решений квазилинейных эллиптических задач в* $\mathbb{R}^n$ // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. **227**, 192–222 (1999).
21. E. Mitidieri, S.I. Pohozaev. *Nonexistence of weak solutions for some degenerate elliptic and parabolic problems on* $\mathbb{R}^n$ // J. Evol. Equ. **1**:2, 189–220 (2001).
22. E. Mitidieri, S.I. Pohozaev. *Towards a unified approach to nonexistence of solutions for a class of differential inequalities* // Milan J. Math. **72**, 129–162 (2004).
23. С.И. Похожаев. *Общий подход к теории отстутствия глобальных решений нелинейных уравнений и неравенств с частными производными* // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. **236**, 273–284 (2002).
24. S.I. Pohozaev, A. Tesei. *Nonexistence of local solutions to semilinear partial differential inequalities* // Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire. **21**:4, 487–502 (2004).
25. X. Li, H. Wan, X. Li. *Nonexistence of solutions for nonlinear differential inequalities with singularities on unbounded sets* // Math. Notes. **107**:1, 121–128 (2020).

Васе Есмелалем Адмасу,
Университет РУДН,
ул. Миклухо-Маклая, 6,
117198, Москва, Россия

Евгений Игоревич Галахов,
Университет РУДН,
ул. Миклухо-Маклая, 6,
117198, Москва, Россия
E-mail: egalakhov@gmail.com